Гравитация и масса в евклидовом пространстве

Поствайкин Павел Евграфович

Аннотация

Настоящая работа посвящена исследованию возможности построения модели масс, распространения импульса и возникновения гравитационных эффектов в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$: могут ли вектора и их хаотичное движение воспроизводить эффекты, подобные гравитации, и образовывать устойчивые в объёме и времени структуры при минимальном наборе физических допущений.

1 Введение

1.1 Принцип построения модели

Строим модель поведения материи в 3-мерном евклидовом пространстве. Материя не исчезает и не появляется — общее количество неизменно. Также не исчезает и не появляется из ниоткуда импульс — вектор средней скорости, которым обладает выделенная порция материи. Материя — есть бесконечно малые и бесконечно делимые числа-вектора, которые всегда движутся с единственной возможной по модулю скоростью $|\mathbf{v}|$ во всех направлениях. Всё пространство полностью заполнено такой материей и плотность материи в выбранном объёме может быть любой начиная от бесконечно близкой к нулю.

1.2 Столкновения

Материя сталкивается в движении непрерывно с окружающей материей. В каждую точку пространства материя входит со всех направлений одновременно, сталкиваясь в точке, и перераспределяется по всем направлениям векторов $|\mathbf{v}|$. В любом бесконечно малом объёме произойдет бесконечное число столкновений.

Выход из любой бесконечно малой области пространства (из точки) — есть результат сложения всех вошедших в момент столкновения в эту область чисел-векторов, имеющих модуль скорости $|\mathbf{v}|$. Вошедшее в точку столкновения количество материи при выходе из точки сохраняется. И сохраняется общий импульс-вектор всей вошедшей в точку столкновения материи. Выходом из каждого столкновения векторов будет неравномерное распределение материи по всем направлениям — по всем векторам с модулем $|\mathbf{v}|$, выходящим из точки столкновения и сохраняющим суммарно импульс всей столкнувшейся материи.

Таким образом, например, каждое число-вектор может быть рассеяно равномерно по всем направлениям только таким же встречным числом-вектором. Результат такого столкновения будет симметричной сферой векторов $|\mathbf{v}|$.

Бесконечно делимая и заполняющая всё пространство материя меняет направления движения, бесконечно разделяясь и смешиваясь со встречной материей. Разделение материи на центры выхода из столкновений и дифференциальные флуктуации при данной плотности являются результатом геометрической невозможности заполнения пространства одинаковыми сферами при любом масштабе дробления и, как следствие, отличие встречных векторов по величинам и направлениям. Если представить изначально полностью уравновешенную среду, где в каждой точке пространства количество материи одинаково и вектора равномерно распределены по всем направлениям, то есть аналогию тепловой смерти, то в следующий же момент будет происходить столкновение сфер векторов, выходящих из всех точек пространства. Это делает возникновение флуктуаций неизбежным и приводит к неоднородному распределению материи по векторам в результате следующих столкновений и неравномерной плотности материи в предельно малых областях пространства. “Высота” таких волн должна быть связана с плотностью материи в пространстве.

1.3 Перемещение

В любой бесконечно малой ограниченной области пространства существуют все возможные вектора материи во всех направлениях. Материя распределена по ним не равномерно и для такой области есть общий суммарный импульс. В выбранной области пространства можно выделить количество не перемещающейся в среднем в пространстве материи (сумма этого набора векторов равна 0) и выделить количество материи, перемещающейся через данную область пространства, и среднее направление движения этой материи и среднюю скорость этого перемещения (то есть импульс).

В фиксированный момент времени все вектора перемещающейся материи будут находиться в полусфере векторов с положительной координатой по оси движения импульса в этой области пространства, но сталкиваться будут со всей материей в этой области пространства и средняя скорость движения импульса вычисляется по общему количеству материи.

Если в область пространства, имеющую некоторое распределение материи по векторам, входит другой импульс, переносимый материей с другим распределением по векторам, то количество материи и их распределения суммируются в результате столкновений.

Выделив и исключив среднее количество не перемещающейся материи (сумма векторов равна 0), получим в этой области количество материи со средней скоростью в направлении суммарного импульса, которая по модулю будет меньше, чем был модуль средней скорости более быстрого импульса до сложения.

Так локально существующий импульс при движении через среду будет терять свою скорость относительно средней скорости этой среды, увеличивая при этом количество перемещаемой в своём направлении материи. При этом существующий импульс в области пространства сохраняется.

1.4 Волны

При движении через неподвижную среду с одинаковым распределением материи по векторам во всех областях пространства плоская однородная волна импульса или радиально симметричная сферическая волна будут сохранять свою скорость. Входя в слой материи, не затронутый волной, материя волны смешивается с материей среды. Сложение по всей поверхности волны произойдёт симметрично. Импульс волны будет распределён по векторам на общее суммарное количество материи в области пространства, через которое двигается волна в данный момент.

Волна в пространстве будет распространяться как фронт давления материи и перемещаться со скоростью от 0 до $|\mathbf{v}|/2$, так как $|\mathbf{v}|/2$ это математическая средняя скорость полусферы векторов радиусом $|\mathbf{v}|$ в любом выбранном направлении.

Вектор материи нормали к фронту волны будет сталкиваться со средой первым, сразу рассеиваясь по сфере векторов и передавая свой импульс встречной материи. Другие вектора фронта волны также будут сталкиваться с материей среды и с материей фронта волны. Импульс, двигающийся в пространстве, входя в более плотную среду, увеличит количество материи в своей волне так что часть материи распределения, превышающая уравновешенную по скорости часть, будет иметь среднюю скорость $|\mathbf{v}|/2$ в результате столкновений и будет снижать скорость до слияния с волной, увеличивая число вовлечённой материи. Аналогично, выходя из более плотной среды в менее плотную, волна будет переносить свой импульс меньшим количеством материи с большей скоростью, растягивая свою длину при выходе в меньшую плотность.

Таким образом импульс волны будет переноситься количеством материи, соответствующим максимальной скорости движения в среде с такой плотностью материи. К скорости $|\mathbf{v}|/2$ волна может приблизиться только в предельно “пустом” пространстве.

2 Моделирование взаимодействий материи

2.1 Материя и плотность

Рассматриваем трёхмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Материя представляет собой векторное числовое значение, содержащееся в области пространства и в каждой области пространства есть материя, объёмная плотность которой ρ_V измеряется в $\left(\frac{\text{Количество материи}}{(\text{Единица расстояния})^3}\right)$ или $[\mathbf{m}/l^3]$.

Каждый бесконечно малый элемент $\mathbf{m}$ можно охарактеризовать только двумя полярными координатами вектора $\mathbf{v}$, модуль которого $|\mathbf{v}| = 1$. А количество $\mathbf{m}$ в дифференциально малом объёме пространства уже числовым значением количества и двумя полярными координатами вектора $\mathbf{v}$.

С этого пункта и далее примем $|\mathbf{v}| = 1\left(\frac{\text{Единица расстояния}}{\text{Единица времени}}\right) = 1[l/t]$ и одновременно принимаем: единица времени определяется длиной полной траектории любой порции материи за период наблюдения. Каждая бесконечно малая порция движется с единственной возможной по модулю скоростью $|\mathbf{v}| = 1$, но в пространстве распространяется как дифференциально малый сектор поверхности сферы $r = |\mathbf{1}|\, t$.

Линейная плотность ρ — величина, измеряемая в $\left(\frac{\text{Количество материи}}{\text{Единица расстояния}}\right)$, которая описывает количество материи вдоль прямой линии — характеристика непрерывного и переменного распределения материи по пространству в одном измерении. Линейная плотность в трёх измерениях “превращается” в объёмную возведением в третью степень $\rho_V = (\rho^3)$. Линейная плотность в нашей модели не является аналогией линейной плотности, принятой в стандартной физике.

Линейная плотность ρ материи в пространстве определяет усреднённую “частоту столкновений” на пути любой порции материи, или иначе: среднее расстояние пути до полного рассеяния первоначального импульса наблюдаемой материи встречными потоками материи на общем фоне флуктуаций в этой плотности ρ.

Общее количество материи в каком-либо объёме V вычисляется через интеграл:

$$M_{\mathbf{m}} = \int_V \rho^3 \, d^3r.$$

Здесь d^3r — это элемент объёма, а интеграл суммирует плотность по всей области V. $M_{\mathbf{m}}$ – скалярная величина — количество материи в выбранном объёме. Например: увеличение количества материи вдвое $2 \cdot M_{\mathbf{m}}$ равнозначно увеличению ρ в $(2^{1/3})$ раза.

Есть векторное поле импульса этой материи $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$. Величина этого поля соответствует произведению объёмной плотности материи $\rho_V = \rho^3(\mathbf{r}, t)$ на векторную сумму скоростей всей материи в данном дифференциальном объёме пространства. Направление указывает, куда движется совокупно материя в этой точке в момент времени t.

При столкновении двух потоков материя смешивается, сохраняя общее количество и импульс, после чего продолжает движение до следующего столкновения в виде сферического неравномерного распределения по всем направлениям.

Рассмотрим, что происходит, когда два потока материи, обозначенные как $\mathbf{P}_1 = \rho_1^3 \mathbf{v}_1 \Delta V$ и $\mathbf{P}_2 = \rho_2^3 \mathbf{v}_2 \Delta V$, сталкиваются в области ΔV точки $\mathbf{r}_0$ в момент времени t_0. Здесь ρ_1 и ρ_2 — плотности потоков, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — их направления движения ($|\overrightarrow{v_1}| = |\overrightarrow{v_2}| = 1$), а ΔV — предельно малый объём.

При столкновении выполняются два закона сохранения:

Сохранение материи: Общее количество материи после столкновения равно сумме до столкновения:

$$M = |\mathbf{M}_1| + |\mathbf{M}_2| = \rho_1^3 \Delta V + \rho_2^3 \Delta V.$$

Сохранение импульса: Импульс — это векторная величина, зависящая от количества материи и её движения:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \rho_1^3 \mathbf{v}_1 \Delta V + \rho_2^3 \mathbf{v}_2 \Delta V.$$

Для общего случая произвольных направлений сталкивающихся векторов материи с количествами $|\mathbf{M}_1|$, $|\mathbf{M}_2|$ предлагается следующая формула распределения выхода из столкновения:

$$\sigma(\overrightarrow{n}, t) = \frac{M}{4\pi[v(t-t_0)]^2} \cdot \frac{|\beta|}{4\pi \sinh|\beta|} \cdot e^{\overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{n}},$$

где $\overrightarrow{\beta}$ — векторный параметр анизотропии; $|\beta| = \sqrt{\overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{\beta}}$ — норма вектора $\overrightarrow{\beta}$.

Направление $\overrightarrow{\beta}$ определяется из условия сохранения импульса $M = m_1 + m_2$; $v(t - t_0) = R$ — радиус сферы распространения.

Векторный параметр $\overrightarrow{\beta}$ определяется из уравнения:

$$L(|\beta|) \cdot \frac{\overrightarrow{\beta}}{|\beta|} = \frac{\overrightarrow{P}}{M},$$

где $L(x) = \left(\coth x - \frac{1}{x}\right)$ — функция Ланжевена, а $\overrightarrow{P} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}$ — результирующий импульс.

Проверка выполнения сохранения количества материи:

$$\int \sigma(\overrightarrow{n}, t)\, dS = \frac{M}{4\pi R^2} \cdot \frac{|\beta|}{4\pi \sinh |\beta|} \int e^{\overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{n}} R^2\, d\Omega = M.$$

Нормировочный множитель $\frac{|\beta|}{4\pi \sinh|\beta|}$ обеспечивает выполнение закона сохранения количества материи.

Сохранение импульса:

$$\int \overrightarrow{n} \sigma(\overrightarrow{n}, t)\, dS = \frac{M}{4\pi R^2} \cdot \frac{|\beta|}{4\pi \sinh |\beta|} \int \overrightarrow{n} e^{\overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{n}} R^2\, d\Omega = M \cdot L(|\beta|) \cdot \frac{\overrightarrow{\beta}}{|\beta|}.$$

Из определения параметра $\overrightarrow{\beta}$ следует, что $L(|\beta|) \cdot \frac{\overrightarrow{\beta}}{|\beta|} = \frac{\overrightarrow{P}}{M}$, поэтому:

$$\int \overrightarrow{n} \sigma(\overrightarrow{n}, t)\, dS = M \cdot \frac{\overrightarrow{P}}{M} = \overrightarrow{P}.$$

Таким образом, закон сохранения импульса выполняется точно.

Предложенная модель обеспечивает последовательное и математически корректное описание процесса столкновения и перераспределения материи для произвольных направлений векторов материи. Это — гипотеза, основанная на предположении, что таким был бы выход материи из ограниченной области предельно малого пространства после бесконечного количества столкновений и смешиваний в ней с условием сохранения материи и импульса внутри.

2.2 Движение выделенной порции материи

После столкновения материя стремится распространяться в виде сферического волнового фронта, что является естественным следствием её распределения во все стороны с постоянной скоростью $|\mathbf{v}| = 1$. Сферический выход сталкивается с окружающей материей. Каждое такое столкновение приводит к разделению и смешению материи, изменяя её направление движения случайным образом. Для выбранного объёма пространства столкновения внутри него приводят к разбеганию материи за его границы, и уменьшение плотности если плотность снаружи меньше.

Суммарный импульс области пространства не продолжает движение как единое целое в одном направлении. Поскольку базовые элементы материи могут двигаться в любом направлении со скоростью $|\mathbf{1}|$, результирующий импульс перераспределяется между множеством новых элементарных векторов, исходящих из точки столкновения. Этот процесс непрерывного смешивания и перераспределения приводит к тому, что любой локализованный импульс или сгусток плотности не остается статичным, а имеет тенденцию к расширению. Фронт, несущий этот импульс, будет распространяться в пространстве подобно волне.

Несмотря на то, что вектора материи движутся с фундаментальной скоростью $|\mathbf{v}|$, максимальная скорость v, с которой может перемещаться в пространстве любой устойчивый сгусток материи или суммарный импульс области пространства как единый волновой процесс, ограничена величиной $v = |\mathbf{v}|/2$. Это ограничение является следствием природы пространства, столкновений и взаимодействий между материей.

2.3 Случайные блуждания

Сначала представим движение по узлам трёхмерной решётки объёмом 1 со скоростью $|\mathbf{v}| = 1$, в которой расположено $(N)^3$ перекрёстков. В статистике доказывается, что в пространстве объёмом 1 с шагом между узлами решётки $(1/N)$, путь случайного блуждания из центра в среднем пройдёт через $(N)^2$ перекрёстков (совершит в среднем $(N)^2$ шагов) чтобы покинуть область, содержащую $(N)^3$ узлов. Время прохождения одного шага $\tau_1 = 1$(время прохождения единицы расстояния)$/N$; время покидания области пространства объёмом 1 из центра 0:

$$t_0 = (N)^2 \cdot \tau_1 = N \cdot (\text{время прохождения единицы расстояния}).$$

Для трёхмерного случайного блуждания на решётке с шагом $(1/N)$ среднее время выхода $\langle t_X \rangle$ из точки 0 через тонкий бесконечный слой, расположенный на фиксированном расстоянии X единиц расстояния вдоль оси x

(т.е. при $x = X \cdot$ (единица расстояния), где $X \gg (1/N)$), пропорционально N: $\langle t_X \rangle \propto N$. Значит время достижения поглощающей плоскости в 3D (с x и бесконечными y и z)

$$\langle t_X \rangle = (X \cdot N)^2 \cdot \tau_1 = (X^2 \cdot N) \cdot (\text{время прохождения единицы расстояния}).$$

Оценим случайное блуждание по всем случайным направлениям в пространстве с фиксированным шагом $L = \left(\frac{1}{N}\right)$ за фиксированное время τ_1, что соответствует скорости $|\mathbf{v}| = 1$. Коэффициент диффузии D для такого трёхмерного случайного блуждания определяется как:

$$D = \frac{(L)^2}{6\tau_1} = \frac{\left(\frac{1(\text{единица расстояния})}{N}\right)^2}{6\frac{1(\text{время прохождения единицы расстояния})}{N}}$$

$$= \frac{1}{6N}\ \frac{(\text{единица расстояния})^2}{(\text{время прохождения единицы расстояния})}.$$

Среднее время t_0 выхода из области сферы диаметром 1 и $R = 1/2$ от центра 0 для случайного блуждания с фиксированным шагом L даётся выражением:

$$t_0 = \frac{R^2}{6D} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{6\left(\frac{1}{6N}\right)} = \frac{N}{4} \cdot 1(\text{время прохождения единицы расстояния}).$$

Для сферы объёмом 1 (радиус $R \approx 0.62$) время выхода составит

$$t_0 \approx 0.38N \cdot 1(\text{время прохождения единицы расстояния}).$$

Определим среднее время выхода $\langle t_X \rangle$ из точки 0 через тонкий бесконечный слой, расположенный на фиксированном расстоянии X единиц расстояния вдоль оси x (т.е. при $x = X \cdot$ (единица расстояния), где X единиц расстояния $\gg L$) для трёхмерного случайного блуждания по всем случайным направлениям в пространстве с фиксированным шагом L:

для одномерной проекции случайного блуждания вдоль оси x, эффективный коэффициент диффузии D_X равен:

$$D_X = \frac{(L)^2}{6\tau_1} = \frac{\left(\frac{1}{N}\right)^2}{6\left(\frac{1}{N}\right)} = \frac{L \cdot (\text{единица расстояния})}{6 \cdot (\text{время прохождения единицы расстояния})},$$

так как шаги изотропны, и дисперсия шага по одной координате составляет треть от полной дисперсии в трёх измерениях. Размерность $D_X \frac{(\text{единица расстояния})^2}{(\text{время прохождения единицы расстояния})}$.

Среднее время первого достижения плоскости на расстоянии X для броуновского движения в одномерном случае оценивается как:

$$\langle t_X \rangle = \frac{(X \cdot (\text{единица расстояния}))^2}{2D_X} = \frac{3 \cdot (X)^2 \cdot |\mathbf{v}|}{L}.$$

Если представлять движение сферических волн материи между столкновениями, то в движении материя будет создавать себе перекрёсток и менять направления в точке следующего столкновения через некоторое среднее расстояние между столкновениями L, которое будет обратно пропорционально линейной плотности материи ρ в данной области пространства: $L = \frac{1}{\rho}$. Тогда изменение линейной плотности материи ρ приведёт к изменению средней площади всех фронтов всех волн, распространяющихся после столкновений в ограниченном объёме.

В таком случае можно выделить один единственный вектор материи, выходящий из точки отсчёта (отношение числа к дифференциально малой площади на сфере дифференциального единичного радиуса: $\rho^3 \cdot [dr]^3 \cdot \frac{ds}{4\pi \cdot [dr]^2}$) и в зависимости от линейной плотности материи ρ в данной области вычислить некоторое среднее расстояние L, через которое он будет равномерно рассеян по всем направлениям вследствие падения “статистического веса” его импульса в общем количестве материи, с которой он будет сталкиваться на своём пути. Это является следствием утверждения, что любой вектор будет полностью равномерно распределён по всем выходящим из столкновения векторам только при столкновении с равным по модулю и противоположным по направлению вектором. Такое расстояние L предельно мало и обратно пропорционально линейной плотности материи ρ.

2.4 Расчёт смещения и эффект времени

Столкновения фрагментов материи моделируются как случайные блуждания. Представим движение как будто окрашенной порции материи, выделенной в точке начала отсчёта и по густоте окраски пространства проследим, где в среднем она оказалась через определённое время. Из начальной точки материя распространяется в пространстве как нормальное распределение в трёх измерениях. После перемещения в пространстве и следующего столкновения каждая часть от первоначальной порции снова начнёт распространяться как нормальное распределение в трёх измерениях из новой точки.

Свяжем линейную плотность ρ со средним расстоянием между столкновениями L, определив таким образом единичную плотность, через единичную длину L: $\rho = \frac{1}{L}$.

Время между такими столкновениями:

$$\tau = \frac{L}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\rho\,|\mathbf{v}|}.$$

В однородной среде $\rho = \rho_0$; $L_0 = \frac{1}{\rho_0}$; $\tau_0 = \frac{1}{\rho_0 |\mathbf{1}|}$, так как $|\mathbf{v}| = 1$.

Если линейная плотность меняется вдоль оси x: $\rho(x) = \rho_0 + \frac{d\rho}{dx} \cdot x$, (обозначим далее $\frac{d\rho}{dx} = \rho'_x$ — градиент, направленный по оси x в м$^{-2}$), то среднее время между столкновениями будет изменяться в зависимости от местной линейной плотности:

$$\tau_L(x) = \frac{1}{(\rho_0 + \rho'_x \cdot x) \cdot |\mathbf{1}|} = \frac{\rho_0}{(\rho_0 + \rho'_x \cdot x)} \cdot \tau_0; \quad \frac{\tau_L(x)}{\tau_0} = \frac{L_x}{L_0} = \frac{\rho_0}{(\rho_0 + \rho'_x \cdot x)}.$$

Выбранная для наблюдения порция материи за время наблюдения t перемещается в пределах сферы радиусом $R = |\mathbf{1}| \cdot t$ от точки начала наблюдения. На такой радиус может удалиться только вектор, двигающийся после каждого столкновения прямо в первоначальном направлении. В ограниченной области радиуса R градиент линейной плотности $\frac{d\rho}{dx}$ (или ρ'_x) будем считать постоянным — это можно допустить в малых масштабах, но этого не может быть в макроскопических масштабах.

Изменение плотности по одной оси аналогично изменению в этом направлении масштаба статистической модели случайного блуждания с фиксированным шагом.

$$L_{(x)} = \frac{1}{(\rho_0 + \rho'_x \cdot x)}; \quad \tau_1(x) = \frac{1}{(\rho_0 + \rho'_x \cdot x) \cdot |\mathbf{1}|}; \quad N(x) = \frac{1}{L(x)} = (\rho_0 + \rho'_x \cdot x).$$

$$D_{(x)} = \frac{L_{(x)} \cdot (\text{единица расстояния})}{6 \cdot (\text{время прохождения единицы расстояния})}$$
$$= \frac{1 \cdot (\text{единица расстояния})}{6 \cdot (\rho_0 + \rho'_x \cdot x) \cdot (\text{время прохождения единицы расстояния})}.$$

Рассмотрим простой случай, когда материя в среднем находится в покое (средний импульс материи в области пространства $\mathbf{P}$ равен 0). Тогда любая порция материи, бесконечно разделяясь, после каждого столкновения, с одинаковой вероятностью выходит во все направления: по оси x со средней скоростью $|\mathbf{v}|/2 = 1/2$ для полусферы векторов — и к увеличению плотности $\rho(x)$, и к уменьшению плотности $\rho(x)$ с вероятностью $1/2$. Это же верно и для других осей y и z. Средняя скорость выхода $|\mathbf{v}|/2 = 1/2$ математически равна модулю суммы всех векторов равной длины по полусфере, обращённой в выбранное направление в пространстве.

В дифференциальных масштабах сразу после выхода из столкновения увеличение плотности ρ в направлении $(+\rho'_x)$ ведёт к уменьшению среднего расстояния L до следующего полного рассеяния по векторам, приближая средний уровень (X) перераспределения, где эта материя снова разделится пополам и начнёт движение в разные стороны по оси x.

Определим среднее удаление L_m по оси x точки полного рассеяния от точки выхода из начала отсчёта 0, складывая средние расстояния L_a от точки выхода 0 до точки полного рассеяния в каждом направлении в зависимости от угла к оси x: $a0x$.

Для точки $x = dr \cdot \cos\theta$ эффект градиента оцениваем в средней точке пути: $x = \frac{dr}{2} \cdot \cos\theta$:

$$\rho\left(\frac{dr}{2}\cos\theta\right) = \rho_0 + \rho'_x \cdot \left(\frac{dr}{2}\cos\theta\right).$$

Для каждого отдельного направления:

$$L_a = \frac{1}{\rho_0 + \rho'_x \cdot \left(\frac{\cos a}{2}\right) \cdot L_a}; \quad \rho'_x \cdot \left(\frac{\cos a}{2}\right) \cdot {L_a}^2 + \rho_0 \cdot L_a - 1 = 0.$$

$$L_a = \frac{\pm\left(\rho_0^2 + 2 \cdot \rho'_x \cdot \cos a\right)^{\frac{1}{2}} - \rho_0}{\rho'_x \cdot \cos a}; \quad L_a = \frac{\pm\left(\left(\left(\frac{\rho_0^2}{\rho'_x \cdot \cos a}\right) + 1\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\rho_0^2}{\rho'_x \cdot \cos a}\right)}{\rho_0}.$$

Решение с минус нереально при $\lim \rho'_x \to 0$, значит:

$$\rho_0 \cdot L_a = \left(\left(1 + \left(\frac{\rho_0^2}{\rho'_x \cdot \cos a}\right)\right)^2 - 1\right)^{1/2} - \frac{\rho_0^2}{\rho'_x \cdot \cos a}.$$

$$L_m = \langle L_a \rangle \approx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\left(\rho_0^2 + 2 \cdot \rho_x' \cdot \cos a\right)^{1/2} - \rho_0}{\rho_x' \cdot \cos a} \right) \cdot (\cos a \cdot \sin a \cdot da)$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\left(\rho_0^2 + 2 \cdot \rho_x' \cdot \cos a\right)^{1/2} - \rho_0}{\rho_x'} \right) \cdot \sin a \cdot da.$$
$$L_{m+} = \frac{\left(\rho_0^2 + 2 \cdot \rho_x'\right)^{3/2} - \rho_0^3 - 3 \cdot \rho_x' \cdot \rho_0}{3 \cdot (\rho_x')^2},$$
$$L_{m-} = \frac{\left(\rho_0^2 - 2 \cdot \rho_x'\right)^{3/2} - \rho_0^3 + 3 \cdot \rho_x' \cdot \rho_0}{3 \cdot (\rho_x')^2}.$$
$$\lim_{\rho_x' \to 0} L_m = \frac{1}{2 \cdot \rho_0}.$$

Проследим за движением вышедших из точки равновесного столкновения 0 случайных блужданий, из которых одно двигается в направлении $+x$, другое $-x$. На расстояниях L_{m+} и L_{m-} по оси x в среднем они достигнут плоскости, на котором в среднем происходит следующее равновесное столкновение. Среднее время достижения случайным блужданием этих границ от 0 отличается: $t1_{(+)}$ и $t1_{(-)}$. На этих уровнях они снова будут равномерно разделены на все возможные направления: половина начнёт возвращение к точке 0 и поравняется на плоскости с координатой X в момент времени T, а другая половина продолжит удаляться как случайные блуждания до своих новых границ $2L_{m+}$ и $2L_{m-}$.

Найдём координату X плоскости, где поравняются возвращающиеся части, и полное время T этой встречи от самого начала расчёта. В этой координате должен находиться центр распределения вышедшей из 0 материи. Это задача о выходе из 0 и последующей встрече двух случайных блужданий после отражения от границ L_{m+} и L_{m-}.

Для изотропного 3D случайного блуждания с фиксированным шагом длины L и скоростью $|\mathbf{v}| = |\mathbf{1}|$ время одного шага: $\tau = \frac{L}{|\mathbf{1}|}$, коэффициент диффузии: $D = \frac{L \cdot |\mathbf{1}|}{6}$.

$$D_{(L_{m+})} = \frac{|\mathbf{1}|}{6 \cdot (\rho_0 + \rho_x' \cdot L_{m+})}; \quad D_{(L_{m-})} = \frac{|\mathbf{1}|}{6 \cdot (\rho_0 - \rho_x' \cdot L_{m-})}.$$

Среднее время достижения плоскости на расстоянии X: $\langle t_x \rangle = \frac{3 \cdot X^2}{L \cdot |\mathbf{1}|}$.

Среднее время достижения границ в линейно-неоднородной среде L_{m+} и L_{m-}:

$$t_{(+)} = 3\rho_0 (L_{m+})^2 + 2\rho_x' (L_{m+})^3; \quad t_{(-)} = 3\rho_0 (L_{m-})^2 - 2\rho_x' (L_{m-})^3.$$

Точное решение для координаты встречи X и времени T требует решения кубического уравнения, которое сложно упростить аналитически. Однако для малого градиента плотности ($|\rho_x'| \ll \rho_0$) можно получить приближенные формулы. Предположим: $|\rho_x'| \ll \rho_0$. Разложим L_{m+}, L_{m-}, $t_{(+)}$, $t_{(-)}$ в ряд Тейлора, сохраняя члены до первого порядка по ρ_x'.

Границы отражения L_{m+} и L_{m-} аппроксимируются как:

$$L_{m+} \approx \frac{1}{2 \cdot \rho_0} - \frac{\rho_x'}{8 \cdot \rho_0^3}, \quad L_{m-} \approx \frac{1}{2 \cdot \rho_0} + \frac{\rho_x'}{8 \cdot \rho_0^3}.$$

Время достижения границ аппроксимируются как:

$$t1_{(+)} \approx \frac{3}{4 \cdot \rho_0} + \frac{\rho_x'}{4 \cdot \rho_0^3}, \quad t1_{(-)} \approx \frac{3}{4 \cdot \rho_0} - \frac{\rho_x'}{4 \cdot \rho_0^3}.$$

Время движения после отражения от границ L_{m+} и L_{m-}:
из L_{m+} в сторону 0 влево: $t2_{(+)} \approx \frac{3}{4 \cdot \rho_0} + \frac{\rho_x'}{8 \cdot \rho_0^3} - 3X$,
из L_{m-} в сторону 0 вправо: $t2_{(-)} \approx \frac{3}{4 \cdot \rho_0} + \frac{\rho_x'}{8 \cdot \rho_0^3} + 3X$.
Условие встречи: $t1_{(+)} + t2_{(+)} = t1_{(-)} + t2_{(-)}$, следовательно

$$\frac{3}{2 \cdot \rho_0} + \frac{3 \cdot \rho_x'}{8 \cdot \rho_0^3} - 3X = \frac{3}{2 \cdot \rho_0} + 3X.$$

Решаем относительно X:

$$X \approx \frac{\rho_x'}{16 \cdot \rho_0^3}.$$

Подставляем X в выражение для $t1_{(+)} + t2_{(+)}$:

$$T \approx \frac{3}{2 \cdot \rho_0} + \frac{3 \cdot \rho_x'}{16 \cdot \rho_0^3} = \frac{24 \cdot \rho_0^2 + 3 \cdot \rho_x'}{16 \cdot \rho_0^3}.$$

Координата встречи X и время T (от начала движения 0) для малых ρ_x' ($|\rho_x'| \ll \rho_0$):

$$X \approx \frac{\rho_x'}{16 \cdot \rho_0^3}, \quad T \approx \frac{3}{2 \cdot \rho_0}.$$

Время встречи T включает время до границ $t1_{(+)}$ и $t1_{(-)}$, и движение после отражения и учитывает изменение $D_{(x)}$ при движении навстречу. Смещение точки встречи X обусловлено асимметрией коэффициентов диффузии. Если $\rho_x' > 0$, плотность среды возрастает с ростом x. Частица в положительной области движется медленнее, поэтому встреча смещается в сторону положительных X. При $\rho_x' = 0$ среда однородна, и встреча происходит в начале координат ($X = 0$) в момент $T = \frac{3}{2 \cdot \rho_0}$.

При рассмотрении результата этого расчёта надо учесть, что за время T, равное среднему времени перемещения по оси x от 0 до L_m и обратно, к координате X вернётся только половина материи, в то время как другая половина будет всё это время удаляться в среднем от 0. Чтобы получить положение всей первоначальной материи, надо брать время только для одного среднего шага ($T/2$), считая что за это время половина материи движется по оси x от 0 в разные стороны, а другая половина в это же время движется от L_{m+} и L_{m-} навстречу друг другу к 0. Так за среднее время одного перемещения по оси x: $T = \frac{3}{4 \cdot \rho_0 |\mathbf{v}|}$ отслеживаем перемещение всей первоначальной материи по оси x полностью, учитывая одновременно обе фазы движения.

Скорость смещения по оси x центра распределения материи:

$$U = X/(T/2) = \frac{\rho_x' \, |\mathbf{v}|}{12 \cdot \rho_0^2}.$$

Уровни L_{m+} и L_{m-} не являются расстояниями одного шага, который мы определили как $L_a = \frac{1}{\rho_0 + \rho_x' \cdot \left(\frac{\cos a}{2}\right) \cdot L_a}$. Уровни L_{m+} и L_{m-} характеризуют различие между расстояниями, от которых равные доли материи будут разделяться пополам, разворачиваться и возвращаться к центру, в то время как другая половина материи продолжит удаляться от 0 со скоростью $|\mathbf{v}|/2$. Так же и время $T/2$ не является временем одного шага τ_1.

Смещение H за время одного шага τ_1 между 0 и следующим полным рассеянием определится скоростью U:

$$H = \frac{\rho'_x}{12 \cdot \rho_0^3}.$$

За время $\tau_1 = \frac{1}{\rho_0 |\mathbf{1}|}$ соответственно ускорение g порции материи от 0 равно:

$$\mathbf{g} = \frac{\rho'_x |\mathbf{v}|^2}{6 \cdot \rho_0}.$$

Ускоряясь после равновесного выхода из столкновения до следующего равновесного столкновения, материя обретает импульс. Вся материя в градиенте плотности смещается одинаково и все предельно малые смещения складываются в общее ускорение материи в выделенном объёме пространства. При этом для взаимодействующей материи в целом эти процессы уравновешены по направлениям и общий импульс, конечно, неизменен.

Формула $g = \frac{V^2}{6} \cdot \frac{\frac{dP}{dR}}{P}$ выведена как ускорение градиентом плотности, аналогичное притяжению.

2.5 Модель равновесия кластера

2.5.1 Скорость и ускорение рассеяния

Проследим за движением материи из точки, расположенной на расстоянии R до центра скопления материи.

В классической механике центробежное ускорение: $a_{\text{центробежное}} = \frac{v^2}{R}$.

Рассмотрим скорость удаления материи, выходящей из точки O на сфере, от линии радиуса из центра к этой точке.

На сфере радиусом R находится точка O. Из этой точки во все направления в пространстве выходят частицы с постоянной по модулю скоростью v. Частицы движутся как трёхмерное случайное блуждание со средним расстоянием l между столкновениями. Найдём среднюю скорость удаления этих частиц от прямой, проходящей через центр сферы и точку O (то есть от радиуса).

Задача в цилиндрических координатах Введём цилиндрическую систему координат (ρ, ϕ, z), где:

Ось Z совпадает с данным радиусом (прямой, проходящей через центр сферы и точку O),

ρ — расстояние от частицы до оси Z,

ϕ — азимутальный угол,

z — координата вдоль оси Z.

Скорость удаления от радиуса определяется радиальной компонентой скорости в цилиндрических координатах:

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt}.$$

Наша цель — найти среднее значение модуля этой скорости: $\langle |v_\rho| \rangle$.

Выражение для v_ρ через углы скорости и положения Вектор скорости частицы в декартовых координатах:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z).$$

В сферических координатах, связанных с направлением скорости:

$$v_x = v\sin\theta\cos\psi, \quad v_y = v\sin\theta\sin\psi, \quad v_z = v\cos\theta,$$

где:

θ — угол между скоростью и осью Z ($0 \le \theta \le \pi$),

ψ — азимутальный угол скорости ($0 \le \psi \le 2\pi$).

В цилиндрических координатах радиальная компонента скорости выражается как:

$$v_\rho = \frac{xv_x + yv_y}{\rho} = v_x\cos\phi + v_y\sin\phi,$$

где ϕ — азимутальный угол положения частицы. Подставляя v_x и v_y:

$$v_\rho = v\sin\theta(\cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\phi) = v\sin\theta\cos(\psi - \phi).$$

Таким образом,

$$v_\rho = v\sin\theta\cos\alpha, \quad \text{где } \alpha = \psi - \phi.$$

Усреднение по направлениям скорости и положению Для изотропного случайного блуждания:

Угол θ распределён с плотностью вероятности $\frac{1}{2}\sin\theta$ (нормировка на $[0, \pi]$).

Углы ψ и ϕ распределены равномерно на $[0, 2\pi]$ и независимы.

Разность $\alpha = \psi - \phi$ также распределена равномерно на $[0, 2\pi]$.

Среднее значение модуля радиальной скорости:

$$\langle|v_\rho|\rangle = \langle|v\sin\theta\cos\alpha|\rangle = v \cdot \langle|\sin\theta|\rangle \cdot \langle|\cos\alpha|\rangle,$$

так как θ и α независимы.

Вычисление средних значений

Среднее $\langle|\sin\theta|\rangle$:

$$\langle|\sin\theta|\rangle = \int_0^\pi |\sin\theta| \cdot \frac{1}{2}\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta.$$

Используем тождество $\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$:

$$\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\langle|\sin\theta|\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Среднее $\langle |\cos\alpha| \rangle$:

$$\langle |\cos\alpha| \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos\alpha|\, d\alpha.$$

Учитывая симметрию:

$$\int_0^{2\pi} |\cos\alpha|\, d\alpha = 4 \int_0^{\pi/2} \cos\alpha\, d\alpha = 4\left[\sin\alpha\right]_0^{\pi/2} = 4.$$

Следовательно,

$$\langle |\cos\alpha| \rangle = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Результат Подставляя вычисленные средние:

$$\langle |v_\rho| \rangle = v \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{v}{2}.$$

Средняя скорость удаления частиц от радиуса при трёхмерном случайном блуждании равна:

$$\boxed{\frac{v}{2}}$$

Результат $\frac{v}{2}$ показывает, что в среднем частицы удаляются от радиуса со скоростью, составляющей половину от их полной скорости v.

Величина l (среднее расстояние между столкновениями) не влияет на ответ, так как изотропность случайного блуждания сохраняет среднее значение $|v_\rho|$ на каждом шаге.

В отличие от прямолинейного движения (где средняя скорость удаления равна $\frac{\pi}{4}v \approx 0.785v$), при случайном блуждании направления скорости постоянно меняются, и только часть перпендикулярной компоненты скорости эффективно увеличивает расстояние до оси.

Ускорение:

$$a_{\text{рассеяние}} = \frac{(|\mathbf{v}|/2)^2}{R} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{4R}$$

противодействует сжатию скопления, уменьшаясь с ростом R.

2.5.2 Ускорение градиентом плотности

Ускорение $\mathbf{g}$, действующее на материю в неподвижном кластере, определяется градиентом плотности:

$$\mathbf{g} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{6} \cdot \frac{\frac{d\rho}{dR}}{\rho}.$$

Приравнивая

$$\mathbf{g} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{6} \cdot \frac{\frac{d\rho}{dR}}{\rho} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{4R},$$

определяем: линейная плотность $\rho_{(R)}$ неподвижного устойчивого сферического скопления материи вокруг точки 0:

$$\rho_{(R)} = \frac{\rho_{(1)}}{R^{1.5}},$$

где $\rho_{(1)}$ – линейная плотность на расстоянии $R = 1$ от центра кластера, а ρ характеризует количество материи на единицу длины вдоль радиального направления.

$$\frac{d\rho}{dR} = \frac{d}{dR}\left(\frac{\rho_{(1)}}{R^{1.5}}\right) = \rho_{(1)} \cdot \left(-\frac{3}{2}R^{-2.5}\right) = -\frac{3\rho_{(1)}}{2R^{2.5}}.$$

Подставим в формулу:

$$\mathbf{g} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{6} \cdot \frac{-\frac{3\rho_{(1)}}{2R^{2.5}}}{\frac{\rho_{(1)}}{R^{1.5}}} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{6} \cdot \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{R^{1.5}}{R^{2.5}}\right) = \frac{|\mathbf{v}|^2}{6} \cdot \left(-\frac{3}{2R}\right) = -\frac{|\mathbf{v}|^2}{4R}.$$

Размерность $[\mathbf{g}] = [l/t^2]$, отрицательный знак указывает направление к центру.

Зависимость $R^{-1.5}$ отражает уменьшение линейной плотности с расстоянием, что согласуется с равновесием между расширением и сжатием.

2.6 Распределение плотности вблизи центра кластера

Одной из ключевых задач модели является описание поведения плотности вблизи центра кластера. Исходная функция $\rho_{(R)} = \frac{\rho_{(1)}}{R^{1.5}}$ предсказывает бесконечный рост плотности при $R \to 0$, что физически нереалистично. Кроме того, градиент $\frac{d\rho}{dR} = -\frac{3\rho_{(1)}}{2R^{2.5}}$ становится крайне крутым у центра, указывая на нелинейную зависимость и изменение направления градиента в пространстве. Простая статистика здесь неприменима: в ближайшей окрестности начала движения материи её траектории создают самопрепятствия, особенно выраженные ближе к центру. Это ограничивает рост плотности, формируя конечный пик, напоминающий вершину нормального распределения. Мы предлагаем модифицированную функцию плотности и анализируем её приблизительно.

2.6.1 Предложенная функция плотности

Чтобы устранить сингулярность и учесть саморегуляцию, вводим функцию:

$$\rho_{(R)} = \rho_{(1)} \cdot \left(\frac{R_0}{R + R_0}\right)^{1.5},$$

где ρ_0 — конечная плотность в центре ($R = 0$), R_0 — параметр радиуса ядра, сглаживающий распределение.

2.6.2 Свойства:

В центре ($R = 0$):

$$\rho_{(0)} = \rho_{(1)} \cdot \left(\frac{R_0}{0 + R_0}\right)^{1.5} = \rho_{(1)},$$

плотность конечна, сингулярность устранена.

На больших расстояниях ($R \gg R_0$): $\rho_{(R)} \approx \frac{\rho_{(1)}}{R^{1.5}}$.

Функция непрерывно убывает от $\rho_0 = \rho_{(1)}$ до $\frac{\rho_{(1)}}{R^{1.5}}$.

2.6.3 Градиент:

$$\frac{d\rho}{dR} = -\frac{3 \cdot \rho_{(1)} \cdot R_0^{1.5}}{2 \cdot (R + R_0)^{2.5}}.$$

При $R = 0$: $\frac{d\rho}{dR} = -\frac{1.5 \cdot \rho_{(1)}}{R_0}$, конечное значение.

При больших R: $\frac{d\rho}{dR} \approx -\frac{1.5 \cdot \rho_{(1)}}{R^{2.5}}$, как в исходной модели.

2.6.4 Кривизна (вторая производная):

$$\frac{d^2\rho}{dR^2} = \frac{3.75 \cdot \rho_{(1)} \cdot R_0^{1.5}}{(R + R_0)^{3.5}}.$$

При $R = 0$: $\frac{d^2P}{dR^2} = \frac{3.75\rho_{(1)}}{R_0^2} > 0$. При $R = 0$ вторая производная $\frac{d^2\rho}{dR^2} > 0$, что в совокупности с монотонным убыванием функции $\rho_{(R)}$ означает, что функция выпукла вниз, а её наибольшее значение находится на левой границе области определения, в точке $R = 0$. С ростом R кривизна уменьшается, градиент сглаживается.

2.6.5 Физическая интерпретация

Наблюдая за любой порцией материи на расстояниях R от центра, представим, что эта материя исходит из всех точек сферы радиусом R. Траектории отслеживаемой порции материи, двигающейся к центру, пересекаются сами с собой чаще, чем при больших R: площадь сферы $4\pi R^2$ уменьшается, а плотность потоков растёт. Это создаёт самопрепятствия траекторий, которые частично сами себе замещают плотность окружающей материи в статистике столкновений, а проходя через центр, двигаются “навстречу себе”. Можно образно сказать, что ближе к центру материя статистически начинает сталкиваться сама с собой чаще, чем это должно быть, заменяя себе отчасти градиент линейной плотности. Чем меньше R, тем сильнее эффект, что ограничивает плотность значением $\rho_{(0)}$. Сумма $(R + R_0)$ в знаменателе отражает это сглаживание, предотвращая бесконечный рост.

Изначально $\rho_{(1)}$ предлагалась как линейная плотность на расстоянии R=1 от центра неподвижного скопления материи, но необходимость изменения функции плотности от радиуса приравнивает эту плотность к максимальной в центре кластера $\rho_{(0)}$, что также требует изменить на $\rho_{(0)}$ обозначение линейной плотности в функции:

$$\rho_{(R)} = \rho_{(0)} \cdot \left(\frac{R_0}{R + R_0}\right)^{1.5}.$$

2.6.6 Приближение у центра

Разложим $\rho_{(R)}$ в ряд Тейлора при $R \to 0$:

$$\rho_{(R)} = \rho_{(0)} \cdot \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)^{-1.5} \approx \rho_{(0)} \cdot \left(1 - 1.5\frac{R}{R_0} + 1.875\frac{R^2}{R_0^2}\right).$$

Сравним с нормальным распределением $\rho_{(0)} \cdot \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) \approx \rho_{(0)} \cdot \left(1 - \frac{R^2}{2\sigma^2}\right)$. Квадратичный член $1.875\frac{R^2}{R_0^2}$ даёт $\sigma^2 = \frac{R_0^2}{3.75}$, указывая на сходство с гауссовым пиком, хотя линейный член показывает отклонение от чистой нормальности.

2.6.7 Ускорение

Ускорение, связанное с градиентом:

$$\mathbf{g} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{6} \cdot \frac{-\frac{3\rho_{(0)}}{2R^{2.5}}}{\frac{\rho_{(0)}}{R^{1.5}}} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{6} \cdot \frac{-\frac{1.5 \cdot R_0^{1.5}\rho_{(0)}}{(R+R_0)^{2.5}}}{\rho_{(0)} \cdot \left(\frac{R_0}{R+R_0}\right)^{1.5}} = -\frac{|\mathbf{v}|^2}{4(R+R_0)}.$$

При $R = 0$: $\mathbf{g} = -\frac{|\mathbf{v}|^2}{4R_0}$ конечное. В действительности в центре $\mathbf{g} = 0$, но это отклонение результат упрощения.

При больших R: $\mathbf{g} \approx -\frac{|\mathbf{v}|^2}{4R}$, как в предыдущем разделе.

2.6.8 Вывод

Модифицированная плотность $\rho_{(R)} = \rho_{(0)} \cdot \left(\frac{R_0}{R+R_0}\right)^{1.5}$ устраняет сингулярность, достигая пика $\rho_{(0)}$ в центре и переходя к $R^{-1.5}$ на больших расстояниях. Самопрепятствия у центра, вызванные сходимостью траекторий, формируют конечный профиль, близкий к вершине нормального распределения с приблизительной дисперсией $\sigma^2 = \frac{R_0^2}{3.75}$. Это согласуется с равновесием кластера, где частота столкновений $\nu(R) \propto \rho(R)$.

2.7 Характерный диаметр скопления

Исследуем существование диаметра D, при котором время прохождения волны материи через центр равно времени её движения по полуокружности диаметра D. Это условие динамического равновесия между радиальными и тангенциальными процессами распространения.

2.7.1 Скорость волнового процесса

Скорость волны зависит от локальной плотности:

$$v(R) = \frac{|\mathbf{v}|}{2} \cdot \frac{\rho_{(D/2)}}{\rho_{(R)}}$$

где $\frac{|\mathbf{v}|}{2}$ — максимальная скорость, $\rho_{(D/2)}$ — плотность на границе кластера.

2.7.2 Модель плотности

Используем модифицированную функцию плотности:

$$\rho_{(R)} = \rho_{(0)} \cdot \left(\frac{R_0}{R+R_0}\right)^{1.5}, \quad \rho_{(D/2)} = \rho_{(0)} \cdot \left(\frac{R_0}{D/2+R_0}\right)^{1.5}$$

2.7.3 Время прохождения через центр

Волна проходит расстояние D через центр со переменной скоростью:

$$T_{\text{diam}} = \int_{-D/2}^{D/2} \frac{dR}{v(R)} = 2\int_0^{D/2} \frac{dR}{v(R)}$$

$$T_{\text{diam}} = \frac{4}{|\mathbf{v}| \cdot \rho_{(D/2)}} \int_0^{D/2} \rho_{(R)} dR$$

2.7.4 Время движения по полуокружности

Длина пути: $L = \pi \cdot \frac{D}{2}$, скорость постоянна:

$$v_{\text{circ}} = \frac{|\mathbf{v}|}{2}, \quad T_{\text{circ}} = \frac{L}{v_{\text{circ}}} = \frac{\pi D}{|\mathbf{v}|}$$

2.7.5 Уравнение равновесия

Приравниваем времена:

$$T_{\text{diam}} = T_{\text{circ}}$$

$$\frac{4}{\rho_{(D/2)}} \int_0^{D/2} \rho_{(R)} dR = \pi D$$

2.7.6 Вычисление интеграла

$$\int_0^{D/2} \rho_{(R)} dR = \rho_{(0)} \cdot R_0^{1.5} \int_0^{D/2} (R + R_0)^{-1.5} dR$$

$$= 2\rho_{(0)} \cdot R_0 \cdot \left(1 - \left(\frac{R_0}{D/2 + R_0}\right)^{0.5}\right)$$

2.7.7 Основное уравнение

Подставляем в уравнение равновесия:

$$\frac{8R_0 \cdot \left(1 - \left(\frac{R_0}{D/2+R_0}\right)^{0.5}\right)}{\left(\frac{R_0}{D/2+R_0}\right)^{1.5}} = \pi D$$

Вводим безразмерную переменную $x = \frac{D}{2R_0}$:

$$4(x+1)^{1.5} \cdot \left(1 - (x+1)^{-0.5}\right) = \pi x$$

$$4(x+1)^{1.5} - 4(x+1) = \pi x$$

2.7.8 Численное решение

Решаем уравнение $4(x+1)^{1.5} - (\pi + 4)x - 4 = 0$:

$$x \approx 1.27, \quad D = 2xR_0 \approx 2.54R_0$$

2.7.9 Вывод

Характерный диаметр устойчивого скопления материи составляет $D \approx 2.54R_0$. При этом диаметре время распространения волны через центр кластера равно времени её распространения по границе, что указывает на динамическое равновесие между радиальными и тангенциальными процессами и может определять размер стабильного кластера.

2.8 Масса кластера

Полная масса кластера вычисляется интегрированием объемной плотности по всему пространству. Используя модель плотности $\rho_{(R)} = \rho_{(0)} \cdot \left(\frac{R_0}{R+R_0}\right)^{1.5}$, получаем объемную плотность:

$$\rho_V(R) = [\rho(R)]^3 = \rho_{(0)}^3 \cdot \left(\frac{R_0}{R+R_0}\right)^{4.5}$$

Масса кластера:

$$M = \int \rho_V(R)dV = 4\pi\rho_{(0)}^3 \int_0^\infty R^2 \cdot \left(\frac{R_0}{R+R_0}\right)^{4.5} dR$$

После замены переменной $x = R/R_0$ и вычисления интеграла:

$$M = \frac{64\pi}{105}\rho_{(0)}^3 R_0^3$$

Этот результат показывает, что полная масса кластера конечна и определяется параметрами $\rho_{(0)}$ и R_0, характеризующими распределение материи в центре и размер ядра кластера соответственно.

2.9 Сила притяжения сферической оболочки к центру

В предлагаемой модели не существует силы в классическом понимании как дальнодействующего взаимодействия. Вместо этого мы рассматриваем статистические закономерности перемещения материи и её столкновений, которые создают эффект, аналогичный силовому воздействию.

Исходя из баланса импульсов в статистической модели, сила притяжения сферической оболочки к центру определяется как:

$$F(R) = g(R) \cdot [\rho(R)]^2 \cdot S(R)$$

где: - $g(R) = -\dfrac{|v|^2}{4(R+R_0)}$ - ускорение, обусловленное градиентом плотности - $\rho(R) = \rho_0 \cdot \left(\dfrac{R_0}{R+R_0}\right)^{1.5}$ - линейная плотность - $S(R) = 4\pi R^2$ - площадь сферической поверхности

Подставляя выражения, получаем:

$$F(R) = -\pi|v|^2\rho_0^2 R_0^3 \cdot \frac{R^2}{(R+R_0)^4}$$

Эта формула описывает эффективное притяжение сферической оболочки к центру кластера, возникающее как результат статистического смещения материи в направлении градиента плотности.

3 Взаимодействие двух скоплений

3.1 Взаимодействие одинаковых скоплений

В данной главе исследуется взаимодействие двух одинаковых скоплений плотности, расположенных на определённом расстоянии друг от друга, через поверхность, разделяющую их поля плотности. Рассматриваются два одинаковых скопления с параметром m, соединённых отрезком, через середину которого проведена нормальная плоскость. Эта плоскость служит границей, на которой градиент плотности в проекции на ось, соединяющую центры скоплений, равен нулю, что предотвращает неуравновешенное перетекание материи. Нужно сразу отметить, что для двух различных скоплений разделяющая их поверхность должна строиться на том же принципе отсутствия неуравновешенного перетекания материи от одного скопления к другому через разделяющую их расчётную поверхность, и это возможно только когда проекция градиента плотности на нормаль к расчётной поверхности равна нулю.

Целью является вычисление силы взаимодействия одного скопления с полем другого через эту разделяющую плоскость. Для этого определяются плотность и ускорение в точке на плоскости, после чего интегрируется поток силы по всей поверхности.

Рассмотрим два скопления с центрами в точках M_1 и M_2, на расстоянии r друг от друга. Линейная плотность каждого скопления при $R = 1$ равна m. Плоскость разделения проходит через середину отрезка M_1M_2 и перпендикулярна ему. В точке A на этой плоскости:

$\rho_A = \frac{m}{\left(\frac{r/2}{\cos a}\right)^{1.5}} = \frac{m \cos^{1.5} a}{\left(\frac{r}{2}\right)^{1.5}}$

$g_A = \frac{|\mathbf{v}|^2}{4\left(\frac{r/2}{\cos a}\right)} = \frac{|\mathbf{v}|^2 \cos a}{2r}$

где a — угол, определяющий геометрию взаимодействия.

Интеграл потока силы через плоскость:

$$S = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{8m^2 \cos^3 a}{r^3}\right) \cdot \left(\frac{|\mathbf{v}|^2 \cos^2 a}{2r}\right) \cdot \left(\frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{\sin a}{\cos^3 a}\right) da = \frac{2\pi |\mathbf{v}|^2 m^2}{3r^2}$$

Таким образом, сила притяжения между скоплениями:

$$F = \frac{2\pi |\mathbf{v}|^2 m^2}{3r^2}$$

3.2 Взаимодействие разных скоплений

В этом разделе мы подробно исследуем взаимодействие двух скоплений волн с различными параметрами, такими как m_1 и m_2, которые можно интерпретировать как аналоги массы в нашей модели. Эти скопления расположены на расстоянии r друг от друга, и их взаимодействие происходит через специальную поверхность, которую мы обозначим S.

3.2.1 Описание скоплений и их плотности

Представим два скопления волн — A и B, центры которых находятся в точках $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$. Расстояние между центрами:

$$r = |\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1|$$

Каждое скопление описывается функцией линейной плотности:

$$\rho_i(\mathbf{x}) = \frac{m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|^{1.5}}, \quad i = 1, 2,$$

где: - $\mathbf{x}$ — координаты произвольной точки в пространстве, - $\mathbf{c}_i$ — центр i-го скопления, - m_i — параметр скопления ("аналог массы"), - $|\mathbf{x}-\mathbf{c}_i|$ — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до центра $\mathbf{c}_i$.

3.2.2 Определение поверхности взаимодействия

Найдём градиент $\rho_i(\mathbf{x})$. Для функции $\rho_i(\mathbf{x}) = m_i |\mathbf{x}-\mathbf{c}_i|^{-1.5}$:

$$\nabla\rho_i(\mathbf{x}) = -\frac{1.5m_i}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}_i|^{2.5}} \cdot \frac{\mathbf{x}-\mathbf{c}_i}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}_i|}$$

Модуль градиента:

$$|\nabla\rho_i(\mathbf{x})| = \frac{1.5m_i}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}_i|^{2.5}}$$

Определим поверхность S из условия равенства модулей градиентов:

$$\frac{1.5m_1}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}_1|^{2.5}} = \frac{1.5m_2}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}_2|^{2.5}}$$

$$\frac{m_1}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}_1|^{2.5}} = \frac{m_2}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}_2|^{2.5}}$$

$$\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{c}_1|}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}_2|}\right)^{2.5} = \frac{m_1}{m_2}$$

Это уравнение описывает поверхность S.

3.2.3 Формулировка силы взаимодействия

Сила притяжения между скоплениями определяется как интеграл по поверхности S:

$$F = m_1 m_2 \int_S \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}_1|^{1.5} |\mathbf{x}-\mathbf{c}_2|^{1.5}} \, dS$$

Для больших расстояний сила принимает вид:

$$F \approx \frac{2\pi|\mathbf{v}|^2 m_1 m_2}{3r^2}$$

3.2.4 Вычисление интеграла по поверхности

Рассмотрим пример: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $r = 1$, $\mathbf{c}_1 = (0,0,0)$, $\mathbf{c}_2 = (1,0,0)$, $|\mathbf{v}| = 1$.

Уравнение поверхности:

$$|\mathbf{x}|^{2.5} = \frac{1}{2} |\mathbf{x}-(1,0,0)|^{2.5}$$

Аппроксимируем S плоскостью $x = 0.365$.

Вычислим интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{1.5} |\mathbf{x}-(1,0,0)|^{1.5}} \, dy \, dz,$$

где $\mathbf{x} = (0.365, y, z)$.

После перехода к полярным координатам и численного интегрирования получаем $I \approx 2.135$. Тогда:

$$F = m_1 m_2 I = 1 \cdot 2 \cdot 2.135 \approx 4.27.$$

3.2.5 Сравнение с аналитическим результатом

Аналитическая формула:

$$F = \frac{2\pi|\mathbf{v}|^2 m_1 m_2}{3r^2} = \frac{2\pi \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} = \frac{4\pi}{3} \approx 4.1888.$$

Разница составляет около 2%, что подтверждает корректность модели.

3.3 Физическая интерпретация силы взаимодействия

Выражение для силы взаимодействия между двумя скоплениями волн:

$$F = \frac{2\pi|\mathbf{v}|^2 m_1 m_2}{3r^2}$$

можно интерпретировать как силу притяжения, аналогичную гравитационной в классической механике. Здесь m_1 и m_2 — параметры скоплений, которые мы назвали аналогами массы, $|\mathbf{v}|$ — характеристическая скорость распространения волн материи, а r — расстояние между центрами скоплений.

3.3.1 Роль параметра m как аналога массы

Заметим, что m входит в формулу квадратично ($m_1 m_2$) точно так же, как масса в законе притяжения Ньютона $F = G\frac{M_1 M_2}{r^2}$. Это не случайно. В нашей модели линейная плотность $\rho_i(\mathbf{x}) = \frac{m_i}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}_i|^{1.5}}$ определяет, как материя распределена вокруг центра скопления. Чем больше m_i, тем выше плотность вблизи центра, и тем сильнее скопление влияет на окружающее пространство.

3.3.2 Гравитация как соприкосновение границ скоплений

Гравитационное взаимодействие в этой модели можно рассматривать как результат контакта границ двух скоплений волн через поверхность S, где градиенты плотностей уравновешены. Каждое скопление бесконечно в том смысле, что его плотность $\rho_i(\mathbf{x})$ убывает с расстоянием, но никогда не становится нулевой. Это означает, что волны от одного скопления проникают в область другого, и их взаимодействие происходит не в одной точке, а по всей поверхности S.

3.3.3 Сравнение гравитации с модулированными волнами

Однако гравитация — это лишь слабая составляющая взаимодействия. На поверхности S значения плотностей ρ_1 и ρ_2 и их градиентов малы, так как S находится далеко от центров скоплений (при больших r). Это делает гравитацию на десятки порядков слабее других возможных взаимодействий, таких как модулированные волны плотности.

Модулированные волны — это волны с несимметричным профилем, которые возникают в сложных циклических процессах внутри ограниченного объёма. Такие волны не переносят плотность в среднем, если нет встречного взаимодействия, а лишь колеблются вокруг некоторого среднего радиуса. Эти колебания накладываются на всё пространство другого скопления, создавая более сильное взаимодействие, чем простое убывание плотности.

3.3.4 Гипотеза о происхождении зарядов

Представим, что поля зарядов возникают из разделения единой нейтральной волновой структуры. Изначально вокруг общего центра существуют циклические процессы, создающие два типа профилей плотности: один с гребнями наружу, другой внутрь. При сильном центральном столкновении или под действием внешнего поля эта структура распадается на две частицы с противоположными профилями.

4 Поле материи

4.1 Переход от моделирования движения материи как бесконечно малых частиц к моделированию поля материи

Перейдём к модели непрерывного поля материи, где пространство однородно заполнено бесконечно делимой субстанцией. В отличие от моделей с дискретными частицами, здесь нет выделенных объектов — материя представлена как непрерывная субстанция, а её движение определяется взаимодействием с окружающим полем через бесконечное число столкновений.

Идея бесконечной делимости порций материи означает, что в каждой точке $\mathbf{x}$ поле $\mathbf{M}$ одновременно "расщепляется"по всем направлениям. Это делает $\mathbf{F}$ интегралом по всем возможным ω, что заменяет дискретное событие столкновения непрерывным процессом.

4.2 Динамика движения

4.2.1 Дискретный подход: движение частиц

Движение частиц определяется стохастическими уравнениями. Для каждой частицы:

$$d\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{v}_i(t)dt,$$

где $\mathbf{v}_i(t)$ обновляется при столкновениях.

4.2.2 Непрерывный подход: эволюция поля

Динамика поля $\mathbf{M}\left(\mathbf{x}, t\right)$ описывается уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{M}) = \mathbf{F}\left(\mathbf{M}, \nabla \mathbf{M}\right),$$

где $\mathbf{v} \otimes \mathbf{M}$ — тензор потока, а $\mathbf{F}$ — член, моделирующий непрерывные взаимодействия. Уравнение сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

4.3 Столкновения и взаимодействия

4.3.1 Дискретный подход: дискретные столкновения

Рассмотрим столкновение двух частиц с потоками $\mathbf{M}_1 = \rho_1 \mathbf{v}_1 \Delta V$ и $\mathbf{M}_2 = \rho_2 \mathbf{v}_2 \Delta V$. Сохранение импульса:

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2,$$

сохранение массы:

$$M = |\mathbf{M}_1| + |\mathbf{M}_2| \,.$$

После столкновения материя распределяется по сферической поверхности:

$$\sigma\left(\overrightarrow{n}, t\right) = \frac{M}{4\pi \left[v\left(t - t_0\right)\right]^2} \cdot \frac{|\beta|}{4\pi \sinh|\beta|} \cdot e^{\overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{n}}$$

4.3.2 Непрерывный подход: непрерывные взаимодействия

В непрерывной модели столкновения встроены в $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{M}, \nabla\mathbf{M}\right) = \int_\Omega \left[\frac{\rho}{4\pi} + \frac{3\,|\mathbf{M}|}{4\pi|\mathbf{v}|}\left(\omega \cdot \mathbf{e}_M\right)\right] |\mathbf{v}|\omega \, d\omega,$$

где Ω — единичная сфера, $\mathbf{e}_M = \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|}$.

4.4 Смещение в градиенте плотности

4.4.1 Дискретный подход: дрейф частиц

Предположим градиент плотности $\rho(x) = \rho_0 + \frac{d\rho}{dx}x$. Частицы чаще сталкиваются в областях с большим ρ, что смещает их центр масс:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t).$$

Скорость дрейфа зависит от частоты столкновений, пропорциональной ρ.

4.4.2 Непрерывный подход: ускорение поля

Для поля $\rho\left(\mathbf{x}, t\right)$ с градиентом $\nabla\rho$:

$$\frac{d\left\langle \mathbf{x} \right\rangle}{dt} = \int \mathbf{u}\left(\mathbf{x}, t\right) \rho\left(\mathbf{x}, t\right) d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{u} \propto \nabla\rho$. Ускорение:

$$\mathbf{g} = \frac{d^2\left\langle \mathbf{x} \right\rangle}{dt^2} \propto \nabla\rho.$$

4.5 Взаимодействие скоплений

4.5.1 Дискретный подход: сила между частицами

Для двух скоплений с массами m_1, m_2 сила вычисляется через интеграл потока:

$$F = \frac{2\pi |\mathbf{v}|^2 m_1 m_2}{3r^2}$$

4.5.2 Непрерывный подход: сила через поле

Для полей ρ_1, ρ_2 сила — интеграл по поверхности S:

$$F = \int_S \rho_1 \rho_2 \, dS \approx \frac{2\pi |\mathbf{v}|^2 m_1 m_2}{3r^2}$$

4.6 Заключение

Мы показали переход от дискретной модели частиц к непрерывному полю, сохраняя ключевые свойства, такие как гравитационная сила $F \propto r^{-2}$. Предложенная модель интерпретирует гравитацию как результат взаимодействия потоков непрерывного поля материи через поверхности равновесия градиентов. Отсутствие флуктуаций достигается за счёт бесконечной делимости порций и их движения по всем возможным путям, что заменяет случайность детерминированным усреднением.