ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

Автор: Трушников Владимир Владимирович

Октябрь, 2025

Аннотация: В статье представлено прямое и полное доказательство Великой Теоремы Ферма, в пределах базовых знаний средней общеобразовательной школы.

Abstract: The article presents a direct and complete proof of Fermat's Last Theorem, within the framework of basic knowledge of secondary school.

Ключевые слова: Великая Теорема Ферма

Key words: Fermat's Last Theorem

ВВЕДЕНИЕ

История Великой теоремы Ферма (ВТФ) это история поиска её удивительного доказательства. Существование доказательства не оспаривается, но являлось ли оно доказательством, и каким оно было, если действительно было доказательством, вопрос, который нас волнует прежде всего. Наше воображение будоражит текстовая заметка, оставленная на полях книги Диофанта Александрийского "Арифметика", с которой когда то Ферма работал: **"... невозможно разложить никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я нашёл этому поистине чудесное доказательство, но поля книги слишком узки для него".** Простая в своей формулировке задача оказалась невероятно сложной в доказательстве. За этой короткой записью несомненно скрывается большая по объёму проделанная работа. Результат проделанной работы оказался неожиданным для самого Ферма, поэтому он так эмоционально отреагировал. Мы можем только догадываться, высказывать свои версии о том, каким оно было, это удивительное доказательство. По одной из распространённых версий найденное доказательство не было безупречным, и Ферма вскоре сам это понял, но заметка на полях уже была сделана. Известно, что он затем продолжал работать над доказательством. А в его архивных записях было найдено единственное доказательство теоремы для частного случая n=4. Кроме того, Ферма включил случай n=3 в список задач, решаемых методом так называемого бесконечного спуска. Вряд ли тогда Ферма предполагал, что поспешно сделанная им заметка на полях книги окажет большое влияние на дальнейшее развитие математики, а теорема станет в его честь называться Великой. История распорядилась так, что для современного человечества небольшая заметка оказалось важнее целого доказательства.

Простая и понятная формулировка теоремы привлекает к себе внимание. Каждый образованный человек понимает её, и может попытаться доказать. Это вызов самому себе, вызов, в любом случае достойный уважения. Именно так выглядит исходный посыл, для тех, кто решился встать на путь поиска удивительного доказательства.

С 1995 года считается, что ВТФ доказана. Автором доказательства объявлен английский математик Эндрю Уайлс. История Теоремы, многочисленные участники и основные идеи замечательных математических теорий, которые были построены и развивались в попытках ее доказать, описаны в книге Саймона Сингха "Великая теорема Ферма". Но, на этом история поиска доказательства не закончилась. Напротив, поиск доказательства продолжается по сей день, не только простого, не только удивительного, а вообще любого. Периодически в математическом информационном поле появляются сообщения очередного доказательства ВТФ.

И вот, вниманию интересующихся вопросом доказательства ВТФ предлагается очередное. Кому то оно может показаться чрезмерно простым, и к сожалению, совсем не удивительным. Тем не менее, автор уверен в том, что приведённая ниже статья является ДОКАЗАТЕЛЬСТВОМ Великой Теоремы Ферма, простым и понятным для большинства.

Великая теорема Ферма состоит в утверждении, что при значениях n≥3 уравнения вида:

$$X^n+Y^n=Z^n \tag{1}$$

не имеют ненулевых решений в натуральных числах.

Постановка задачи

Для уравнения вида: $X^n+Y^n=Z^n$, где X, Y, Z - числа натурального ряда, для определённости будем считать X<Y. Пусть Z^n, наибольшее число нашего уравнения, будет его исходным, и может принимать любое значение из натурального ряда $(Z_i)^n$. Для каждого такого числа $(Z_i)^n=i^n$ найдется «k» значений $(Y_k)^n=(Z_{i-k})^n=(i-k)^n$, находящиеся в интервале $(Z_i)^n/2<(Z_{i-k})^n<(Z_i)^n$, а значения числа $(X^n)_k$ будут определяться, как $(Z_i)^n-(Y_k)^n$ или $(Z_i)^n-(Z_{i-k})^n$, т.е.:

$$(X^n)_k = (Z_i)^n-(Z_{i-k})^n \tag{2}$$

где «i»-порядковый номер числа $(Z_i)^n$ в натуральном ряде, а «k»=1,2,3…–порядковый номер одного из возможных решений уравнения.

В качестве наглядного примера для произвольного числа $Z_i=13$ на Рис.1 приведена структурная схема алгоритма определения неизвестного числа $(X^n)_k$ в уравнении (2) для степени n=3.

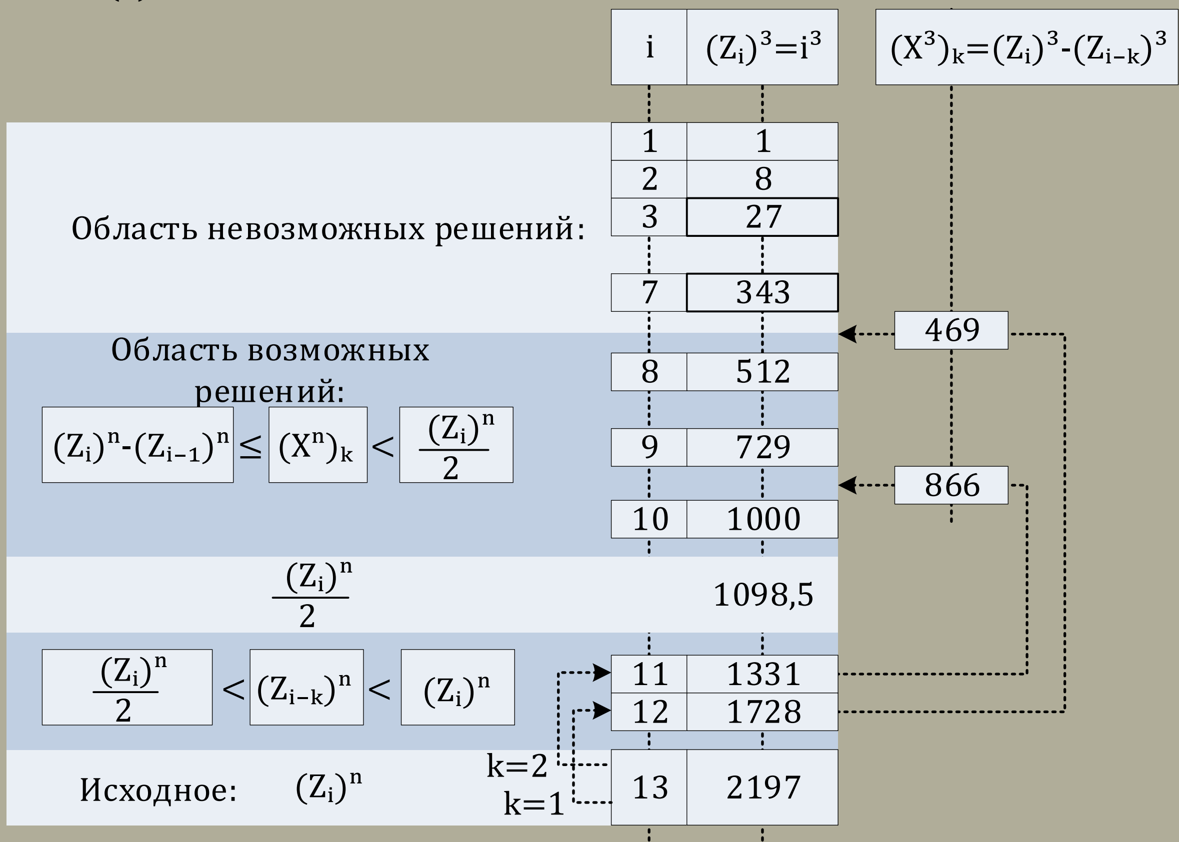

Рис.1 Структурная схема алгоритма определения неизвестного числа X в уравнении $(Z_i)^n-(Z_{i-k})^n=(X^n)_k$ для степени n=3,

В результате разности двух натуральных в степени мы всегда получаем натуральное. Для $(Z_{13})^3=13^3=2197$ существует 2 возможных решения $(X^3)_{k=1}=2197-1728=469$ и $(X^3)_{k=2}=2197-1331=866$, которые на поверку: $X_{k=1}=\sqrt[3]{469}=7,76...$, $X_{k=2}=\sqrt[3]{866}=9,53...$, после извлечения из степени оказались дробными. Для другого, большего чем 13, числа существует больше возможных решений. Например для $(Z_{100})^3=100^3$ существует: $100-\sqrt[3]{500000}=100-79,37...=20$ возможных решений.

Вопрос, который возникает в связи с ВТФ – существуют ли такие сочетания, выраженные формулой (2), при значениях $n\geq3$, при которых число X_k после извлечения из степени «n» остается натуральным, или оно всегда дробное.

Доказательство Великой теоремы Ферма

Формула (2) для всех $(k=1)\in(Z_i)^3$ имеет вид:

$$(Z_i)^3-(Z_{i-1})^3 = (X^3{}_{k=1}) \tag{3}$$

Представим бесконечный ряд натуральных $(Z_i)^3$ в виде таблицы разностей, определяемых формулой (3):

№ п/п i	$(Z_i)^3$	№ п/п h	$\left(X^3_{k=1}\right)_h$
1	1		
2	8	1	7
3	27	2	19
4	64	3	37
5	125	4	61
6	216	5	91
7	343	6	127
8	512	7	169
9	729	8	217

и т.д.

Таблица 1. Таблица разностей ряда$(Z_i)^3$ для всех k=1

Здесь параметр «h=i-1» - порядковый номер значения $(Z_i)^3-(Z_{i-1})^3$ в ряде $(X^3{}_{k=1})_h$

Формула (2) для всех $(k=2)\in(Z_i)^3$ имеет вид:

$$(Z_i)^3-(Z_{i-2})^3 = (X^3{}_{k=2}) \qquad (4)$$

Представим бесконечный ряд натуральных $(Z_i)^3$ в виде таблицы разностей, определяемых формулой (4):

№ п/п i	$(Z_i)^3$		№ п/п h	$\left(X^3_{k=2}\right)_h$
1	1			
2	8	⇒	1	26
3	27	⇒	2	56
4	64	⇒	3	98
5	125	⇒	4	152
6	216	⇒	5	218
7	343	⇒	6	296
8	512	⇒	7	386
9	729			
	и т.д.			

Таблица 2. Таблица разностей ряда $(Z_i)^3$ для всех k=2

Здесь параметр «h=i-2» - порядковый номер значения $(Z_i)^3-(Z_{i-2})^3$ в ряде $(X^3{}_{k=2})_h$

И так далее. Существуют таблицы разностей и для остальных k>2.

В общем виде порядковый номер «h»:

$$h=i-k \qquad (5)$$

Запишем исходное уравнение (2) для n=3 в общем виде:

$$(X^3{}_k) = (Z_i)^3 - (Z_{i-k})^3 \qquad (6)$$

Символы $(Z_i)^3$ и $(Z_{i-k})^3$ заменим на i^3 и $(i\text{-}k)^3$, чем они по сути и являются, тогда:

$$(X^3{}_k) = i^3 - (i-k)^3 \qquad (7)$$

$$(X^3{}_k) = i^3 - (i^3 - 3i^2k+3ik^2 - k^3) \qquad (8)$$

$$(X^3{}_k) = i^3 - i^3 + 3i^2k - 3ik^2 + k^3 \qquad (9)$$

$$(X^3{}_k) = 3i^2k - 3ik^2 + k^3 \qquad (10)$$

Из (5) следует, что i=h+k. В (10) заменим «i» на «h+k» :

$$(X^3{}_k)_h = 3(h+k)^2k - 3(h+k)k^2 + k^3 \qquad (11)$$

$$(X^3{}_k)_h = 3(h^2+2kh+k^2)k - 3(h+k)k^2 + k^3 \qquad (12)$$

$$(X^3{}_k)_h = 3h^2k + 6hk^2 + 3k^3 - 3hk^2 - 3k^3 + k^3 \qquad (13)$$

$$(X^3{}_k)_h = 3h^2k + 3hk^2 + k^3 \qquad (14)$$

Тогда для k=1:

$$(X^3{}_{k=1})_h = 3h^2+3h+1 \qquad (15)$$

для k=2:

$$(X^3{}_{k=2})_h = 6h^2+12h+8 \qquad (16)$$

для k=3:

$$(X^3{}_{k=3})_h = 9h^2+27h+27 \qquad (17)$$

И так далее, … из (14) получим формулы рядов для остальных возможных решений «k» Ни одну из них невозможно представить в виде 3 одинаковых сомножителей, т.к. во всех этих формулах отсутствует значение h^3.

“Любое натуральное можно представить в виде суммы или разности двух других натуральных, например, (a+b) или (a-b), и, если эту сумму или разность возвести в какую-либо степень $(a+b)^n$ или $(a-b)^n$, в процессе вычисления будут получены многочлены, в составе которых будут присутствовать слагаемые исходного натурального числа, в том числе и в качестве старших членов многочлена. Любой другой многочлен, имеющий такую же структуру, всегда можно будет свернуть обратно в виде суммы или разности двух чисел, возведенной в степень, какую имели старшие члены многочлена. Если числа, входящие в структуру этого произвольного многочлена натуральные, значит и исходное число, представленное в виде их суммы или разности будет также натуральным.”

Многочлен в формуле (14) является фрагментом от разложения натуральных $(h+k)^3$. Из за отсутствия одного из старших членов многочлена, а именно h^3, оставшийся фрагмент невозможно свернуть обратно в $(h+k)^3$, т.е. невозможно его представить в виде трёх одинаковых натуральных сомножителей, значит $(X_k)_h$ для всех k, h, принимающих любые значения натурального ряда, не является натуральным.

Великая теорема Ферма для n=3 доказана.

Алгоритм приведённый для доказательства ВТФ для степени n=3 применим и для остальных степеней n>3.

Для абсолютного доказательства Великой теоремы Ферма достаточно принять в качестве аргумента, что в результате действия заложенного в выражении $(Z_i)^n$-$(Z_{i-k})^n$, или что тоже самое i^n-$(i-k)^n$, происходит взаимоуничтожение старших членов i^n, содержащихся в многочленах выражения, а оставшийся отрицательный фрагмент от $(i-k)^n$, после замены порядкового номера «i» на (h+k) становится фрагментом многочлена уже от разложения $(h+k)^n$. Из-за отсутствия в нём одного из старших членов h^n, его невозможно свернуть обратно в $(h+k)^n$, т.е. невозможно представить в виде натуральных «n»-сомножителей. Поэтому число $(X_k)_h$, извлечённое из содержимого фрагмента степенного многочлена для всех k, h и n≥3 не является натуральным.

Но, прежде чем поставить точку в доказательстве ВТФ, ответим ещё на один вопрос.

Известно, что степень n=2 в Великой теореме Ферма является исключением из общего правила. Применим алгоритм, приведённый выше, для степени n=2 и выясним, почему степень n=2 является исключением.

Имеем исходное выражение:

$$(X^2{}_k) = (Z_i)^2 - (Z_{i-k})^2 \quad (18)$$

Символы $(Z_i)^3$ и $(Z_{i-k})^3$ заменим на i^3 и $(i\text{-}k)^3$, тогда:

$$(X^2{}_k) = i^2 - (i-k)^2 \quad (19)$$

$$(X^2{}_k) = i^2 - (i^2-2ik+k^2) \quad (20)$$

$$(X^2{}_k) = 2ik - k^2 \quad (21)$$

В (21) заменим «i» на (h+k)

$$(X^2{}_k)_h = 2(h+k)k - k^2 \quad (22)$$

$$(X^2{}_k)_h = 2hk + k^2 \quad (23)$$

Пусть k=1, тогда:

$$(X^2{}_{k=1})_h = 2h+1 \quad (24)$$

Выражение 2h+1 описывает все нечётные натурального ряда, начиная с 3-х. Учитывая, что квадраты нечётных также принадлежат ряду нечётных, то все они - квадраты нечётных, являются решениями.

Уточним:

$$(X_{k=1})_h = \sqrt{(2h+1)} \quad (25)$$

Существует бесконечное количество h=4, 12, 24, 40 ... $((2n+1)^2-1)/2$, приводящих к натуральному $(X_{k=1})_h$=3, 5, 7, 9 … (2n+1), соответственно, где n=1,2,3... и т.д.. Формула (25) описывает все нечётные натурального ряда, начиная с 3-х. Значит все нечётные натуральных, начиная с 3-х, являются решениями формулы (18).

Пусть k=2, тогда:

$$(X^2{}_{k=2})_h = 4h+4=4(h+1) \qquad (26)$$

Выражение 4(h+1) состоит из двух множителей:

1) $4=2^2$

2) Выражение (h+1) описывает весь натуральный ряд, начиная с 2-х. Натуральный ряд содержит квадраты всех натуральных, и чётных и нечётных, значит все они будут включены в решение.

Уточним:

$$(X_{k=2})_h = \sqrt{(4(h+1))}= 2\sqrt{(h+1)} \qquad (27)$$

Существует бесконечное количество h=3, 8, 15, 24 … (n^2-1), приводящих к натуральному $(X_{k=2})_h$ =4, 6, 8, 10 … 2n, где n≥2. Формула (27) описывает все чётные натуральные, начиная с 4. Значит все чётные натуральных, начиная с 4-х, являются решениями формулы (18).

И так далее и для других «k».

Таким образом, все квадраты натуральных $(X_k)_h$≥3 являются решениями для той или иной разности $(Z_i)^2$-$(Z_{i-1})^2$ или $(Z_i)^2$-$(Z_{i-2})^2$.

Степень n=2 в Великой теореме Ферма является исключением из общего правила, потому что в результате взаимоуничтожения i^2 в разности $(Z_i)^2$-$(Z_{i-k})^2$ оставшийся фрагмент упрощается до линейного выражения в первой степени, которое, в одном случае (для всех k=1), описывает ряд нечётных, начиная с 3, а в другом (для всех k=2) описывает ряд чётных, начиная с 4, а вместе они описывают весь натуральный ряд, **содержащий также и квадраты натуральных**, каждый из которых является решением для той или иной разности $(Z_i)^2$-$(Z_{i-1})^2$ или $(Z_i)^2$-$(Z_{i-2})^2$. Понятно, что существует бесконечное количество решений и для всех остальных k>2.

Что касается степени n≥3, ряды натуральных, представленные формулами (15), (16), (17) … и так далее, выведенными из (14), или в общем случае: ряды натуральных, представленные формулами, которые могут быть выведены аналогичным образом из (2) для любой другой степени **не содержат ни одного натурального в исходной степени**, по причине отсутствия в его формуле одного из старших членов многочлена h^n= $(i\text{-}k)^n$.

ВЫВОД: при значениях n≥3 уравнения вида: $X^n+Y^n=Z^n$ не имеют ненулевых решений в натуральных числах.

ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА ДОКАЗАНА.

Библиографический список:

При написании статьи дополнительная литература не использовалась.