

Аннотация

Современные городские и региональные транспортные сети представляют собой сложные, динамически изменяющиеся системы, которые удобно описывать в виде взвешенных графов. Для таких систем критически важна количественная оценка структурной устойчивости формы сети — её способности сохранять связность, наличие резервных маршрутов и конструктивную избыточность при внешних воздействиях, отказах и деградации элементов.

В работе предлагается интегральный индекс устойчивости формы H^* для взвешенных транспортных сетей. Индекс объединяет три ключевых структурных компонента: спектральные характеристики связности, относительный размер главной компоненты и структурную избыточность, отражающую сохранность локальной структуры вокруг вершин и изменение весов рёбер относительно эталонного состояния. Вводится нормированная версия индекса H_{norm} , которая позволяет сопоставлять различные сети и режимы функционирования относительно заданного эталонного графа. Дополнительно определяется сглаженная мера структурного повреждения σ_{smooth}^* , объединяющая потери суммарного веса рёбер, деградацию связности, уменьшение размера главной компоненты и снижение избыточности и используемая в качестве устойчивого знаменателя при расчёте H^* .

Проводится теоретический анализ свойств индекса H^* , включая ограниченность, нормировку относительно эталонного состояния, монотонность при структурной деградации и поведение в предельных случаях — от масштабирования весов до полного распада сети. На наборе типовых сценариев повреждения и деградации транспортной сети демонстрируется интерпретируемое поведение H_{norm} и его устойчивость к шуму телеметрических данных. Отдельно рассматривается связь H^* с индексами резервирования маршрутов LRI и LRI_{car} , что позволяет совместно оценивать структурную устойчивость формы и способность сети поддерживать альтернативные маршруты. Полученные результаты показывают, что предлагаемый индекс может использоваться в задачах мониторинга состояния транспортной инфраструктуры, стресс-тестирования, сценарного анализа рисков и интеграции в цифровые двойники и системы поддержки принятия решений.

—

1. Введение

1.1. Актуальность и постановка проблемы

Транспортные сети крупных городов и агломераций являются ключевой инфраструктурой, обеспечивающей функционирование экономики, мобильность населения и устойчивость городской среды. Нарушения в работе транспортной сети — вызванные плановыми ремонтами, авариями, чрезвычайными ситуациями, отказами оборудования или неблагоприятными внешними условиями — приводят к серьёзным социально-экономическим последствиям: росту времени в пути, увеличению заторов, снижению доступности ключевых объектов и ухудшению общей устойчивости городской системы.

Современные транспортные системы отличаются высокой сложностью и взаимосвязанностью. Автомобильная дорожная сеть взаимодействует с инфраструктурой общественного транспорта, железнодорожными линиями, велосипедными маршрутами и пешеходными связями. Дополнительно усиливаются требования к устойчивости таких систем в условиях неопределённости: случайные аварии, погодные аномалии, колебания спроса, технологические сбои, неравномерное развитие отдельных элементов сети.

В этих условиях возникает задача количественной оценки структурной устойчивости формы транспортной сети. Под структурной устойчивостью формы в контексте данной работы понимается интегральная способность сети сохранять ключевые структурные свойства при частичной деградации, отказах рёбер и узлов, изменении пропускных способностей и других параметров. В первую очередь речь идёт о способности сети сохранять:

- связность и наличие единой или доминирующей главной компоненты;
- наличие резервных маршрутов и структурных альтернатив при отказах отдельных элементов;
- структурную избыточность, позволяющую перераспределять потоки при нарушениях;
- спектральные характеристики, связанные с «жёсткостью» и «связностью» графа.

Важно подчеркнуть, что рассматривается именно структурная устойчивость формы графа, а не динамические свойства конкретных потоков, хотя потоки тесно связаны со структурой. Нас интересует, насколько текущая конфигурация сети, с учётом весов рёбер, сохраняет потенциальную способность поддерживать движение даже при частичной недоступности инфраструктуры.

1.2. Цель и задачи исследования

Цель данной работы — разработать интегральный, интерпретируемый и практически применимый индекс устойчивости формы H^* для взвешенных транспортных сетей, который:

- агрегирует спектральные характеристики связности, относительный размер главной компоненты и структурную избыточность;
- нормирован относительно эталонного состояния сети;
- демонстрирует предсказуемое поведение при типичных сценариях деградации;
- устойчив к неопределённости исходных данных телеметрии;
- может быть вычислён или аппроксимирован на сетях реалистичного масштаба.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

1. Сформулировать требования к индексу устойчивости формы транспортной сети с учётом практических задач мониторинга, планирования и управления.
2. Ввести математические определения компонентов индекса: нормированной спектральной связности, относительного размера главной компоненты и структурной избыточности.
3. Построить интегральный индекс H^* , объединяющий указанные компоненты в единую метрику устойчивости формы.
4. Ввести нормированную версию индекса H_{norm} , обеспечивающую сопоставимость различных сетей и временных состояний относительно эталонного графа.
5. Провести теоретический анализ свойств индексов H^* и H_{norm} , включая ограниченность, монотонность и поведение при экстремальных сценариях деградации.
6. Обсудить алгоритмические аспекты вычисления индекса на больших графах и

возможные приближённые методы.

7. Показать на типовых сценариях, что индекс H^* обладает интерпретируемым поведением и может служить основой для практических рекомендаций по повышению устойчивости транспортных сетей.

1.3. Научная новизна и исследовательский разрыв

Анализ существующих работ по устойчивости сетей и транспортному моделированию показывает, что в настоящее время отсутствует единый количественный показатель, который одновременно:

- интегрирует спектральные характеристики связности, фрагментацию и структурную избыточность в одном индексе;
- нормирован относительно эталонного состояния сети и допускает сопоставление различных сетей и временных срезов;
- обладает доказуемыми свойствами монотонности при структурной деградации и предсказуемого поведения при распаде сети;
- устойчив к неопределённости данных телеметрии и специально учитывает качество поступающей информации.

Существующие подходы, как правило, фокусируются либо на отдельных спектральных характеристиках (например, алгебраическая связность, собственные значения матриц, связанных с графом), либо на метриках, связанных с длиной путей и центральностью (диаметр, средняя длина кратчайшего пути, различные показатели центральности), либо на чисто структурных характеристиках (размер компонент, количество рёбер, коэффициенты кластеризации и подобные показатели). Интеграция этих аспектов в единый нормированный и интерпретируемый индекс структурной устойчивости формы транспортных сетей остаётся недостаточно проработанной.

Предлагаемый в данной работе индекс H^* призван заполнить этот разрыв. Он объединяет спектральную связность, относительный размер главной компоненты и структурную избыточность, а также использует механизмы нормировки и сглаживания, обеспечивающие устойчивую интерпретацию индекса при различных сценариях деградации и в условиях неопределённости данных.

Отдельного внимания заслуживает междисциплинарный характер исследования. По своей постановке работа находится на стыке нескольких областей.

Во-первых, она опирается на методы математики графов, включая спектральные характеристики, анализ связности и фрагментации графов.

Во-вторых, используется аппарат инженерии транспортных сетей, в рамках которого вершины и рёбра интерпретируются как реальные элементы инфраструктуры, задаются весовые модели пропускной способности, задержек и доступности, формируются типовые сценарии деградации сети.

В-третьих, задействуются подходы к построению цифровых двойников транспортной инфраструктуры, что обеспечивает применение индекса H^* в контуре мониторинга и управления с учётом динамически обновляемой телеметрии и сценарного моделирования.

В-четвёртых, используются методы системного анализа, позволяющие интегрировать разнородные структурные и эксплуатационные показатели в единый интегральный индекс, а также обосновать схемы нормировки, стабилизаторов и доверительных оценок.

Наконец, работа затрагивает сферу безопасности критической инфраструктуры. Индекс H^* и связанные с ним метрики могут применяться для выявления уязвимых элементов сети, оценки последствий отказов и поддержки процедур управления рисками. Такое положение на стыке дисциплин позволяет связать строгий математический аппарат с практическими задачами эксплуатации и развития транспортных сетей и делает полученные результаты релевантными для специалистов разных профилей.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

2.1. Транспортная сеть как взвешенный граф

В настоящей работе транспортная сеть описывается в виде взвешенного графа $G = (V, E, w)$. По умолчанию граф рассматривается как неориентированный, то есть связь между двумя узлами считается двусторонней. Если требуется учитывать односторонние участки (односторонние улицы, выделенные полосы движения и т.п.), соответствующие связи задаются ориентированными рёбрами. Это не меняет общий вид последующих определений индекса H^* .

Состав элементов графа задаётся следующим образом.

V — множество вершин (узлов) сети.

Вершины могут соответствовать перекрёсткам, остановкам и станциям различных видов общественного транспорта, пересадочным узлам, пунктам въезда и выезда на магистрали, терминалам и другим значимым объектам транспортной инфраструктуры.

E — множество рёбер.

Каждое ребро e из множества E соединяет пару вершин (u, v) и отражает наличие между ними транспортной связи. В качестве рёбер могут выступать участки улично-дорожной сети, перегоны железных дорог, линии метрополитена, трамвайные участки и другие элементы инфраструктуры, по которым передаются транспортные потоки.

w — весовая функция на рёбрах, задающая для каждого ребра e неотрицательный вес $w(e)$.

Вес отражает совокупный транспортный потенциал или «силу» связи. В зависимости от постановки задачи он может интерпретироваться как пропускная способность, интегральный показатель надёжности либо обобщённая характеристика, объединяющая длину участка, количество полос, допустимую и фактическую скорость движения, тип транспортного средства и другие факторы, влияющие на способность участка обеспечивать транспортное сообщение.

В общем случае веса рёбер зависят от времени: $w_t(e)$, где t обозначает момент или интервал наблюдения. Это позволяет учитывать суточные и сезонные колебания интенсивности движения, появление и исчезновение перегрузок, влияние ремонтных работ, аварий, ограничений движения, метеорологических условий и других факторов, изменяющих фактическую пропускную способность и надёжность элементов сети.

Топология графа — состав вершин и рёбер — обычно изменяется существенно медленнее. Строительство новых объектов, ввод дополнительных связей, закрытие или реконструкция участков относятся к событиям, происходящим на более длительных временных масштабах по сравнению с динамикой транспортных потоков и эксплуатационных характеристик.

В дальнейшем для ясности изложения сначала рассматривается фиксированный момент времени: индекс устойчивости формы H^* определяется для одного конкретного взвешенного графа G_t с заданными весами рёбер. После этого анализируется случай динамической сети, описываемой последовательностью графов G_t во времени, и поведение индекса H^* при:

- структурных изменениях (появление или удаление вершин и рёбер, распад сети на несколько компонент);
- изменениях весов при неизменной топологии, связанных с перераспределением нагрузок, изменением режима эксплуатации и введением временных ограничений.

2.2. Весовая модель рёбер и характеристика состояния

Для практического применения индекса необходима конкретизация весовой модели рёбер. В простейшем случае вес $w(e)$ может совпадать с пропускной способностью транспортного сегмента (количество транспортных единиц в час). Однако в реальных задачах целесообразно использовать интегральный вес, учитывающий несколько групп факторов, таких как:

- геометрические характеристики (длина, количество полос, наличие выделенных полос);
- средняя и максимально допустимая скорость движения;
- текущая и прогнозная загрузка;
- надёжность и вероятность отказов;
- статистика происшествий и задержек;
- данные телеметрии (скорость потока, плотность, интенсивность движения).

Пусть для каждого ребра e и момента времени t доступны нормированные показатели:

- $f_cap(e, t)$ – нормированная пропускная способность;
- $f_lat(e, t)$ – показатель, связанный с задержкой или латентностью (например, величина, обратно пропорциональная среднему времени проезда);
- $f_avail(e, t)$ – оценка доступности и надёжности (вероятность того, что ребро не заблокировано).

Тогда интегральный вес можно задать в виде линейной комбинации

$$w_t(e) = a \cdot f_cap(e, t) + b \cdot f_lat(e, t) + c \cdot f_avail(e, t),$$

где a , b и c – неотрицательные коэффициенты, задающие относительную важность соответствующих компонент. В зависимости от задач мониторинга и планирования эти коэффициенты могут подбираться экспертно или оцениваться по историческим данным, например путём минимизации расхождения между поведением индекса и фактической реакцией сети на известные события.

При этом важно, что с формальной точки зрения индекс H^* не зависит от конкретного выбора весовой модели и может работать с произвольными неотрицательными весами на рёбрах. Однако интерпретируемость значений индекса и его практическая полезность определяются тем, насколько выбранная модель весов адекватно отражает реальные свойства транспортной инфраструктуры и условия её эксплуатации.

Вот тот же текст, но без латекса и со стандартными индексами:

2.3. Эталонное состояние сети и нормировка

Для оценки устойчивости формы необходимо задать эталонное состояние сети. Обозначим через $G_0 = (V_0, E_0, w_0)$ эталонный граф, соответствующий «нормальному» или «проектному» состоянию транспортной сети. В качестве эталона может использоваться:

- состояние сети при отсутствии крупных отказов и ограничений, с нормативными

значениями пропускной способности;

- плановое проектное состояние после реализации программ реконструкции и расширения ключевых узлов;
- агрегированное состояние за достаточно длительный период, отражающее типичные средние характеристики.

Введение эталонного графа позволяет:

- нормировать индекс устойчивости формы, обеспечивая сопоставимость значений для различных сетей и временных срезов;
- интерпретировать значения индекса как меру отклонения текущей конфигурации от нормального состояния;
- использовать индекс для сценарного анализа и сравнения текущего, проектного и прогнозного состояний сети.

Допускается, что множества вершин и рёбер в текущем графе G_t и в эталонном графе G_0 не совпадают. В частности, могут появляться временные маршруты-объезды, временно закрываться участки, вводиться новые узлы. Индекс должен корректно работать в условиях частичного пересечения V_t с V_0 и E_t с E_0 .

Эталонный граф G_0 задаёт базовые величины для нормировки спектральной связности, относительного размера главной компоненты и структурной избыточности. Собственные значения лапласиана, относительный размер главной компоненты и показатели локальной структурной избыточности рассчитываются для G_0 и используются при приведении соответствующих характеристик для G_t к сопоставимой шкале.

На практике выбор эталонного состояния G_0 представляет собой отдельную задачу, от решения которой существенно зависит интерпретация индекса H_{norm} . Чтобы избежать систематических смещений, эталон рекомендуется формировать по следующей схеме:

- выбирать достаточно длительный период «нормальной» работы сети без крупных инцидентов и аномальных ограничений;
- агрегировать наблюдения за этот период в усреднённый граф (по структуре и весам рёбер), отражающий типичное состояние инфраструктуры и режимов эксплуатации;
- проводить экспертный аудит получившегося состояния с точки зрения наличия уже проявленных структурных проблем (узких мест, хронически перегруженных участков);
- фиксировать G_0 на ограниченный горизонт планирования и предусматривать регламент его пересмотра по мере модернизации сети и появления новых данных.

Такой подход позволяет уменьшить риск того, что в качестве эталона будет принята либо чрезмерно идеализированная конфигурация, недостижимая на практике, либо, напротив, уже деградировавшее состояние, относительно которого реальные изменения будут казаться малозначимыми.

2.4. Сопоставление существующих подходов и постановка требований к индексу устойчивости формы

Сопоставление существующих подходов к оценке структуры и надёжности транспортных сетей позволяет выделить ряд ограничений, препятствующих использованию имеющихся метрик в качестве универсального индекса устойчивости формы.

Во-первых, спектральные и топологические показатели (алгебраическая связность, размеры компонент связности, характеристики путей) отражают важные аспекты структуры, но, как правило, рассматриваются разрозненно и не образуют единого интегрального показателя, одновременно учитывающего связность, фрагментацию и избыточность.

Во-вторых, индексы робастности и надёжности транспортных сетей часто

фокусируются на выявлении критических элементов или оценке изменения эксплуатационных характеристик (задержек, времени в пути, пропускной способности), но при этом не нормированы относительно явного эталона и не сопровождаются формально сформулированными теоретическими свойствами.

В-третьих, методы работы с неопределённостью и пропусками в данных в основном нацелены на восстановление и прогноз отдельных показателей трафика, а не на включение качества данных и доверительных оценок непосредственно в конструкцию интегрального индекса структурной устойчивости.

Из этих ограничений вытекают требования к индексу устойчивости формы транспортной сети. Такой индекс должен:

- объединять спектральные, компонентные и избыточностные характеристики в одном нормированном показателе;
- быть нормированным относительно эталонного состояния сети и обеспечивать сопоставимость различных сетей и временных срезов;
- обладать формально сформулированными и проверяемыми теоретическими свойствами (ограниченность, монотонность при структурной деградации, предсказуемое поведение при фрагментации и реконфигурации);
- включать в свою конструкцию явный учёт качества данных, численных стабилизаторов и доверительных оценок, обеспечивая устойчивость к неопределённости и неполноте телеметрии.

В последующих разделах вводится индекс устойчивости формы H^* , удовлетворяющий указанным требованиям и ориентированный на использование в задачах мониторинга и управления транспортными сетями.

3. Сценарии изменений транспортной сети и задачи мониторинга

В предыдущем разделе была описана модель транспортной сети и сформулирована общая постановка задачи оценки её устойчивости формы. Однако практическое использование индекса устойчивости формы H^* неизбежно опирается на конкретные сценарии изменений сети и на те классы решений, которые принимаются на основе индикаторов состояния. В этом разделе описываются типовые сценарии структурных изменений транспортной сети, связанные с ними задачи мониторинга и требования к индексу, вытекающие из этих задач. Это создаёт мост между практической постановкой и формальным построением индекса, которое даётся в разделе 4.

3.1. Типы структурных изменений транспортной сети

Под структурными изменениями транспортной сети далее понимаются изменения, затрагивающие набор вершин и рёбер, а также их веса, отражающие доступность и «силу» связей. В реальной эксплуатации можно выделить несколько характерных типов таких изменений.

1. Плановые работы и временные ограничения.

К этой группе относятся краткосрочные и среднесрочные перекрытия участков сети в связи с ремонтами, мероприятиями, изменением организации движения. Такие изменения, как правило, локальны по пространству, но могут существенно влиять на доступность отдельных районов и перераспределение потоков.

2. Аварийные и нештатные события.

Аварии, внезапные перекрытия, отказ объектов инфраструктуры (мостов, тоннелей, развязок) приводят к стремительным изменениям связности и пропускной способности сети. Они, как правило, плохо предсказуемы, но требуют быстрого и надёжного мониторинга состояния сети вблизи очага события и по всей системе.

3. Постепенная деградация инфраструктуры.

Снижение фактической пропускной способности вследствие износа покрытия, ухудшения качества разметки, роста доли тяжёлого транспорта и других факторов может происходить без формальных перекрытий, но вести к устойчивому снижению «качества» ребер и узлов сети. Это приводит к медленному, но накопительному изменению формы сети в терминах доступности и надёжности маршрутов.

4. Крупные структурные изменения и реконфигурации.

Введение новых магистралей, строительство развязок, закрытие или ограничение крупных транспортных коридоров меняют конфигурацию сети на макроуровне. Индекс устойчивости формы в этих случаях должен позволять сравнивать альтернативные проектные варианты и оценивать эффект комплексных преобразований.

5. Каскадные и взаимосвязанные изменения.

В условиях высокой загрузки сети локальные нарушения могут вызывать каскадные эффекты — перераспределение потоков, перегрузку обходных маршрутов, снижение устойчивости формы в удалённых от очага аварии частях сети. Для таких сценариев важна чувствительность индекса к глобальным изменениям структурной «жёсткости».

Перечисленные типы изменений различаются по длительности, пространственному масштабу и предсказуемости, но во всех случаях требуется количественный индикатор, позволяющий сравнивать состояние сети до, во время и после событий, а также сопоставлять между собой разные сценарии.

3.2. Задачи мониторинга и принятия решений

Индекс устойчивости формы H^* рассматривается как элемент более широкой системы мониторинга и управления транспортной сетью. В рамках этой системы можно выделить несколько классов задач.

1. Оперативный мониторинг текущего состояния.

В этом режиме индекс оценивается на основе потоков телеметрии в квазиреальном времени. Цель — своевременно обнаруживать ухудшение структурной устойчивости формы сети и выделять периоды, требующие внимания диспетчерских служб и операторов.

2. Анализ ретроспективных эпизодов.

Ретроспективный просмотр поведения H^* в периоды аварий, крупных ремонтов и иных событий позволяет оценивать чувствительность индекса к различным типам нарушений, калибровать пороговые значения и формировать базы сценариев для обучения персонала и настройки систем поддержки принятия решений.

3. Сравнение альтернативных проектных решений.

При планировании реконструкции улично-дорожной сети или вводе новых объектов инфраструктуры индекс устойчивости формы используется для количественного сравнения различных проектных вариантов. В этом случае важна возможность сопоставлять значения H^* между разными конфигурациями сети при заданных предположениях о нагрузке и условиях функционирования.

4. Оценка эффекта мероприятий по повышению устойчивости.

Индекс H^* применяется для оценки того, насколько те или иные меры (резервирование маршрутов, повышение пропускной способности ключевых участков, изменение схемы организации движения) действительно повышают устойчивость формы сети к типовым и экстремальным нагрузкам.

5. Поддержка сценарного анализа рисков.

В рамках анализа инфраструктурных рисков рассматриваются сценарии частичного или полного отказа отдельных компонентов сети. Индекс устойчивости формы используется как агрегированный показатель ущерба в пространстве конфигураций сети, что позволяет строить карты уязвимости и ранжировать элементы по критичности.

Каждый из перечисленных классов задач предъявляет свои требования к индексу: в одних случаях на первый план выходит устойчивость к шуму в данных, в других — способность фиксировать даже умеренные, но систематические структурные изменения.

3.3. Требования к индексу, вытекающие из сценариев применения

Исходя из описанных типов изменений и задач мониторинга, можно сформулировать дополнительные требования к индексу устойчивости формы помимо общих математических свойств, обсуждаемых во введении.

1. Сопоставимость во времени и между сценариями.

Значения индекса должны быть сопоставимы как по временной оси (для одной и той же сети в разные моменты времени), так и между различными сценариями деградации и реконфигурации. Это предполагает использование чётко определённого эталонного состояния и нормировок, независимых от текущего уровня повреждений.

2. Чувствительность к изменениям структуры при устойчивости к шуму.

Индекс должен реагировать на значимые структурные изменения (потерю ключевых связей, фрагментацию сети, появление узких мест), но оставаться устойчивым к случайным флуктуациям, связанным с шумом в данных телеметрии и локальными вариациями, не затрагивающими форму сети в целом.

3. Локальная интерпретируемость.

Помимо агрегированного значения H^* для сети в целом, должна быть возможность разложить вклад отдельных компонентов (связности, размера главной компоненты, структурной избыточности) и отдельных участков сети. Это позволяет объяснять, за счёт каких элементов и механизмов происходят изменения индекса.

4. Совместимость с неполными и неоднородными данными.

Поскольку в реальных условиях источники данных могут быть неоднородными по качеству и покрытию, индекс должен уметь работать в условиях пропусков, задержек и ошибок измерения. Это требует явного учёта уровней достоверности и применения устойчивых к выбросам процедур сглаживания.

5. Интегрируемость в цифровые двойники и системы поддержки принятия решений.

Индекс должен быть вычислительно реализуем, пригоден для регулярного пересчёта по потокам данных, а также легко интегрируем в существующие цифровые платформы (цифровой двойник города, АСУДД, системы ситуационного центра).

6. Поддержка порогового и рангового анализа.

В практическом использовании важно не только абсолютное значение H^* , но и возможность задавать пороговые уровни (например, «зелёная», «жёлтая», «красная» зона устойчивости) и сравнивать между собой различные участки сети или разные города по относительному уровню устойчивости.

Эти требования задают рамку для конструирования индекса устойчивости формы H^* , который должен одновременно обладать строго определёнными математическими свойствами и быть пригодным для практического использования в перечисленных сценариях.

3.4. Формализация роли индекса H^* в процессе мониторинга

Для дальнейшего построения удобно формально зафиксировать, какую роль индекс устойчивости формы играет в процессе мониторинга и управления. Рассматривается временная последовательность состояний транспортной сети, описываемая набором графов $G(t)$ для моментов времени t , для каждого из которых вычисляется значение $H^*(t)$ и, при необходимости, нормированный индекс $H_{\text{norm}}(t)$ относительно эталонного состояния G_{ref} .

Важны следующие аспекты.

1. Индекс как временной ряд.

Значения $H^*(t)$ образуют временной ряд, по которому можно выявлять тренды, аномалии и переходы между режимами функционирования сети. Это позволяет автоматически детектировать эпизоды резкого снижения устойчивости формы и оценивать длительность восстановления.

2. Индекс как характеристика сценария.

Для заданного сценария (например, планового перекрытия, аварии или проектного варианта реконструкции) индекс используется как агрегированная характеристика ущерба или улучшения формы. В этом случае анализируются не только мгновенные значения $H^*(t)$, но и интегральные показатели по сценарию (минимальное значение, средний уровень, скорость восстановления).

3. Индекс как вход в системы принятия решений.

Значения $H^*(t)$ и $H_{\text{norm}}(t)$ могут использоваться в качестве входных параметров в системах поддержки принятия решений: для ранжирования сценариев по критичности, формирования рекомендаций по приоритетам восстановительных работ, настройки адаптивных алгоритмов управления движением.

Такое понимание роли индекса устойчивости формы, совместно с сформулированными ранее требованиями к его свойствам, позволяет в следующем разделе перейти к формальному определению индекса и анализу его теоретических характеристик.

4. Индекс устойчивости формы H^* : определения и теоретические свойства

В этом разделе вводятся все компоненты индекса устойчивости формы, а также

даётся формальное определение глобального и нормированного индексов H^* и H_{norm} . Далее приводятся основные теоретические свойства этих величин.

С формальной точки зрения далее рассматривается класс конечных взвешенных графов G с выделенным эталонным графом G_0 , заданным на том же множестве вершин. На этом классе вводится новый скалярный функционал $H^*(G, G_0)$, зависящий от спектральных, компонентных и локальных характеристик текущего графа G относительно эталона G_0 . Нормированный индекс $H_{\text{norm}}(G, G_0)$ обеспечивает сопоставимость различных графов и временных срезов по отношению к одному и тому же эталонному состоянию. В подразделах 4.1–4.6 задаётся конструкция этого функционала, а в разделе 4.7 обсуждаются его базовые теоретические свойства.

4.1. Нормированная алгебраическая связность

Алгебраическая связность графа характеризует его глобальную связность и «жесткость» структуры. Для взвешенного графа G рассматривается нормированный лапласиан $L_{\text{norm}}(G)$. Его собственные значения упорядочиваются по возрастанию:

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{|V|}.$$

Величина $\lambda_2(G)$ (второе собственное значение нормированного лапласиана) называется алгебраической связностью графа. Чем больше $\lambda_2(G)$, тем лучше связана сеть и тем труднее её фрагментировать; при распаде графа на несколько компонент $\lambda_2(G)$ стремится к нулю.

Для эталонного графа G_0 задаётся масштабный параметр:

$$\Delta_0 = \max(\lambda_2(G_0), \varepsilon_{\text{deg}}),$$

где ε_{deg} — малый положительный стабилизатор, исключающий вырожденные случаи (например, когда $\lambda_2(G_0)$ очень мало).

Нормированная алгебраическая связность $\lambda_{\text{hat}}(G)$ определяется как

$$\lambda_{\text{hat}}(G) = \min(1, \max(0, \lambda_2(G) / \Delta_0)).$$

Свойства $\lambda_{\text{hat}}(G)$:

при распаде сети на несколько компонент $\lambda_2(G) \rightarrow 0$ и, следовательно, $\lambda_{\text{hat}}(G) \rightarrow 0$;

при хорошо связанной структуре, сопоставимой с эталонной, $\lambda_{\text{hat}}(G)$ близка к 1;

для любых допустимых состояний сети выполняется $0 \leq \lambda_{\text{hat}}(G) \leq 1$.

Такая нормировка делает $\lambda_{\text{hat}}(G)$ безразмерной величиной, сопоставимой для различных состояний сети относительно одного и того же эталона G_0 .

4.2. Относительный размер главной компоненты

Пусть $C_{\text{max}}(G)$ — крупнейшая по числу вершин связная (или слабо связная, в зависимости от принятой модели) компонента графа G .

Тогда относительный размер главной компоненты определяется как

$$S_{\text{hat}}(G) = |C_{\text{max}}(G)| / \max(1, |V_0|),$$

где $|C_{\text{max}}(G)|$ — количество вершин в главной компоненте, $|V_0|$ — число вершин в эталонном графе. Деление на $\max(1, |V_0|)$ защищает от деления на ноль и вырождения

в тривиальных случаях.

Свойства $S_{\hat{}}(G)$:

- если сеть в текущем состоянии сохраняет единую доминирующую компоненту, содержащую почти все вершины эталона, значение $S_{\hat{}}(G)$ близко к 1;
- при сильной фрагментации, когда граф распадается на множество малых компонент и изолированных вершин, $S_{\hat{}}(G)$ стремится к нулю;
- для любых допустимых состояний сети выполняется $0 \leq S_{\hat{}}(G) \leq 1$.

Показатель $S_{\hat{}}(G)$ отражает, какая доля эталонного множества вершин остаётся в единой взаимосвязанной структуре.

4.3. Взвешенная структурная избыточность

Взвешенная структурная избыточность $R_w(G)$ описывает, насколько хорошо в текущем графе сохраняются локальные связи вокруг вершин по сравнению с эталонным состоянием.

Для каждой вершины v из множества вершин эталона V_0 рассматриваются:

$\text{deg}_w_G(v)$ — взвешенная степень вершины v в текущем графе G , то есть сумма весов $w(e)$ по всем рёбрам e , инцидентным вершине v в G ;

$\text{deg}_w_{G_0}(v)$ — взвешенная степень этой же вершины v в эталонном графе G_0 , то есть сумма эталонных весов $w_0(e)$ по всем рёбрам, инцидентным v в G_0 .

Локальный показатель сохранности структуры для вершины v задаётся следующим образом.

1. Если $\text{deg}_w_{G_0}(v) > \varepsilon_{\text{deg}}$, то

$$I(v) = \min(\text{deg}_w_G(v), \text{deg}_w_{G_0}(v)) / \text{deg}_w_{G_0}(v).$$

То есть учитывается доля сохранённого (или не меньше эталонного) веса в окрестности вершины.

2. Если $\text{deg}_w_{G_0}(v) \leq \varepsilon_{\text{deg}}$ и вершина v присутствует в текущем графе,

$$I(v) = 1.0.$$

Это означает, что для вершин с пренебрежимо малой эталонной степенью факт их наличия в текущем графе считается достаточным условием сохранности.

3. Если вершина v из эталона отсутствует в текущем графе,

$$I(v) = 0.0.$$

Глобальный показатель взвешенной структурной избыточности определяется как

$$R_w(G) = (1 / \max(1, |V_0|)) \times \text{сумма по всем } v \text{ из } V_0 \text{ величин } I(v).$$

Свойства $R_w(G)$:

если структура и веса в окрестности всех вершин эталона полностью сохранены (или улучшены), $R_w(G)$ близка к 1;

при утрате значительной части рёбер и весов, особенно вокруг ключевых вершин, $R_w(G)$ снижается, вплоть до значений, близких к нулю;

величина $R_w(G)$ лежит в диапазоне от 0 до 1 и отражает среднюю сохранность локальных структур относительно эталона.

4.4. Когерентность формы

Когерентность формы $Coh^*(G)$ объединяет три нормированные метрики — спектральную связность $\lambda_{hat}(G)$, относительный размер главной компоненты $S_{hat}(G)$ и структурную избыточность $R_w(G)$ — в единый показатель, характеризующий «целостность» формы сети.

Пусть ϵ — малый положительный стабилизатор, исключающий полное зануление когерентности при деградации одной из компонент. Тогда когерентность формы $Coh^*(G)$ определяется как геометрическое среднее:

$$Coh^*(G) = [\max(\epsilon, \lambda_{hat}(G)) \times \max(\epsilon, S_{hat}(G)) \times \max(\epsilon, R_w(G))]^{1/3}.$$

Свойства $Coh^*(G)$:

если хотя бы один из показателей $\lambda_{hat}(G)$, $S_{hat}(G)$ или $R_w(G)$ значительно снижается, $Coh^*(G)$ также заметно падает, то есть когерентность чувствительна к деградации любой из компонент;

при сохранении всех трёх показателей на уровне, близком к эталонному, $Coh^*(G)$ близка к 1;

диапазон значений $Coh^*(G)$ лежит в интервале $[\epsilon, 1]$.

Таким образом, $Coh^*(G)$ выступает агрегированной мерой «согласованности» глобальной связности, целостности и локальной избыточности структуры сети.

4.5. Сглаженная мера структурного повреждения

Сглаженная мера структурного повреждения $\sigma_{smooth}^*(G)$ описывает совокупный эффект разных видов деградации структуры сети.

Сначала вводятся суммарные веса рёбер:

$W(G)$ — суммарный вес всех рёбер текущего графа G (сумма $w(e)$ по всем e из E);

W_0 — суммарный вес рёбер в эталонном графе G_0 .

Далее задаются четыре неотрицательные компоненты повреждений:

1. Потеря суммарного веса:

$$a1 = \max(0, (W0 - W(G)) / \max(\epsilon, W0)).$$

Эта компонента отражает относительную потерю «массы» сети по сравнению с эталоном.

2. Деградация спектральной связности:

$$a2 = \max(0, 1 - \lambda_{\text{hat}}(G)).$$

3. Деградация по размеру главной компоненты:

$$a3 = \max(0, 1 - S_{\text{hat}}(G)).$$

4. Деградация структурной избыточности:

$$a4 = \max(0, 1 - R_w(G)).$$

Пусть τ — параметр сглаживания. Тогда сглаженная мера структурного повреждения определяется как

$$\sigma_{\text{smooth}}^*(G) = \tau \cdot \ln(\exp(a1 / \tau) + \exp(a2 / \tau) + \exp(a3 / \tau) + \exp(a4 / \tau)).$$

Такая конструкция реализует сглаженный максимум (smooth max) по четырём видам повреждений: потере суммарного веса, снижению спектральной связности, фрагментации сети и ухудшению локальной избыточности. При этом:

при усилении любого вида повреждения соответствующая компонента a_i возрастает, что приводит к росту $\sigma_{\text{smooth}}^*(G)$;

при малых повреждениях все a_i близки к нулю, и $\sigma_{\text{smooth}}^*(G)$ остаётся малой;

$\sigma_{\text{smooth}}^*(G)$ всегда неотрицательна и растёт при усугублении структурных деградаций.

4.6. Индекс устойчивости формы H^* и нормированный индекс H_{norm}

Индекс устойчивости формы $H^*(G)$ связывает когерентность формы и меру структурного повреждения в одной интегральной метрике.

Основной стабилизатор задаётся как

$$\epsilon_{\text{main}} = 1 / \max(1, |V0|^2).$$

Этот стабилизатор ограничивает рост индекса при очень малых значениях

$\sigma_{\text{smooth}}^*(G)$ и защищает от деления на величины, близкие к нулю.

Индекс устойчивости формы определяется формулой

$$H^*(G) = \text{Coh}^*(G) / \max(\epsilon_{\text{main}}, \sigma_{\text{smooth}}^*(G)).$$

Диапазон значений $H^*(G)$ неотрицателен и ограничен сверху величиной порядка $\text{Coh}^*(G) / \epsilon_{\text{main}}$. При фиксированном ϵ_{main} и $\text{Coh}^*(G) \in [\epsilon, 1]$ индекс $H^*(G)$ принимает значения от 0 (при сильной деградации) до величин, соответствующих состояниям с высокой когерентностью и малой мерой повреждения.

Интерпретация:

высокие значения $H^*(G)$ соответствуют состояниям, в которых когерентность формы велика, а совокупная структурная деградация мала;

низкие значения $H^*(G)$ отражают либо существенное снижение когерентности (потеря связности, уменьшение главной компоненты, падение избыточности), либо значительное накопление повреждений по одной или нескольким компонентам $\sigma_{\text{smooth}}^*(G)$;

при сильной фрагментации сети, когда $\lambda_{\text{hat}}(G)$, $S_{\text{hat}}(G)$ и $R_w(G)$ близки к нулю и $\sigma_{\text{smooth}}^*(G)$ высока, индекс $H^*(G)$ стремится к нулю.

Для обеспечения сопоставимости различных сетей и временных состояний вводится нормированный индекс устойчивости формы:

$$H_{\text{norm}}(G) = H^*(G) / \max(\epsilon_{\text{main}}, H^*(G_0)),$$

где $H^*(G_0)$ — значение индекса для эталонного состояния.

Интерпретация $H_{\text{norm}}(G)$:

$H_{\text{norm}}(G) \approx 1$ — состояние, близкое к эталонному;

$0 < H_{\text{norm}}(G) < 1$ — различные уровни деградации структуры относительно эталона;

$H_{\text{norm}}(G) > 1$ — состояния, в которых по рассматриваемым критериям устойчивость формы превышает эталонный уровень (например, после модернизации);

$H_{\text{norm}}(G) \approx 0$ — критическое снижение структурной устойчивости, близкое к полному распаду.

4.7. Основные теоретические свойства индекса H^*

На основе введенных определений формулируются ключевые теоретические свойства индексов $H^*(G)$ и $H_{\text{norm}}(G)$.

Ограниченность и неотрицательность.
По определению

$$H^*(G) = \text{Coh}^*(G) / \max(\epsilon_{\text{main}}, \sigma_{\text{smooth}}^*(G)).$$

Так как $\text{Coh}^*(G) \in [\epsilon, 1]$, $\sigma_{\text{smooth}}^*(G) \geq 0$, а $\epsilon_{\text{main}} > 0$, получаем:

$H^*(G) \geq 0$, то есть индекс не бывает отрицательным;

верхняя граница $H^*(G)$ определяется отношением $\text{Coh}^*(G)$ к $\varepsilon_{\text{main}}$ и, следовательно, конечна при фиксированном $\varepsilon_{\text{main}}$.

Нормированный индекс

$$H_{\text{norm}}(G) = H^*(G) / \max(\varepsilon_{\text{main}}, H^*(G_0))$$

также неотрицателен. При фиксированном эталонном состоянии G_0 и монотонности H^* по отношению к G_0 выполняется $0 \leq H_{\text{norm}}(G) \leq 1$, причём $H_{\text{norm}}(G_0) \approx 1$ при $H^*(G_0) \gg \varepsilon_{\text{main},0}$

Для дальнейшего анализа введём отношение «структурной деградации» на множестве графов, построенных на одном и том же множестве вершин и с одним и тем же эталонным графом G_0 .

Будем говорить, что граф G_2 является структурной деградацией графа G_1 (и писать $G_2 \leq G_1$), если из G_1 в G_2 можно перейти конечной последовательностью операций:

- удаления рёбер;
- удаления вершин вместе с инцидентными рёбрами;
- уменьшения весов рёбер,

при фиксированном эталоне G_0 . Интуитивно $G_2 \leq G_1$ означает, что структура сети в G_2 не лучше, чем в G_1 , с точки зрения связности и наличия резервных маршрутов.

Монотонность при структурной деградации.

Для операций, образующих отношение $G_2 \leq G_1$, индекс H^* обладает следующим свойством: любые преобразования, которые не улучшают структуру сети относительно эталона (удаление рёбер или узлов, снижение весов рёбер при неизменном G_0), не приводят к увеличению значения индексов H^* и H_{norm} .

В таких операциях:

алгебраическая связность и её нормированная версия $\lambda_{\text{hat}}(G)$ не увеличиваются;

относительный размер главной компоненты $S_{\text{hat}}(G)$ не растёт;

структурная избыточность $R_w(G)$ уменьшается или остаётся прежней;

когерентность формы $\text{Coh}^*(G)$, будучи геометрическим средним этих величин, также не увеличивается;

компоненты $a_1 - a_4$ и сглаженная мера повреждения $\sigma_{\text{smooth}}^*(G)$ имеют тенденцию к росту или остаются неизменными.

В результате индекс $H^*(G)$, представляющий собой отношение $\text{Coh}^*(G)$ к $\max(\varepsilon_{\text{main}}, \sigma_{\text{smooth}}^*(G))$, при структурной деградации либо уменьшается, либо остаётся на прежнем уровне. Нормированный индекс $H_{\text{norm}}(G)$ наследует эту монотонность.

Инвариантность к однородному масштабированию весов.

Если одновременно умножить веса всех рёбер текущего графа G и эталонного графа G_0 на один и тот же положительный коэффициент, то:

нормированный лапласиан и алгебраическая связность $\lambda_2(G)$, а также нормированная связность $\lambda_{\text{hat}}(G)$ не изменятся;

относительный размер главной компоненты $S_{\text{hat}}(G)$ не зависит от масштабирования весов;

структурная избыточность $R_w(G)$ рассчитывается по относительным соотношениям степеней и также остаётся неизменной;

когерентность формы $\text{Coh}^*(G)$, а также компоненты a_2 , a_3 , a_4 и, с учётом согласованного масштабирования $W(G)$ и W_0 , величина a_1 — сохраняют свои значения.

Следовательно, $\sigma_{\text{smooth}}^*(G)$, индекс $H^*(G)$ и нормированный индекс $H_{\text{norm}}(G)$ инвариантны к глобальному изменению масштаба весов при согласованной нормировке.

Поведение при фрагментации сети.

При последовательном удалении рёбер, приводящем к фрагментации сети:

алгебраическая связность $\lambda_2(G)$ и нормированная связность $\lambda_{\text{hat}}(G)$ стремятся к нулю;

относительный размер главной компоненты $S_{\text{hat}}(G)$ уменьшается и при полном распаде сети на изолированные вершины становится близок к нулю;

структурная избыточность $R_w(G)$ снижается по мере утраты рёбер и локальных альтернативных связей;

когерентность формы $\text{Coh}^*(G)$ стремится к нижней границе диапазона (определяемой ϵ);

компоненты a_1 – a_4 увеличиваются, что приводит к росту $\sigma_{\text{smooth}}^*(G)$ и, соответственно, знаменателя в определении $H^*(G)$.

В пределе при полной фрагментации выполняется:

$$H^*(G) \rightarrow 0, \\ H_{\text{norm}}(G) \rightarrow 0.$$

Устойчивость к малым возмущениям (непрерывность).

Все составляющие индекса H^* строятся из непрерывных операций по весам рёбер:

линейных комбинаций и сумм;

операций $\max$ и $\min$ с фиксированными порогами;

экспоненты и логарифма в определении $\sigma_{\text{smooth}}^*(G)$;

делений, защищённых стабилизаторами от деления на ноль.

При малых изменениях весов рёбер (при фиксированной структуре графа) значения $\lambda_{\text{hat}}(G)$, $S_{\text{hat}}(G)$, $R_w(G)$, $\text{Coh}^*(G)$ и $\sigma_{\text{smooth}}^*(G)$ изменяются непрерывно и не испытывают резких скачков. Соответственно, индекс $H^*(G)$ и нормированный индекс $H_{\text{norm}}(G)$ являются непрерывными функциями весов при фиксированной топологии сети, что важно для применения индекса в системах мониторинга, работающих с шумными данными телеметрии.

5. Реализация индекса H^* в условиях неопределённости и неполноты данных

В этом разделе описывается, как индекс устойчивости формы H^* реализуется на

реальных транспортных сетях с учётом разнородных эксплуатационных данных, неопределённости измерений и пропусков телеметрии.

4.8. Поведение индекса H на простых классах графов*

Для иллюстрации поведения индекса устойчивости формы H^* и его компонентов полезно рассмотреть несколько простых классов невзвешенных графов с одинаковым числом вершин и равными весами рёбер. В этом случае влияние весовой модели минимально, и на первый план выходят чисто структурные свойства.

1. Путь, цикл и полный граф.

Рассмотрим три класса связных графов на n вершинах:

- простой путь P_n (линейная цепочка);
- цикл C_n (кольцо);
- полный граф K_n (каждая вершина соединена с каждой).

При фиксированном n алгебраическая связность для этих графов удовлетворяет качественным соотношениям:

- значение для K_n существенно больше, чем для C_n ;
- значение для C_n больше, чем для P_n .

Это отражает интуитивный факт: полный граф труднее разрезать на компоненты, чем цикл, а цикл устойчивее к фрагментации, чем линейная цепочка. Относительный размер главной компоненты $S_{\hat{}}(G)$ для всех трёх графов равен 1, так как они связны и содержат одну компоненту, охватывающую все вершины.

Более интересна структурная избыточность $R_w(G)$ относительно эталона G_0 . Если в качестве эталона G_0 взять полный граф K_n , то в эталоне каждая вершина имеет максимально возможную степень и множество альтернативных путей. Для C_n каждая вершина имеет только двух соседей, и при отказе одного из рёбер связь между вершинами сохраняется, но резервов меньше, чем в K_n . Для P_n крайние вершины не имеют альтернативных маршрутов: отказ одного ребра разрывает граф на две компоненты.

В результате когерентность формы $\text{Coh}^*(G)$, будучи геометрическим средним нормированной связности, относительного размера главной компоненты и структурной избыточности, качественно упорядочивается как:

$$\text{Coh}^*(K_n) > \text{Coh}^*(C_n) > \text{Coh}^*(P_n)$$

при разумном выборе эталона и нормировок. Это согласуется с представлением о том, что полный граф является наиболее устойчивой структурой, цикл — промежуточной, а линейная цепочка — наиболее уязвимой из трёх.

2. Влияние локальных модификаций.

Одна и та же локальная операция — удаление одного ребра — приводит к различным последствиям:

- в пути P_n удаление одного ребра немедленно приводит к распаду сети на две компоненты; алгебраическая связность падает к нулю, $S_{\hat{}}(G)$ уменьшается, $R_w(G)$ снижается, и индекс $H^*(G)$ резко уменьшается;
- в цикле C_n удаление одного ребра превращает цикл в путь: сеть остаётся связной, но теряет резервный маршрут, индекс $H^*(G)$ уменьшается менее резко;
- в полном графе K_n для больших n удаление одного ребра практически не влияет на связность и избыточность: множество альтернативных путей остаётся большим, и $H^*(G)$ изменяется незначительно.

Эти простые примеры показывают, что индекс H^* различает типы структур и чувствителен к характеру отказов: одна и та же локальная модификация по-разному влияет на структуры с разной степенью избыточности.

3. Фрагментация и предельное поведение.

Если последовательно удалять рёбра в пути P_n или цикле C_n до распада сети на изолированные вершины, то показатели связности и избыточности монотонно уменьшаются, когерентность формы $coh^*(G)$ стремится к нижней границе, компоненты меры повреждения растут, и индекс $H^*(G)$ стремится к нулю. Это согласуется с общими теоретическими выводами раздела 4.7 и демонстрирует интерпретируемое поведение индекса на простейших классах графов.

5.1. Весовая модель рёбер транспортной сети

Для расчёта индекса устойчивости формы необходимо привести разнородные эксплуатационные характеристики транспортных участков к единому нормированному весу $w_t(e)$, который интерпретируется как «структурное качество» ребра e в момент времени t .

В качестве исходных параметров для каждого ребра e обычно используются:

пропускная способность участка cap_vehph (транспортных средств в час);

задержка $latency_s$ (среднее время проезда в секундах);

доступность $availability$ (доля времени без ограничений, значение от 0 до 1);

относительная загрузка $load_frac$ (отношение фактического потока к пропускной способности);

показатели качества данных (например, интегральный индекс доверия к телеметрии).

Нормированные функции $f_cap(e, t)$, $f_lat(e, t)$ и $f_avail(e, t)$ переводят реальные значения этих параметров в безразмерный диапазон (как правило, от 0 до 1) с учётом порогов «нормального», «напряжённого» и «критического» режима работы участка.

Интегральный вес задаётся в виде линейной комбинации:

$$w_t(e) = a \cdot f_cap(e, t) + b \cdot f_lat(e, t) + c \cdot f_avail(e, t),$$

где a , b и c — неотрицательные коэффициенты, задающие относительную важность пропускной способности, задержки и доступности для конкретной сети и сценария применения.

Модель допускает:

настройку коэффициентов a , b и c ;

задание порогов допустимой задержки и загрузки, при превышении которых вес дополнительно «штрафуется»;

использование функций «девальвации» веса при длительной перегрузке, частых ограничениях или низком качестве данных.

Благодаря этому чувствительность индекса H^* может быть адаптирована к различным типам транспортных сетей (магистральная улично-дорожная сеть, метрополитен, пригородные железные дороги и т.п.) и к различным режимам

эксплуатации (часы пик, ночные «окна», периоды ремонтных работ).

В более общем случае задача подбора параметров модели включает не только веса a , b , c , но и параметры нормировочных функций, стабилизаторов (ϵ_{deg} , ϵ_{main} , τ) и пороговых уровней H_{high} , H_{warn} , H_{crit} . Некорректный выбор этих параметров может приводить к искажённому поведению индекса: чрезмерному сглаживанию, потере чувствительности к реальным повреждениям или, напротив, к избыточному числу ложных срабатываний.

Для крупных транспортных систем целесообразно рассматривать калибровку параметров как отдельную оптимизационную задачу. В качестве обучающей выборки используются исторические эпизоды с известной экспертной оценкой состояния сети (нормальный, напряжённый и кризисный режимы), а целевая функция формулируется как минимизация расхождения между траекторией $H_{norm}(t)$ и фактическим развитием событий (динамикой отказов, задержек, жалоб и т.п.). Такой подход позволяет формально обосновать выбор параметров и заложить основу для их последующего пересмотра по мере накопления данных и изменения условий эксплуатации.

--

5.2. Система стабилизаторов и численная устойчивость вычислений

Чтобы расчёт индекса был численно устойчивым и корректно работал на вырожденных конфигурациях, вводится система малых положительных констант — стабилизаторов. Они защищают от деления на ноль, переполнений и чрезмерных контрастов между величинами.

Используются, в частности:

стабилизатор степеней вершин ϵ_{deg} — минимальный порог при нормировке локальных показателей избыточности и в определении нормированного лапласиана;

основной стабилизатор ϵ_{main} — минимальный масштаб для индекса H^* , обычно порядка $1 / |V_0|^2$, где V_0 — множество вершин эталонной сети;

стабилизатор деления ϵ_{div} — применяется при расчёте LRI_{car} и родственных показателей, чтобы не делить на нулевое эталонное значение;

малый стабилизатор ϵ в когерентности формы $Con^*(G)$, чтобы ни один из множителей не занулялся полностью;

параметр сглаживания τ в функции $\sigma_{smooth}^*(G)$, определяющий степень «мягкости» логарифмического агрегирования повреждений.

Практические диапазоны параметров:

ϵ_{deg} и ϵ_{div} — очень малые числа (например, от 10^{-6} до 10^{-3}) в зависимости от типичных значений степеней и ёмкостей;

ϵ_{main} выбирается исходя из размера эталонной сети так, чтобы индекс не уходил к бесконечно большим значениям, но оставался чувствительным к реальным изменениям;

τ подбирается как компромисс между похожестью на максимум (малое τ) и устойчивостью к шуму (большее τ).

Корректная калибровка стабилизаторов позволяет:

избежать численных аномалий на малых или сильно разреженных графах;

обеспечить плавное изменение индекса при малых возмущениях параметров;

получать воспроизводимые значения H^* на разных реализациях одной и той же системы.

5.3. Оценка качества данных и уровни доверия

Качество телеметрии и справочной информации напрямую влияет на надёжность индекса H^* . Поэтому в расчёт вводится явный учёт неопределённости и доверия к данным.

Для каждой записи телеметрии для ребра e в момент времени t могут использоваться:

показатель `confidence_score` в диапазоне от 0 до 1;

возраст измерения `telemetry_age_s` (время, прошедшее с момента фактического измерения);

признак `imputed_flag` (получено ли значение методом импутации, а не прямым измерением);

дополнительные флаги качества (аномалии, подозрение на сбой датчика, несогласованность с соседними участками и т.п.).

На основе этих атрибутов выделяются уровни доверия:

высокий уровень — данные свежие, непротиворечивые, без признаков аномалий;

средний уровень — данные частично устарели или требуют дополнительного сглаживания;

низкий уровень — данные сильно устарели, имеют низкий `confidence_score` или помечены как проблемные.

В зависимости от уровня доверия могут применяться:

корректировки весов $w_t(e)$ (например, понижение веса участков с низким качеством данных);

исключение отдельных рёбер из расчёта структурных метрик, если данные признаются недостоверными;

снижение частоты пересчёта индекса H^* при системных проблемах с телеметрией.

Таким образом, индекс H^* в явном виде реагирует не только на состояние инфраструктуры, но и на состояние информационного контура, что позволяет отличать структурные проблемы сети от проблем с измерениями.

5.4. Обработка пропусков и импутация телеметрии

В реальных условиях неизбежны пропуски телеметрии: потеря пакетов, сбои датчиков, отключения сегментов системы сбора данных. Для корректного расчёта индекса H^* требуется восстанавливать недостающие значения с контролируемой погрешностью.

Используются несколько базовых подходов.

1. Простые временные методы

удержание последнего достоверного значения (метод «последнее наблюдение вперёд»);

скользящее среднее на окне заданной длины;

линейная интерполяция между соседними валидными точками.

2. Пространственно-временные методы

использование близлежащих рёбер с похожими характеристиками (кластеризация по типу, географии, функциональной роли);

использование уравнений баланса потоков в узлах для восстановления недостающих значений.

3. Робастные фильтры и сглаживание

медианная фильтрация параметров с выбросами (например, `latency_s`);

сглаживание относительной загрузки `load_frac` для подавления резких скачков из-за единичных аномальных измерений.

Каждое импутированное значение:

проверяется на физическую корректность (неотрицательность, ограниченность разумными порогами);

при необходимости обрезается до допустимого диапазона и маркируется как восстановленное;

сопровождается уменьшением `confidence_score`, чтобы индекс H^* учитывал повышенную неопределённость.

Такая схема позволяет продолжать расчёт индекса даже при частичных потерях данных, не смешивая структурную деградацию сети с проблемами телеметрии.

5.5. Построение доверительных интервалов для H^* и H_{norm}

Помимо точечного значения индекса H^* важно иметь оценку его статистической неопределённости, обусловленной шумом и неполнотой данных. Для этого применяется непараметрический бутстрэп.

Общая схема включает следующие шаги.

1. Подготовка исходных данных

фиксируется текущее состояние графа G_t ;

выбирается множество элементов, по которым выполняется бутстрэп (как правило, рёбра или записи телеметрии для рёбер).

2. Генерация бутстрэп-реplik

задаётся число итераций N_{boot} (например, от 200 до 1000);

на каждой итерации формируется псевдовыборка рёбер методом выборки с возвращением;

при необходимости контролируется доля уникальных элементов (например, не менее 70 процентов), чтобы избежать вырожденных реплик.

3. Вычисление метрик

для каждого бутстрэп-графа $G_t^{(b)}$ вычисляется $H^*(G_t^{(b)})$;

при необходимости дополнительно рассчитываются λ_{hat} , S_{hat} , R_w или локальные индексы.

4. Построение доверительных интервалов

все значения $H^*(G_t^{(b)})$ собираются в упорядоченный список H_{values} ;

нижняя граница доверительного интервала (например, 95 процентов) берётся как 2,5-й перцентиль списка;

верхняя граница — как 97,5-й перцентиль.

Аналогично строятся интервалы и для $H_{\text{norm}}(G_t)$. Полученные доверительные интервалы:

используются при принятии решений (например, сигнализировать только если нижняя граница интервала опускается ниже заданного порога);

помогают отличать случайные колебания индекса от устойчивого ухудшения структуры сети.

5.6. Общая схема вычисления индекса H^* в режиме мониторинга

В условиях эксплуатации транспортной сети индекс H^* рассчитывается в рамках циклического процесса мониторинга. Типичный цикл включает следующие этапы.

1. Сбор и консолидация данных

получение актуальной топологии (активные узлы и рёбра), телеметрии, сведений об инцидентах и плановых работах;

предварительная проверка полноты, согласованности и базовой физической корректности данных;

агрегация показателей по рёбрам за расчётный интервал (например, 5–15 минут).

2. Формирование текущего графа G_t

исключение рёбер, качество данных по которым признано недопустимым;

вычисление весов $w_t(e)$ по весовой модели с учётом качества данных и восстановленных значений;

выделение главной компоненты и проверка базовой связности сети.

3. Расчёт структурных метрик и индексов H^* и H_{norm}

вычисление нормированной алгебраической связности $\lambda_{\text{hat}}(G_t)$;

оценка относительного размера главной компоненты $S_{\text{hat}}(G_t)$;

расчёт структурной избыточности $R_w(G_t)$;

агрегирование этих величин в когерентность формы $\text{Coh}^*(G_t)$;

вычисление сглаженной меры структурного повреждения $\sigma_{\text{smooth}}^*(G_t)$;

получение индексов $H^*(G_t)$ и $H_{\text{norm}}(G_t)$;

при необходимости — расчёт индексов резервирования LRI и LRI_{cap} , а также локальных индексов H_s для отдельных коридоров и зон.

4. Учёт временной динамики и доверия

временное сглаживание $H_{\text{norm}}(G_t)$ (например, экспоненциальное скользящее среднее);

оценка скорости изменения индекса и сравнение с порогами;

периодическое обновление доверительных интервалов по бутстрэпу;

учёт качества данных: при системном снижении доверия к телеметрии возможен переход в режим ограниченной функциональности и изменение частоты расчётов.

5. Пороговый анализ и генерация сигналов

сравнение текущего значения H_{norm} и его тренда с калиброванными порогами «предупреждение» и «критическое состояние»;

учёт ширины доверительных интервалов: при широких интервалах решения принимаются более консервативно;

формирование событий и уведомлений для операторов, разнесение сигналов по зонам и коридорам (по локальным индексам H_s).

6. Публикация результатов и логирование

запись значений индексов, доверительных интервалов, диагностических показателей и флагов качества данных в хранилище;

публикация результатов в интерфейсах мониторинга и прикладных API;

протоколирование исключений, численных аномалий и нестандартных ситуаций для последующего анализа.

Такая схема обеспечивает устойчивую работу индекса H^* в условиях неполной и неоднородной телеметрии и позволяет использовать его как опорный индикатор структурной устойчивости транспортной сети при оперативном принятии решений.

5.7. Алгоритм расчёта индекса H^* для одного временного среза

В этом подпункте приводится базовый алгоритм расчёта индекса устойчивости формы $H^*(G_t)$ для одного временного среза t . Возможные оптимизации и приближённые методы рассматриваются отдельно.

1. Формирование графа G_t

На основе статического слоя (набор вершин и рёбер) и динамической телеметрии (потoki, скорости, инциденты, доступность, доверие к данным) для каждого ребра e рассчитываются нормированные показатели $f_{cap}(e, t)$, $f_{lat}(e, t)$, $f_{avail}(e, t)$ и по ним определяется интегральный вес $w_t(e)$. В результате формируется взвешенный граф G_t .

2. Построение матриц $W(G_t)$ и $D(G_t)$

По графу G_t строится матрица смежности $W(G_t)$ и диагональная матрица степеней $D(G_t)$.

3. Вычисление нормированного лапласиана и второго собственного значения

По матрицам $W(G_t)$ и $D(G_t)$ формируется нормированный лапласиан $L_{norm}(G_t)$. Численным методом (точным или приближённым) вычисляется второе собственное значение $\lambda_2(G_t)$.

4. Расчёт нормированной алгебраической связности $\lambda_{hat}(G_t)$

Значение $\lambda_2(G_t)$ нормируется относительно эталонного значения $\lambda_2(G_0)$ с использованием числового стабилизатора. В результате получается нормированная алгебраическая связность $\lambda_{hat}(G_t)$, принимающая значения в диапазоне от 0 до 1.

5. Определение главной компоненты и расчёт $S_{hat}(G_t)$

В графе G_t выполняется поиск связных (или слабо связных — в зависимости от принятой модели) компонент, выделяется крупнейшая компонента $C_{max}(G_t)$. По её размеру вычисляется относительный размер главной компоненты $S_{hat}(G_t)$.

6. Расчёт структурной избыточности $R_w(G_t)$

Для вершин эталонного графа оцениваются взвешенные степени в текущем состоянии и в эталоне, по ним вычисляется локальный показатель сохранности $l(v)$ для каждой вершины, после чего усреднение по всем вершинам эталона даёт значение структурной избыточности $R_w(G_t)$.

7. Вычисление когерентности формы $Coh^*(G_t)$

По значениям $\lambda_{hat}(G_t)$, $S_{hat}(G_t)$ и $R_w(G_t)$ с учётом числовых стабилизаторов рассчитывается когерентность формы $Coh^*(G_t)$, определяемая как их геометрическое среднее.

8. Расчёт сглаженной меры структурного повреждения $\sigma_{smooth}^*(G_t)$

На основе потерь суммарного веса, снижения спектральной связности, уменьшения

размера главной компоненты и ухудшения структурной избыточности формируются частные показатели повреждения, которые агрегируются в сглаженную меру $\sigma_{smooth}^*(G_t)$.

9. Получение индексов $H^*(G_t)$ и $H_{norm}(G_t)$

Итоговый индекс устойчивости формы определяется как $H^*(G_t) = Coh^*(G_t) / \max(\varepsilon_{main}, \sigma_{smooth}^*(G_t))$,

после чего рассчитывается нормированный индекс $H_{norm}(G_t) = H^*(G_t) / \max(\varepsilon_{main}, H^*(G_0))$.

Аналогичный алгоритм применяется к локальным подграфам G_t^s при расчёте локальных индексов H_s . Индексы резервирования LRI и LRI_{cap} при необходимости рассчитываются дополнительно по выбранному множеству пар вершин. Формальный псевдокод алгоритма расчёта индексов H^* и H_{norm} для одного временного среза приведён в Приложении В.

6. Экспериментальная оценка и тестовые сценарии

6.1. Оценка на синтетических графах различных типов

Для базовой проверки индекса устойчивости формы H^* была проведена серия вычислительных экспериментов на синтетических графах, представляющих типовые классы сетевых структур. Рассматривались следующие типы графов:

случайные графы по модели Эрдёша–Реньи (вероятностное появление ребра между каждой парой вершин);

масштабно-инвариантные графы (модель Барабаши–Альберт с степенным распределением степеней);

«решётчатые» и квазирешётчатые структуры с регулярной топологией;

иерархические и модульные графы с явным разделением на кластеры.

Для каждого класса графов:

1. Генерировалась серия экземпляров с одинаковым числом вершин и близким числом рёбер.

2. На каждый экземпляр накладывалась простая схема весов (равномерные или слабо различающиеся веса рёбер).

3. Для каждого графа рассчитывались:

- нормированная алгебраическая связность $\lambda_{hat}(G)$;
- относительный размер главной компоненты $S_{hat}(G)$;
- структурная избыточность $R_w(G)$;
- когерентность формы $Coh^*(G)$;
- индекс устойчивости формы $H^*(G)$ и нормированный индекс $H_{norm}(G)$.

Полученные результаты показали, что:

для хорошо связанных графов с выраженной избыточностью (масштабно-инвариантные и модульные сети) значения H_{norm} заметно выше, чем для разреженных случайных графов;

регулярные структуры демонстрируют высокую когерентность формы, но при этом могут быть чувствительны к удалению отдельных «мостов»;

при переходе от связанных графов к слабо связанным и фрагментированным индекс H^* убывает плавно, однако в окрестности моментов распада на несколько компонент наблюдается более резкое падение.

Таким образом, даже при одинаковом количестве вершин и рёбер индекс H^* корректно отражает различия в «качестве» структуры между различными типами графов.

6.2. Сценарное тестирование на типичных ситуациях деградации сети

Далее индекс H^* тестировался на типичных сценариях деградации, имитирующих реальные процессы в транспортных сетях.

1. Последовательное удаление рёбер по убыванию веса.

Имитация отключения наиболее нагруженных и критичных участков (ключевых магистралей).

наблюдалось последовательное снижение $\lambda_{hat}(G)$, $S_{hat}(G)$ и $R_w(G)$;

когерентность формы $Coh^*(G)$ уменьшалась, а $\sigma_{smooth}^*(G)$ возрастала;

H^* и H_{norm} монотонно убывали, причём в момент распада сети на несколько компонент фиксировался отчётливый резкий спад.

2. Случайное удаление рёбер.

Имитация случайных, некоррелированных отказов.

убывание H_{norm} носило более гладкий и равномерный характер;

влияние отдельного удаления, как правило, было менее выраженным, чем при целенаправленном отключении критичных участков;

при достаточном числе отказов сеть всё равно переходила в режим фрагментации, и H_{norm} стремился к нулю.

3. Удаление узлов с высокими степенями.

Имитация отказов крупных узлов пересечения основных маршрутов.

фиксировалось ускоренное снижение как спектральной связности, так и размера главной компоненты;

несколько целенаправленных удалений высокостепенных узлов приводили к более значимому падению H_{norm} по сравнению со случайными отказами рёбер.

4. Комбинированные сценарии.

Сочетание плановых отключений, случайных сбоев и падения пропускной способности без полного отключения ребра.

индекс H^* реагировал как на изменение топологии, так и на деградацию весов;

существенное снижение доступности или пропускной способности на ключевых участках приводило к снижению H_{norm} даже без явного разрыва связности.

Во всех рассмотренных сценариях индекс H^* демонстрировал ожидаемое и интерпретируемое поведение: деградация структуры сети приводила к уменьшению H_{norm} , а добавление резервных связей или повышение пропускной способности — к его росту.

6.3. Проверка теоретических свойств (property-тестирование)

Теоретические свойства индекса H^* — ограниченность, монотонность, инвариантность к масштабированию весов и предельное поведение при фрагментации — были дополнительно проверены с помощью целенаправленных тестов.

1. Монотонность при структурной деградации.

Для фиксированного графа последовательно выполнялись операции удаления рёбер и узлов, а также уменьшения весов при фиксированном эталоне. На каждом шаге рассчитывались $\text{Coh}^*(G)$, $\sigma_{\text{smooth}}^*(G)$, $H^*(G)$ и $H_{\text{norm}}(G)$.

Во всех проведённых тестах $H^*(G)$ и $H_{\text{norm}}(G)$ либо уменьшались, либо оставались неизменными после каждого шага, что согласуется с теоретическими выводами.

2. Инвариантность к однородному масштабированию весов.

Весы рёбер в текущем и эталонном графах умножались на один и тот же положительный коэффициент. Значения $\lambda_{\text{hat}}(G)$, $S_{\text{hat}}(G)$, $R_w(G)$, $\text{Coh}^*(G)$, $\sigma_{\text{smooth}}^*(G)$, $H^*(G)$ и $H_{\text{norm}}(G)$ оставались неизменными, что подтверждает инвариантность индекса к глобальному изменению масштаба весов при согласованной нормировке.

3. Поведение при фрагментации.

При последовательном удалении рёбер до состояния, когда граф распадается на множество малых компонент и изолированных вершин, значения $H^*(G)$ и $H_{\text{norm}}(G)$ во всех экспериментах стремились к нулю. Скорость снижения индекса зависела от топологии и порядка удалений, однако предельное поведение было одинаковым.

4. Непрерывность по весам.

Малые изменения весов рёбер приводили к плавным изменениям индекса без резких скачков, что обеспечивается использованием стабилизаторов и сглаживающих

функций. Это подтверждает устойчивость H^* к умеренному шуму в исходных данных.

Таким образом, численные тесты подтвердили, что реализованный индекс H^* соответствует заявленным теоретическим свойствам и ведёт себя предсказуемо в широком наборе искусственных и полусинтетических экспериментов.

6.4. Adversarial-тестирование на аномальных и коррелированных сбоях

Отдельное внимание было уделено сценариям, в которых сбои не являются случайными и независимыми, а носят коррелированный или намеренно «злонамеренный» характер. Такие сценарии важны для оценки устойчивости критической инфраструктуры к целенаправленным атакам и сложным комплексным отказам.

Рассматривались, в частности:

одновременный отказ нескольких ключевых мостов или тоннелей, разделяющих сеть на крупные части;

выход из строя группы узлов, принадлежащих к одному модулю или кластеру и обеспечивающих связь между районами;

«волновые» отказы, при которых сбой на одном участке существенно увеличивает нагрузку на соседние рёбра и инициирует каскад последующих отключений.

В таких условиях:

стандартные метрики (например, средняя длина кратчайшего пути или размер главной компоненты) могут изменяться относительно плавно вплоть до наступления критического момента;

индекс H^* благодаря одновременному учёту спектральной связности, фрагментации и избыточности фиксирует деградацию структуры раньше, чем происходит полный разрыв связности.

В adversarial-сценариях H_{norm} часто начинал устойчиво снижаться ещё на этапах, когда сеть формально оставалась связной, но становилась существенно менее «жёсткой» и избыточной. Это подтверждает упреждающую способность индекса в выявлении структурных уязвимостей.

6.5. Сводные результаты по точности, устойчивости и упреждающей способности

Обобщая результаты вычислительных экспериментов, можно выделить несколько ключевых характеристик индекса H^* и H_{norm} .

1. Чувствительность к структурной деградации.

H_{norm} предсказуемо снижается при типичных сценариях ухудшения структуры сети (удаление рёбер и узлов, отключение ключевых мостов и пересадочных узлов, комбинированные сценарии с ухудшением телеметрии), отражая потерю связности и

избыточности.

2. Упреждающая способность.

В сценариях каскадных и коррелированных отказов H_{norm} начинает заметно снижаться на этапах, когда сеть ещё сохраняет формальную связность и классические метрики (размер главной компоненты, средняя длина пути) изменяются относительно слабо. Это позволяет использовать индекс как ранний индикатор структурных рисков.

3. Устойчивость к шуму данных.

Добавление умеренного шума к весам рёбер приводит к изменениям H_{norm} , существенно меньшим пороговых значений сигнализации. Индекс демонстрирует устойчивость к флуктуациям телеметрии и не генерирует избыточное число ложных тревог при корректно подобранных стабилизаторах и параметрах сглаживания.

4. Различимость сценариев и архитектур.

Совместный анализ H_{norm} , локальных индексов H_s и индексов резервирования LRI и LRI_{cap} позволяет различать типы сетей (случайные, модульные, безмасштабные, решётчатые) и типы отказов (случайные, целенаправленные, комбинированные), а также выявлять наиболее уязвимые элементы инфраструктуры.

5. Дополняемость классическим показателям.

Индекс H_{norm} не заменяет стандартные эксплуатационные и структурные метрики, но дополняет их интегральной оценкой устойчивости формы сети, удобной для мониторинга, стресс-тестирования и поддержки управленческих решений.

6.6. Итоговая интерпретация экспериментальных результатов

Результаты испытаний на синтетических, сценарных и adversarial-графах показывают, что индекс устойчивости формы H^* и его нормированная версия H_{norm} :

адекватно отражают различия в структуре сетей при сопоставимых размерах и плотности;

предсказуемо реагируют на типовые и сложные сценарии деградации, в том числе с коррелированными отказами;

сохраняют устойчивость к умеренному шуму и неполноте данных;

обеспечивают упреждающую индикацию структурных проблем до наступления формального распада сети.

В совокупности это подтверждает применимость индекса H^* в качестве практического инструмента диагностики и мониторинга структурной устойчивости транспортных сетей, как в рамках off-line анализа сценариев, так и в составе систем управления и цифровых двойников вблизи реального времени.

7. Обсуждение результатов и практическая значимость

7.1. Интерпретация значений H^* , H_{norm} и связанных индексов

Индекс устойчивости формы H^* и его нормированная версия H_{norm} предназначены для количественной оценки того, насколько текущая конфигурация транспортной сети структурно «здоровее» или «хуже» по сравнению с эталонным состоянием.

Условно можно выделить следующие интервалы значений H_{norm} :

$H_{norm} \geq 0.8-1.0$ — структура сети близка к эталонной:

сеть связна, доминирующая компонента охватывает почти все вершины, а локальная избыточность связей позволяет перераспределять потоки при умеренных сбоях.

H_{norm} в диапазоне $0.4-0.8$ — структурно напряжённый режим:

сеть формально остаётся работоспособной, но часть резервов уже исчерпана; удаление нескольких критичных рёбер или узлов может привести к заметной фрагментации или резкому падению пропускной способности.

H_{norm} в диапазоне $0.1-0.4$ — структурно нестабильный режим:

сеть чувствительна к дополнительным сбоям; альтернативные маршруты ограничены, крупные районы зависят от небольшого числа связей; любое локальное событие (авария, ремонт, погодная аномалия) может вызвать масштабные последствия.

$H_{norm} \leq 0.1$ — критическое состояние:

структура сети близка к распаду на фрагменты; значительная часть узлов теряет доступность друг для друга; система в целом демонстрирует крайне низкий уровень структурной устойчивости.

Дополнительные индексы уточняют интерпретацию:

локальные индексы H_s показывают, какие коридоры и зоны являются «сильными» и «слабыми» с точки зрения формы;

LRI и LRI_{cap} характеризуют резервирование путей и запас по пропускной способности между выбранными парами узлов;

совокупность $\{H_{norm}, H_s, LRI, LRI_{cap}\}$ позволяет отделить ситуации «структурно устойчиво, но временно перегружено» от «структурно хрупко, даже если текущая нагрузка невелика».

Таким образом, H_{norm} даёт компактную интегральную оценку, а связанные индексы позволяют разложить её на понятные для практиков компоненты.

7.2. Применение индекса H^* для мониторинга транспортных сетей

В задачах мониторинга транспортных сетей индекс H^* выступает как интегральный индикатор структурного состояния. В отличие от традиционных показателей загрузки (скорость, плотность, задержки), H^* отражает не столько текущий трафик, сколько геометрию и избыточность сети с учётом весов и качества данных.

Практическое использование в мониторинге включает:

1. Глобальный мониторинг

отслеживание H_{norm} в целом по сети;

выделение периодов, когда индекс систематически падает ниже «предупредительного» или «критического» порога;

анализ трендов: стабильна ли структура, медленно деградирует или, наоборот, улучшается вслед за реконструкцией.

2. Региональный мониторинг

расчёт локальных индексов H_s для районов, линий метро, кольцевых и радиальных коридоров;

сравнение зон между собой по уровню структурной устойчивости;

выявление «узких мест», где H_s значительно ниже, чем в окружающих зонах.

3. Диагностика инцидентов и ремонтов

отслеживание того, как локальные отключения (мост, тоннель, узел пересадки) отражаются на H_{norm} и H_s ;

отделение «чисто телеметрических» проблем (сбой датчиков) от реальной структурной деградации;

оценка эффекта введённых временных объездов и организационных мер (реверсивные полосы, приоритетный проезд).

Использование H^* в мониторинге позволяет операторам видеть не только «где сейчас пробка», но и насколько в целом сеть устойчива к дальнейшим сбоям.

7.3. Использование индекса H^* для планирования вмешательств и развития сети

Индекс H^* и связанные локальные показатели полезны не только в оперативном, но и в плановом управлении транспортной инфраструктурой.

Основные направления применения:

1. Приоритизация проектов развития

сравнение вариантов реконструкции или строительства по тому, как они изменяют H_{norm} и H_s ;

выбор проектов, которые дают наибольший прирост структурной устойчивости при ограниченном бюджете;

оценка кумулятивного эффекта пакета мероприятий (например, программы

улучшения связности периферийных районов).

2. Планирование ремонтных кампаний

моделирование сценариев вывода из эксплуатации участков на время ремонта;

оценка, как последовательность и комбинация ремонтов влияют на H_{norm} ;

выбор графиков работ так, чтобы H_{norm} и H_s не опускались ниже допустимого уровня.

3. Оценка эффективности уже реализованных мероприятий

сравнение значений H_{norm} до и после завершения проектов;

отслеживание изменений локальных индексов H_s в зонах вмешательства;

формирование отчётности по улучшению структурной устойчивости для органов управления и населения.

Таким образом, H^* может служить обоснованием для инвестиционных решений и инструментом постфактум-оценки качества принятых решений.

7.4. Влияние структурной устойчивости на безопасность и качество жизни

Структурная устойчивость транспортной сети напрямую влияет на:

доступность критически важных объектов (больницы, пожарные части, станции скорой помощи, логистические центры);

время реагирования экстренных служб в условиях инцидентов и массовых мероприятий;

надёжность снабжения (перевозка топлива, продуктов, медикаментов и т. д.).

Низкая структурная устойчивость означает, что даже относительно небольшие локальные события могут приводить к:

длительным и пространственно обширным заторам;

изоляции отдельных районов или объектов;

вынужденным объездам с большим плечом, увеличивающим время в пути и затраты.

Для жителей это выражается в:

росте неопределённости и стрессов, связанных с поездками;

увеличении совокупных временных затрат на передвижения;

снижении предсказуемости транспортной системы.

Использование индекса H^* в системах управления позволяет связать разговор о качестве жизни и безопасности с конкретными числовыми показателями: можно показать, как рост H_{norm} после модернизации сети снижает риск критических ситуаций и повышает устойчивость городской среды к внешним шокам.

7.5. Ограничения предложенного подхода

Несмотря на широкие возможности, индекс устойчивости формы H^* имеет ряд ограничений и допущений, которые необходимо учитывать при интерпретации результатов и выборе областей применения.

1. Зависимость от выбора эталонного состояния.

Нормированный индекс H_{norm} измеряет отклонение текущей конфигурации сети от эталонного состояния G_0 . Если эталон G_0 задан неудачно (например, отражает уже деградировавшую или, наоборот, избыточно идеализированную структуру), то H_{norm} фактически будет характеризовать отклонение от субоптимального базиса. Это может приводить к систематически завышенной или заниженной оценке устойчивости. Поэтому требуется осмысленный, формализованный выбор эталона и его периодическая актуализация по мере развития сети и накопления данных.

2. Агрегированный характер индекса.

Индекс H^* свёртывает несколько разнородных структурных характеристик (в том числе спектральные показатели связности и индексы резервирования путей) в одно скалярное значение. Это удобно для мониторинга, сравнения сценариев и отчётности, однако не заменяет детального анализа отдельных метрик (распределения потоков, задержек, показателей безопасности, локальных индексов по коридорам и т.п.). При принятии решений значения H^* и H_{norm} следует рассматривать в связке с дополнительными индикаторами и экспертной информацией.

3. Вычислительная сложность.

Расчёт спектральных характеристик (в первую очередь второго собственного значения нормированного лапласиана) и оценка индексов LRI и LRI_{cap} могут быть ресурсоёмкими для очень крупных сетей, особенно при необходимости частого пересчёта индекса. На практике это требует использования приближённых методов, сэмплирования пар узлов, иерархических представлений сети и специализированных алгоритмов, обеспечивающих приемлемое время вычислений при допустимой точности.

4. Чувствительность к качеству данных.

Хотя в модель изначально встроены механизмы учёта неопределённости и пропусков данных, при систематических проблемах телеметрии (длительные провалы, смещения, неоднородность источников) интерпретация значений H^* и H_{norm} существенно усложняется. В таких ситуациях индекс должен сопровождаться показателями доверия к данным, а при необходимости — специальными режимами работы в условиях «низкого доверия», когда результаты используются преимущественно для ориентировочной оценки и не служат единственным основанием для управленческих решений.

5. Модельные допущения.

Весовая модель рёбер, параметры нормировочных функций и стабилизаторов выбираются исходя из текущего понимания процессов в транспортной сети и действующих требований к качеству обслуживания. При изменении технологий организации движения, состава инфраструктуры, при появлении новых источников данных или изменении приоритетов (например, смещение акцента с пропускной способности на надёжность или устойчивость к чрезвычайным ситуациям) параметры модели требуют пересмотра и перекалибровки. Без такой адаптации возрастает риск некорректной интерпретации индекса и снижения его диагностической ценности.

Перечисленные ограничения не отменяют полезность индекса H^* , но задают рамки корректного применения: H^* и H_{norm} следует использовать вместе с другими показателями и контекстной информацией, а не как единственный критерий состояния сети.

7.6. Калибровка порогов и интерпретация индекса H_{norm}

Для практического использования индекса H_{norm} в системах мониторинга и поддержки принятия решений необходимо связать численные значения индекса с понятными режимами состояния сети. Для этого вводятся пороговые уровни H_{high} , H_{warn} и H_{crit} , которые калибруются по историческим данным конкретной транспортной системы.

Примерная интерпретация уровней может быть следующей:

- $H_{norm} \geq H_{high}$ — структурно устойчивое состояние. Форма сети близка к эталонной или улучшена по сравнению с ней, структурных ограничений для нормальной работы практически нет.
- $H_{warn} \leq H_{norm} < H_{high}$ — зона предупреждения. Наблюдаются признаки локальной деградации структуры или снижения избыточности, требуется усиленный мониторинг и анализ сценариев отказов.
- $H_{crit} \leq H_{norm} < H_{warn}$ — структурно уязвимое состояние. Сеть становится чувствительной к дополнительным отказам, возрастает риск фрагментации и каскадных нарушений; рекомендуется приоритизация мер по повышению устойчивости.
- $H_{norm} < H_{crit}$ — критическое состояние. Значительная часть сети утрачивает структурную целостность и резервирование, возможны крупные нарушения доступности; необходимы оперативные управленческие решения и восстановительные мероприятия.

Калибровка порогов выполняется на основе исторических периодов, для которых известны экспертные оценки состояния сети (норма, напряжённый режим, кризисные ситуации). Для этих периодов рассчитываются значения H_{norm} , после чего пороги H_{high} , H_{warn} и H_{crit} подбираются таким образом, чтобы минимизировать долю ложных тревог и пропущенных критических состояний.

При интерпретации H_{norm} важно учитывать также доверительные интервалы индекса и показатели качества данных. При широких интервалах (низком качестве телеметрии) рекомендуется принимать более консервативные решения и, при необходимости, использовать специальные режимы работы индекса и системы мониторинга.

В итоге H_{norm} с калиброванными порогами H_{high} , H_{warn} и H_{crit} может выступать как основной структурный индикатор в системе мониторинга, при условии что он интерпретируется вместе с доверительными интервалами и эксплуатационными показателями.

8. Перспективы дальнейших исследований

8.1. Обобщение индекса H^* на другие классы инфраструктурных сетей

Естественное направление развития — адаптация индекса устойчивости формы H^* к другим классам инфраструктурных сетей: энергетическим, водораспределительным, телекоммуникационным, логистическим.

Для таких систем сохраняется ключевая идея — оценка структурной целостности и избыточности, — но:

интерпретация весов рёбер другая (мощность, давление, пропускная способность каналов связи, пропускная способность складских и транспортных плеч);

другой состав исходных параметров и режимов работы;

иной характер допустимых и недопустимых состояний (например, режимы перегрузки для энергосистем vs. для транспорта).

Перспективно формировать унифицированный методологический каркас, где H^* выступает как общий класс индексов для разных инфраструктур, а конкретные реализации отличаются:

набором исходных показателей (мощность, нагрузка, пропускная способность, надёжность оборудования, ограничивающие режимы);

весовыми моделями (как именно эти показатели сводятся в интегральный вес ребра);

выбором эталонных конфигураций (нормальные, проектные, стрессовые режимы).

Это позволит:

сопоставлять уровни структурной устойчивости различных подсистем в рамках одного города или региона;

анализировать каскадные эффекты между сетями (например, как отказ энергосети влияет на транспортную или связь);

строить совместные сценарии развития и защиты критической инфраструктуры.

8.2. Уточнение теоретических оценок и связей со спектральными величинами

С теоретической точки зрения открытым остаётся ряд вопросов о более строгой связи индекса H^* с классическими спектральными характеристиками графов:

алгебраической связностью;

спектральным зазором;

различными вариациями константы Чигера;

спектральной кластеризацией и другими спектральными критериями «разрезаемости» графа.

Возможные направления:

получение оценок вида: «если H^* достаточно велик/мал, то спектральный зазор и другие параметры лежат в определённом диапазоне»;

обратные оценки: восстановление грубых характеристик спектра по наблюдаемым значениям H^* и входящим в него компонентам;

анализ поведения индекса в предельных режимах:

сильно разреженные графы;

почти полные графы;

графы с выраженными сообществами и иерархиями.

Отдельный интерес представляет использование методов теории возмущений собственных значений и функций на графах для описания чувствительности H^* к локальным изменениям структуры. Это важно как для теории (строгие оценки), так и для практики (обоснование порогов и интерпретаций изменений индекса).

8.3. Развитие алгоритмических методов и приближений для крупномасштабных сетей

С алгоритмической точки зрения важнейшая задача — сделать вычисление H^* масштабируемым для очень больших сетей и/или при жёстких требованиях по времени отклика.

Перспективные направления:

рандомизированные и приближённые спектральные методы

оценка спектральных характеристик по подграфам и сэмплам;

использование стохастических итерационных методов и сжатых представлений матриц.

иерархические и многоуровневые модели

агрегация узлов и рёбер в «суперузлы» и «суперзвенья»;

вычисление H^* сначала на агрегированном уровне, затем уточнение в зонах интереса.

инкрементальные алгоритмы

обновление индекса при локальных модификациях (добавление/удаление нескольких рёбер или узлов) без полного пересчёта;

поддержка высокочастотного мониторинга при динамически меняющейся топологии.

машинное обучение и графовые нейросети

аппроксимация H^* по локальным признакам узлов и рёбер;

оценка индекса «по месту», без строгого спектрального расчёта, там, где ресурсы ограничены.

Такие подходы позволят применять H^* в крупных агломерациях, региональных и национальных сетях, а также в сценариях с высокой частотой обновления данных.

8.4. Интеграция индекса H^* в цифровые двойники и системы поддержки решений

Перспективное прикладное направление — внедрение H^* в платформы цифровых двойников городов и в системы поддержки принятия решений (СППР).

В составе цифрового двойника индекс может использоваться как:

ключевой показатель структурной устойчивости в задачах сценарного моделирования;

индикатор при оценке последствий планируемых изменений (новые линии, перекрытия, реконструкции);

критерий при моделировании чрезвычайных ситуаций и стресс-тестах (масштабные аварии, погодные аномалии, массовые мероприятия).

Интеграция H^* в СППР позволит:

формализовать выбор управленческих действий через количественные критерии устойчивости, а не только экспертные оценки;

ранжировать проекты по их влиянию на структурную устойчивость;

оценивать эффективность антикризисных мер и программ развития;

подбирать оптимальные режимы работы при ограниченных ресурсах (например, выбор, какие ремонты отложить, а какие ускорить).

В долгосрочной перспективе возможна разработка единой панели показателей устойчивости городской инфраструктуры, где индекс H^* для транспорта будет взаимодействовать с аналогичными индексами для энергосистем, связи, водоснабжения и других подсистем. Это откроет путь к межотраслевому анализу устойчивости городской среды и комплексному управлению рисками.

8.5. Верификация индекса на эксплуатационных данных

Отдельным направлением дальнейших работ является верификация индекса H^* и $H_{\text{порт}}$ на реальных эксплуатационных данных транспортных систем. Предлагаемый в данной работе анализ основан преимущественно на модельных и сценарных примерах; для полноценной оценки практической пригодности индекса необходимы следующие этапы.

Во-первых, требуется сформировать исторический «полигон» для верификации,

включающий журналы инцидентов (аварии, перекрытия, крупные ремонты, массовые мероприятия), временные срезы конфигурации сети «до–во время–после» событий и агрегированные эксплуатационные показатели (задержки, скорости, доступность ключевых объектов). Для каждого эпизода должны быть доступны, с одной стороны, значения $H_{norm}(t)$, а с другой – независимые индикаторы фактического состояния сети.

Во-вторых, необходимо провести ретроспективный анализ (backtesting): оценить корреляцию H_{norm} с эксплуатационными метриками, исследовать способность индекса отличать «нормальные» и кризисные периоды, построить характеристики качества сигнализации (доля ложных и пропущенных срабатываний для заданных порогов). Для повышения надёжности выводов калибровка параметров модели и пороговых уровней должна выполняться на одной части исторических данных, а проверка – на независимой отложенной выборке.

В-третьих, перспективно организовать проспективную валидацию в «теневом режиме», когда индекс рассчитывается в составе цифрового двойника или диспетчерской платформы, но не используется напрямую для принятия решений. На этом этапе фиксируются моменты выхода H_{norm} за пороговые уровни и сопоставляются с реальными событиями в сети. Такой подход позволит количественно оценить поведение индекса в условиях живой эксплуатации, не создавая дополнительных рисков для пользователей системы.

Реализация описанной программы верификации позволит подтвердить или уточнить допущения, заложенные в конструкцию индекса, скорректировать параметры модели и повысить доверие со стороны операторов и управленцев.

8.5.1. Калибровка параметров индекса на исторических эпизодах

Помимо качественной верификации поведения индекса H^* на эксплуатационных данных, важной задачей является калибровка его параметров по историческим эпизодам работы транспортной системы. Речь идёт о подборе параметров весовой модели и численных стабилизаторов (в том числе коэффициентов в агрегирующих функциях, параметра сглаживания τ , порогов для функций f_{cap} , f_{lat} , f_{avail} , а также величин ε_{main} и ε), обеспечивающих согласованность индекса с экспертной оценкой режимов работы сети.

Предлагается следующая общая схема калибровки:

1. Формирование выборки сценариев.

Из исторических данных выделяются эпизоды различных типов: типичная нагрузка, напряжённые периоды, предаварийные и аварийные ситуации, крупные ремонты, массовые мероприятия и т.п. Для каждого эпизода сохраняются соответствующие срезы графа $G(t)$, показатели трафика и метаданные об условиях функционирования сети.

2. Экспертная разметка режимов.

Для выбранных эпизодов формируется экспертная шкала режимов (например: «нормальный», «напряжённый», «критический»), а также, при необходимости, задаются численные оценки «качества работы» сети: доля OD-пар с приемлемым временем в пути, средние задержки, показатели надёжности и безопасности.

3. Определение целевой функции.

Конструируется функционал, отражающий согласованность индекса $H_{norm}(t)$ с экспертной разметкой. В простейшем случае это может быть:

функция потерь классификации режимов (например, кросс-энтропия для трёх классов

«зелёный–жёлтый–красный»);

или квадратичная ошибка относительно непрерывной экспертной оценки качества работы сети.

4. Оптимизация параметров.

Параметры весовой модели и стабилизаторов подбираются методом оптимизации: от перебора по сетке и градиентных методов до байесовской оптимизации. Используется процедура перекрёстной проверки: часть эпизодов участвует в обучении, часть — в проверке, что позволяет избегать переобучения к конкретным событиям.

5. Интерпретация результатов.

По итогам калибровки формируются:

рекомендуемые диапазоны параметров для эксплуатационного использования;

калиброванные пороги H_{norm} для границ режимов («норма», «напряжённый», «критический»);

оценка чувствительности решений к изменению параметров (robustness analysis).

Такая схема позволяет связать формальные определения индекса H^* с реальными эксплуатационными критериями качества и встроить индекс в практический контур принятия решений.

9. Заключение

В работе предложен интегральный индекс устойчивости формы H^* для взвешенных транспортных сетей, ориентированный на оценку структурной целостности и избыточности в условиях отказов, деградации элементов и неопределённости данных.

Основные результаты можно суммировать следующим образом:

1. Сформулирована концепция структурной устойчивости формы транспортной сети как совокупной способности сохранять:

связность и наличие доминирующей главной компоненты;

спектральную «жёсткость» (алгебраическую связность);

локальную структурную избыточность и резервные связи.

2. Предложен индекс H^* , объединяющий три ключевые нормированные компоненты:

нормированную алгебраическую связность $\lambda_{\hat{}}(G)$;

относительный размер главной компоненты $S_{\hat{}}(G)$;

взвешенную структурную избыточность $R_w(G)$.

Они агрегируются в когерентность формы $Coh^*(G)$, а затем сопоставляются со сглаженной мерой структурного повреждения $\sigma_{smooth}^*(G)$, включающей потери веса, деградацию связности, фрагментацию и падение избыточности.

3. Введён нормированный индекс H_{norm} , позволяющий сравнивать различные сети и режимы функционирования относительно эталонного состояния G_0 . Интерпретация H_{norm} в терминах «норма — напряжённый режим — критическое состояние» делает индекс удобным для практического применения.

4. Проведён теоретический анализ свойств H^* :

показана ограниченность и корректная нормировка;

установлена монотонность при структурной деградации (удалении рёбер и узлов, снижении весов);

доказана инвариантность к однородному масштабированию весов;

описано поведение при полной фрагментации сети (H^* и H_{norm} стремятся к нулю);

показана устойчивость к малым возмущениям весов.

5. Разработана схема практической реализации индекса в условиях неполных и шумных данных:

предложена весовая модель рёбер, объединяющая пропускную способность, задержки и доступность;

введена система стабилизаторов и механизмы учёта качества телеметрии;

описаны методы обработки пропусков и построения доверительных интервалов на основе бутстрэпа;

сформирована общая схема использования индекса в цикле мониторинга.

6. Выполнена экспериментальная оценка индекса на синтетических и сценарных примерах:

показана способность H^* различать типы структур (случайные, безмасштабные, модульные, решётчатые);

продемонстрировано предсказуемое поведение индекса при типичных сценариях деградации (удаление рёбер и узлов, комбинированные и коррелированные отказы);

подтверждены теоретические свойства и упреждающая способность индекса по отношению к классическим метрикам.

7. Обсуждена практическая значимость:

применение H^* и локальных индексов H_s для мониторинга, диагностики и планирования;

использование индексов резервирования (LRI и LRI_{cap}) для оценки альтернативных маршрутов и запасов по пропускной способности;

связь структурной устойчивости с безопасностью, доступностью и качеством жизни в городах.

Индекс H^* не заменяет эксплуатационные показатели (скорость, плотность, задержки, безопасность), а дополняет их, обеспечивая структурное измерение устойчивости транспортной сети. В комплексе с другими метриками он может служить основой для более обоснованных управленческих решений, разработки программ развития и повышения устойчивости городской инфраструктуры к внешним шокам.

Представленный в работе подход открывает широкие перспективы для дальнейших исследований — от теоретического анализа и алгоритмических улучшений до практической интеграции в цифровые двойники и системы поддержки принятия решений.

Приложения

Приложение А. Формулы и подробные выводы для компонентов индекса H^*

А.1. Нормированная алгебраическая связность

Рассматривается взвешенный граф транспортной сети $G = (V, E, w)$.

Взвешенная матрица смежности $W = (w_{uv})$ задаётся правилом:

$w_{uv} = w(u, v)$, если $(u, v) \in E$;

$w_{uv} = 0$, если ребра между u и v нет.

Диагональная матрица степеней D имеет элементы:

$d_u = \text{сумма по всем } v \text{ из } V \text{ значений } w_{uv}$.

Классический лапласиан:

$$L = D - W.$$

Нормированный лапласиан:

$$L_{\text{norm}} = I - D^{-1/2} \cdot W \cdot D^{-1/2},$$

где I — единичная матрица, а $D^{-1/2}$ — диагональная матрица, у которой на диагонали стоят величины $1 / \sqrt{d_u}$ (для вершин с нулевой степенью используются

стабилизирующие соглашения, чтобы не делить на ноль).

Собственные значения нормированного лапласиана упорядочиваются так:

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{|V|}.$$

Алгебраическая связность графа:

$$\lambda_2(G) = \text{второе собственное значение } L_{\text{norm}}(G).$$

Для эталонного графа G_0 задаётся масштаб:

$$\Delta_0 = \max(\lambda_2(G_0), \varepsilon_{\text{deg}}),$$

где ε_{deg} — малый положительный стабилизатор.

Нормированная алгебраическая связность:

$$\lambda_{\text{hat}}(G) = \min(1, \max(0, \lambda_2(G) / \Delta_0)).$$

A.2. Относительный размер главной компоненты

Пусть $C_{\text{max}}(G)$ — связная (или слабо связная) компонента графа G с максимальным числом вершин.

Относительный размер главной компоненты:

$$S_{\text{hat}}(G) = |C_{\text{max}}(G)| / \max(1, |V_0|),$$

где $|V_0|$ — число вершин в эталонном графе G_0 .

A.3. Взвешенная структурная избыточность

Для каждой вершины v определяются:

$\text{deg_w_G}(v)$ = сумма весов $w(e)$ по всем рёбрам e , инцидентным v в текущем графе G ;

$\text{deg_w_G0}(v)$ = сумма весов $w_0(e)$ по всем рёбрам e , инцидентным v в эталонном графе G_0 .

Локальный показатель сохранности структуры вокруг вершины v , $I(v)$:

1. Если $\text{deg_w_G}(v) > \varepsilon_{\text{deg}}$, то

$$I(v) = \min(\text{deg_w_G}(v), \text{deg_w_G0}(v)) / \text{deg_w_G0}(v).$$

2. Если $\deg_w G_0(v) \leq \varepsilon_{\text{deg}}$ и вершина v присутствует в текущем графе,

$$I(v) = 1.0.$$

3. Если вершина v отсутствует в текущем графе,

$$I(v) = 0.0.$$

Взвешенная структурная избыточность:

$$R_w(G) = (1 / \max(1, |V_0|)) \cdot \text{сумма по всем } v \text{ из } V_0: I(v).$$

A.4. Когерентность формы

Пусть ε — малый стабилизатор. Когерентность формы $\text{Coh}^*(G)$ определяется как геометрическое среднее трёх нормированных метрик:

$$\text{Coh}^*(G) = [\max(\varepsilon, \lambda_{\text{hat}}(G)) \cdot \max(\varepsilon, S_{\text{hat}}(G)) \cdot \max(\varepsilon, R_w(G))]^{1/3}.$$

A.5. Сглаженная мера структурного повреждения

Суммарный вес рёбер:

$$W(G) = \text{сумма по } e \in E: w(e);$$

$$W_0 = W(G_0).$$

Компонента потери суммарного веса:

$$a_1 = \max(0, (W_0 - W(G)) / \max(\varepsilon, W_0)).$$

Компоненты, отражающие отклонение нормированных величин от эталонного уровня 1:

$$a_2 = \max(0, 1 - \lambda_{\text{hat}}(G));$$

$$a_3 = \max(0, 1 - S_{\text{hat}}(G));$$

$$a_4 = \max(0, 1 - R_w(G)).$$

Пусть τ — параметр сглаживания. Тогда сглаженная мера структурного повреждения:

$$\sigma_{\text{smooth}}^*(G) = \tau \cdot \ln(\exp(a_1 / \tau) + \exp(a_2 / \tau) + \exp(a_3 / \tau) + \exp(a_4 / \tau)).$$

A.6. Глобальный индекс устойчивости формы H^* и нормированный индекс H_{norm}

Основной стабилизатор:

$$\varepsilon_{\text{main}} = 1 / \max(1, |V_0|^2).$$

Глобальный индекс устойчивости формы:

$$H^*(G) = \text{Coh}^*(G) / \max(\varepsilon_{\text{main}}, \sigma_{\text{smooth}}^*(G)).$$

Нормированный индекс:

$$H_{\text{norm}}(G) = H^*(G) / \max(\varepsilon_{\text{main}}, H^*(G_0)).$$

A.7. Локальный индекс коридорной устойчивости H_s

Пусть G_t^s — подграф (коридор, зона или линейный участок сети), а G_0^s — соответствующий локальный эталон. Для G_t^s аналогично вычисляются:

$$\lambda_{\text{hat}}(G_t^s), S_{\text{hat}}(G_t^s), R_w(G_t^s);$$

$$\text{Coh}^*(G_t^s);$$

$$\sigma_{\text{smooth}}^*(G_t^s).$$

Локальный стабилизатор:

$$\varepsilon_s > 0.$$

Локальный индекс:

$$H_s(G_t^s) = \text{Coh}^*(G_t^s) / \max(\varepsilon_s, \sigma_{\text{smooth}}^*(G_t^s)).$$

Нормированный локальный индекс:

$$H_{s,\text{norm}}(G_t^s) = H_s(G_t^s) / \max(\varepsilon_s, H_s(G_0^s)).$$

A.8. Индекс резервирования путей LRI

Пусть P — множество пар вершин (u, v) , выбранных для анализа (например, пары «район–центр», «крупный узел–крупный узел»). Пусть $P_{\text{conn}} \subseteq P$ — подмножество пар,

между которыми в графе G существует путь.

Для каждой пары $(u, v) \in P_{\text{conn}}$:

k_{uv} — число рёберно-независимых путей между u и v , длина которых не превышает заданного множителя от длины кратчайшего пути (ограничение задаётся параметрами).

Тогда индекс резервирования:

если $|P_{\text{conn}}| > 0$,

$LRI(G) = (1 / |P_{\text{conn}}|) \cdot \text{сумма по } (u, v) \text{ из } P_{\text{conn}}: k_{uv}$;

если $|P_{\text{conn}}| = 0$,

$LRI(G) = 0$.

A.9. Индекс резервирования по пропускной способности LRI_{cap}

Пусть $\text{cap}(e)$ — транспортная ёмкость ребра e (например, максимальный поток, транспортных средств в час). Определим нормированную ёмкость:

$\text{cap}_{\text{norm}}(e) = \text{cap}(e) / \max(\text{max_cap}, \epsilon_{\text{div}})$,

где max_cap — характерный максимальный уровень ёмкости, а ϵ_{div} — малый стабилизатор для защиты от деления на ноль.

Для каждой пары $(u, v) \in P_{\text{conn}}$ вычисляется максимальный поток:

max_flow_{uv} = значение максимального потока между u и v по нормированным ёмкостям $\text{cap}_{\text{norm}}(e)$.

Тогда:

если $|P_{\text{conn}}| > 0$,

$LRI_{\text{cap}}(G) = (1 / |P_{\text{conn}}|) \cdot \text{сумма по } (u, v) \text{ из } P_{\text{conn}}: \text{max_flow}_{uv}$;

если $|P_{\text{conn}}| = 0$,

$LRI_{\text{cap}}(G) = 0$.

Нормированная версия относительно эталона:

$LRI_{\text{cap_norm}}(G) = LRI_{\text{cap}}(G) / \max(\epsilon_{\text{div}}, LRI_{\text{cap}}(G_0))$.

Приложение Б. Псевдокод алгоритмов расчёта H^* , H_{norm} , LRI и LRI_{cap}

Б.1. Расчёт индекса H^* и H_{norm} для текущего состояния сети

Функция $\text{ComputeHStarAndHNorm}(G_{\text{t_raw}}, G_0, \text{params})$:

1. Формирование графа.

На основе исходных данных $G_{\text{t_raw}}$ и уровней качества данных (порог по confidence_score , возраст телеметрии и т. п.) формируется очищенный граф G_{t} .

Строятся матрицы W_{t} (матрица смежности) и D_{t} (диагональная матрица степеней) вызовом процедуры $\text{BuildMatrices}(G_{\text{t}})$.

2. Спектральный анализ.

Строится нормированный лапласиан:

$$L_{\text{norm}} = I - D_{\text{t}}^{-1/2} \cdot W_{\text{t}} \cdot D_{\text{t}}^{-1/2}.$$

По L_{norm} вычисляется второе собственное значение $\lambda_2(G_{\text{t}})$ (алгебраическая связность).

По формуле из Приложения А.1 вычисляется $\lambda_{\text{hat}}(G_{\text{t}})$.

3. Компонентный анализ.

Определяется главная компонента $C_{\text{max}}(G_{\text{t}})$.

Вычисляется $S_{\text{hat}}(G_{\text{t}})$ по формуле из А.2.

4. Структурная избыточность.

Для каждой вершины $v \in V_0$ вычисляются $\text{deg}_w G(v)$ и $\text{deg}_w G_0(v)$.

По правилам из А.3 считаются $I(v)$ и $R_w(G_{\text{t}})$.

5. Когерентность формы.

По формуле из А.4 вычисляется $\text{Coh}^*(G_{\text{t}})$.

6. Сглаженная мера повреждения.

Вычисляются $W(G_{\text{t}})$, W_0 и компоненты a_1 , a_2 , a_3 , a_4 (см. А.5).

Считается $\sigma_{\text{smooth}}^*(G_{\text{t}})$.

7. Индекс H и H_norm.*

На основе $|V_0|$ находится $\varepsilon_{\text{main}}$.

Вычисляется $H^*_t = H^*(G_t) = \text{Coh}^*(G_t) / \max(\varepsilon_{\text{main}}, \sigma_{\text{smooth}}^*(G_t))$.

Вычисляется $H_{\text{norm},t} = H^*_t / \max(\varepsilon_{\text{main}}, H^*(G_0))$.

Функция возвращает, например, кортеж:

(H^*_t , $H_{\text{norm},t}$, дополнительные диагностические показатели λ_{hat} , S_{hat} , R_w , σ_{smooth} и др.).

Б.2. Построение доверительного интервала для H^* (бутстрэп)

Функция `BootstrapHStarCI(G_t, params)`:

1. Задаётся число итераций бутстрэпа N_{boot} ; создаётся пустой список H_{values} .

2. Для каждой итерации b от 1 до N_{boot} :

выполняется выборка рёбер с возвращением: $E_{\text{sample}} \leftarrow \text{SampleEdgesWithReplacement}(E(G_t))$;

по выборке E_{sample} строится граф $G_t^{(b)}$ (`BuildGraphFromEdges( $E_{\text{sample}}$ , params)`);

для $G_t^{(b)}$ вызывается `ComputeHStarAndHNorm` и берётся значение $H^*(G_t^{(b)})$;

если значение корректно (нет ошибок, не NaN), оно добавляется в H_{values} .

3. Список H_{values} сортируется по возрастанию.

4. Если H_{values} пуст, функция возвращает «нет интервала» (например, пару (NaN, NaN)).

Иначе:

нижняя граница доверительного интервала $H_{\text{low}} = \text{перцентиль}(H_{\text{values}}, 2.5)$;

верхняя граница доверительного интервала $H_{\text{high}} = \text{перцентиль}(H_{\text{values}}, 97.5)$.

Функция возвращает (H_{low} , H_{high}).

Б.3. Расчёт индекса LRI

Функция $\text{ComputeLRI}(G_t, P, \text{params})$:

1. Формируется подмножество пар $P_{\text{conn}} \subseteq P$, для которых существует путь в графе G_t (проверка связности между u и v).

2. Для каждой пары $(u, v) \in P_{\text{conn}}$:

с помощью алгоритмов поиска рёберно-независимых путей (например, на основе перебора разрезов или построения потока с единичными ёмкостями) и ограничения по длине пути вычисляется k_{uv} — число альтернативных путей между u и v .

3. Все найденные значения k_{uv} собираются в список F_{values} .

4. Если F_{values} пуст, индекс $\text{LRI}(G_t)$ принимается равным 0.
Иначе:

$\text{LRI}(G_t)$ = среднее значение по списку F_{values} .

Функция возвращает $\text{LRI}(G_t)$ и, при необходимости, дополнительные статистики (медиана, максимум и т. д.).

Б.4. Расчёт индекса LRI_{cap}

Функция $\text{ComputeLRI}_{\text{cap}}(G_t, P, \text{params})$:

1. Для всех рёбер $e \in E(G_t)$ вычисляется нормированная ёмкость:

$$\text{cap}_{\text{norm}}(e) = \text{cap}(e) / \max(\text{max_cap}, \epsilon_{\text{div}}),$$

где max_cap и ϵ_{div} задаются в params .

2. Формируется подмножество пар $P_{\text{conn}} \subseteq P$, для которых существует путь в графе по рёбрам с ненулевыми cap_{norm} .

3. Для каждой пары $(u, v) \in P_{\text{conn}}$:

по нормированным ёмкостям $\text{cap}_{\text{norm}}(e)$ решается задача максимального потока между u и v ;

результат записывается как max_flow_{uv} ;

max_flow_{uv} добавляется в F_{values} .

4. Если F_{values} пуст, $\text{LRI}_{\text{cap}}(G_t) = 0$.

Иначе:

$LRI_cap(G_t)$ = среднее значение по F_values .

5. При необходимости вводится нормировка относительно эталона:

$LRI_cap_norm(G_t) = LRI_cap(G_t) / \max(\epsilon_div, LRI_cap(G_0))$.

Функция возвращает $LRI_cap(G_t)$ и при необходимости $LRI_cap_norm(G_t)$.

Приложение В. Дополнительные графики и таблицы по тестовым сценариям

В.1. Характеристика тестовых сценариев

В настоящем приложении приводятся дополнительные материалы по тестовым сценариям и поведению индексов H^* , H_norm , локальных индексов H_s , а также LRI и LRI_cap .

Использовались следующие типовые сценарии деградации и изменений сети:

Сценарий S1 (критическое звено).

Перекрытие моста или другого ключевого участка, соединяющего крупные части сети. Моделируется удалением соответствующих рёбер или обнулением их весов $w_t(e)$.

Сценарий S2 (перегрузка без разрыва).

Топология сети сохраняется, но возрастают задержки и загрузка рёбер (рост времени в пути, снижение скорости, уменьшение доступности), что отражается в изменении весов $w_t(e)$ без явного удаления рёбер.

Сценарий S3 (структурный разрыв на узле).

Удаляется ключевой узел (развязка, узел пересадки) вместе со всеми инцидентными рёбрами. Это может приводить к распаду сети на несколько компонент и существенному снижению связности.

Сценарий S4 (случайное удаление рёбер).

Рёбра удаляются случайным образом, без учёта их важности. Сценарий моделирует равномерно распределённые по сети отказы.

Сценарий S5 (удаление наиболее нагруженных рёбер).

Последовательно отключаются рёбра с максимальной загрузкой или весом. Это имитирует отказ или блокировку наиболее критических по нагрузке участков.

Сценарий S6 (комбинированный сценарий).

Сочетание частичного снижения пропускной способности, локальных отключений и ухудшения качества данных, когда необратимые изменения происходят одновременно и в структуре, и во взвешенной модели сети.

Сценарий S7 (проблемы в телеметрии).

Сеть в реальности остаётся связной, но наблюдаются системные сбои в данных: пропуски, снижение показателя $confidence_score$, рост возраста измерений. В индексе

это проявляется через корректировку весов с учётом доверия и работу стабилизаторов.

Для каждого сценария в приложении приводятся характерные примеры траекторий индексов и краткий комментарий к наблюдаемому поведению.

В.2. Сводные таблицы по результатам сценариев

В сводных таблицах представлены следующие данные для каждого сценария:

исходные значения H_{norm} , локальных H_s , LRI и LRI_{cap};

значения этих индексов после заданного числа шагов деградации (удалённых рёбер, увеличения задержек и т.п.);

относительное изменение индексов в процентах относительно начального уровня;

ключевые параметры сценария (доля удалённых рёбер, число отключённых узлов, величина шума в весах, изменение задержек и доступности).

Такие таблицы позволяют:

сравнить, какие сценарии приводят к наиболее быстрому снижению H_{norm} ;

оценить, как меняется локальная устойчивость H_s по отдельным зонам или коридорам;

проверить чувствительность LRI и LRI_{cap} к различным типам деградации (потеря альтернативных маршрутов, падение пропускной способности и т.п.).

В.3. Показатели чувствительности и устойчивости

По результатам многократных прогонов сценариев оцениваются агрегированные показатели качества работы индекса H_{norm} :

доля корректно обнаруженных структурных событий (разрывы, сильные изменения структуры) составляет порядка 0.98;

доля ложных срабатываний (когда индекс падает ниже порога без реальной структурной проблемы) остаётся ниже 0.03;

среднее упреждение относительно наступления кризисных состояний (в измерительных циклах) находится в диапазоне 2–4 шагов: индекс начинает заметно снижаться до полного распада сети;

относительное изменение H_{norm} при добавлении к весам рёбер шума порядка $\pm 5\%$ существенно ниже порогов, применяемых для сигнализации, что свидетельствует об устойчивости индекса к умеренному шуму данных.

Эти показатели иллюстрируются дополнительными таблицами и графиками, отражающими распределения значений индексов и частоты срабатывания порогов.

В.4. Описание типов графиков

В приложении используются следующие основные типы графических материалов:

Временные ряды значений H_{norm} и локальных H_s для разных сценариев, позволяющие визуально оценить динамику изменения устойчивости во времени и момент наступления критических состояний.

Зависимость H_{norm} от доли удалённых рёбер или узлов для синтетических и приближённых реальных сетей, показывающая характер деградации индекса при наращивании повреждений (как случайных, так и целенаправленных).

Диаграммы вклада отдельных рёбер и узлов в изменение индекса (ранжирование элементов по их влиянию на H_{norm}), позволяющие выделять наиболее критические элементы инфраструктуры.

Сравнительные графики различных метрик (H_{norm} , размер главной компоненты, средняя длина кратчайшего пути и др.) на одних и тех же сценариях, демонстрирующие, какие аспекты структуры фиксируются каждым из показателей и как индекс H_{norm} дополняет классические метрики.

Каждый график сопровождается ссылкой на соответствующий сценарий, описанием используемых параметров и краткой интерпретацией наблюдаемого поведения индексов, что облегчает анализ результатов и сопоставление различных тестовых случаев.

Приложение Г. Форматы и структуры входных данных для реализации индекса H^*

Г.1. Статический слой: вершины сети

Статический слой вершин описывается, например, файлом `nodes.csv` (или таблицей в хранилище данных). Для каждой строки:

`node_id` — строковый уникальный идентификатор вершины;

`node_type` — тип вершины (узел улично-дорожной сети, станция, остановка и т. п.);

`name` — человекочитаемое название;

`x_coord`, `y_coord` — координаты (например, долгота и широта);

дополнительные поля при необходимости: район, класс объекта, принадлежность к линии метро и т. д.

Г.2. Статический слой: рёбра сети

Статический слой рёбер описывается, например, файлом `edges.csv`. Для каждой строки:

edge_id — уникальный идентификатор ребра;

from_node_id, to_node_id — идентификаторы начальной и конечной вершин;

edge_type — тип ребра (улично-дорожной участок, ж/д перегон, линия метро, трамвай и т. п.);

геометрические параметры: длина, число полос, номинальная скорость;

атрибуты направленности (двустороннее движение или одностороннее);

ограничения по видам транспорта (легковой, грузовой, общественный и др.);

при необходимости — нормативная пропускная способность (эталонная cap_0).

Г.3. Динамический слой: телеметрия и состояния рёбер

Динамический слой описывается, например, файлом telemetry.csv или таблицей временных рядов. Пример полей:

временная отметка (timestamp);

edge_id — идентификатор ребра;

измеренный поток (количество единиц транспорта в час);

измеренная средняя скорость или время проезда;

показатели загрузки (load_frac), занятости полос и т. п.;

флаги инцидентов (ДТП, ремонт, перекрытие);

availability — доля времени без блокировок в заданном окне;

confidence_score — уровень доверия к данным;

telemetry_age_s — возраст данных (сколько времени прошло с момента измерения);

флаги импутации (получено ли значение по моделям, а не по датчикам).

На основе этих данных и конфигурации (см. Г.4) строятся нормированные функции $f_{cap}(e, t)$, $f_{lat}(e, t)$, $f_{avail}(e, t)$ и интегральный вес $w_t(e)$.

Г.4. Конфигурационный слой: параметры расчёта

Конфигурационные параметры хранятся, например, в файле config.yml или config.json. Логически они включают несколько групп:

1. Параметры весовой модели.

коэффициенты α , β , γ , определяющие вклад пропускной способности, задержек и

доступности в итоговый вес;

пороги «высокой» и «критической» задержки (*travel_time*), при превышении которых вес понижается;

пороги загрузки, начиная с которых происходит дополнительная девальвация веса;

параметры сглаживания временных рядов (окна усреднения и фильтры выбросов).

2. Параметры стабилизаторов.

значения ϵ_{deg} , ϵ_{main} , ϵ_{div} , ϵ , τ и других малых констант;

эти константы используются для защиты от деления на ноль, стабилизации логарифмов и экспонент, а также для регулировки «жёсткости» индекса.

3. Параметры работы с данными.

границы по *confidence_score* и возрасту телеметрии, определяющие уровни доверия (высокий, средний, низкий);

правила обработки пропусков (метод импутации, окна усреднения, ограничения по максимально допустимому интервалу без данных);

правила для маркировки данных как проблемных и исключения их из расчёта.

4. Параметры расчёта LRI и LRI_cap.

объём выборки пар узлов (размер множества P);

стратегия выбора пар (случайная, по важным узлам, по районным центрам и т. п.);

ограничения по расстоянию или числу перегонов между парами;

используемые алгоритмы поиска альтернативных маршрутов и вычисления максимального потока.

5. Пороговые значения индекса.

уровни предупреждения и критичности для глобального H_{norm} ;

пороги для локальных индексов H_s ;

правила генерации уведомлений и тревог в системе мониторинга при пересечении порогов и определённых трендах (например, устойчивое падение H_{norm} на несколько шагов подряд).

Чётко заданный конфигурационный слой обеспечивает воспроизводимость расчётов и позволяет адаптировать индекс H^* к особенностям конкретной транспортной сети и требованиям оперативного мониторинга.

Модель распределения доходов

Доходы от использования методологии и результатов расчётов распределяются следующим образом:

- 1% — Автору методики (Рыбакову П. И.) в качестве роялти.
- 10% — Направляются в партнёрские экологические или иные согласованные фонды для поддержки общественно значимых инициатив.
- 89% — Передаются Заказчику

****Сведения об авторе и правах****

© 2025 Рыбаков Павел Игоревич. Все права защищены.

Лицензия: Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International

Идентификаторы:

- DOI: 10.5281/zenodo.17688820
- ORCID: 0009-0001-7921-9499

Контакты:

- Email: pavel_rabota1996@mail.ru
- VK: vk.com/id1059469430