

УДК 621.83

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ СИЛОВОГО АНАЛИЗА ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

**А.В. КОТОВ<sup>1</sup>, Д.Г. КРОЛЬ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*ОАО «Сейсмотехника», Республика Беларусь*

<sup>2</sup>*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь*

*Представлены аналитические способы силового анализа плоских рычажных механизмов с применением теории комплексных чисел. На примере структурной группы Ассура II класса 1-го типа изложены три аналитических способа нахождения реакций связей в кинематических парах: методом Крамера, методом обратной матрицы, а также с помощью тангенциальных и нормальных составляющих. Приведены оригинальные приемы работы с комплексными числами при проведении силового анализа плоских рычажных механизмов. Использование предложенных методов силового анализа на основе теории комплексных чисел и современных математических пакетов программ позволяет выполнять силовой анализ плоских рычажных механизмов.*

**Ключевые слова:** силовой анализ, реакции, комплексные числа, метод Крамера, метод обратной матрицы, тангенциальная составляющая реакции, нормальная составляющая реакции.

## ANALYTICAL METHODS OF FORCE ANALYSIS OF PLANE LEVER MECHANISMS USING THE THEORY OF COMPLEX NUMBERS

**A.V. KOTOV<sup>1</sup>, D.G. KROL<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*JSC Seismotekhnika, the Republic of Belarus*

<sup>2</sup>*Sukhoi State Technical University of Gomel, the Republic of Belarus*

*The article presents analytical methods of force analysis of flat lever mechanisms using the theory of complex numbers. Using the example of the structural group of Assur II class of the 1st type, three analytical methods of finding the reactions of the connections in kinematic pairs are presented: the Cramer method, the inverse matrix method, and using tangential and normal components. Original techniques for working with complex numbers in carrying out force analysis of flat lever mechanisms are given. The use of the proposed methods of force analysis based on the theory of complex numbers and modern mathematical software packages allows performing force analysis of flat lever mechanisms.*

**Keywords:** force analysis, reactions, complex numbers, Cramer's method, inverse matrix method, tangential component of reaction, normal component of reaction.

### **Введение**

Силовой анализ плоского рычажного механизма включает определение реакций в его кинематических парах, а в некоторых случаях – нахождение уравновешивающей силы или момента, действующих на начальное звено. Знание этих реакций играет важную роль в практических расчетах, таких как оценка прочности, жесткости, долговечности звеньев и других аналогичных задач.

Как правило, сущность всех известных аналитических методов силового анализа рычажных механизмов состоит в составлении системы уравнений равновесия для каждого отдельного звена или структурной группы с дальнейшим решением полученных уравнений [1 - 9]. При этом при определении реакций внешних и внутренних связей, данные реакции раскладываются на составляющие методом проекций на оси глобальной системы координат [1 - 3] или на оси естественного трехгранника [4 - 6]. Для решения полученных систем уравнений могут применяться как простые математические преобразования [7], так и матричные методы [8, 9], связанные с использованием различных математических пакетов и языков программирования (например, метод Крамера, метод обратной матрицы и др.).

Известно, что реакция в кинематической паре, как и любая другая сила, определяется тремя параметрами – числовым значением, направлением и точкой приложения, что традиционно реализуется с помощью векторных величин. Вместе с тем в силовом анализе вместо двухмерных векторов сил представляется возможным использовать комплексные числа, которые по существу являются векторными величинами, содержащими всю информацию о длине и направлении вектора. В настоящее время использование теории комплексных чисел реализовано в основном при проведении кинематического анализа плоских рычажных механизмов [10, 11], т.к. применение комплексных чисел в силовом анализе только находит свою реализацию [12, 13]. В последнее время возрождению интереса к возможности применения теории комплексных чисел, как в кинематическом, так и силовом анализе плоских рычажных механизмов способствует развитие компьютерной техники и появление мощных математических пакетов, способных оперировать с комплексными числами.

Поэтому реализация теории комплексных чисел в кинематическом и силовом анализе плоских рычажных механизмов нуждается в проведении дополнительных исследований в данном направлении и является важной научной и практической задачей. В данной работе будут рассмотрены аналитические способы проведения силового анализа плоских рычажных механизмов с применением теории комплексных чисел, позволяющих в доступном и наглядно виде определять реакции в кинематических парах.

### **Цель исследования**

Используя теорию комплексных чисел на примере структурной группы Ассура II класса 1-го типа показать возможность применения различных аналитических способов проведения силового анализа плоских рычажных механизмов. Дать качественную оценку возможности применения данных аналитических способов на практике, а также перспективы их дальнейшего развития по сравнению с другими методами исследования.

### **Постановка задачи**

Будем считать, что для некоторого плоского рычажного механизма заранее уже выполнен кинематический анализ с использованием теории комплексных чисел. Проведенный кинематический анализ предполагает, что известны все векторы комплексных чисел линейных и угловых ускорений характерных точек и звеньев механизма, а, следовательно, известны все векторы комплексных чисел сил инерции, приложенные к центрам масс, а также моменты сил инерции звеньев.

Последовательность проведения силового анализа с применением теории комплексных чисел рассмотрим на примере определения реакций (без учета сил трения) во всех внутренних и внешних кинематических структурной группы Ассура II класса 1-го типа, получившей наибольшее распространение в машиностроении, расчетная схема которой приведена на рис. 1. Рассматриваемая структурная группа лежит в комплексной плоскости, для которой начало системы координат совпадает с кинематической парой A. Действие отброшенных звеньев (пунктирные линии) в кинематических парах B и C, представим в виде реакций неизвестными, как по модулю, так и по направлению. С каждым из звеньев AB и AC дополнительно связаны жесткие тела, изображенные

штрихпунктирной линей, имеющие собственные массово-инерционные характеристики.

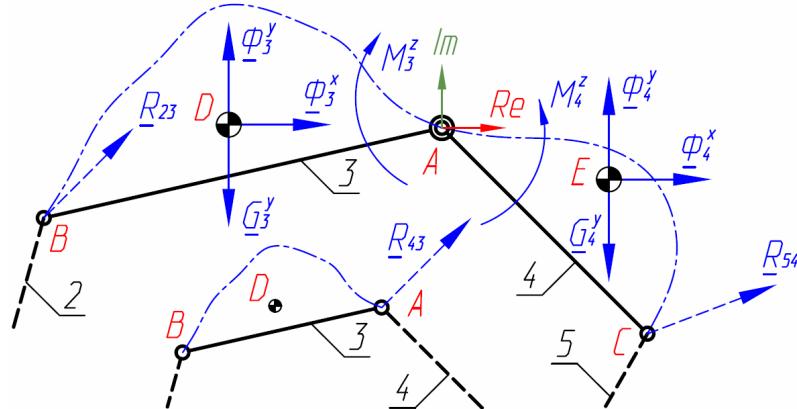


Рис. 1. Расчетная схема структурной группы Ассура II (3,4)

Требуется для заданного положения рассматриваемой структурной группы Ассура II класса 1-го типа аналитически провести силовой анализ с применением теории комплексных чисел следующими способами: методом Крамера, методом обратной матрицы, а также с помощью тангенциальных и нормальных составляющих.

**Аналитические зависимости.** Представим вектор комплексного числа в следующей форме записи:

$$\underline{r} = r_x + j \cdot r_y = r \cdot (\cos \theta + j \cdot \sin \theta) = r \cdot e^{j \cdot \theta}, \quad (1)$$

где  $j$  – мнимая единица;  $r_x$  и  $r_y$  – действительные числа соответственно действительной и мнимой части комплексного числа;  $r$  – модуль комплексного числа;  $\theta$  – аргумент комплексного числа, представляющий собой угол наклона к действительной оси комплексной плоскости, рад.

В выражении (1) для обозначения вектора комплексного числа здесь и далее будет использоваться символ нижнего подчеркивания, что в дальнейшем позволит отличать вектор комплексного числа от его модуля, а также исключит совпадение с принятыми обозначениями обычных векторных величин.

Для проведения силового анализа с применением теории комплексных чисел все внешние нагрузки на комплексной плоскости должны быть в общем виде представлены в следующей алгебраической форме записи комплексного числа (см. рис. 1):

$$\underline{G}_i = -j \cdot G_i^y; \underline{\Phi}_i = \Phi_i^x - j \cdot \Phi_i^y; \underline{M}_i = M_i^z, \quad (2)$$

где  $G_i$  и  $\Phi_i$  – векторы комплексных чисел соответственно силы тяжести и силы инерции, приложенные в соответствующей  $i$ -ой точке;  $M_i$  – момент силы, приложенный к соответствующему  $i$ -ому звену, направление действия которого будет определяться алгебраическим знаком действительного числа (положительное значение соответствует вращению против хода часовой стрелки, а отрицательное – по ходу часовой стрелки).

Единичный вектор (орт) любого произвольного вектора комплексного числа будет находиться путем деления данного вектора на его длину:

$$Orr(\underline{r}) = \underline{r} / |\underline{r}|, \quad (3)$$

где  $\underline{r}$  – исходный произвольный вектор комплексного числа.

Рассмотрим операцию умножение комплексных чисел с использованием комплексного сопряжения. Данная операция служит аналогом для скалярного и векторного произведений векторов, применяемых в векторной алгебре, и позволяет заменить их единым алгебраическим действием [12, 13]. Так, если при перемножении двух векторов комплексных чисел, первый вектор представить в виде комплексно-сопряженного числа, то действительная часть полученного таким образом произведения (с учетом величины алгебраического знака) будет представлять значение скалярного произведения двух векторов, заданных этими числами. Мнимая же часть такого произведения, также

с учетом величины алгебраического знака, будет представлять собой значение векторного произведения этих же двух векторов. Данное свойство векторов комплексных чисел можно представить в следующем виде:

$$\underline{r}_1^* \cdot \underline{r}_2 = (\underline{r}_{1x} - j \cdot \underline{r}_{1y}) \cdot (\underline{r}_{2x} + j \cdot \underline{r}_{2y}) = \underbrace{\underline{r}_{1x} \cdot \underline{r}_{2x} + \underline{r}_{1y} \cdot \underline{r}_{2y}}_{\text{скалярное произведение}} + j \cdot (\underbrace{\underline{r}_{1x} \cdot \underline{r}_{2y} - \underline{r}_{1y} \cdot \underline{r}_{2x}}_{\text{векторное произведение}}),$$

где  $\underline{r}_1^*$  – первый перемножаемый вектор комплексно-сопряженного числа к вектору  $\underline{r}_1$ , которые образуют пару комплексных чисел с одинаковыми действительными частями и равными по абсолютной величине, но противоположными по знаку, мнимыми частями;  $\underline{r}_2$  – второй перемножаемый вектор комплексно числа.

Таким образом, связь скалярного и векторного произведения между векторными и комплексными величинами можно представить в виде следующего тождества:

$$\bar{r}_1 \bar{r}_2 \equiv \operatorname{Re}(\underline{r}_1^* \cdot \underline{r}_2) \text{ и } \bar{e}_z \cdot (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2) \equiv \operatorname{Im}(\underline{r}_1^* \cdot \underline{r}_2), \quad (4)$$

где  $\bar{e}_z$  – единичный вектор оси  $Z$ ;  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$  – два перемножаемых вектора.

Примем, что при работе с комплексными числами, в выражениях (4), по аналогии с механикой, первый умножаемый вектор комплексно-сопряженного числа всегда будет представлять собой радиус-вектор точки приложения вектора силы, а второй – вектор комплексного числа самой этой силы. Это позволит в дальнейшем использовать выражение (4) в силовом анализе при составлении уравнений равновесия моментов векторов комплексных чисел сил относительно заданной точки.

**Силовой анализ.** Порядок силового расчета плоского рычажного механизма с помощью теории комплексных чисел имеет классический вид, т.е. обратный порядок по сравнению с кинематическим [14].

1 Способ. Рассмотрим структурную группу, см. рис. 2. Реакции связей в кинематических парах представим в виде компонент в проекции на оси декартовой системы координат, см. рис. 2.

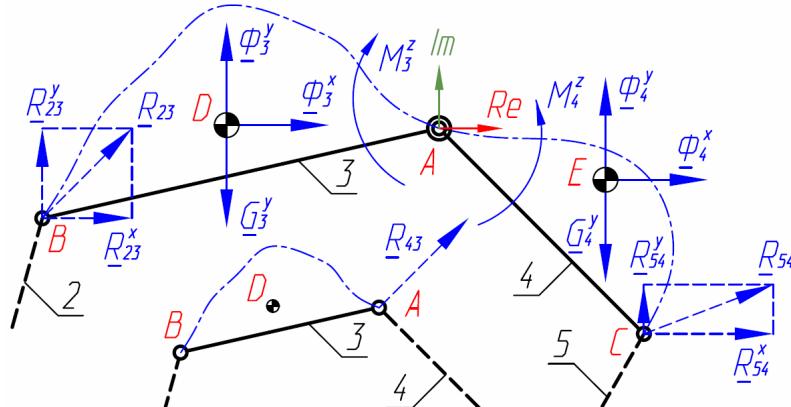


Рис. 2. Расчетная схема структурной группы Ассура II (3,4) к способам 1 и 2

Для определения неизвестных четырех проекций реакций связей составим векторное уравнение равновесия сил, действующих на всю рассматриваемую структурную группу, и два уравнения моментов сил, действующих на каждое звено относительно точки, характеризующую внутреннюю кинематическую пару группы Ассура:

$$\begin{cases} G_3 + G_4 + \underline{\Phi}_3 + \underline{\Phi}_4 + \underline{R}_{23} + \underline{R}_{54} = 0 \\ \operatorname{Im}(\underline{AB}^* \cdot \underline{R}_{23}) + \operatorname{Im}(\underline{AD}^* \cdot (\underline{G}_3 + \underline{\Phi}_3)) + M_3 = 0 . \\ \operatorname{Im}(\underline{AC}^* \cdot \underline{R}_{54}) + \operatorname{Im}(\underline{AE}^* \cdot (\underline{G}_4 + \underline{\Phi}_4)) + M_4 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Несмотря на то, что система уравнений (5) содержит три уравнения, данная система является разрешимой, т.к. первое уравнение системы (5) имеет две части – мнимую и действительную.

Для решения системы уравнений (5) воспользуемся методом Крамера. Составим основную матрицу из коэффициентов системы уравнений равновесия (5), в которой ее элементы – это коэффициенты при неизвестных переменных:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \operatorname{Im}(\underline{AB}^* \cdot 1) & \operatorname{Im}(\underline{AB}^* \cdot j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{Im}(\underline{AC}^* \cdot 1) & \operatorname{Im}(\underline{AC}^* \cdot j) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В выражении (6) для нахождения плеча к неизвестным проекциям реакций связей в кинематических парах  $B$  и  $C$  применим операцию умножения вектора комплексно-сопряженного числа с соответствующим единичным вектором оси комплексной плоскости. Такая операция является аналогом векторного способа нахождению плеч для осей  $X$  и  $Y$  [15], которая связана с векторами комплексных чисел в виде следующего тождества:

$$\bar{e}_Z \cdot (\bar{r}_1 \times \bar{e}_X) \equiv \operatorname{Im}(r_1^* \cdot 1) \text{ и } \bar{e}_Z \cdot (\bar{r}_1 \times \bar{e}_Y) \equiv \operatorname{Im}(r_1^* \cdot j),$$

где  $\bar{e}_X$  и  $\bar{e}_Y$  – соответственно единичные векторы осей  $X$  и  $Y$ .

Составим матрицу-столбец свободных членов для системы уравнений (5):

$$H = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(\underline{G}_3 + \underline{G}_4 + \underline{\Phi}_3 + \underline{\Phi}_4) \\ -\operatorname{Im}(\underline{G}_3 + \underline{G}_4 + \underline{\Phi}_3 + \underline{\Phi}_4) \\ -(\operatorname{Im}(\underline{AD}^* \cdot (\underline{G}_3 + \underline{\Phi}_3)) + M_3) \\ -(\operatorname{Im}(\underline{AE}^* \cdot (\underline{G}_4 + \underline{\Phi}_4)) + M_4) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Составим четыре вспомогательные матрицы, получаемые из основной матрицы системы (6) путем замены  $i$ -ого столбца столбцом матрицы свободных членов (7):

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} H_0 & K_{0,1} & K_{0,2} & K_{0,3} \\ H_1 & K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} \\ H_2 & K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} \\ H_3 & K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} \end{pmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} K_{0,0} & H_0 & K_{0,2} & K_{0,3} \\ K_{1,0} & H_1 & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,0} & H_2 & K_{2,2} & K_{2,3} \\ K_{3,0} & H_3 & K_{3,2} & K_{3,3} \end{pmatrix}; \quad (8)$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} K_{0,0} & K_{0,1} & H_0 & K_{0,3} \\ K_{1,0} & K_{1,1} & H_1 & K_{1,3} \\ K_{2,0} & K_{2,1} & H_2 & K_{2,3} \\ K_{3,0} & K_{3,1} & H_3 & K_{3,3} \end{pmatrix}; \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} K_{0,0} & K_{0,1} & K_{0,2} & H_0 \\ K_{1,0} & K_{1,1} & K_{1,2} & H_1 \\ K_{2,0} & K_{2,1} & K_{2,2} & H_2 \\ K_{3,0} & K_{3,1} & K_{3,2} & H_3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Неизвестные проекции реакций связей (5) находим по следующим формулам Крамера:

$$R_{23}^x = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|}; \quad R_{23}^y = \frac{|\Delta_2|}{|\Delta|}; \quad R_{54}^x = \frac{|\Delta_3|}{|\Delta|}; \quad R_{54}^y = \frac{|\Delta_4|}{|\Delta|}. \quad (10)$$

Вектор реакции связей в кинематических парах  $B$  и  $C$  в комплексном виде определим по формулам:

$$\underline{R}_{23} = R_{23}^x + j \cdot R_{23}^y; \quad \underline{R}_{54} = R_{54}^x + j \cdot R_{54}^y. \quad (11)$$

Вектор реакции связей во внутренней кинематической паре  $A$  найдем из уравнения равновесия сил, действующих на одно из звеньев:

$$\underline{R}_{34} = -(\underline{R}_{23} + \underline{G}_3 + \underline{\Phi}_3) \text{ или } \underline{R}_{43} = -(\underline{R}_{54} + \underline{G}_4 + \underline{\Phi}_4). \quad (12)$$

2 Способ. Решение системы уравнений (5) методом обратной матрицы является более быстрым и компактным по сравнению с предыдущим рассмотренным методом и предполагает использование для поиска решения все той же основной матрицы (6) и матрицы-столбца свободных членов (7):

$$(R_{23}^x \quad R_{23}^y \quad R_{54}^x \quad R_{54}^y)^T = K^{-1} \cdot H. \quad (13)$$

В выражении (13) используются обратная основная матрица (6), а результатом решения является вектор искомых параметров, состоящий из проекций реакций на действительную и мнимую ось комплексной плоскости, представленный в транспонированном виде.

Нахождение векторов реакций связей в кинематических парах  $B$  и  $C$ , а также в внутренней кинематической паре  $A$  производится по формулам (11) и (12).

3 Способ. Реакции связей в рассматриваемой группе Ассура представим в проекции на оси естественного трехгранника, рис. 3.

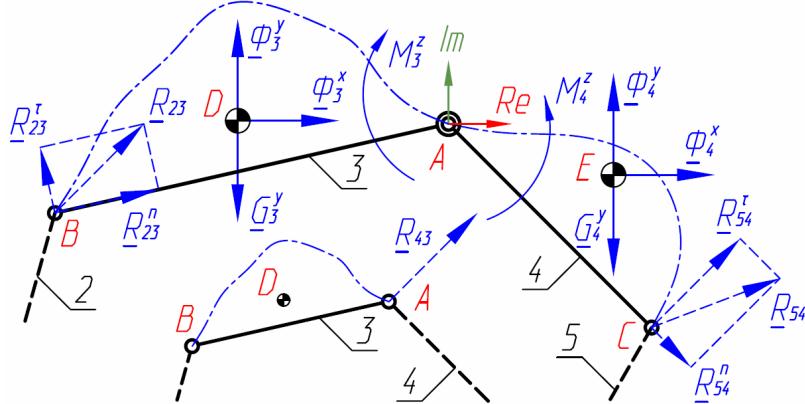


Рис. 3. Расчетная схема структурной группы Ассура II (3,4) к способу 3

Тангенциальную составляющую реакции связей находим для каждого отдельного звена рассматриваемой структурной группы путем составления уравнения равновесия моментов сил, действующих на звено, относительно точки, характеризующую внутреннюю кинематическую пару. При составлении этих уравнений воспользуемся описанным свойством умножения двух комплексных чисел (4). Эти уравнения равновесия имеют вид:

$$M_{\Sigma AB} = \text{Im}(\underline{AD}^* \cdot (\underline{G}_3 + \underline{\Phi}_3)) + M_3; \quad M_{\Sigma AC} = \text{Im}(\underline{AE}^* \cdot (\underline{G}_4 + \underline{\Phi}_4)) + M_4. \quad (14)$$

Векторы комплексных чисел неизвестных тангенциальных составляющих реакций в кинематических парах  $B$  и  $C$  представим в виде произведения их длин (модулей) на единичные векторы (орты) их направления, которые заранее известны (перпендикулярны звеньям  $AB$  и  $AC$ ):

$$R_{23}^\tau = R_{23}^\tau \cdot e_{23}^\tau; \quad R_{54}^\tau = R_{54}^\tau \cdot e_{54}^\tau. \quad (15)$$

Единичные векторы (орты) тангенциальных составляющих реакций в кинематических парах  $B$  и  $C$  найдем, используя выражение (3):

$$\underline{e}_{23}^\tau = \text{Ort}(\underline{\underline{AB}}) \cdot j; \quad \underline{e}_{54}^\tau = \text{Ort}(\underline{\underline{AC}}) \cdot j. \quad (16)$$

В правой части выражений (16) оба вектора комплексных чисел умножены на минимальную единицу, что соответствует повороту вектора комплексного числа на угол  $90^\circ$  в комплексной плоскости против хода часовой стрелки.

Используя выражения (14) – (16) модуль тангенциальных составляющих реакций в кинематических парах  $B$  и  $C$  рассматриваемой структурной группы представим в следующем виде:

$$R_{23}^\tau = -\frac{M_{\Sigma AB}}{\text{Im}(\underline{AB}^* \cdot \underline{e}_{23}^\tau)}; \quad R_{54}^\tau = -\frac{M_{\Sigma AC}}{\text{Im}(\underline{AC}^* \cdot \underline{e}_{54}^\tau)}. \quad (17)$$

В результате с помощью выражений (17) для звеньев  $AB$  и  $AC$  рассматриваемой структурной группы (см. рис. 3) находятся значения тангенциальных составляющих реакций в кинематических парах  $B$  и  $C$ , а с помощью выражений (15) – соответствующие им векторы.

Далее найдем вспомогательный вектор комплексного числа силы, равный сумме всех известных векторов сил, действующих на рассматриваемую структурную группу

(включая векторы комплексных чисел найденных тангенциальных составляющих реакций в кинематических парах  $B$  и  $C$ ), но взятым с противоположным знаком:

$$\underline{R}_{ABC} = -(G_3 + G_4 + \underline{\Phi}_3 + \underline{\Phi}_4 + \underline{R}_{23}^\tau + \underline{R}_{54}^\tau). \quad (18)$$

Данный вектор является суммой  $\underline{R}_{23}^n$  и  $\underline{R}_{54}^n$ .

Для определения нормальных составляющих реакций связей в кинематических парах  $B$  и  $C$  запишем по аналогии следующие выражения:

$$\underline{R}_{23}^n = R_{23}^n \cdot \underline{e}_{23}^n; \quad \underline{R}_{54}^n = R_{54}^n \cdot \underline{e}_{54}^n; \quad (19)$$

$$\underline{e}_{23}^n = Ort(\underline{AB}); \quad \underline{e}_{54}^n = Ort(\underline{AC}). \quad (20)$$

Воспользуемся свойством векторного произведения [5] и получим итоговые уравнения для определения нормальных составляющих реакций связей:

$$R_{23}^n = -\frac{\text{Im}(\underline{R}_{ABC}^* \cdot \underline{e}_{54}^n)}{\text{Im}(\underline{e}_{23}^n \cdot \underline{e}_{54}^n)}; \quad R_{54}^n = -\frac{\text{Im}(\underline{R}_{ABC}^* \cdot \underline{e}_{23}^n)}{\text{Im}(\underline{e}_{54}^n \cdot \underline{e}_{23}^n)}. \quad (21)$$

Определив с помощью выражений (21) значения нормальных составляющих реакций связей в кинематических парах  $B$  и  $C$ , а с помощью уравнений (19) – соответствующие им векторы, найдем вектор комплексных чисел их полных реакций:

$$\underline{R}_{23} = \underline{R}_{23}^\tau + \underline{R}_{23}^n; \quad \underline{R}_{54} = \underline{R}_{54}^\tau + \underline{R}_{54}^n. \quad (22)$$

Вектор комплексного числа полной реакции во внутренней кинематической паре  $A$  определяем по формулам (12). Таким образом, с помощью выражений (14) - (22) проведен силовой анализ рассматриваемой структурной группы с помощью теории комплексных чисел.

Представленный алгоритм определения векторов комплексных чисел тангенциальных (см. выражения (14) - (19)) и нормальных (см. выражения (19) - (22)) составляющих реакций легко может быть алгоритмизирован в любом математическом пакете или языке программирования (с помощью так называемых функций пользователя [5]).

**Результаты и их обсуждение.** Используя в качестве примера исходные данные, приведенные в табл., проведем силовой анализ тремя способами с применением теории комплексных чисел рассматриваемой структурной группы Ассура II класса 1-го типа (см. рис. 1).

Таблица

Ось	Координаты точек, мм					Проекции силовых факторов, Н (Н·мм)					
	A	B	C	D	E	G <sub>3</sub>	G <sub>4</sub>	Φ <sub>3</sub>	Φ <sub>4</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>
X	0	-155	80	-80	65	0	0	-60	40	0	0
Y	0	-35	-80	40	-20	-40	-70	10	-5	0	0
Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-100	200

Приведем числовые значения результатов аналитического расчета векторов комплексных чисел реакций в кинематических парах  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а также их модулей для силового анализа способом 1 и 2:

$$\underline{R}_{23} = 37,722 + 38,840 \cdot j \text{ H}; \quad \underline{R}_{54} = -17,722 + 66,160 \cdot j \text{ H}; \quad \underline{R}_{43} = -22,278 + 8,840 \cdot j \text{ H};$$

$$|\underline{R}_{23}| = 54,144 \text{ H}; \quad |\underline{R}_{54}| = 68,492 \text{ H}; \quad |\underline{R}_{43}| = 23,968 \text{ H}.$$

Приведем числовые значения результатов расчета векторов комплексных чисел тангенциальных и нормальных составляющих реакций в шарнирах  $B$  и  $C$ , а также их модулей для силового анализа способом 3:

$$\underline{R}_{23}^\tau = -6,515 + 28,851 \cdot j \text{ H}; \quad |\underline{R}_{23}^\tau| = 29,578 \text{ H}; \quad \underline{R}_{54}^\tau = 24,219 + 24,219 \cdot j \text{ H}; \quad |\underline{R}_{54}^\tau| = 34,250 \text{ H};$$

$$\underline{R}_{23}^n = 44,0237 + 9,989 \cdot j \text{ H}; \quad |\underline{R}_{23}^n| = 45,351 \text{ H}; \quad \underline{R}_{54}^n = -41,941 + 41,941 \cdot j \text{ H}; \quad |\underline{R}_{54}^n| = 59,313 \text{ H}.$$

**Проверка адекватности.** Полученные результаты аналитического расчета силового анализа с применением теории комплексных чисел полностью совпадают для всех трех предложенных способов, а также с результатами расчета, проведенного с помощью программного комплекса динамического анализа систем твердых тел.

На рис. 4 приведена рассматриваемая структурная группа с учетом всех приложенных нагрузок, а также с выведенными векторами результирующих реакций в кинематических парах A, B и C, модули которых полностью совпадают с аналитическими результатами расчета.

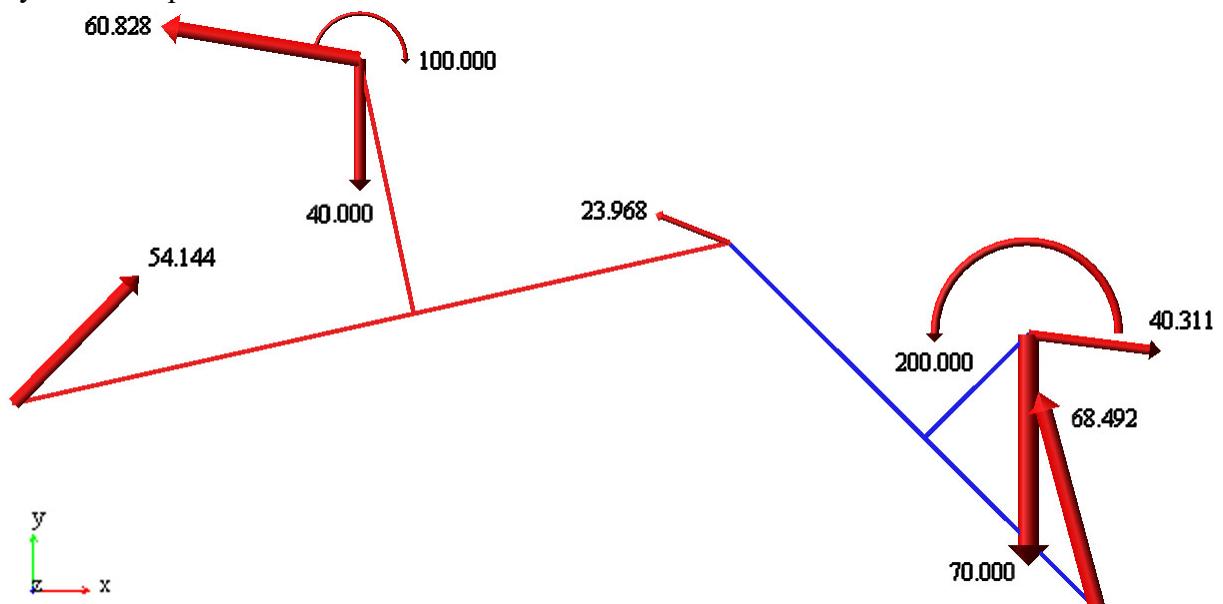


Рис. 4 – Проверка реакций в шарнирах с помощью программного комплекса динамического анализа систем твердых тел

### Заключение

В данной работе на примере структурной группы Ассура II класса 1-го типа представлены аналитические способы проведения силового анализа плоских рычажных механизмов с применением теории комплексных чисел. Рассмотрен частный случай силового анализа, при котором данная группа является последней присоединительной структурной группой плоского рычажного механизма.

Предложенные способы силового анализа легко поддаются формализации и алгоритмизации в любых современных математических пакетах и языках программирования. Применение теории комплексных чисел в силовом анализе плоских рычажных механизмов показало свою высокую эффективность, наглядность и доступность что в перспективе может найти свое применение, как в учебной, так и в инженерной практике.

### Литература

1. Бертяев, В.Д. Теоретическая механика на базе MathCAD. Практикум / В.Д. Бертяев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 734 с.
2. Семенов, Ю.А. Статика механизмов / Ю.А. Семенов, Н.С. Семенова // Теория механизмов и машин. – 2006. – Т. 4, № 2(8). – С. 47–58.
3. Кіницький, Я.Т. Теорія механізмів і машин в системі MathCAD: навч. посіб. / Я.Т. Кіницький, В.О. Харжевський, М.В. Марченко. – Хмельницький: ХНУ, 2014. – 324 с.
4. Орловський, Б. В. Визначення реакцій в кінематичних парах механізмів основ'язальних машин методом векторного перетворення координат / Б. В. Орловський, В. М. Дворжак // Вісник Київського національного університету технологій та дизайну. – 2009. – № 3. – С. 34- 44.

5. Котов, А. В. Силовой анализ плоских рычажных механизмов векторным методом / А. В. Котов // Механика машин, механизмов и материалов. – 2024. – № 2(67). – С. 36-43. – DOI 10.46864/1995-0470-2024-2-67-36-43.
6. Зиборов, К. А. Силовой анализ механизмов с помощью программы MathCAD / К.А. Зиборов, И. Н. Мацюк, Э. М. Шляхов // Теория механизмов и машин. – 2010. – Т. 8, № 1(15). – С. 83-88.
7. Силовой анализ навесного устройства трактора с регулируемыми характеристиками / Ф. Х. Халиуллин, С. М. Яхин, А. З. Имамиев [и др.] // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2023. – № 19. – С. 73-83. – DOI 10.26160/2658-3305-2023-19-73-83.
8. Russell, K., Shen, J.Q., Sodhi, R. Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems: Implementation in MATLAB and Simscape Multibody (3rd ed.). CRC Press, 2022. – 544 p.
9. Dien, N.P. Dynamic force analysis of a six-link planar mechanism under consideration of friction at the joints / N.P. Dien, N.V. Khang // Vietnam Journal of Mechanics. – 2004. – Vol. 26, no. 2. – Pp. 65–75. – DOI 10.15625/0866-7136/26/2/5690.
10. Мацюк, И.Н. Кинематика плоских механизмов в программе MathCAD с использованием теории комплексных чисел / И. Н. Мацюк, Э. М. Шляхов, Н. В. Зима // Развитие информационно-ресурсного обеспечения образования и науки в горно-металлургической отрасли и на транспорте 2014 : Сборник научных трудов международной конференции. – Днепропетровск: НГУ, 2014. – С. 407-412.
11. Abhary, K. A unified analytical parametric method for kinematic analysis of planar mechanisms. International Journal of Mechanical Engineering Education. – 2022. – Vol. 50(2). – Pp. 389-431. – DOI 10.1177/0306419020978175.
12. Matsyuk, I.N., Shlyakhov E., Zyma N.V. Study of Planar Mechanisms Kinetostatics Using the Theory of Complex Numbers with MathCAD PTC. Mechanics, Materials Science & Engineering Journal. – 2017. – Vol. 8, hal-01508541.
13. Котов, А.В. Кинематический и силовой анализ механизма подъема наклонной камеры зерноуборочного комбайна с применением теории комплексных чисел / А.В. Котов, Д.Г. Кроль // Конструирование, использование и надежность машин сельскохозяйственного назначения : сборник научных работ. – 2025. – № 1(24). – С. 40-48.
14. Артоболевский, И.И. Теория механизма и машин: учебник / И.И. Артоболевский. 4-е изд., перераб. и доп. / Репринтное воспроизведение издания 1988 г. – М. : Транспортная компания, 2023. – 640 с.
15. Привалов, И.И. Аналитическая геометрия : учебное пособие / И.И. Привалов. – 38-е изд. – СПб. : Лань, 2010. – 304 с.

## References

1. Bertyaev V.D. Teoreticheskaya mekhanika na baze MathCAD. Praktikum [Theoretical mechanics based on MathCAD. Workshop]. Saint-Petersburg, BKhV-Peterburg Publ., 2005. 734 p. (in Russian).
2. Semenov Yu.A., Semenova N.S. Statika mekhanizmov [Statics of mechanisms]. Teoriya mekhanizmov i mashin [Theory of mechanisms and machines], 2006, vol. 4, no. 2(8), pp. 47–58 (in Russian).
3. Kinytskyi Ya.T., Kharzhevskyi V.O., Marchenko M.V. Teoriya mekhanizmov i mashin v sisteme MathCAD [Theory of mechanisms and machines in the MathCAD system]. Khmelnytskyi, Khmelnitskiy natsionalnyy universitet Publ., 2014. 324 p.
4. Orlovsky B.V. Dvorzhak V.M. Vyznachennya reaktsiy v kinematychnykh parakh mekhanizmov osnovov'yazal'nykh mashyn metodom vektornoho peretvorennya koordynat [Significant reactions in kinematic pairs of mechanisms of basic knitting machines using the method of vector coordinate transformation] Visnyk Kyivs'koho natsional'noho universytetu tekhnolohiy ta dyzaynu [Bulletin of the Kyiv National University of Technology and Design], 2009, no. 3, pp. 34- 44.

5. Kotov A.V. Silovoy analiz ploskikh rychazhnykh mekhanizmov vektornym metodom [Force analysis of plain lever mechanisms by vector method]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2024, no. 2(67), pp. 36-43. DOI 10.46864/1995-0470-2024-2-67-36-43. (in Russian).
- 6 Ziborov K.A., Matsyuk I.N., Shlyakhov E.M. Silovoy analiz mekhanizmov s pomoshch'yu programmy MathCAD [Force analysis of mechanisms using the MathCAD program] *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines], 2010, vol. 8, no. 1(15), pp. 83-88. (in Russian).
7. Khaliullin F.H., Egorov S.V., Yakhin S.M., Imamiyev A.Z., Makarova O.I. Silovoy analiz navesnogo ustroystva traktora s reguliruyemyimi kharakteristikami [Force analysis of a tractor linkage with adjustable characteristics] *Transportnoye, gornoye i stroitel'noye mashinostroyeniye: nauka i proizvodstvo* [Transport, mining and construction engineering: science and production], 2023, vol. 19, pp. 73-83. (in Russian). DOI 10.26160/2658-3305-2023-19-73-83.
8. Russell K., Shen J.Q., Sodhi R. Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems: Implementation in MATLAB and Simscape Multibody (3rd ed.). CRC Press, 2022. 544 p.
9. Dien N.P. Khang N.V. Dynamic force analysis of a six-link planar mechanism under consideration of friction at the joints. *Vietnam Journal of Mechanics*, 2004, vol. 26, no. 2, pp. 65–75. DOI 10.15625/0866-7136/26/2/5690.
10. Matsyuk I.N., Shlyahov E.M., Zima N.V. Kinematika ploskikh mekhanizmov v programme MathCAD s ispol'zovaniyem teorii kompleksnykh chisel [Kinematics of planar mechanisms in MathCAD program using the theory of complex numbers] *Razvitiye informatsionno-resursnogo obespecheniya obrazovaniya i nauki v gorno-metallurgicheskoy otrassli i na transporte 2014 : Sbornik nauchnykh trudov mezhdunarodnoy konferentsii* [The Development of the Informational and Resource Providing of Science and Education in the Mining and Metallurgical and the Transportation Sectors 2014: Collection of scientific papers of the international conference]. Dnepropetrovsk, NGU Publ., 2005, pp 407-412. (in Russian).
11. Abhary K.A unified analytical parametric method for kinematic analysis of planar mechanisms. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 2022, vol. 50(2), pp. 389-431. DOI 10.1177/0306419020978175.
12. Matsyuk I.N., Shlyakhov E., Zyma N.V. Study of Planar Mechanisms Kinetostatics Using the Theory of Complex Numbers with MathCAD PTC. *Mechanics, Materials Science & Engineering Journal*, 2017, vol. 8, hal-01508541.
13. Kotov A.V., Krol D.G. Kinematicheskiy i silovoy analiz mekhanizma pod'yema naklonnoy kamery zernouborochnogo kombayna s primeneniem teorii kompleksnykh chisel [Kinematic and force analysis of the inclined chamber lift mechanism of a combine harvester using complex numbers theory]. *Konstruirovaniye, ispol'zovaniye i nadezhnost' mashin sel'skokhozyaystvennogo naznacheniya : sbornik nauchnykh rabot* [Designing, use and reliability agricultural machines destination : collection of scientific papers], 2015, vol. 24, no. 1, pp. 40-48. (in Russian).
14. Artobolevskiy I.I. Teoriya mekhanizmov i mashin [Theory of mechanisms and machines], 4rd ed, reprint of the 1988 edition. Moscow, Transport company, 2023. 640 p. (in Russian).
15. Privalov I.I. Analiticheskaya geometriya : uchebnoye posobiye [Analytical Geometry: Tutorial], 38th ed., Saint-Petersburg, Lan', 2010. 304 p. (in Russian).