

Два парадокса теории множеств Георга Кантора

Алексей Торгашин

Дата: 8 ноября 2025 г.

Аннотация

В работе изложены два новых парадокса теории множеств Георга Кантора, возникающих при некоторых способах именования элементов образа и прообраза биективного отображения бесконечного множества на собственное бесконечное подмножество. В первом случае - на примере «зигзагообразной нумерация» рациональных чисел числами натуральными. Во втором - в общем виде отображения.

Содержание

1	Введение	1
2	Парадокс переобозначения	2
3	Парадокс маркировки	5
4	Выводы	6

1 Введение

Теория множеств по-прежнему остается одним из самых важных способов понимания универсума как базовое представление о связи математики с физическим миром. Однако в некотором смысле теория множеств зашла в тупик из-за невозможности доказать или опровергнуть

континуум-гипотезу и дать другие необходимые свойства бесконечных совокупностей, поэтому любая конкретизация представлений о бесконечности, именно конкретизация, а не абстрагирование, даёт надежду найти ту нить, которая поможет пониманию не «общих», а реальных в математическом смысле свойств бесконечности. В этой работе я предлагаю на рассмотрение некоторые парадоксальные свойства, связанные с определением бесконечного множества по Дедекинду. В первом случае на конкретном примере биекции $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{N}$ [Александров, 2008, с.18-23], во втором - в общем виде.

Сразу хочу развеять сомнения и расставить акценты, с математической точки зрения, «зигзагообразная» диагонализация Кантора безупречна. Однако вывод о равномоности $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}$, с моей точки зрения, - поспешный. Ошибка возникла при интерпретации понятия «всех чисел» как строго очерченной и измеренной совокупности. При анализе становится очевидным: граница конечных и бесконечных чисел - намного сложнее, в том числе бесконечная область обладает нетривиальными арифметическими свойствами, не располагающими к простым решениям, вдобавок идеологически нацеленным отодвинуть бесконечность как можно дальше, если не избавиться от неё.

Изложенное относится к общей теории полифинитного анализа, представляющего собой конструктивный выверенный компромисс между интуиционизмом и классикой. Большая часть теории изложена в монографии «Полифинитный анализ и основания математики» [Торгашин, 2020]. Суть ее состоит в определении бесконечности конечным и только конечным способом, в том числе эмпирическим (как наблюдаемое по геометрическому типу).

Данное исследование полностью оригинально по отношению ко всем предыдущим работам и восполняет пробел в конструктивности изложенных в них идей.

2 Парадокс переобозначения

Переобозначим рациональные числа символами $\mathbb{N}$ по алгоритму канторовской нумерации. Технически и даже исторически это возможно наравне с нумерацией палочками или китайскими иероглифами (с системой их повторения, когда уникальные символы кончатся). Для удобства обозначим $\mathbb{N}$ как $\mathbb{Q}$. Теперь они не только равномоны как множества, а в

том числе графически, - одно и то же. Только вряд ли этому обрадуются ортодоксальные последователи Кантора.

«Перевернутые кавычки» («контент») - это оператор ссылки на содержание (ситуационный интенционал), в частности, им может быть иное обозначение. Подробно об использовании этого знака можно прочитать в работе «Язык и реальность» [Лысенко, Торгашин, 2025].

Итак, могут ли натуральные числа выглядеть в точности, как рациональные?

Скажут, они отличаются порядком следования. Но при каком порядке в натуральных числах можно выделить хотя бы одну точку накопления? У рациональных их бесконечно много. До второго бесконечного интервала натуральных чисел, пусть упорядоченных каким угодно способом, мы никогда не досчитаемся. Два бесконечно разделенных интервала $\mathbb{N}$ задать невозможно.

Могут сказать, что свойства рациональных чисел уточняются и доопределяются «в стороне», диагонализацией они не более чем ставятся в соответствие номеру. Только эти свойства из-за канторовской таблицы, в силу переобозначения, наследуют и натуральные числа. И такое определение становится похожим на творчество «ферматистов», которые подкрепляют свои домыслы «житейскими» аргументами.

Очевидно, это будет единственный способ защиты. И он бы пытался работать, если бы $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}$ не были частями одной теории. В существующем виде замена одного на другое приводит к противоречиям с арифметикой конечных чисел.

Предсказуема фантазия о том, как «консолидированная» бесконечность $\mathbb{N}$ «раздает» бесконечные окрестности по точкам » $\mathbb{Q}$ «. Это неубедительно. Натуральные числа нигде и никогда не демонстрируют никакую бесконечность, кроме конструктивной неограниченности, которая не содержит данных об операции «раздачи». Но даже этого опровержения не понадобится.

Для не совсем честных полемистов можно определить биекцию, удаляющую » и «. Например, в синтаксисе python:

`string.replace('»','').replace('«','').`

Для краткости обозначим её как $drpl(»\mathbb{Q}«) = \mathbb{Q}$

Предложение 1. *Отображение $drpl()$, видоизменяющее символы элементов образа или прообраза биекции без изменения их интерпретации*

и без нарушения условия биективности, - идемпотентно в любой композиции биективных отображений.

Доказательство. В сигнатуре отображений отсутствуют элементы, зависящие от написания символов элементов образа и прообраза, поэтому отображение замены символов, не нарушающее биективность и связей между элементами, оказывается идемпотентным (сохраняет всё на своих местах).

Обозначим все композиции одним символом $comp$, тогда для любой записи $b = comp(a)$ отображение $drpl$ внесет не более чем следующую модификацию $b = comp(drpl(a))$, и образ b останется тем же самым для того же самого прообраза a . Это верно и для промежуточного значения композиции и для нескольких отображений в ней, поскольку доказательство не зависит от её сложности, длины и места $drpl$. $\square$

Предложение 2. *Переобозначение диагонализации Кантора $zz(\mathbb{Q}) = \mathbb{N}$ содержит противоречие.*

Доказательство. Пусть $q(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, соответственно, $q(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ (проекция). Для определенности $zz(\mathbb{Q}) = \mathbb{N}$.

Доказательство сводится к вопросу: если натуральные числа обозначены рациональными в виде $\mathbb{Q}$, какими тогда числами можно обозначить рациональные не натуральные числа $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ в той же нотации?

Таких чисел нет, они заняты множеством $\mathbb{Q}$, которое в пределах оператора $\mathbb{Q}$ нумерует все элементы $\mathbb{Q}$ без остатка.

В силу биективности обоих отображений, и благодаря предложению 1: $zz(\mathbb{Q}) = zz(\mathbb{Q})$.

Рассмотрим цепочку равенств $zz(\mathbb{Q}) = zz(\mathbb{Q}) = zz(\mathbb{N})$. Если кто сомневается в синтаксической правомерности первого равенства, мы можем взять в качестве $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}$ пустые символы и не делаем этого только для наглядности. Каждое равенство следует из предложения 1. В последнем равенстве элементарная замена $\mathbb{Q}$ (другое обозначение $\mathbb{N}$) на $\mathbb{N}$. Отсюда, $zz(\mathbb{Q}) = zz(\mathbb{N}) \cup zz(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}) = zz(\mathbb{N}) \Rightarrow zz(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}) = \emptyset$.

С другой стороны, по свойствам zz , $\mathbb{Q}$ должны быть переобозначены именно в той же нотации. Диагонализация насквозь проходит через $\mathbb{Q}$, не в каком-то другом способе обхода, а ровно в том же самом, в единственной и достаточной сессии.

Очевидно, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ таких, что $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ верно $\frac{l}{k} = zz^{-1}(q^{-1}(\frac{m}{n}))$ для некоторых $l, k \in \mathbb{N}$, это приводит к грубому арифметическому противоречию, поскольку l и k уже где-то заняты в $\mathbb{N}$.

Часть элементов Im отображения $zz^{-1}(q^{-1}(»Q«))$ не соотнесены с прообразами Dom по построению Кантора.

Биекция $zz^{-1}(Q)$ - некорректно определена и вообще не является отображением. $\square$

3 Парадокс маркировки

Предложение 3. *Если существует биекция f множества A на множество B , тогда элементы A могут использоваться как однозначные маркеры элементов B .*

Доказательство. Пусть $f(a) = b$, тогда, в силу биекции, b можно использовать как имя a , то есть $»a«=b$, однозначно его определяющее. $\square$

Поэлементная маркировка не имеет никакого отношения к «особому пониманию бесконечности», она происходит на конечных множествах **«на уровне строк», которым всё равно, в каком они множестве - конечном или бесконечном.** Ни один элемент не остается без маркера. Определенность наименования обеспечивается биекцией, которая вводится по условию, инвариантному относительно строения множества, на котором она определена, если оно эту биекцию не нарушает.

Теорема 1. *Биективное отображение множества на свое подмножество создает парадокс.*

Доказательство. Пусть $f(A) = B$ - биекция. Введем третье множество C «маркеров по биекции f ». В силу взаимной однозначности, и элементы множества A , и элементы его подмножества B можно обозначить одними и теми же маркерами.

Тогда очевидно следующее:

$$\emptyset \neq A \setminus B = »C« \setminus »C« = \emptyset$$

Мы получили противоречие в построении, которое не содержит ничего дополнительного, кроме определений множества и биекции на подмножество. $\square$

При доказательстве возникало сомнение на тему, что маркеры «со стороны A » какие-то «другие» по сравнению с маркерами «со стороны B ». Очевидно, критики теоремы первым делом пойдут той же дорогой,

но доказательство достигает цели именно потому, что выбирается «вся корзина с шарами».

Возможна критика на тему, что »С« ссылается на разные интенционалы А и В, но, во-первых, как оно это делает при графическом совпадении, и, во-вторых, »С« может обозначать пару целиком, потому что из-за биекции неважно, на какой элемент производится ссылка.

Вдобавок в роли этой «корзины», то есть множества С, с одинаковым успехом может быть и А, и даже В.

Возможность этого доказательства не была замечена по психологическим причинам, когда к образу f относились не как к части А и производили «уточняющую поправку» на «понимание бесконечности», что делало восприятие «небуквальным». Однако формулировка как раз требовала именно буквальности, как и везде в математике. Противоположное было странным историческим и внешним для её методологии исключением.

4 Выводы

Почему так произошло? Не обратили внимание на то, что «часть» - это не подмножество. Биекция на собственное подмножество изначально противоречива, она была введена «косвенным доказательством» через геометрические иллюстрации. Это, наверное, самый тяжелый по последствиям пример, как не нужно пользоваться контрапозицией при не до конца выясненных свойствах объектов. Кстати, контрапозиция - не явная, а маскированная в «прямом построении функции». Однако оно не содержит ничего об отображении «на свою часть», которое возникает из иллюзорного статуса «всех точек».

Функция $\arctg(x)$, которую используют для биекции на «часть» прямой, не способна работать на исчерпание точек, а лишь создает неравномерно растянутую копию. И определена не на «точках», вопреки школьной метафоре, а на числах, геометрическим аналогом которых служат отрезки. Это важнейший момент в математике. Обратим внимание, что отображение «на себя» вынуждено иметь в виду «точки». На растянутых и сжатых отрезках никакого «на себя» не возникает. Прямая - это не совокупность точек, потому что в математике «точки» как таковой нет, это интуитивный конструкт, который вдобавок интуитивно не определен. Цветаевский скрипач, который не играл на скрипке. Понятие «самой

прямой» намного сложнее, чем себе это представляют, и требует выхода на конечные, в аспекте локации на прямой, но бесконечные по способу определения элементы, чего классический анализ не вмещает.

Точек там нет не только на уровне определения, но даже - понимания. Того самого эксклюзивного и «о бесконечности»!

Из-за двойного её экзистенциального определения на прямой имеет смысл разделять «часть по метрике» и «часть по биекции». Часть по биекции не может быть нарушена, она не имеет к части по метрике никакого отношения, кроме казуального и эмпирического определения на одном и том же субстрате. Статус части не входит в определение множества, при этом «смысл» части используется для вывода о «биекции на себя». Это софистическое следствие.

Биекция - это не вопрос «попадания внутрь себя», а вопрос числа элементов.

Функции, переводящие отрезок в больший отрезок, предполагают растяжение и сжатие, а точка полностью это исключает. Она возникает в качестве некритичной и уже философской иллюстрации происходящего. В самом $\arctg(x)$ речь вообще не о ней. Можно сказать, что где-то на периферии сознания понимают, но не осознают, что «точка» никогда не была аргументом тригонометрической и вообще какой-либо числовой функции.

Предложение 4. Пусть $q_1 < q_2 < \dots < q_n$ - система аргументов области определения $\arctg$, тогда $\arctg(q_1) < \arctg(q_2) < \dots < \arctg(q_n)$

Доказательство. По определению. □

В прообразе и образе биекции - каждый элемент иной, они имеют однозначный метрический маркер отношения к предыдущему элементу и не совпадают. И так при любом их маркировочном разбиении вида $q_1 < q_2 < \dots < q_n$ (предл. 4). Это каждый раз разные отрезки. Любое разбиение дает новые элементы образа, по отношению к предыдущим. И точки, «множество которых отображается на себя», - вообще не определены. Это в худшем смысле «народное наблюдение» стихийно попавшее в математику.

Кому это неубедительно, необходимо попробовать взять «арктангенс от точки». Остальное - не более чем жалобы. Точку невозможно растянуть, иначе полифинитный анализ.

Список литературы

- [1] Александров, П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию - М.: Изд-во ЛКИ, 2008. - 367 с.
- [2] Лысенко Е.М., Торгашин А.Ю. Язык и реальность - СПб: Реноме, 2025. - 395, [1] с
- [3] Торгашин, А. Ю. Полифинитный анализ и основания математики - СПб: Реноме, 2020. - 221 с.