НЕМНОГО О МОДЕЛЯХ

И.В.Коннов

Казань, e-mail: konn-igor@ya.ru

Sapienti sat

1 Обманчивость простых понятий

Во многих науках принято строить модели. Хотя существуют такие науки, где большинство знаний извлекается за счет непосредственного наблюдения (а ранее такие науки и преобладали), но принципиально нового уровня можно достичь лишь за счет построения моделей, которые проясняют сущность исследуемых процессов и явлений.

Поскольку опыт автора ограничивается математическими моделями, то речь пойдет прежде всего о них. Роль этих моделей в других науках, да и в других сферах деятельности, весьма значительна. Например, по мнению Леонардо да Винчи, «никакое человеческое исследование не может почитаться истинной наукой, если оно не изложено математическими способами выражения». Тем не менее, существуют и противоположные мнения о негативном влиянии именно математических моделей на другие науки (см., напр. [1]). Данные заметки можно расценивать как попытку прояснить некоторые важные стороны этого вопроса.

Что, собственно говоря, представляет собой математическая модель некоторой реальной или воображаемой системы? Набор соотношений, связывающих различные параметры и переменные и отражающих все существенные взаимосвязи элементов этой системы между собой, а также взаимосвязи с окружающей средой. Очевидно, что при построении модели всегда стремятся к максимальному ее упрощению, поскольку потом на ее основе придется решать многие задачи по оценке поведения системы, влияния на нее тех или иных параметров и т.д.

Хотелось бы еще подчеркнуть, что решения всех таких задач на самом деле говорят о свойствах модели, хотя они обычно переносятся на реальную систему, по которой строилась модель, и это различие очень важно для понимания самого процесса математического моделирования.

Особенностью математических моделей является то, что они опираются прежде всего на заданную формальную структуру, т.е. на достаточно четко определенные элементы и части исследуемой системы и все возможные взаимодействия между ними, так чтобы они могли быть записаны в виде математических соотношений.

Например, одним из фундаментальных понятий в математике является *число*. Использование чисел (счет) или соответствующей скалярной переменной или параметра по существу означает, что все свойства перечисляемых объектов не важны, кроме их количества, то есть они в данной модели относятся к одному типу (классу). Разумеется, вместо чисел могут выступать и другие, более общие объекты. Но даже если для таких объектов вводится некоторое отношение предпочтения, то тем самым постулируется неявным образом их принадлежность к одному классу, поскольку они допускают сравнение по введенному отношению.

Исходя из этого, вполне понятно, что формальная структура вводится автоматически явным или неявным образом уже при построении любой математической модели. Конечно, такая модель может исследоваться самостоятельно как математическая задача, в частности, выясняться вопросы существования решений, их вида, зависимости от параметров, возможности вычисления и т.п. Но при этом всегда возникает вопрос об областях применения модели, иначе говоря, требуется определить, какие реальные системы имеют структуру, которая адекватно отражается структурой построенной модели. Примеры моделей, имеющих приложения в совершенно различных областях, достаточно хорошо известны, но остается открытым вопрос о способах проверки адекватности моделей.

Действительно, неверная структуризация (формализация) исходной системы при построении математической модели может привести к бесполезной многозатратной работе и, более того, к ложным выводам. При этом успешное применение модели в одной области вовсе не гарантирует ее адекватность в другой области, либо в случае изменения исходной реальной системы. В этой связи достаточно благоприятной является ситуация с применением моделей в физике, где их построение проводится уже столетиями, и в результате во многих случаях удалось не просто построить подходящие модели процессов и явлений, но и указать условия (диапазоны) их успешного применения (см., напр. [2, 3]). В других науках ситуация не столь благоприятна во многом из-за наличия плохо формализуемых систем. К этому следует добавить, что неверная структуризация модели не может быть исправлена за счет использования в ней объектов с более общими свойствами. Достаточно известный пример неверной структуризации – геоцентрическая система Птолемея, при применении которой к определению положения звезд и планет все время обнаруживались отклонения, что заставляло использовать все новые и новые поправки в формулах. Примечательно, что и при начальном использовании гелиоцентрической системы Коперника также обнаружились отклонения от реальных положений, но они были вызваны неточной формой, принятой для орбит (окружностей вместо эллипсов).

Отметим, что в теории систем отдельно исследуются различные общие структуры и их свойства, причем для этого используются различные подходы (см., напр. [4, 5]). Однако вопросы соответствия структуры модели и исследуемой реальной системы, как правило, требуется решать самостоятельно.

2 Влияние неопределенности

Таким образом, получается, что наибольшие проблемы при построении адекватных моделей возникают из-за большой сложности исходных систем и наличия разнообразных неопределенных факторов, что естественным образом создает трудности при определении подходящий структуры модели. Например, из-за принципиальной невозможности описания поведения отдельных молекул газа в статистической физике удалось построить адекватную модель только на макроуровне, т.е. описать поведение, скажем, некоторого объема газа в целом.

Проиллюстрируем влияние неопределенности на примере *модели спроса потребителя* в неоклассической теории рыночного равновесия (см., напр. [6]). В этой модели спрос потребителя на товары определяется как множество решений задачи максимизации полезности потребителя на бюджетном множестве, для которого цены на товары задаются в виде внешних параметров. Основным элементом этой модели является именно функция полезности (либо, если необходимо, отношение предпочтения) потребителя, существование которой выводится из возможности потребителя точно сопоставлять ценности всех товаров. Такая полная детерминированность вкусов вполне соответствует реальному поведению покупателя, который отправлялся на местный локальный рынок в Средние века или на ярмарку, проводимую, скажем, каждую неделю. При этом для продажи там выставлялся один и тот же достаточно ограниченный набор примерно одинаковых по свойствам товаров домашнего производства, а для покупок использовался примерно один и тот же объем средств (см. [7]). Ясно, что в таких условиях серьезное изменение цен могло произойти лишь под влиянием каких-либо внешних воздействий. Однако указанная «маргинальная» модель спроса используется в неоклассической теории для описания поведения рынка в целом на достаточно большом временнóм интервале, с большим количеством участников и разнообразными товарами, причем один и тот же товар, произведенный в другое время или в другом месте, считается уже другим товаром. Такой подход ведет к бесконечномерным моделям рыночного равновесия, которые весьма сложны даже для определения условий существования решения (см., напр. [8]). Очевидно, что в этих условиях потребитель не в силах точно оценить полезность всех товаров. Сознавая этот недостаток, но стараясь удержать данную модель потребительского спроса, поскольку основные свойства модели совершенной конкуренции опираются именно на нее, сторонники неоклассической теории предложили обобщить концепцию функции полезности на основе «рациональных ожиданий», которая позволила без изменений сохранить структуру модели. Между тем основное различие с обычной функцией полезности состоит в том, что новая должна содержать неопределенные факторы, причем уровень этой неопределенности может быть сколь угодно высоким. Поэтому предположение о сохранении «маргинального» поведения потребителя при недостоверных данных является абсолютно нереальным, следовательно, для описания поведения потребителей при достаточно общих условиях требуется принципиально другой тип модели.

Достаточно популярным подходом к исследованию и решению задач с неопределенностью является использование случайных величин, так что во многих работах неопределенность просто отождествляется со случайностью. Напомним, что любая случайная величина задается на множестве (пространстве) элементарных событий совместно с заданием распределения вероятностей (нормированный меры) на нем, непрерывного или дискретного типа. Однако задание такой меры и соответствующего набора значений вовсе не означает, что задана именно случайная величина, также как и любой вектор с неотрицательными координатами, сумма которых равна единице, автоматически не является распределением вероятностей, для этого требуются дополнительные условия, которые как раз и определяют возможность применения вероятностной модели.

А именно, задание распределения вероятностей требует *статистической устойчивости*, т.е. подтверждения на основе многократных наблюдений в одних и тех же условиях. Очевидно, статистическая устойчивость достигается лишь при наблюдениях за достаточно однородным и независимым процессом или явлением. С другой стороны, наличие общей меры в виде распределения вероятностей для элементарных событий также указывает на то, что эти события являются однотипными, как отмечалось выше о неявных свойствах применения чисел (скалярных переменных). Таким образом, прямолинейное применение вероятностных моделей к существенно разнородным многообразным явлениям некорректно, для этого требуется, помимо указанных условий, определить формальную структуру, которая была бы адекватна структуре исходной реальной системы. Отсюда можно сделать вывод, что далеко не каждая неопределенность может быть заменена на случайную величину, и что эти понятия не являются эквивалентными.

Достаточно стандартным приемом в теории игр, описывающей модели конфликтных ситуаций, т.е. модели с неопределенными факторами, является применение смешанных стратегий, которые представляют собой распределения вероятностей на множестве обычных чистых стратегий, являющихся тогда элементарными событиями. Такой подход приводит к существенному усложнению исходной модели, но зато ослабляет условия существования ситуации равновесия (см., напр. [9]). Наличие ситуаций равновесия делает поведение описываемой системы прогнозируемым. Реализация смешанных стратегий игроками состоит в проведении случайного эксперимента в соответствии с имеющимся распределением и выборе для действий полученной чистой стратегии. Такой подход выглядит достаточно искусственным, более того, он имеет смысл только в условиях многократного повторения разыгрывания одной и той же игры, тогда выигрыши игроков будут стремиться к среднему, т.е. к значению игры в смешанных стратегиях. Если же разыгрывание проводится однократно, или несколько раз, то использование смешанных стратегий игроками становится проблематичным. В некоторых случаях возможна реализация так называемой «физической смеси» стратегий (см. [10]). Например, если чистая стратегия состоит в выборе культуры для засевания поля, то нет необходимости производить случайно эксперимент для ее выбора, а можно просто засеять поле в пропорциях, указанных распределением вероятностей. В общем случае игроки скорее будут основывать свои действия на полученных дополнительных сведениях о других участниках, т.е. разыгрывание перейдет в некоторую многоэтапную процедуру. Подробное обсуждение применения смешанных стратегий для поиска решений игры можно найти в книгах [11, §14,16], [12, §11].

3 Информационные потоки

При построении моделей различных социально-экономических систем, а также промышленных, транспортных систем и систем связи и вообще систем, связанных с деятельностью людей, структуризация исследуемой системы должна включать и схемы обмена информацией между элементами и блоками (подсистемами). В этом состоит одно из основных отличий от структуры моделей во многих естественных науках, например, в физике. Под *информацией* здесь и далее будет пониматься исключительно ее содержательная часть, а не объем, записанный на каком-либо носителе. То есть описания самих элементов и подсистем и их взаимосвязей без описания схемы обмена информацией между ними будет недостаточно для адекватного определения требуемой структуры системы.

Например, классические модели совершенной и несовершенной конкуренции описывают два различных типа децентрализованных систем в экономике. В моделях совершенной конкуренции вальрасовского типа экономические агенты (элементы системы) по отдельности не могут своими действиями повлиять на состояние системы в целом, только совместно. Поэтому в рамках такой модели каждому из них в принципе не нужна информация о действиях (ценах, ассортименте, объемах) или интересах другого агента. Вместо этого агенты используют информацию об интегральных показателях всей системы (ценах на товары), которые могут быть им доступны, хотя механизм определения общих рыночных цен в имеющихся моделях не прописан достаточно четко (см., напр. [13]). С другой стороны, в моделях несовершенной конкуренции каждый отдельный участник своими действиями может изменить состояние всей системы и, в частности, повлиять на любого другого участника, поэтому участники используют информацию о действиях и интересах других при выборе своих действий. В итоге получается принципиально другая, теоретико-игровая модель, с иной схемой информационного обмена.

Можно указать также достаточно много примеров в истории, когда государства с одинаковыми институтами власти управлялись совершенно по-разному, т.е. с другой схемой информационного обмена между институтами.

Помимо приведенного выше (обычного) определения, весьма распространенным является определение информации на основе вероятностных представлений, которое для различия мы будем записывать как *информация (в)*. Например, пусть для упрощения набор всех возможных событий для исследуемой системы (объекта) конечен (n), все множество определяется как объединение этих n элементарных событий. Состояние системы S тогда задается с помощью распределения вероятностей $p = (p_1, \ldots, p_n)$ на этом множестве, что позволяет вычислить его энтропию

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i,$$

которая считается мерой неопределенности этого состояния. Таким образом, наибольшая энтропия соответствует наибольшей неопределенности, т.е. состоянию, в котором все элементарные события равновероятны при $p_i = 1/n$, $i = 1, \ldots, n$. Вероятности событий, как обычно, могут быть условными и безусловными, и разница в энтропии при переходе от одного состояния к другому и определяется как информация (в); т.е. уменьшение энтропии дает положительное значение информации (в) при переходе (см., напр. [14]). Однако при этом возникает естественный вопрос об общности такого подхода, поскольку речь идет по существу о возможности одномерного представления любых многообразных процессов и явлений. Например, если при переходе в новое состояние объем информации (в) возрастает, но она неверная, то почему при этом энтропия должна уменьшиться? Можно ли вообще измерить количество информации в каком-либо объекте? Ясно, что такое измерение становится возможным только в рамках какой-либо подходящей модели с заданной структурой. В общем же случае, как сами объекты, так и события с ними содержат бесконечное количество информации, поэтому такие измерения теряют смысл. Скажем, при замене одного автомобиля на другой той же самой марки это будет, конечно, не тот же автомобиль, но в рамках используемой нами модели он будет выполнять те же необходимые функции, а все различия между ними, хотя бы и бесконечные, для нас несущественны, и ими можно просто пренебречь и считать автомобили одинаковыми. Поэтому и количество необходимой информации о нем можно считать конечным. Таким образом, информация (в) должна быть связана со вполне определенной структурой используемой модели. Заметим, что разные структуры могут использовать в принципе одно и тоже множество информации об одном объекте.

С этим понятием также связана отраженная информация (данные), т.е. записанная на определенных носителях, которую можно обозначить как *информация (д)*. Здесь возникают многие задачи, связанные с эффективной обработкой, хранением и передачей информации (д) на различных устройствах, которые напрямую не относятся к построению моделей. Можно только отметить, что информация (д) появляется на устройствах изначально также в рамках какой-то определенной модели, и вопросы обработки в какой-то мере связаны с теми моделями и их структурами, в которых они будут использованы. Различия между этими понятиями достаточно ясно указаны, например, в [15, с. 111]: «Понятие информации возникло непосредственно из задач теории связи и специально было подобрано, чтобы отвечать задачам этой теории. Поскольку передача по линии связи сообщения определенной длины требует в случае несущественного или даже лживого сообщения и в случае сообщения о величайшем открытии примерно одинакового времени и одинаковых затрат, то с точки зрения теории связи приходится считать, что и количество информации в этих сообщениях является одинаковым».

4 Дополнительные примеры

Для большей ясности дадим еще иллюстративные примеры моделей достаточно сложных систем.

4.1 Игры среднего поля (mean field games)

Данная модель предназначена для описания поведения коллектива достаточно большого количества динамических активных элементов, т.е. каждый из них, как в обычной дифференциальной игре, имеет свою функцию выигрыша и уравнение состояния, которое определяет связь траектории и управляющих функций. В основу модели положено предположение, что игроки отличаются лишь по случайным слагаемым. Тогда предлагается перейти к средним значениям и, после взятия предела по количеству игроков, можно получить задачу оптимального управления, которая будет состоять в максимизации соответствующего усредненного функционала на усредненном уравнении состояния. Очевидно, что данный подход является прямым переносом принципов моделирования в статистической физике. Но в данном случае речь идет в первую очередь о социально-экономических приложениях описанной модели (см., напр. [16]). Поэтому возникает вполне естественный вопрос о правомерности отождествления поведения, скажем, молекул газа в заданном объеме и коллективов активных элементов (индивидов) со своими интересами и наборами действий. В модели игры среднего поля по существу предполагается возможность замены коллектива на его обобщенного представителя, в то время как в социально-экономических науках всегда подчеркивалось различие в поведении отдельной личности и коллектива личностей. В частности, известная теорема К. Эрроу о диктаторе (см., напр. [6, 17]) утверждает, что при достаточно общих предположениях построение коллективного, т.е. согласованного для всех членов коллектива, отношения предпочтения по отдельным отношениям возможно только при его совпадении с одним из таких отдельных отношений. Следовательно, поведение коллектива будет более сложным в общем случае, и его не охватить заданием коллективного отношения предпочтения, т.е. требуется другая модель вместо оптимизации по какому-либо отношению предпочтения. Это утверждение можно проиллюстрировать простыми примерами.

Пусть проводятся выборы руководителя коллектива, состоящего из n групп ($n > 2$), каждая i-я группа выдвигает своего кандидата a_i и присылает на выборы своего представителя со своим отношением предпочтения $\succ_i$. Самый простой вариант предпочтения – свой кандидат лучше всех, т.е.

$$a_i \succ_i a_j,\ \forall j \neq i.$$

Тогда выбрать руководителя невозможно, кроме как взять одного из кандидатов, т.е. взять отдельное отношение предпочтения как коллективное. При этом доля его поддержки будет равна $1/n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. решение абсолютно «нелегитимно».

Также очень хорошо известный факт – коллективное отношение предпочтения может быть нетранзитивным, даже если все отдельные отношения предпочтения транзитивны, он был замечен еще М. Кондорсе (см., напр. [17]). Возьмем обобщенный вариант этого парадокса. Пусть в предыдущем примере представители сравнивают всех кандидатов попарно:

$$\begin{aligned}
&a_i \succ_1 a_{i+1},\ i = 1, \dots, n-1;\\
&a_i \succ_k a_{i+1},\ i = 1, \dots, k-2, k, \dots, n-1, \text{ и } a_n \succ_k a_1,\\
&\ \text{при } k = 2, \dots, n-1;\\
&a_i \succ_n a_{i+1},\ i = 1, \dots, n-2, \text{ и } a_n \succ_n a_1.
\end{aligned}$$

Если взять коллективное отношение предпочтения по большинству голосов, то получим цикл

$$a_i \succ a_{i+1},\ i = 1, \dots, n-1, \text{ и } a_n \succ a_1.$$

При этом доля поддержки любого коллективного попарного предпочтения будет равна $(n-1)/n \to 1$ при $n \to \infty$.

Сами по себе модели с большим количеством активных элементов, в том числе полученных как предельные из игровых моделей, достаточно хорошо известны (см. [18, 8, 19, 20]). Но все такие модели равновесного типа не сводятся к задачам оптимизации, а требуют другого математического аппарата.

4.2 Модель долгосрочного управления возобновляемыми природными ресурсами

Поскольку управление природными ресурсами, в том числе возобновляемыми, принципиально важно для устойчивого развития планеты, то соответствующие задачи находятся в центре внимания многих исследователей. Отметим, что при построении моделей здесь требуется учитывать многие разнородные, но взаимосвязанные факторы, в частности, экономические, экологические, социальные и их действия на довольно длительном периоде времени. Поэтому часто возникают очень сложные с математической точки зрения постановки задач с неопределенными факторами. В качестве примера возьмем модель управления лесными ресурсами.

Прежде всего, лес используется в разных целях. С точки зрения экономики – это источник древесины и топлива, с точки зрения экологии – это среда очистки воздуха, поглощения углерода, с точки зрения биологии – это среда обитания животных, птиц, растений, с точки зрения общества – место отдыха. Если попытаться свести все эти факторы в единую функцию цели (полезности) и указать все зависимости и ограничения, включая влияние погоды, загрязнения окружающей среды, нашествия вредных насекомых и т. п., то получится фактически нерешаемая задача. Поэтому необходимо провести декомпозицию модели на достаточно самостоятельные блоки. Например, в работе [21] был применен метод последовательного достижения целей с декомпозицией по периодам планирования. Исходной являлась модель долгосрочного управления лесными ресурсами. Отметим, что известно достаточно много моделей в этой области, которые формулируются как задачи оптимального управления, т. е. как задачи максимизации критерия качества вдоль траекторий движения, описываемых уравнением состояния (см., напр. [22]).

Возьмем модель с дискретным временем, разделенным на одинаковые интервалы (год) $t = 1, 2, \dots, T$. Выберем один из простейших способов моделирования динамики изменения состояния леса, поскольку это не влияет на сущность подхода. А именно, возьмем только один вид деревьев (сосна) и будем считать, что вся территория леса площадью S разбита на участки, так что на одном участке находятся деревья только одного возможного возраста $i = 1, \dots, L$. Пусть вектор $v^t = (v_1^t, \dots, v_L^t)$ задает распределение площадей деревьев по возрастам в конце периода t, начальное распределение v^0 считается известным. При отсутствии внешних воздействий динамика лесных ресурсов задается разностным уравнением

$$v^{t+1} = A(v^t), \quad t = 0, 1, \dots, T - 1;$$

где оператор A в простейшем случае задается матрицей порядка L.

При необходимости он может содержать и неопределенные факторы, но это не скажется на сущности модели. Влияние на состояние леса оказывают вырубка, а также высадка молодых деревьев. Пусть $u^t = (u_1^t, \dots, u_L^t)$ и $w^t = (w_1^t, \dots, w_L^t)$ – площади вырубки и высадки деревьев в период t, при этом $u_i^t = 0$ при $i = 1, \dots, l-1$, $w_i^t = 0$ при $i = l_0 + 1, \dots, L$, т.е. l – минимальный возраст для начала вырубки, l_0 – максимальный возраст саженцев. При этом L считается максимальным товарным возрастом. Тогда динамика леса будет описываться соотношениями:

$$v^{t+1} = A(v^t - u^t) + w^t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1;$$
$$\sum_{i=1}^{L} v_i^t \le S, \; v^t \ge 0, \; u^t \ge 0, \; w^t \ge 0, \quad t = 0, 1, \dots, T.$$

В конце планового периода задается некоторая желаемая возрастная структура леса, например,

$$v^T \in V,$$

где V – некоторое множество в $\mathbb{R}^L$. Кроме этого, могут задаваться различные дополнительные ограничения, например, на объем поглощения углерода (Γ_t):

$$\sum_{i=1}^{L} \gamma_i v_i^t \ge \Gamma_t, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

где γ_i – объем поглощения углерода за один интервал времени одним гектаром леса возраста i.

Множество траекторий $\{v^t\}$, $\{u^t\}$, $\{w^t\}$, удовлетворяющих приведенным ограничениям, может быть достаточно широким, поэтому возникает принципиальный вопрос о выборе критерия качества управления. Традиционным вариантом является функция прибыли вдоль траектории движения. Если известны цены на кубометр древесины каждого товарного возраста, удельные затраты на вырубку гектара леса каждого товарного возраста, а также удельные затраты на высадку саженцев каждого возраста, не большего l_0, на гектар площади, то, зная выход древесины в кубометрах с гектара площади каждого товарного возраста, можно вычислить значение этой функции вдоль заданной траектории. Основной недостаток данного подхода в том, что величины l и L достаточно большие, для соснового леса $l \approx 60$ лет, $L \approx 120$ лет. Тогда плановый период должен быть еще больше, чтобы учесть полное обращение возрастов, $T \approx 200$. Поэтому любые ценовые значения на такой длительный период времени нереальны, и необходимо использовать другой критерий. Например, можно взять критерий сопоставления затрат. Пусть μ_i обозначает объем древесины в кубометрах с одного гектара леса возраста i, η_i – объем древесины с одного гектара при высадке возраста i по достижении им возраста l (либо другого эталонного возраста). Тогда можно определить целевую функцию

$$\sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{i=l}^{L} \mu_i u_i^t - \sum_{i=1}^{l_0} \eta_i w_i^t \right)$$

и выбирать допустимую траекторию, которая доставляет наибольшее значение этой функции. При необходимости можно применять равномерные критерии. Полученные в результате задачи оптимизации решаются известными численными методами.

Список литературы

[1] Алимов Ю.И. Альтернатива методу математической статистики. - М.: Знание, 1980.

[2] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. - М.: Физматлит, 2005.

[3] Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. - М.: Изд-во МГУ, 1983.

[4] Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. - М.: Наука, 1981.

[5] Теория систем и методы системного анализа в управлении и связи/ Волкова В.Н., Воронков В.А., Денисов А.А. и др. - М.: Радио и связь, 1983.

[6] Экланд И. Элементы математической экономики.- М.: Мир, 1983.

[7] Konnov I.V. On vector formulations of auction-type problems with applications // Optimization. - 2016. - V.65, №1. - P. 233–251.

[8] Алипрантис К., Браун Д., Беркеншо О. Существование и оптимальность конкурентного равновесия. - М.: Мир, 1995.

[9] Оуэн Г. Теория игр. - М: Едиториал УРСС, 2004.

[10] Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Сов. радио, 1972.

[11] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. -М.: Наука, 1971.

[12] Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. -М.: Наука, 1976.

[13] Konnov I.V. An alternative economic equilibrium model with different implementation mechanisms // Advanced Modeling and Optimization. - 2015. - V.17, №2. - P. 245–265.

[14] Стратонович Р.Л. Теория информации. - М.: Сов. радио, 1975.

[15] Яглом А.М., Яглом И.М. Вероятность и информация. - М.: Наука, 1973.

[16] Gueant O., Lasry J.-M., Lions P.-L. Mean field games and applications // Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010. Ed. by Morel J.-M. et al. - Berlin: Springer-Verlag, 2011. - P.205–266.

[17] Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. - М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006.

[18] Гильденбранд В. Ядро и равновесие в большой экономике. - М.: Наука, 1986.

[19] Mas-Colell A. Walrasian equilibria as limits of noncooperative equilibria. Part I: Mixed strategies. // J. Econ. Theory. - 1983. - V.30, №1. - P. 153–170.

[20] Novshek W., Sonnenschein H. Walrasian equilibria as limits of noncooperative equilibria. Part II: Pure strategies. // J. Econ. Theory. - 1983. - V.30, №1. - P. 171–187.

[21] Konnov I.V. Sequential approach for management of renewable natural resources with applications to forestry // Advanced Modeling and Optimization. - 2014. - V.16, №1. - P. 9–19.

[22] Amacher G.S., Ollikainen M., Koskela E. Economics of forest resources. - Cambridge: The MIT Press, 2009.