

ТЕОРЕМА РИССА-ФЕЙЕРА И ЕЁ СЛЕДСТВИЯ

Ступин Д. Л.

Изложена классическая теорема Рисса-Фейера для тригонометрических многочленов, охарактеризовано множество всех многочленов с положительной в единичном круге действительной частью, дано одно условие единственности такого многочлена и связь этого результата с условием единственности экстремальной функции в проблеме Кшижа.

The classical Fejer-Riesz theorem for trigonometric polynomials is expounded, the set of all polynomials with a positive real part in the unit circle is characterized, and one condition for uniqueness of such a polynomial and the connection of this result with the condition for uniqueness of an extremal function in the Krzyz problem is given.

Ключевые слова: Теорема Рисса-Фейера, тригонометрические многочлены, тригонометрические полиномы, многочлены Лорана, полиномы Лорана, многочлены с положительной действительной частью, полиномы с положительной вещественной частью, класс Каратеодори, гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции

Keywords: Fejer-Riesz Theorem, trigonometric Polynomials, Laurent Polynomials, polynomials with positive real part, Caratheodory class, the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded non-vanishing functions

Введение

Обозначим единичный круг через $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а единичную окружность через $\partial\Delta$.

Множество голоморфных в круге Δ функций, имеющих там положительную вещественную часть, обозначим через C и будем называть классом Каратеодори. Фиксируем $t > 0$. Множество функций h из C , нормированных условием $h(0) = t$, обозначим через C_t и будем называть нормированным классом Каратеодори, или просто классом Каратеодори, если это не вызовет недоразумений. Заметим, что $C = \bigcup_{t>0} C_t$. Подмножество полиномов степени n из классов C и C_t обозначим соответственно через C^n и C_t^n .

Пусть $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$. Функция вещественного аргумента φ

$$T(\varphi) := a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi) \quad (1)$$

называется тригонометрическим многочленом (с действительными коэффициентами) степени n , если выполнено условие $a_n^2 + b_n^2 > 0$. Аналогично можно ввести понятие тригонометрического полинома с комплексными коэффициентами.

Утверждение 1. *Тригонометрический полином $T(\varphi)$, заданный формулой (1) принимает действительные значения для всех действительных значений φ если и только если все коэффициенты a_k и b_k являются действительными числами.*

Доказательство. Если $T(\varphi) \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то $T(\varphi) = \overline{T(\varphi)}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Так как

$$\overline{T(\varphi)} = \overline{a_0} + \sum_{k=1}^n (\overline{a_k} \cos k\varphi - \overline{b_k} \sin k\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

то

$$0 = T(\varphi) - \overline{T(\varphi)} = 2i \left(\operatorname{Im} a_0 + \sum_{k=1}^n (\operatorname{Im} a_k \cos k\varphi - \operatorname{Im} b_k \sin k\varphi) \right), \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Выражение в скобках это тригонометрический полином с действительными коэффициентами, тождественно равный нулю. По теореме о единственности разложения в ряд Фурье все его коэффициенты равны нулю. Что и требовалось.

Обратное утверждение не требует доказательства. ■

Далее, тригонометрические многочлены с комплексными коэффициентами рассматриваться не будут. Поэтому тригонометрический многочлен с действительными коэффициентами будем называть просто тригонометрическим многочленом или тригонометрическим полиномом.

Очевидно, имеет место следующее утверждение:

Утверждение 2. *Пусть задан полином*

$$H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k, \quad (2)$$

где

$$h_0 := a_0 \in \mathbb{R}, \quad h_k := \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n, \quad h_n \neq 0. \quad (3)$$

Тогда сужение $\operatorname{Re} H$ на единичную окружность $\partial\Delta$ является тригонометрическим полиномом степени n

$$T(\varphi) := \operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi). \quad (4)$$

В частности, если $h_k \in \mathbb{R}$ ($b_k = 0$), $k = 1, \dots, n$, то

$$T(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\varphi.$$

Более того, если $H \in C^n$, то $T(\varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

Как отмечается в статье [4], в начале XX века Л. Фейер [1] впервые обратил внимание на важность класса тригонометрических полиномов, принимающих неотрицательные значения на всей вещественной прямой. Его гипотеза о структуре таких многочленов была впоследствии доказана Ф. Риссом [2] и ныне известна как теорема Рисса-Фейера.

В этой статье мы изложим классическую теорему Рисса-Фейера для тригонометрических многочленов. Доказательство теоремы Рисса-Фейера приведено ниже для полноты изложения. Его также можно найти в [3] и в [5, стр. 154].

Далее, охарактеризуем множество всех многочленов с положительной в единичном круге действительной частью. В книге [6, стр. 64] имеется задача 4, в которой нужно показать, что если коэффициенты многочлена H имеют специальный вид, то $H \in C$.

Затем, покажем единственность многочлена с положительной вещественной частью и ограничением на коэффициенты $h_0 = 2h_n$, а также укажем на связь этого результата и условия единственности экстремальной функции в проблеме Кшижа. Отметим, что в [15, стр. 736] доказано, что единственность экстремальной функции влечёт справедливость гипотезы Кшижа.

В заключении, на основе известных свойств функций, экстремальных в проблеме Кшижа сформулируем метод построения функций, по своим свойствам напоминающих экстремальные. Обзор известных свойств функций, экстремальных в проблеме Кшижа мы здесь также приводим.

Все изложенные здесь результаты даются в замкнутой и самодостаточной форме, а ссылки на литературу приведены для дополнительного ознакомления или как источники.

1 Комплексная форма тригонометрического полинома

Полиномом Лорана называется выражение вида

$$Q(z) = \sum_{k=-n_1}^{n_2} q_k z^k, \quad \text{где } n_1, n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in \mathbb{R}$. Если $z = e^{i\varphi}$, то $z^k = e^{ik\varphi}$. Откуда $\cos k\varphi = \frac{z^k + z^{-k}}{2}$, $\sin k\varphi = -i \frac{z^k - z^{-k}}{2}$. Такая замена преобразует тригонометрический полином T , определённый формулой (1) в многочлен Лорана:

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{z^k + z^{-k}}{2} + ib_k \frac{z^k - z^{-k}}{2} \right) = \\ &= \sum_{k=n}^1 \frac{a_k - ib_k}{2} z^{-k} + a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k + ib_k}{2} z^k = \sum_{k=n}^1 \bar{h}_k z^{-k} + h_0 + \sum_{k=1}^n h_k z^k =: Q(z), \quad (5) \end{aligned}$$

где коэффициенты h_k , $k = 0, \dots, n$, очевидно, определены формулой (3).

Рассмотрим алгебраический многочлен

$$S(z) := z^n Q(z) = \overline{h_n} + \overline{h_{n-1}}z + \dots + \overline{h_1}z^{n-1} + h_0z^n + h_1z^{n+1} + \dots + h_nz^{2n}. \quad (6)$$

Утверждение 3. *Тригонометрический многочлен степени n имеет не более чем $2n$ корней на $[0, 2\pi)$ с учётом их кратностей.*

Доказательство. Поскольку коэффициент h_n многочлена S , определённого формулой (6) не равен нулю, то по основной теореме алгебры S имеет ровно $2n$ корней в комплексной плоскости с учётом их кратностей. Корни тригонометрического многочлена T соответствуют корням алгебраического многочлена S , расположенным на единичной окружности, поэтому их не более $2n$ с учетом кратностей. ■

Как следует из формулы (5), произвольный тригонометрический полином степени n допускает представление в виде

$$T(\varphi) = \sum_{k=-n}^n h_k e^{ik\varphi}. \quad (7)$$

Из той же формулы (5) и утверждения 1 следует, что условие вещественности $T(\varphi) \in \mathbb{R}$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ эквивалентно выполнению соотношений

$$h_{-k} = \overline{h_k}, \quad k = 0, \dots, n, \quad (h_0 = a_0 \in \mathbb{R}). \quad (8)$$

Представление (7) называется комплексной формой тригонометрического полинома.

2 Теорема Рисса-Фейера (комплексные коэффициенты)

Утверждение 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p_n \neq 0$, $P(z) := \sum_{k=0}^n p_k z^k$, $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, n$.*

Тогда если $T(\varphi) := |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то существуют $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$, $a_n^2 + b_n^2 > 0$, такие что

$$T(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi).$$

Коэффициенты a_k и b_k определяются единственным образом.

Доказательство. Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$0 \leq T(\varphi) = P(z) \overline{P(z)} = P(z) \overline{P(1/\bar{z})} = \sum_{k=-n}^n h_k z^k =: Q(z), \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\varphi}.$$

Так как $Q(z) = T(\varphi)$ — вещественный тригонометрический полином, записанный в комплексной форме, то имеет место формула (8), то есть $h_{-k} = \overline{h_k}$, для всех

$k = 0, \dots, n$. Откуда $T(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi)$, где $a_0 := h_0$, $a_k := 2 \operatorname{Re} h_k$, $b_k := 2 \operatorname{Im} h_k$, $k = 1, \dots, n$. Функция Q голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $T(\varphi) = Q(e^{i\varphi})$, $\varphi \in \mathbb{R}$, следовательно по внутренней теореме единственности для голоморфных функций, функция Q определена единственным образом, как и её представление в виде конечного ряда Лорана (многочлена Лорана). ■

Сформулируем и докажем утверждение, обратное утверждению 4.

Теорема 1 (Рисс, Фейер). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$, $a_n^2 + b_n^2 > 0$. Если $T(\varphi) := a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$, то существует многочлен $P(z) := \sum_{k=0}^n p_k z^k$, $p_n \neq 0$ такой, что $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Более того, P может быть подобран так, чтобы все его нули лежали вне единичного круга. В последнем случае P определяется единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы.

Доказательство. Рассмотрим многочлены Q и S , заданные формулами (5) и (6) соответственно. Очевидно, что корни Q и S совпадают. При этом $z = 0$ не является корнем S , так как $h_n \neq 0$. Из свойств комплексного сопряжения следует, что $Q(z) = \overline{Q(1/\bar{z})}$. Следовательно, если z_k — корень Q с $|z_k| > 1$, то $1/\bar{z}_k$ также является корнем Q (случай $|z_k| = 1$ рассмотрим ниже). Поэтому:

$$S(e^{i\varphi}) = h_n \prod_{k=1}^n (e^{i\varphi} - z_k) \left(e^{i\varphi} - \frac{1}{\bar{z}_k} \right).$$

Учитывая, что

$$e^{i\varphi} - \frac{1}{\bar{z}_k} = -\frac{e^{i\varphi}}{\bar{z}_k} \overline{(e^{i\varphi} - z_k)},$$

получаем:

$$S(e^{i\varphi}) = h_n \frac{(-1)^n e^{in\varphi}}{\bar{z}_1 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n} \prod_{k=1}^n |e^{i\varphi} - z_k|^2.$$

Отсюда, учитывая $T(\varphi) = S(e^{i\varphi})/e^{in\varphi}$, имеем:

$$T(\varphi) = \frac{h_n}{(-1)^n \bar{z}_1 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n} \prod_{k=1}^n |e^{i\varphi} - z_k|^2. \quad (9)$$

Исходя из последней формулы и замены $z = e^{i\varphi}$ мы можем задать искомым многочлен P следующим образом,

$$P(z) := p_n \prod_{k=1}^n (z - z_k). \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда Q имеет корень $z_k = e^{i\varphi_k}$, где $\varphi_k \in \mathbb{R}$. Поскольку z_k лежит на единичной окружности, то $z_k = 1/\bar{z}_k$. Покажем, что такой корень тем не менее должен иметь чётную кратность m . Действительно, по условию $T(\varphi) \geq 0$

для всех $\varphi \in \mathbb{R}$, поэтому если $T(\varphi_k) = 0$, то φ_k является точкой строгого локального минимума функции T , а согласно достаточному условию локального минимума, число m должно быть чётным числом и производные в этой точке должны удовлетворять условиям $T^{(j)}(\varphi_k) = 0$, $j = 1, \dots, m-1$, и $T^{(m)}(\varphi_k) > 0$. Следовательно, корень φ_k (и соответствующий ему корень $z_k = e^{i\varphi_k}$ полинома Лорана Q) должен иметь чётную кратность.

Так как по построению все корни P лежат вне открытого единичного круга Δ и $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$, то многочлен P определён единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы. ■

Отметим, что в случае действительных коэффициентов h_k многочлена S все его корни либо вещественные, либо образуют комплексно-сопряжённые пары. Следовательно, в этом случае многочлен P можно выбрать так, чтобы все его коэффициенты были действительными.

Заметим, что если из формулировки теоремы 1 убрать требование о том, чтобы все корни многочлена P , заданного формулой (10), лежали вне Δ , то P определяется неоднозначно, что видно из построений, проведённых в доказательстве этой теоремы.

Из теоремы 1 сразу вытекает, что если m из n корней полинома P лежат на единичной окружности, то неотрицательный тригонометрический многочлен T имеет $2m$ корней. Заметим, что утверждение 3 говорит лишь о том, что T имеет не более чем $2n$ корней.

3 Теорема Рисса-Фейера (действительные коэффициенты)

Рассмотрим пример. Если $H(z) = 1 + z$, то $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = 1 + \cos \varphi$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Вообще, согласно утверждению 2, если многочлен H степени n имеет действительные коэффициенты, то соответствующий ему по формуле (4) тригонометрический полином степени n не содержит синусов, то есть $T(\varphi) = \sum_{k=0}^n a_k \cos k\varphi$, $a_k \in \mathbb{R}$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $P(z) := \sum_{k=0}^n p_k z^k$, $p_n \neq 0$, $p_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$. Если $T(\varphi) := |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то существуют $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$, $a_n \neq 0$, такие что $T(\varphi) = \sum_{k=0}^n a_k \cos k\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$. При этом коэффициенты a_k определяются единственным образом.

Например, для $P(z) = 1 + z$ получаем $|P(e^{i\varphi})|^2 = 2 + 2 \cos \varphi$. Сформулируем обратное утверждение.

Теорема 2 (Рисс, Фейер). Пусть $a_n \neq 0$, $a_k \in \mathbb{R}$. Если $T(\varphi) := \sum_{k=0}^n a_k \cos k\varphi \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то существует многочлен $P(z) := \sum_{k=0}^n p_k z^k$, $p_k \in \mathbb{R}$, $p_n \neq 0$, такой,

что $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Более того, P можно выбрать так, чтобы все его нули лежали вне единичного круга. В этом случае P определяется единственным образом с точностью до знака.

Утверждение 5 и теорема 2 являются частными случаями утверждения 4 и теоремы 1 соответственно. Тем не менее, случай действительных коэффициентов представляет самостоятельный интерес и заслуживает отдельного рассмотрения.

4 Возвратные многочлены и теорема Рисса-Фейера

Для произвольного многочлена $S(z) = s_0 + \dots + s_n z^n$ определим взаимный многочлен $S^*(z) := \overline{s_0} z^n + \dots + \overline{s_n}$. Ясно, что $S^*(z) = z^n \overline{S(1/\overline{z})}$. Многочлен S называется возвратным, если выполняется тождество $S(z) = S^*(z)$.

Заметим, что многочлен S , заданный формулой (6) является возвратным. По аналогии с доказательством теоремы 1 можно установить, что условие возвратности произвольного многочлена S степени $2n$ эквивалентно существованию такого многочлена P степени n , что

$$S_{2n}(z) = P_n(z)P_n^*(z).$$

Обобщая понятие возвратности на полиномы Лорана, теорему Рисса-Фейера (теорема 1) можно переформулировать следующим образом [3]:

Пусть задан полином Лорана $T(z) := \sum_{k=-n}^n h_k z^k$, где $h_n \neq 0$, $h_0 \in \mathbb{R}$ и $h_{-k} := \overline{h_k}$ для $k = 1, \dots, n$, причём $T(z) \geq 0$ при $|z| = 1$. Тогда существует многочлен P степени n с комплексными коэффициентами такой, что $T(z) = P(z)\overline{P(1/\overline{z})}$.

5 Многочлены с положительной действительной частью

Справедливо утверждение, обратное утверждению 2:

Утверждение 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если T — тригонометрический полином степени не выше n , то существует единственный многочлен $H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k$, $h_0 > 0$, $h_k \in \mathbb{C}$, такой, что $T(\varphi) = \operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Если $T(\varphi) \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то $H \in C$.

Доказательство. Так как T — вещественный тригонометрический полином, то его можно записать в комплексной форме (формула (7)), при этом имеет место формула (8), то есть $h_{-k} = \overline{h_k}$, для всех $k = 0, \dots, n$:

$$T(\varphi) = \sum_{k=-n}^n h_k e^{ik\varphi} = h_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n h_k e^{ik\varphi} = \operatorname{Re} \left(h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k \right) = \operatorname{Re} H(z)$$

при $\varphi \in \mathbb{R}$ и $z = e^{i\varphi}$. Единственность вытекает из равенств

$$T(\varphi) = \operatorname{Re} H(z) = \frac{1}{2}(H(z) + \overline{H(z)}) = \frac{1}{2}(H(z) + \overline{H(1/\overline{z})}), \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\varphi},$$

того, что многочлен Лорана $H(z) + \overline{H(1/\bar{z})}$ голоморфен в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и внутренней теоремы единственности для голоморфных функций. Вторая часть утверждения очевидна. ■

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Итак, утверждение 2 и утверждение 6 говорят о том, что тригонометрический полином T степени n всегда связан с алгебраическим полиномом H степени n и наоборот тождеством

$$T(\varphi) = \operatorname{Re} H(z), \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\varphi}.$$

Утверждение 4 и теорема Рисса-Фейера говорят о том, что полином $H \in C$ степени n всегда связан с полиномом P степени n и наоборот тождеством

$$\operatorname{Re} H(z) = |P(z)|^2, \quad |z| = 1.$$

Подчеркнём, что эти тождества имеют место только на единичной окружности, поскольку в единичном круге $\operatorname{Re} H$ — гармоническая, а $|P|^2$ — субгармоническая функция. Заметим, что $z = 1/\bar{z}$ при $|z| = 1$, поэтому последнее тождество можно переписать в виде

$$z^n (\overline{H(1/\bar{z})} + H(z)) = 2z^n \overline{P(1/\bar{z})} P(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (11)$$

Подчеркнём, что это тождество, благодаря внутренней теореме единственности для голоморфных функций, верно во всей комплексной плоскости, так как функции $z^n \overline{H(1/\bar{z})}$ и $z^n \overline{P(1/\bar{z})}$ являются полиномами и совпадают на единичной окружности.

Следующее утверждение является аналогом критерия Каратеодори-Тёплица [18, 39] для полиномов.

Теорема 3. *Многочлен $H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k$, $h_0 > 0$, $h_k \in \mathbb{C}$ имеет положительную действительную часть в Δ тогда и только тогда, когда существуют числа $p_k \in \mathbb{C}$, не равные нулю одновременно, такие, что*

$$h_k = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k} \overline{p_j}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (12)$$

Более того, если $h_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$, то существуют $p_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$, такие, что выполняются равенства (12); если $p_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$, то $h_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно использовать полиномиальное тождество (11). ■

Теорему 3 можно переформулировать на геометрическом языке следующим образом. Каждой точке $\mathbf{p} := (p_0, \dots, p_n)$ пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ соответствует единственный многочлен H степени не выше n , удовлетворяющий условию $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \Delta$. Обратное утверждение неверно.

Заметим, что в теореме Рисса-Фейера полином P , а следовательно и его коэффициенты числа p_k , определены единственным образом с точностью до унимодулярной константы, одной и той же для всех p_k . Там это достигается при условии,

что все корни P лежат вне Δ . Теорема 3 никаких условий на многочлен P не накладывает, он там даже не упоминается. Пространство $\mathbb{C}^{n+1}$ можно разбить на классы эквивалентности, состоящие из точек $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n+1}$, которые соответствуют фиксированному многочлену H степени не выше n . Это разбиение проще всего построить, задавая корни полинома S степени не выше $2n$, определённого формулой (6).

Формула (12) естественным образом возникает при перемножении рядов для $P(z)$ и $\overline{P(1/\bar{z})}$. Ученые того времени, работавшие в этой области, вероятно, знали об этой связи сразу после публикации основополагающих работ Л. Фейера [1], Ф. Рисса [2], К. Каратеодори [18] и О. Тёплица [39].

6 Ещё одно доказательство

Дадим ещё одно доказательство теоремы 3. Приведём здесь некоторые теоремы о гармонических функциях, которые нам понадобятся при доказательстве необходимого условия теоремы 3. Все формулировки адаптированы для случая единичного круга Δ .

Лемма 1. *Для любой гармонической в Δ функции g можно построить голоморфную в Δ функцию h , для которой g является действительной частью. Причём h единственна с точностью до аддитивной чисто мнимой константы.*

Лемма 2 (о единственности). *Если две гармонические в Δ функции g_1 и g_2 совпадают на множестве $A \subset \Delta$, имеющем хотя бы одну внутреннюю точку, то $g_1 \equiv g_2$ в Δ .*

Заметим, что теорема единственности для гармонических функций накладывает более жёсткие условия, чем аналогичная теорема для голоморфных функций, где требуется только, чтобы множество A содержало предельную точку. Например, функция $u(z) := x$, где $x := \operatorname{Re} z$, равна нулю на мнимой оси, но $u(z) \not\equiv 0$.

Лемма 3 (о решении задачи Дирихле для круга). *Если функция g непрерывна на $\partial\Delta$, то существует единственная гармоническая в Δ функция h , совпадающая с g на $\partial\Delta$.*

Леммы 1, 2 и 3 взяты из книги [21] (стр. 239, 240 и 246 соответственно).

Доказательство. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и произвольный многочлен $P(z) := \sum_{k=0}^n p_k z^k$.

Рассмотрим многочлен $Q(z) := q_0 + 2 \sum_{k=1}^n q_k z^k$, где $q_k := \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k} \overline{p_j}$, $k = 0, \dots, n$.

Пусть $T(\varphi) := \operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$. Для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\begin{aligned}
0 \leq \operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) &= T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2 = P(e^{i\varphi})\overline{P(e^{i\varphi})} = \sum_{k=0}^n p_k e^{ik\varphi} \sum_{k=0}^n \overline{p_k} e^{-ik\varphi} = \\
&= |p_0|^2 + \dots + |p_n|^2 + \\
&+ (p_0 \overline{p_1} + p_1 \overline{p_0} + \dots + p_{n-1} \overline{p_n} + p_n \overline{p_{n-1}}) e^{i\varphi} + \\
&+ (p_0 \overline{p_2} + p_1 \overline{p_3} + \dots + p_{n-2} \overline{p_n} + p_{n-1} \overline{p_{n-2}}) e^{i2\varphi} + \\
&\dots \\
&+ p_0 \overline{p_n} e^{-in\varphi} + p_n \overline{p_0} e^{in\varphi} = \\
&= |p_0|^2 + \dots + |p_n|^2 + \\
&+ 2 \operatorname{Re}((p_1 \overline{p_0} + p_2 \overline{p_1} + \dots + p_n \overline{p_{n-1}}) e^{i\varphi}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re}((p_2 \overline{p_0} + p_3 \overline{p_1} + \dots + p_n \overline{p_{n-2}}) e^{i2\varphi}) + \\
&\dots \\
&+ 2 \operatorname{Re}(p_n \overline{p_0} e^{in\varphi}) = \\
&= \operatorname{Re} Q(e^{i\varphi}),
\end{aligned} \tag{13}$$

Необходимость. Пусть $H \in C$. Покажем, что H имеет коэффициенты (12). По утверждению 2, выражение $T(\varphi) := \operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$ является тригонометрическим полиномом степени n , причём $T(\varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$, так как $H \in C$. Согласно теореме 1, существует многочлен P такой, что $T(\varphi) = |P(e^{i\varphi})|^2$. Таким образом, из (13) следует, что $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = \operatorname{Re} Q(e^{i\varphi})$.

Выполним обратную замену $e^{i\varphi} = z$. Имеем $\operatorname{Re} H(z) \equiv \operatorname{Re} Q(z)$, $z \in \partial\Delta$. Согласно лемме 2 это не означает, что функции $\operatorname{Re} H$ и $\operatorname{Re} Q$ совпадают всюду в Δ . Однако по лемме 3 эти функции продолжаются единственным образом до гармонической в Δ функции. Восстановим аналитические функции Q и H по их совпадающей в Δ действительной части (это можно сделать согласно лемме 1). Принимая во внимание нормировку $Q(0) = H(0) > 0$, заключаем, что $H \equiv Q$ в Δ , так как голоморфная в Δ функция по лемме 1 восстанавливается по своей действительной части единственным образом с точностью до чисто мнимой аддитивной постоянной. Что и требовалось.

Достаточность. Покажем теперь, что если H имеет коэффициенты (12), то $H \in C$. Пусть H имеет коэффициенты (12), то есть $H \equiv Q$. Проведя вычисления (13) в обратном порядке получаем, что $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) \geq 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Поскольку $H(0) > 0$, то по принципу сохранения области $\operatorname{Re} H(z) > 0$ при $z \in \Delta$. Что и требовалось. ■

Если все коэффициенты многочлена H действительные, то вместо теоремы 1 можно использовать теорему 2.

7 Условия единственности многочлена из класса Каратеодори

В этом пункте полагаем, что $n \in \mathbb{N}$, $h_0 > 0$, а многочлен H имеет вид

$$H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k. \quad (14)$$

Класс $C_{h_0}^n$ инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z . То есть, если $H \in C_{h_0}^n$, то мы можем считать без ограничения общности, что $h_n > 0$. При таких ограничениях на многочлен H можно ставить вопрос о его единственности.

Утверждение 7. *Существует единственный с точностью до вращений в плоскости переменной z многочлен H вида (14), удовлетворяющий условиям:*

- $H \in C_{h_0}^n$;
- $h_0 = 2|h_n| > 0$.

Более того, $H(z) = h_0(1 + \eta z^n)$, где $\eta := \exp(i \arg h_n)$.

Доказательство. Согласно теореме 3, существуют числа $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, n$, удовлетворяющие соотношениям:

$$h_0 = |p_0|^2 + \dots + |p_n|^2, \quad h_n = p_n \overline{p_0}.$$

Из условия $h_0 = 2|h_n|$ получаем:

$$|p_0|^2 + \dots + |p_n|^2 = 2|p_n p_0|.$$

Данное равенство эквивалентно следующему:

$$(|p_0|^2 - 2|p_n p_0| + |p_n|^2) + |p_1|^2 + \dots + |p_{n-1}|^2 = 0,$$

которое можно переписать в виде:

$$(|p_0| - |p_n|)^2 + |p_1|^2 + \dots + |p_{n-1}|^2 = 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что $|p_0| = |p_n|$ и $p_1 = \dots = p_{n-1} = 0$. Таким образом,

$$H(z) = 2|p_0|^2 + 2p_n \overline{p_0} z^n = 2|p_0|^2(1 + \eta z^n), \quad \text{где } \eta := \exp(i \arg h_n).$$

Так как в данном случае числа p_k , $k = 0, \dots, n$, определены единственным образом с точностью до унимодулярных констант, то многочлен H определён единственным образом, с точностью до вращения в плоскости переменной z . ■

Заметим, что корнями ζ_k многочлена $H(z) = h_0(1 + z^n)$ являются все корни n -й степени из -1 и только они, то есть $\zeta_k = e^{i \frac{\pi + 2\pi k}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$.

Утверждение 8. *Существует единственный многочлен H вида (14), удовлетворяющий условиям:*

- $H \in C_{h_0}^n$;
- $h_n > 0$;
- Все корни $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ многочлена H лежат на единичной окружности $\partial\Delta$.

Более того, $H(z) = h_0(1 + z^n)$.

Доказательство. Поскольку $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ — корни многочлена H , то его можно представить в виде: $H(z) = 2h_n \prod_{k=1}^n (z - \zeta_k) = 2h_n((-1)^n \zeta_1 \cdot \dots \cdot \zeta_n + \dots + z^n)$. Так как все корни многочлена H лежат на единичной окружности ($|\zeta_1| \cdot \dots \cdot |\zeta_n| = 1$), то $h_0 = 2|h_n|$. Применяв утверждение 7, получаем, что $H(z) = h_0(1 + z^n)$. ■

Очевидно, что имеет место следующее утверждение:

Утверждение 9. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathbb{R}$, а H и P — многочлены степени n такие, что $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = |P(e^{i\varphi})|^2$. Тогда условие $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_j}) = 0$ эквивалентно $P(e^{i\varphi_j}) = 0$ для всех $j = 1, \dots, m$.

Иными словами, полином P имеет корни на единичной окружности тогда и только тогда, когда действительная часть многочлена H имеет нули на единичной окружности. Приведём примеры.

Многочлен $H_3(z) := 1 + 3/2z + z^2 + 1/2z^3$, сгенерированный из коэффициентов $p_0 = \dots = p_3 = 1$ полинома P по формуле (12), имеет один простой корень $z = -1$ на $\partial\Delta$, тогда как $\operatorname{Re} H_3$ имеет 3 нуля кратности 2 на $\partial\Delta$ (в том числе $z = -1$). Многочлен P имеет три простых корня на $\partial\Delta$.

Многочлен $H_2(z) := 1 + 4/3z + 2/3z^2$, сгенерированный из коэффициентов $p_0 = p_1 = p_2 = 1$ полинома P по формуле (12), не имеет корней на $\partial\Delta$, но $\operatorname{Re} H_2$ имеет 2 нуля кратности 2 на $\partial\Delta$. Многочлен P имеет два простых корня на $\partial\Delta$.

Нули многочлена $H(z) := 1 + z^n$, сгенерированного из коэффициентов $p_0 = p_n = 1$, $p_1 = \dots = p_{n-1} = 0$ полинома P по формуле (12), есть всевозможные корни n -й степени из -1 . $\operatorname{Re} H$ имеет те же корни, но кратности 2. Многочлен P имеет те же корни, но кратности 1.

Утверждение 10. Существует единственный многочлен H вида (14), удовлетворяющий условиям:

- $H \in C_{h_0}^n$;
- $h_n > 0$;
- Все корни n -й степени из -1 и только они являются корнями $\operatorname{Re} H$.

Более того, $H(z) = h_0(1 + z^n)$.

Доказательство. Согласно утверждению 8, многочлен $H(z) = h_0(1 + z^n)$ является единственным многочленом, удовлетворяющим условию $H \in C_{h_0}^n$ и имеющим своими нулями всевозможные корни n -й степени из -1 . По утверждению 9, гармоническая функция $\operatorname{Re} H$ на $\partial\Delta$ имеет те же корни, но кратности 2 (см. утверждение 3). Так как восстановление аналитической функции, заданной в Δ по её действительной части единственно с точностью до чисто мнимой аддитивной константы, то с учётом нормировки $H(0) > 0$ получаем требуемое. ■

Лемма 4. Функция $g(x_0, \dots, x_n) := \frac{x_0 x_n}{x_0^2 + \dots + x_n^2}$ при $x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ и $x_0^2 + \dots + x_n^2 = c$, где $c = \text{const} > 0$, достигает своего максимального значения $1/2$ если и только если $x_k = 0$ при $k = 1, \dots, n-1$ и $x_0 = x_n = \sqrt{c/2}$.

Доказательство. Поскольку g является однородной функцией степени 0, то можно без потери общности считать, что $c = 1$. Следовательно наша задача сводится к максимизации функции $f(x_0, x_n) := x_0 x_n$ при ограничении $x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

Очевидно, что f может достигать максимума только при $x_0 > 0$ и $x_n > 0$. Ясно, что если положить $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$ и при этом не уменьшать ни x_0 ни x_n , то значение f увеличится из-за ограничения $x_0^2 + x_n^2 = 1$. Поэтому наша задача сводится к максимизации значения выражения $x_0 x_n$ при ограничении $x_0^2 + x_n^2 = 1$.

Последняя задача эквивалентна задаче максимизации значения выражения $x_0^2 x_n^2$ при ограничении $x_0^2 + x_n^2 = 1$. Так как квадрат имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников с одинаковым полупериметром $x_0^2 + x_n^2 = 1$, то $x_0^2 = x_n^2 = 1/2$, следовательно $x_0 = x_n = x_0^* := x_n^* := 1/\sqrt{2}$, а $f(x_0^*, x_n^*) = 1/2$. ■

Утверждение 11. Среди всех многочленов $H \in C_{h_0}^n$ вида (14) максимальное значение $|h_n|$ достигается только для многочленов вида $H(z) = h_0(1 + \eta z^n)$, где $\eta := \exp(i \arg h_n)$.

Доказательство. Так как h_0 — фиксированное положительное число, то задача максимизации $|h_n|$ равносильна задаче максимизации отношения $|h_n|/h_0$. Согласно теореме 3, существуют числа $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, n$, такие, что

$$h_0 = |p_0|^2 + \dots + |p_n|^2, \quad h_n = p_n \overline{p_0},$$

а по лемме 4

$$\frac{|h_n|}{h_0} = \frac{|p_0 p_n|}{|p_0|^2 + \dots + |p_n|^2} \leq \frac{1}{2},$$

что эквивалентно $h_0 = 2|h_n|$. ■

8 О корнях многочлена P

Теорема 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, многочлены H и P степени n определены формулами (2) и (10) соответственно, $\text{Re } H(e^{i\varphi}) = |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$, и корни $z_1, \dots, z_n$ многочлена P удовлетворяют неравенству $|\psi_0| \geq 1$, где $\psi_0 := (-1)^n z_1 \cdot \dots \cdot z_n$. Тогда

$$h_n = \overline{\psi_0} |p_n|^2 = p_n \overline{p_0} = |p_0|^2 / \psi_0, \quad \arg h_n = -\arg \psi_0. \quad (15)$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Так как выполнены условия теоремы Рисса-Фейера, то мы можем рассмотреть тригонометрический многочлен

$$T(\varphi) = \text{Re } H(e^{i\varphi}) = |P(e^{i\varphi})|^2.$$

Из формул (9), (10) и условий $h_n \neq 0$, $T(\varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ следует, что

$$|p_n|^2 = \frac{h_n}{\overline{\psi_0}} = \frac{\overline{h_n}}{\psi_0} > 0. \quad (16)$$

По основной теореме алгебры

$$P(z) = p_n(z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n).$$

Следовательно, имеют место соотношения:

$$p_0 = \psi_0 p_n, \quad \arg h_n = -\arg \psi_0, \quad (17)$$

где h_n определяется формулой (3). Из (16) следует, что $\psi_0 = \overline{h_n}/|p_n|^2$. Подставляя это выражение в первое равенство (17) получим, что $h_n = p_n \overline{p_0}$. Выразив из последнего равенства p_n и подставив его во второе равенство (17) получим, что $|p_0|^2 = \psi_0 h_n$, откуда сразу следует (15). ■

Как отмечалось в предыдущем пункте 7, мы можем без ограничения общности считать, что $h_n > 0$. Если $h_n > 0$, то $\psi_0 \geq 1$. Поскольку P определён с точностью до унимодулярной мультипликативной константы, то мы можем считать, что $p_n > 0$, откуда сразу получаем, что $p_0 > 0$.

9 О корнях многочлена H

Пусть $n \in \mathbb{N}$, многочлены H и P степени n определены формулами (2) и (10) соответственно, $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Из основной теоремы алгебры следует, что $h_0 = 2h_n \eta_0$, где $\eta_0 := (-1)^n \zeta_1 \dots \zeta_n$, а $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ — корни многочлена H . Из теоремы 3 получаем $h_0 = |p_0|^2 + \dots + |p_n|^2$ и $h_n = p_n \overline{p_0}$. Таким образом, (также используем формулу (15))

$$h_0 = 2\eta_0 h_n = |p_0|^2 + \dots + |p_n|^2 = 2\eta_0 p_n \overline{p_0} = 2\eta_0 \overline{\psi_0} |p_n|^2 = 2 \frac{\eta_0}{\psi_0} |p_0|^2 \quad (18)$$

и

$$\arg h_n = -\arg \eta_0, \quad \arg \psi_0 = \arg \eta_0.$$

В силу принципа сохранения области и того, что $H \in C_{h_0}^n$

$$|\zeta_k| \geq 1, \quad k = 1, \dots, n. \quad (19)$$

В пункте 7 отмечалось, что без ограничения общности мы можем считать, что $h_n > 0$. Если $h_n > 0$, то поскольку $h_0 > 0$, то и $\eta_0 > 0$ как у всевозможных корней n -й степени из -1 . Из (19) следует, что

$$\eta_0 \geq 1. \quad (20)$$

10 Связь корней $H(z)$ и $P(z)$

Утверждение 12. Пусть $n \in \mathbb{N}$, многочлены H и P степени n определены формулами (2) и (10) соответственно, $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Тогда H и P не могут иметь общих корней вне единичной окружности $\partial\Delta$.

Доказательство. Пусть z_k и ζ_k , $k = 1, \dots, n$ — все корни многочленов P и H соответственно. Напомним что, по построению $|z_k| \geq 1$, $k = 1, \dots, n$. Из предыдущего пункта известно также, что $|\zeta_k| \geq 1$, $k = 1, \dots, n$.

Предположим что, существует общий корень $\zeta_0 = z_0$ с $|\zeta_0| > 1$. Тогда $H(\zeta_0) = 0$ и $P(z_0) = 0$. Из тождества (11) следует, что $H(1/\bar{\zeta}_0) = 0$. Но если $H(1/\bar{\zeta}_0) = 0$, то $1/\bar{\zeta}_0$ должен быть корнем H . При этом $|1/\bar{\zeta}_0| = 1/|\zeta_0| < 1$. Это противоречит условию (19), заключающемуся в том, что все корни H лежат вне круга Δ . ■

Заметим, что полиномы H и P могут иметь общие корни на единичной окружности $|z| = 1$. Например, многочлены $P(z) := 1 + z$ и $H(z) := 2(1 + z)$ имеют одинаковые корни. (При этом $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = |P(e^{i\varphi})|^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$.)

Напомним, что $\psi_0 := (-1)^n \prod z_j$, где z_j — все корни P и $\eta_0 := (-1)^n \prod \zeta_k$, где ζ_k — все корни H .

Из формул (17) и (18) следует:

$$\psi_0 = \frac{p_0}{p_n}, \quad \eta_0 = \frac{h_0}{2h_n} = \frac{|p_0|^2 + \dots + |p_n|^2}{2p_n \bar{p}_0}.$$

(Заметим, что $|\eta_0| \geq 1$ по лемме 4.) Откуда, так как $p_n \neq 0$

$$\frac{\psi_0}{\eta_0} = \frac{p_0}{p_n} \frac{2p_n \bar{p}_0}{|p_0|^2 + \dots + |p_n|^2} = \frac{2|p_0|^2}{|p_0|^2 + (|p_1|^2 + \dots + |p_n|^2)} < 2.$$

Если $|\psi_0| = 1$, то $|p_0| = |p_n|$ и формула упрощается:

$$\frac{\psi_0}{\eta_0} = \frac{2|p_0|^2}{2|p_0|^2 + (|p_1|^2 + \dots + |p_{n-1}|^2)}.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 5. Если $|\psi_0| = 1$, то отношение ψ_0/η_0 удовлетворяет неравенству

$$0 < \frac{\psi_0}{\eta_0} \leq 1.$$

Равенство $\psi_0/\eta_0 = 1$ достигается тогда и только тогда, когда $|p_0| = |p_n|$ и все промежуточные коэффициенты $p_1, \dots, p_{n-1}$ равны нулю. В этом случае $P(z) = p_n(1 + z^n)$ и $H(z) = 2|p_n|^2(1 + z^n)$, то есть полиномы P и H имеют своими корнями все корни n -й степени из -1 .

Заметим, что если $h_n > 0$, то $1 \leq \psi_0 \leq \eta_0$ и эти неравенства превращаются в равенства если и только если корни полиномов P и H являются всеми корнями n -й степени из -1 .

11 Полиномиальные элементы класса Каратеодори

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда если $H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k$ — многочлен степени не выше n , и $H \in C$, то $H/h_0 \in C_1$. Из теоремы 3 следует, что

$$\frac{H(z)}{h_0} = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{h_0} \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k} \overline{p_j} \right) z^k = 1 + \sum_{k=1}^n \left(2 \sum_{j=0}^{n-k} \frac{p_{j+k}}{\sqrt{h_0}} \frac{\overline{p_j}}{\sqrt{h_0}} \right) z^k, \quad h_0 = \sum_{j=0}^n |p_j|^2.$$

Выполнив замену переменных $q_j = p_j/\sqrt{h_0}$, $j = 0, \dots, n$ видим, что с точностью до обозначений имеет место следующее

Следствие 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Принадлежность многочлена $H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k$, $h_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, n$, классу C_1 эквивалентна существованию комплексных чисел p_j , $j = 0, \dots, n$, таких, что

$$h_k = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k} \overline{p_j}, \quad k = 0, \dots, n, \quad \text{и} \quad h_0 = 1. \quad (21)$$

Более того, если $h_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$, то существуют $p_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$, такие, что выполняются равенства (21); если $p_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$, то $h_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$.

Как известно [14, стр. 57], если $h \in C_1$, то $|\{h\}_j| \leq 2$, $j \in \mathbb{N}$, где $\{h\}_j$ — тейлоровские коэффициенты функции h . В [14] также перечислены функции, для которых $|\{h\}_j| = 2$, но среди них нет многочленов. Следовательно, если многочлен $H \in C_1$, то $|h_j| < 1$, $j = 1, \dots, n$. Далее займемся уточнением этой оценки. Для этого докажем или процитируем ряд лемм.

Лемма 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} := (x_0, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ — вектор столбец и A — вещественная симметрическая матрица квадратичной формы $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$. Тогда $|f(\mathbf{x})| \leq \rho \|\mathbf{x}\|_2^2$, где ρ — спектральный радиус матрицы A , а $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Равенство $|f(\mathbf{x})| = \rho \|\mathbf{x}\|_2^2$ достигается тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}$ является собственным вектором матрицы A , отвечающим собственному числу, имеющему абсолютную величину ρ .

Доказательство. Матрица A нашей квадратичной формы f является симметрической. Согласно спектральной теореме для симметрических матриц, все собственные значения $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ матрицы A действительные. Поэтому существуют ортогональная матрица Q и диагональная матрица $\Lambda := \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$, такие, что $A = Q \Lambda Q^T$.

Положим $\mathbf{y} := Q^T \mathbf{x}$. Так как Q — ортогональная матрица, то $\|\mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$, поэтому

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T Q \Lambda Q^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y} = \sum_{j=0}^n \lambda_j y_j^2.$$

Следовательно,

$$|f(\mathbf{x})| = \left| \sum_{j=0}^n \lambda_j y_j^2 \right| \leq \sum_{j=0}^n |\lambda_j| y_j^2 \leq \rho \|\mathbf{y}\|_2^2 = \rho \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

При $\rho = 0$ имеем $f \equiv 0$ ($\lambda_j = 0$, $j = 0, \dots, n$ и $A = 0$). При $\rho > 0$ равенство $|f(\mathbf{x})| = \rho \|\mathbf{x}\|_2^2$ достигается тогда и только тогда, когда $y_j \neq 0$ хотя бы для одного из номеров j таких, что $|\lambda_j| = \rho$ и λ_j имеют одинаковый знак и $y_j = 0$ для всех остальных номеров j .

Переформулируем эти условия равенства в терминах $\mathbf{x}$. Поскольку $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$, а столбцы $\mathbf{q}_j$ матрицы Q — это ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A , то

$$\mathbf{x} = \sum_{j=0}^n y_j \mathbf{q}_j = \sum_{j: \lambda_j = \rho \text{ либо } j: \lambda_j = -\rho} y_j \mathbf{q}_j.$$

Итак, равенство $f(\mathbf{x}) = \rho \|\mathbf{x}\|_2^2$ достигается если и только если $\mathbf{x}$ принадлежит собственному подпространству $\ker(A - \lambda I)$ матрицы A , соответствующему собственному значению λ с $|\lambda| = \rho$, где I — единичная матрица. То есть $\mathbf{x}$ является собственным вектором матрицы A , отвечающим собственному числу λ с $|\lambda| = \rho$. ■

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Для трёхдиагональных матриц

$$T_m(a, b, c) := \begin{pmatrix} a & c & & \mathbf{0} \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ \mathbf{0} & & b & a \end{pmatrix}$$

размерности $m \times m$ известна (см. [40, стр. 66] и [41, стр. 70]) следующая

Лемма 6. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $bc \neq 0$. Тогда собственные значения $T_m(a, b, c)$ вычисляются по формуле

$$\lambda_k := a + 2\sqrt{bc} \cos \frac{k\pi}{m+1}, \quad k = 1, \dots, m,$$

а соответствующий λ_k собственный вектор $\mathbf{u}^{(k)} := (u_1^{(k)}, \dots, u_m^{(k)})^T$ вычисляется по формуле

$$u_j^{(k)} := \frac{b^{\frac{j-1}{2}}}{c^{\frac{j-1}{2}}} \sin \frac{kj\pi}{m+1}, \quad k = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m.$$

Лемма 7. Если $m \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{u} := (\sin \frac{\pi}{m+1}, \sin \frac{2\pi}{m+1}, \dots, \sin \frac{m\pi}{m+1})^T$, то $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\frac{m+1}{2}}$.

Доказательство. Используя тождество $2\sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ получаем

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 = \sum_{j=1}^m \sin^2 \frac{j\pi}{m+1} = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \cos \frac{2j\pi}{m+1} = \frac{m+1}{2},$$

так как положив $\eta := \exp\left(i\frac{2\pi}{m+1}\right)$ имеем $\eta^{m+1} = 1$ и

$$\sum_{j=1}^m \cos \frac{2j\pi}{m+1} = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m \eta^j = \operatorname{Re} \frac{\eta - \eta^{m+1}}{1 - \eta} = -1.$$

Что и требовалось. $\blacksquare$

Лемма 8. Если $m \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{u} := (\sin \frac{m\pi}{m+1}, \sin \frac{2m\pi}{m+1}, \dots, \sin \frac{m^2\pi}{m+1})^T$, то $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\frac{m+1}{2}}$.

Лемма 8 доказывается совершенно аналогично лемме 7.

Лемма 9. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, и $f(x_1, \dots, x_m) := \sum_{j=1}^{m-1} x_j x_{j+1}$.

Тогда, если $\sum_{j=1}^m x_j^2 = 1$, то $|f(x_1, \dots, x_m)| \leq \cos \frac{\pi}{m+1}$. Равенство достигается при фиксированном $\nu \in \{1, m\}$ и $x_j = \pm \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin \frac{\nu j\pi}{m+1}$, $j = 1, \dots, m$.

Доказательство. Матрица A нашей квадратичной формы f определяется следующим образом $a_{ij} = 1/2$ если $|i - j| = 1$ иначе $a_{ij} = 0$. То есть матрица A является трёхдиагональной матрицей и $A = T_m(0, 1/2, 1/2)$. По лемме 6 собственные значения матрицы A вычисляются по формуле

$$\lambda_k := \cos \frac{k\pi}{m+1}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Собственными значениями с максимальной абсолютной величиной являются только λ_1 и λ_m . При этом $\lambda_1 = -\lambda_m > 0$. Поэтому $|f(\mathbf{x})| \leq \lambda_1$, согласно лемме 5. По лемме 6 собственному значению λ_1 соответствует собственный вектор

$$\mathbf{u}^{(1)} := (u_1^{(1)}, \dots, u_m^{(1)})^T, \quad \text{где} \quad u_j^{(1)} := \sin \frac{j\pi}{m+1}, \quad j = 1, \dots, m,$$

а λ_m соответствует

$$\mathbf{u}^{(m)} := (u_1^{(m)}, \dots, u_m^{(m)})^T, \quad \text{где} \quad u_j^{(m)} := \sin \frac{mj\pi}{m+1}, \quad j = 1, \dots, m,$$

Согласно лемме 5, равенство достигается либо при $\mathbf{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m+1}} \mathbf{u}^{(1)}$, поскольку $\|\mathbf{u}^{(1)}\|_2 = \sqrt{\frac{m+1}{2}}$ по лемме 7, либо при $\mathbf{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m+1}} \mathbf{u}^{(m)}$, поскольку по лемме 8 $\|\mathbf{u}^{(m)}\|_2 = \sqrt{\frac{m+1}{2}}$. $\blacksquare$

Лемма 10. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Множество индексов $\mathcal{I} := \{0, \dots, n\}$ можно разбить на классы $\mathcal{I}_r$ по остатку $r = 0, \dots, k-1$ от деления $j \in \mathcal{I}$ на k

$$\mathcal{I}_r := \{r, r+k, r+2k, \dots, r+(m_r-1)k\},$$

где m_r — мощность множества $\mathcal{I}_r$. Число m_r вычисляется по формуле

$$m_r := \left\lfloor \frac{n-r}{k} \right\rfloor + 1.$$

Максимум $m_{\max} := \max_{0 \leq r < k} m_r$ всегда достигается при $r = 0$, то есть

$$m_{\max} = m_0 = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1.$$

При этом $m_r = m_{\max}$ если и только если $0 \leq r \leq n - \lfloor n/k \rfloor k$.

Доказательство. Зафиксируем номера n и $k \leq n$ произвольным образом.

Первое утверждение не нуждается в доказательстве. Действительно, каждое множество $\mathcal{I}_r$ это просто соответствующий остатку r класс вычетов по модулю k , пересечённый с множеством $\mathcal{I}$.

Из определения множества $\mathcal{I}_r$ следует, что m_r это максимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $r + (m_r - 1)k \leq n$. Решив это неравенство относительно m_r получим доказываемую для m_r формулу.

Для доказательства третьего утверждение перечислим значения r , при которых $m_r = m_0$. Так как $n = \lfloor n/k \rfloor k + s$, то

$$\frac{n-r}{k} = \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor k + s - r}{k} = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \frac{s-r}{k}, \quad \text{где } r, s \in \{0, \dots, k-1\}.$$

Следовательно

$$\left\lfloor \frac{n-r}{k} \right\rfloor = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor, & s-r \geq 0, \\ \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1, & s-r < 0. \end{cases}$$

Откуда $m_r = m_0$ если и только если $0 \leq r \leq s$. Поскольку $s = n - \lfloor n/k \rfloor k$, то мы получаем требуемое условие. ■

Лемма 11. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ и $f(x_0, \dots, x_n) := \sum_{j=0}^{n-k} x_{j+k} x_j$, где $x_j \in \mathbb{R}$,

$j = 0, \dots, n$. Тогда, если $\sum_{j=0}^n x_j^2 = 1$, то

$$|f(x_0, \dots, x_n)| \leq \cos \frac{\pi}{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 2}.$$

Равенство в этом неравенстве достигается при фиксированном $\nu \in \{1, m_0\}$ тогда и только тогда, когда

$$x_{r+\ell k} = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{2\alpha_r}{m_0+1}} \sin \frac{\nu(\ell+1)\pi}{m_0+1}, & 0 \leq r \leq s, \\ 0, & r > s, \end{cases}$$

где $s := n - \lfloor n/k \rfloor k$, $\sum_{r=0}^s \alpha_r = 1$, $\alpha_r \geq 0$, $m_0 := \lfloor n/k \rfloor + 1$, для $r = 0, \dots, s$ и $\ell = 0, \dots, m_0 - 1$. Знак $\pm$ постоянный при каждом фиксированном r .

Доказательство. Зафиксируем номера n и $k \leq n$ произвольным образом. По лемме 10 нашу квадратичную форму f и ограничение на её аргумент можно записать в виде

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{r=0}^{k-1} f_r(\mathbf{x}), \quad \sum_{r=0}^{k-1} \beta_r(\mathbf{x}) = 1, \quad \text{где } f_r(\mathbf{x}) := \sum_{j: j, j+k \in \mathcal{I}_r} x_{j+k} x_j, \quad \beta_r(\mathbf{x}) := \sum_{j \in \mathcal{I}_r} x_j^2.$$

Введя новые переменные

$$y_\ell^{(r)} := x_{r+\ell k}, \quad \ell = 0, \dots, m_r - 1,$$

для каждого r из $\{0, \dots, k-1\}$ получим

$$f_r(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=0}^{m_r-2} y_{\ell+1}^{(r)} y_\ell^{(r)}, \quad \beta_r(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=0}^{m_r-1} \left(y_\ell^{(r)}\right)^2.$$

Заметим, что при фиксированном r достижение экстремальных значений f_r возможно в случаях когда знаки $y_\ell^{(r)}$ постоянны для всех $\ell = 0, \dots, m_r - 1$ или когда знаки $y_\ell^{(r)}$ чередуются пр возрастании ℓ то 0 до $m_r - 1$. Следовательно, f достигает экстремальных значений если и только если знаки f_r одинаковы для всех r из $\{0, \dots, k-1\}$. По лемме 5

$$|f_r(\mathbf{x})| \leq \rho_r \beta_r(\mathbf{x}), \quad r = 0, \dots, k-1.$$

где ρ_r — спектральный радиус матрицы A_r квадратичной формы f_r . По лемме 9

$$\rho_r = \cos \frac{\pi}{m_r + 1}.$$

Итак,

$$|f(\mathbf{x})| \leq \sum_{r=0}^{k-1} \rho_r \beta_r(\mathbf{x}) \leq \rho_{\max} \sum_{r=0}^{k-1} \beta_r(\mathbf{x}),$$

где

$$\rho_{\max} := \max_{0 \leq r < k} \rho_r = \max_{0 \leq r < k} \cos \frac{\pi}{m_r + 1}.$$

Поскольку $\beta_r(\mathbf{x}) \geq 0$ и $\sum_{r=0}^{k-1} \beta_r(\mathbf{x}) = 1$, то максимум $|f(\mathbf{x})|$ достигается, когда

$$\sum_{r: \rho_r = \rho_{\max}} \beta_r(\mathbf{x}) = 1.$$

Функция $\cos \frac{\pi}{m+1}$ строго возрастает по $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\rho_{\max} = \cos \frac{\pi}{m_{\max}+1}$, где $m_{\max} := \max_{0 \leq r < k} m_r$ — максимальная мощность классов $\mathcal{I}_r$. По лемме 10 число m_r максимально, если $0 \leq r \leq s$, где $s := n - \lfloor n/k \rfloor k$ и

$$m_{\max} = m_0 = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1.$$

Следовательно, $\rho_r = \rho_{\max}$ если и только если $0 \leq r \leq s$ и

$$\rho_{\max} = \rho_0 = \cos \frac{\pi}{m_0 + 1} = \cos \frac{\pi}{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 2}.$$

Формулы для экстремальных точек $x_{r+\ell k}$, $\ell = 0, \dots, m_{\max} - 1$, $0 \leq r \leq s$, следуют из леммы 9. ■

Теорема 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k$. Если $H \in C_1$, то

$$|h_k| \leq \cos \frac{\pi}{[n/k] + 2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

При фиксированном $k \in \{1, \dots, n\}$ равенство достижимо если и только если

$$h_k = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k} \overline{p_j},$$

причём:

- при фиксированном $\nu \in \{1, m_0\}$

$$|p_{r+\ell k}| = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\alpha_r}{m_0+1}} \left| \sin \frac{\nu(\ell+1)\pi}{m_0+1} \right|, & 0 \leq r \leq s, \\ 0, & r > s, \end{cases}$$

где $s := n - [n/k]k$, $\sum_{r=0}^s \alpha_r = 1$, $\alpha_r \geq 0$, $m_0 := [n/k] + 1$, для $r = 0, \dots, s$ и $\ell = 0, \dots, m_0 - 1$;

- при каждом фиксированном $r \in \{0, \dots, s\}$, где $s := n - [n/k]k$ аргументы $p_{r+\ell k}$, $\ell = 0, \dots, m_0 - 1$, образуют арифметическую прогрессию с разностью φ (все произведения $p_{r+(\ell+1)k} \overline{p_{r+\ell k}}$ имеют одинаковый аргумент φ).

Доказательство. Фиксируем произвольным образом два номера n и $k \leq n$. Согласно следствию 1, задача оценки функционала $|h_k|$ на классе C_1 эквивалентна задаче оценки выражения

$$|h_k| = \left| \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k} \overline{p_j} \right| \text{ при условии } h_0 = \sum_{j=0}^n |p_j|^2 = 1.$$

Поскольку

$$\left| \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k} \overline{p_j} \right| \leq \sum_{j=0}^{n-k} |p_{j+k}| |p_j|$$

и на $\arg p_j$ никаких ограничений нет, то равенство возможно как минимум при $p_j \geq 0$, $j = 0, \dots, n$. Поэтому задача об оценке $|h_k|$ сводится к следующей задаче:

$$\sum_{j=0}^{n-k} x_{j+k} x_j \rightarrow \max, \quad \sum_{j=0}^n x_j^2 = 1, \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 0, \dots, n.$$

Из леммы 11 следует, что $|h_k| \leq \cos \frac{\pi}{[n/k] + 2}$, а также случаи равенства в этом неравенстве. ■

Заметим, что согласно принципу компактности Монтея [21, стр. 201] класс C_1^n является компактным (в топологии локально равномерной сходимости) семейством функций, но это семейство не является компактным в себе. Поэтому в этом

пункте мы рассматриваем не класс C_1^n , а его замыкание $\overline{C_1^n}$ — полиномы из C_1^n степени не выше n . Функционал, сопоставляющий каждой функции из $\overline{C_1^n}$ её тейлоровский коэффициент с номером n , является непрерывным на $\overline{C_1^n}$ и, поэтому достигает своей верхней грани [21, стр. 203].

Тем не менее, равенство в теореме 6 достигается и в классе C_1^n , причём для любого номера k , не превосходящего n . Действительно, пусть $h_n \neq 0$, то есть $p_0 p_n \neq 0$. Согласно лемме 10 индекс $j = 0$ всегда находится в классе $\mathcal{I}_0$, а индекс $j = n$ всегда находится в классе $\mathcal{I}_s$, где $s := n - \lfloor n/k \rfloor k$. По теореме 6 имеем $|p_0| = \sqrt{\frac{2\alpha_0}{m_0+1}} \left| \sin \frac{\nu\pi}{m_0+1} \right|$, а $|p_n| = \sqrt{\frac{2\alpha_s}{m_0+1}} \left| \sin \frac{\nu m_0 \pi}{m_0+1} \right|$. Следовательно, если $\alpha_0 > 0$ и $\alpha_s > 0$, то $p_0 p_n \neq 0$, а значит и $h_n \neq 0$.

Из теоремы Рунге [21, стр. 109] о приближении аналитических функций многочленами следует, что множество полиномиальных элементов из C_1 плотно в C_1 . Таким образом, из теоремы 6 вытекает

Следствие 2. Если $h \in C_1$, то $|\{h\}_n| \leq 2$.

12 Гипотеза Кшижа

Тейлоровские коэффициенты функции f будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Классом B будем называть множество функций f , голоморфных в единичном круге Δ и удовлетворяющих условиям $0 < |f(z)| \leq 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. Ян Кшиж выдвинул гипотезу [7], согласно которой, если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leq 2/e, \quad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\theta} F(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где

$$F(z, t) := e^{-t \frac{1+z}{1-z}}, \quad \varphi, \theta \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty). \quad (22)$$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Задачу о нахождении

$$m_n := \max_{f \in B} |\{f\}_n|,$$

будем называть проблемой Кшижа для коэффициента с номером n или проблемой Кшижа для номера n . Задачу о точной оценке величины $|\{f\}_n|$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (в зависимости от n) на классе B будем называть проблемой Кшижа. Проблему Кшижа для фиксированного n также допустимо называть просто проблемой Кшижа, если это не приводит к недоразумениям.

Согласно принципу компактности Монтеля [21, стр. 201] класс B является компактным семейством. Существование экстремалей в проблеме Кшижа для фиксированного номера n очевидно, поскольку после присоединения к компакту B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в себе (в топологии локально равномерной сходимости) семейство функций $\overline{B}$, а функционал, сопоставляющий каждой функции из $\overline{B}$ её тейлоровский коэффициент с номером n , является непрерывным на $\overline{B}$ и, поэтому достигает своей верхней грани [21, стр. 203].

Функцию $f \in B$ будем называть глобально экстремальной в проблеме Кшижа для номера n , если $|\{f\}_n| = m_n$. Понятие локально экстремальной функции [36]

мы вводить не будем, так как оно нам здесь не понадобится. Поэтому далее по тексту мы будем использовать термин экстремальная функция (или экстремаль), хотя необходимо понимать, что возможно речь идёт о локально экстремальной функции, так как понятие локально экстремальной функции включает в себя понятие глобально экстремальной функции, а величина m_n нам неизвестна. Известно только, что $m_n \geq 2/e$.

13 Подклассы

Через Ω_0 обозначим класс функций ω , голоморфных в Δ и удовлетворяющих условиям $|\omega(z)| < 1$, $z \in \Delta$, $\omega(0) = 0$.

Пусть отображения G и g голоморфны в Δ . Функция g называется подчинённой для функции G в единичном круге Δ , если она может быть представлена в Δ в виде $g(z) = G(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. В этом случае функцию G будем называть мажорантой для g в Δ . Теория подчинения изложена, в частности, в работе [14].

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то без уменьшения общности можно ограничиться изучением функций, для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leq 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in (0, +\infty)$. Соответствующие подклассы обозначим через B_t . Как известно из теории подчинённых функций [14], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t h(z)}, \quad h \in C_1. \quad (23)$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами C_1 и B_t . Очевидно также, что при каждом фиксированном $t > 0$ функция $F(z, t)$ является мажорантой для каждой функции из класса B_t .

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geq 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам, например, свободно делить на t .

Класс, состоящий из функций $h \in C_t$ с действительными коэффициентами обозначим через C_t^r , а класс, состоящий из функций $f \in B_t$ с действительными коэффициентами обозначим через B_t^r . При каждом $t \geq 0$ формула (23) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами C_t^r и B_t^r . Аналогичным образом определим классы B^r и Ω_0^r как подклассы классов B и Ω_0 с действительными коэффициентами.

14 Краткий обзор результатов по гипотезе Кшижа

В настоящее время гипотеза Кшижа доказана для первых шести тейлоровских коэффициентов включительно. Из геометрических соображений очевидно, что $|\{f\}_0| \leq 1$. Точную оценку $|\{f\}_1|$ можно найти во многих работах, начиная с 1934 года; первой из них была работа [8]. Оценка $|\{f\}_2|$ не вызывает затруднений с 1943 года [14]. Кшиж сформулировал обсуждаемую здесь гипотезу, опираясь на

оценки модулей первых двух коэффициентов. Доказательство для случая $n = 3$ впервые было опубликовано в 1977 году в работе Дж. Хаммеля, С. Шейнберга и Л. Зальцмана [17]. Точная при каждом $t > 0$ оценка функционала $|\{f\}_3|$ на классе B_t была получена в работе [22]. Аналогичная оценка на множестве функций из B_t с вещественными коэффициентами представлена в работе [23]. Для случая $n = 4$ следует упомянуть доказательство В. Шапеля [9]. Впервые оценка пятого коэффициента методом Шапеля была дана в работе Н. Самариса [10]. Автор данной статьи в работе [11], используя метод Шапеля, получил оценку $|\{f\}_6| \leq 2/e + 0.00116077$, а в работе [12] — оценку $|\{f\}_6| \leq 2/e$ с помощью численного метода.

Исследования по проблеме Кшижа можно разделить на несколько основных направлений. Одно из них — это оценки начальных коэффициентов, упомянутые в предыдущем абзаце. Отдельного внимания заслуживают так называемые асимптотические оценки, освещённые, например, в работах [24, 25]. Также выделяются равномерные по n оценки, полученные с использованием интегральной формулы Коши для всех натуральных n . В статье [26] была получена оценка $|\{f\}_n| \leq 1 - \frac{1}{3\pi} + \frac{4}{\pi} \sin \frac{1}{12} = 0.999877\dots$, а в диссертации [16, стр. 19] — улучшенная оценка $|\{f\}_n| \leq \frac{4}{5} + \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{20} = 0.999178\dots$. Ещё одно важное направление связано с изучением свойств экстремальной функции и поиском функций класса B , обладающих этими свойствами. К этому направлению относятся, в частности, работы [17, 27, 15], а также настоящая статья.

Проблемы геометрической теории функций комплексного переменного, так или иначе связанные с гипотезой Кшижа, рассмотрены в работах [29, 30, 9, 31, 32, 33, 27, 34, 35]. Некоторые обобщения гипотезы Кшижа описаны в статье [17, стр. 187].

С. Л. Крушкаль в работе [28] получил доказательство гипотезы Хаммеля-Шейнберга-Зальцмана [17, стр. 189] для функций из пространства H^p . Это доказательство получено благодаря применению нового метода, основанного на привлечении глубоких особенностей пространств Тейхмюллера. Гипотеза Кшижа является следствием гипотезы Хаммеля-Шейнберга-Зальцмана при $p \rightarrow \infty$.

Эта статья посвящена поискам элементарного доказательства гипотезы Кшижа.

15 Критерий Каратеодори-Тёплица

Приведём для дальнейших ссылок следующий классический результат, который можно найти в [18, 39, 19]:

Теорема 7 (Каратеодори, Тёплиц). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\{h\}_0 > 0$, $\{h\}_1, \dots, \{h\}_n \in \mathbb{C}$. Многочлен

$$Q_n(z) := \{h\}_0 + \sum_{k=1}^n \{h\}_k z^k \quad (24)$$

можно продолжить до функции

$$h(z) := Q_n(z) + o(z^n) \in C$$

тогда и только тогда, когда определители

$$M_k := \begin{vmatrix} 2\{h\}_0 & \{h\}_1 & \cdots & \{h\}_{k-1} & \{h\}_k \\ \overline{\{h\}_1} & 2\{h\}_0 & \cdots & \{h\}_{k-2} & \{h\}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{\{h\}_{k-1}} & \overline{\{h\}_{k-2}} & \cdots & 2\{h\}_0 & \{h\}_1 \\ \overline{\{h\}_k} & \overline{\{h\}_{k-1}} & \cdots & \overline{\{h\}_1} & 2\{h\}_0 \end{vmatrix}, \quad k = 0, \dots, n, \quad (25)$$

либо все положительны, либо положительны до некоторого номера $m \leq n$, начиная с которого все равны нулю. В последнем случае продолжение единственно и существуют числа $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, и числа $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_m < 2\pi$ такие, что

$$h(z) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}. \quad (26)$$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{n+1}$, точками которого являются наборы из $(n+1)$ -го комплексного числа $h^{(n+1)} := (\{h\}_0, \dots, \{h\}_n)$. Множество точек $h^{(n+1)}$ из пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ таких, что числа $\{h\}_0, \dots, \{h\}_n$ являются первыми $n+1$ коэффициентами некоторой функции $h \in C$, обозначим через $C^{(n+1)}$ и будем называть $(n+1)$ -ым телом коэффициентов класса C .

Проблема коэффициентов на классе C формулируется следующим образом: найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа $\{h\}_0, \{h\}_1, \{h\}_2, \dots$ для того, чтобы ряд $\{h\}_0 + \{h\}_1 z + \{h\}_2 z^2 + \dots$ являлся рядом Тейлора некоторой функции из класса C . Критерий Каратеодори-Тёплица даёт полное решение этой задачи.

Основополагающей работой по проблеме коэффициентов в классе C считается статья Каратеодори [38] 1911 года, однако первые исследования по этой тематике Каратеодори опубликовал в 1907 году в статье [37]. Отметим, что класс C обозначается по первой букве фамилии Carathéodory и в его честь часто именуется классом Каратеодори, в литературе, посвящённой однолиственным, функциям классом Каратеодори обычно называют множество C_1 .

Для границы тела коэффициентов $C^{(n+1)}$, Каратеодори установил параметрическое представление, которое полностью описывает эту границу тригонометрическим полиномом. Тёплицу в 1911 году удалось найти [39] простое и очень красивое представление этой границы в детерминантной форме, посредством которого все результаты Каратеодори были приведены к алгебраическому виду.

16 Общий вид экстремальных функций

Класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z и относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$). То есть, если $n \in \mathbb{N}$ и функция f является экстремальной в проблеме Кшижа для этого номера n , то функция $\eta f(\zeta z)$ при $|\eta| = |\zeta| = 1$ также является экстремальной. При этом вращение в плоскости переменной z не затрагивает коэффициент $\{f\}_0$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что если f — экстремальная, то $\{f\}_0 > 0$ и $\{f\}_n > 0$. В дальнейшем, говоря о функции f , экстремальной в

проблеме Кшижа, будем подразумевать, что $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$ и $f \in B_t$, где $t = -\ln\{f\}_0$. Также, функцию, экстремальную в проблеме Кшижа для номера n часто будем называть просто экстремальной, если из контекста понятно о каком конкретно n идёт речь.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Если $f(z) = e^{-h(z)}$ — экстремальная функция, то, как известно [19, 20], точка $h^{(n+1)}$ принадлежит границе множества $C^{(n+1)}$, что равносильно тому, что $M_n = 0$ (M_n определён формулой (25)). Согласно критерию Каратеодори-Тёплица, это означает, что продолжение многочлена Q_n , определённого формулой (24), единственно. Следовательно, любая экстремальная функция имеет вид $f(z) = e^{-h(z)}$, где h задана формулой (26). Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Следствие 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция f является экстремальной в проблеме Кшижа и $t := -\ln\{f\}_0$. Тогда найдутся числа $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, $\sum_{k=1}^m \alpha_k = t$, и числа $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_m < 2\pi$, такие, что $f(z) = e^{-h(z)}$, где функция h задана формулой (26), причём $m \leq n$.

Этот результат хорошо известен с начала XX века (см., например, [17, стр. 171] и [15, стр. 725]).

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, а функция f , $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, является экстремальной в проблеме Кшижа. Если считать, что $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$, из формулы (22) и следствия 3 следует, что

$$f(z) = \prod_{k=1}^n F(e^{i\varphi_k} z, \alpha_k), \quad f(0) = e^{-t}. \quad (27)$$

Чтобы при помощи следствия 3 найти экстремальную функцию необходимо определить $2n$ действительных параметров α_k , φ_k , $k = 1, \dots, n$. Если f имеет действительные коэффициенты, то и коэффициенты h тоже будут действительными, поэтому для некоторого k , такого, что $\alpha_k > 0$ и $0 < \varphi_k < \pi$ кроме слагаемого $\alpha_k \frac{1+e^{i\varphi_k} z}{1-e^{i\varphi_k} z}$ формула (26) должна содержать также слагаемое $\alpha_k \frac{1+e^{-i\varphi_k} z}{1-e^{-i\varphi_k} z}$. Отсюда следует, что если f имеет действительные коэффициенты, то для отыскания явного представления f , при помощи следствия 3, нужно определить n действительных параметров.

Теорема 8. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Множество функций $f = e^{-h}$ с $\{f\}_n > 0$, где

$$h(z) := \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad 0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_n < 2\pi,$$

плотно во множестве функций $u = e^{-v}$ с $\{u\}_n > 0$, где

$$v(z) := \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}, \quad \alpha_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad 0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_n < 2\pi.$$

17 Некоторые свойства экстремальных функций

Заметим, что если $n \in \mathbb{N}$, а f и g — голоморфные в Δ функции, то

$$\{f \cdot g\}_n = \{f\}_n \{g\}_0 + \{f\}_{n-1} \{g\}_1 + \dots + \{f\}_0 \{g\}_n. \quad (28)$$

Лемма 12. Пусть $n \in \mathbb{N}$, f, g — голоморфные в Δ функции, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и

$$v(z) := f(z)e^{-\varepsilon g(z)}, \quad (29)$$

тогда

$$\{v\}_n = \{f\}_n - \varepsilon \{f \cdot g\}_n + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (30)$$

Доказательство. Рассмотрим вариацию v функции f функцией $e^{-\varepsilon g}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Устремив ε к нулю имеем:

$$v(z) := f(z)e^{-\varepsilon g(z)} = f(z)(1 - \varepsilon g(z) + o(\varepsilon)) = f(z) - \varepsilon f(z)g(z) + o(\varepsilon).$$

Вычислив теперь $\{v\}_n$ мы получим формулу (30). ■

Следующий результат позаимствован из [15, стр. 726]. Для полноты изложения приведём его вместе с доказательством, также взятым из указанной работы.

Теорема 9. Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кишжа для коэффициента с номером n , причём $\{f\}_0 > 0$ и $\{f\}_n > 0$, тогда для любой функции $g \in C$

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n \{g\}_0 + \{f\}_{n-1} \{g\}_1 + \dots + \{f\}_0 \{g\}_n) \geq 0. \quad (31)$$

В частности,

$$\{f\}_n \geq 2\{f\}_0, \quad (32)$$

а

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n \{h\}_0 + \{f\}_{n-1} \{h\}_1 + \dots + \{f\}_0 \{h\}_n) = 0 \quad \text{при} \quad h = -\ln f. \quad (33)$$

Пусть

$$H(z) := \{f\}_n + 2\{f\}_{n-1}z + \dots + 2\{f\}_0 z^n, \quad (34)$$

тогда

$$H \in C^n. \quad (35)$$

Более того, пусть $m \leq n$, а числа $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_m < 2\pi$ частично определяют функцию $h := -\ln f$ (см. формулу (26)), тогда

$$\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (36)$$

Доказательство. 1. Докажем справедливость неравенства (31). Пусть $g \in C$. Вариация v функции f , заданная формулой (29), при $\varepsilon > 0$ является внутренней, то есть $v \in B$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ справедлива лемма 12, а по условию $\{f\}_n > 0$ и f — экстремальная, следовательно, $\operatorname{Re} \{v\}_n \leq \{f\}_n$. Отсюда (см. (30)) и вытекает справедливость неравенства (31).

2. Подставив коэффициенты функции $g(z) = \frac{1-z^n}{1+z^n} = 1 - 2z^n + \dots$ в неравенство (31) получим неравенство (32).

3. Докажем равенство (33). Возьмём теперь $g = h$. Так как $g = h$, то вариация v функции f , заданная формулой (29), при $\varepsilon < 0$ и $|\varepsilon| < h_0$ является внутренней вариацией, то есть $v = f \cdot f^{-\varepsilon} \in B$. Поскольку по условию $\{f\}_n > 0$ и f — экстремальная, то из формулы (30) для $\varepsilon < 0$ получаем

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \dots + \{f\}_0\{h\}_n) \leq 0,$$

а для $\varepsilon > 0$ справедлива неравенство (31), то есть

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \dots + \{f\}_0\{h\}_n) \geq 0,$$

откуда делаем вывод, что равенство (33) верно.

4. Докажем предложение (35). Зафиксируем $\zeta \in \overline{\Delta}$ и положим

$$g(z) := \frac{1 + \zeta z}{1 - \zeta z} = 1 + 2\zeta z + 2\zeta^2 z^2 + \dots$$

Ясно, что $g \in C_1$. Подставив коэффициенты функции g в неравенство (31), получим

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n + 2\{f\}_{n-1}\zeta + \dots + 2\{f\}_0\zeta^n) \geq 0, \quad |\zeta| \leq 1,$$

что равносильно $\operatorname{Re} H(z) \geq 0$, $z \in \overline{\Delta}$. Так как $H(0) > 0$, то по принципу сохранения области $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \Delta$, что эквивалентно предложению (35).

5. Докажем равенства (36). Фиксируем k чтобы выбрать конкретное число φ_k , частично определяющее функцию h (см. формулу (26)) и рассмотрим функцию

$$g(z) := \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z} = 1 + 2e^{i\varphi_k} z + 2e^{2i\varphi_k} z^2 + \dots$$

Тогда $v = f \cdot e^{-\varepsilon g} \in B$ как при $\varepsilon \geq 0$, так и при достаточно малых $\varepsilon < 0$. То есть при $|\varepsilon| \leq \alpha_k$, где α_k частично определяет функцию h (см. формулу (26)). Из леммы 12, условия $\{f\}_n > 0$ и экстремальности f следует, что для $\varepsilon < 0$

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n + \{f\}_{n-1}2e^{i\varphi_k} + \dots + \{f\}_02e^{ni\varphi_k}) \leq 0,$$

а для $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n + \{f\}_{n-1}2e^{i\varphi_k} + \dots + \{f\}_02e^{ni\varphi_k}) \geq 0,$$

что эквивалентно равенству $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$. ■

Заметим, что неравенство (32) можно вывести также из утверждения 11.

Теорема 10. Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кишжа для коэффициента с номером n , причём $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$ и $f := e^{-h}$, где $h(z) := \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, n$, $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_n < 2\pi$, а полином H сгенерирован из коэффициентов функции f по формуле (34). Тогда точки $e^{i\varphi_k}$, $k = 1, \dots, n$, исчерпывают все нули функции $\operatorname{Re} H$, лежащие на единичной окружности. Более того, каждая точка $e^{i\varphi_k}$ даёт нуль кратности 2 для функции $\operatorname{Re} H$.

Доказательство. Первая часть этого утверждения следует из равенств (36).

Согласно утверждению 3, тригонометрический полином $T(\varphi) := \operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$ может иметь не более $2n$ корней на $[0, 2\pi)$. Из равенств (36) следует, что T имеет n различных корней.

Так как $T(\varphi) \geq 0$ при $\varphi \in \mathbb{R}$ (см. предложение (35)), то все корни T имеют чётную кратность, а поскольку всего корней $2n$ и различных корней ровно n , то каждый корень имеет кратность 2. ■

Например, если $f(z) := F(-z^n, 1)$, то $h(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - e^{i2\pi k/n} z}{1 + e^{i2\pi k/n} z} = \frac{1 - z^n}{1 + z^n}$. Соответственно $H(z) = 1 + z^n$ и функция $\operatorname{Re} H$ имеет n нулей на $\partial\Delta$ кратности 2.

Заметим, что в силу теоремы 8, только что доказанная теорема 10 может быть использована для поиска экстремальной функции практически без какой-либо потери общности.

Покажем, что равенство (33) следует из равенств (36).

Теорема 11. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, $f := e^{-h}$, где $h(z) := \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_m < 2\pi$ и пусть $g(z) := \sum_{k=1}^m \beta_k \frac{1 + e^{i\theta_k} z}{1 - e^{i\theta_k} z}$, $\beta_k \geq 0$, $k = 1, \dots, m$, $\sum_{k=1}^m \beta_k > 0$, $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_m < 2\pi$, а полином H сгенерирован из коэффициентов функции f по формуле (34), $H \in C^n$ и $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi}) = 0$ если и только если $\varphi \in \{\varphi_k : k = 1, \dots, m\}$. Тогда

$$\operatorname{Re} (\{f\}_n \{g\}_0 + \{f\}_{n-1} \{g\}_1 + \dots + \{f\}_0 \{g\}_n) \geq 0.$$

В частности, равенство

$$\operatorname{Re} (\{f\}_n \{g\}_0 + \{f\}_{n-1} \{g\}_1 + \dots + \{f\}_0 \{g\}_n) = 0$$

справедливо если и только если $\theta_k = \varphi_k$, $k = 1, \dots, m$, а неравенство

$$\operatorname{Re} (\{f\}_n \{g\}_0 + \{f\}_{n-1} \{g\}_1 + \dots + \{f\}_0 \{g\}_n) > 0$$

справедливо если и только если $\theta_k \neq \varphi_j$, $j, k = 1, \dots, m$.

Доказательство. Имеем

$$g(z) = \sum_{k=1}^m \beta_k \frac{1 + e^{i\theta_k} z}{1 - e^{i\theta_k} z} = \sum_{k=1}^m \beta_k (1 + 2e^{i\theta_k} z + \dots + 2e^{in\theta_k} z^n + \dots).$$

Применяя формулу (28), получаем:

$$\{f \cdot g\}_n = \sum_{k=1}^m \beta_k (\{f\}_n + \{f\}_{n-1} 2e^{i\theta_k} + \dots + \{f\}_0 2e^{in\theta_k}) = \sum_{k=1}^m \beta_k H(e^{i\theta_k}). \quad (37)$$

По условию $\sum_{k=1}^m \beta_k > 0$, $H \in C^n$ и $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$, $k = 1, \dots, m$, и $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in \overline{\Delta} \setminus \{e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_m}\}$, поэтому из формулы (37) следует, что

$$\operatorname{Re} H(e^{i\theta_k}) \geq 0, \quad k = 1, \dots, m \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^m \beta_k \operatorname{Re} H(e^{i\theta_k}) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} \{f \cdot g\}_n \geq 0.$$

В частности, если $\theta_k = \varphi_k$, $k = 1, \dots, m$, то

$$\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^m \beta_k \operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} \{f \cdot g\}_n = 0,$$

а если $\theta_k \neq \varphi_j$, $j, k = 1, \dots, m$, то

$$\operatorname{Re} H(e^{i\theta_k}) > 0, \quad k = 1, \dots, m \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^m \beta_k \operatorname{Re} H(e^{i\theta_k}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} \{f \cdot g\}_n > 0.$$

Что и требовалось. ■

18 Свойства производных коэффициентов

Лемма 13. Пусть c — гладкая комплекснозначная функция аргумента $t \in \mathbb{R}$, $|c(t)| < 1$, t^* — точка строгого локального максимума функции $|c|$ и $c(t^*) > 0$. Тогда $\operatorname{Re} c'(t^*) = 0$ если и только если $|c|'(t^*) = 0$.

Доказательство. Пусть $u := \operatorname{Re} c$, $v := \operatorname{Im} c$. Тогда $c = u + iv$, $|c| = \sqrt{u^2 + v^2}$ и

$$c' = u' + iv', \quad |c|' = \frac{uu' + vv'}{|c|} \quad (38)$$

Необходимость. Если $\operatorname{Re} c'(t^*) = 0$, то из (38) и $\operatorname{Re} c'(t^*) = u'(t^*)$ следует, что $u'(t^*) = 0$. Так как по условию $c(t^*) > 0$, то $v(t^*) = 0$, поэтому из (38) получаем, что $|c|'(t^*) = 0$.

Достаточность. Если $|c|'(t^*) = 0$, то из (38) следует, что $(uu' + vv')(t^*) = 0$. Так как по условию $v(t^*) = 0$, то эта формула упрощается до $u(t^*)u'(t^*) = 0$. Поскольку $u(t^*) > 0$, то $u'(t^*) = 0$, что и требовалось. ■

Лемма 14. Пусть $h \in C_1$ и $f(z, t) := e^{-th(z)}$, тогда

$$\{f\}'_n = -(\{f\}_n \{h\}_0 + \dots + \{f\}_0 \{h\}_n), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (39)$$

Доказательство. Ясно, что $\{f\}_k = \{f\}_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$. Зафиксировав произвольный номер n и продифференцировав равенство $f(z, t) = e^{-th(z)}$ по t получаем

$$f'_t(z, t) = -h(z)f(z, t).$$

Заметив, что $(\{f\}_n)'_t = \{f'_t\}_n$ и выписав $\{f'_t\}_n$ получаем требуемое. ■

Из лемм 14 и 13 непосредственно вытекает равенство (33). Сформулируем это утверждение в явном виде:

Теорема 12. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $h \in C_1$, $f(z, t) = e^{-th(z)}$ и $|\{f\}_n(t)|$ имеет локальный максимум в точке $t = t^*$, тогда

$$\operatorname{Re}(\{f\}_n(t^*)\{h\}_0 + \dots + \{f\}_0(t^*)\{h\}_n) = 0.$$

19 Дальнейшие следствия

Из теоремы 3 и теоремы 9 (предложение (35)) сразу вытекает

Следствие 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — экстремальная функция в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n , причём $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, тогда найдутся $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, n$, такие, что

$$\{f\}_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k} \overline{p_j}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (40)$$

В частности, если $f \in B^r$, то $p_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n и H — многочлен, определённый формулой (34), то из равенств (18) и следствия 4 сразу вытекает, что

$$\{f\}_n = 2\{f\}_0\eta_0 = |p_0|^2 + \dots + |p_n|^2 = 2p_n\overline{p_0}\eta_0 = 2\eta_0\overline{\psi_0}|p_n|^2 = 2\frac{\eta_0}{\psi_0}|p_0|^2, \quad (41)$$

где $\eta_0 := (-1)^n \zeta_1 \cdot \dots \cdot \zeta_n$, а $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ — корни многочлена H . Так как у экстремальной функции $\{f\}_n > 0$ и $\{f\}_0 > 0$, то соотношения (19) и (20) для корней $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ многочлена H также имеют место.

Как уже упоминалось в пункте 7, гипотеза Кшижа доказана для всех номеров $n = 1, \dots, 6$, стало быть, при этих n нам известна экстремальная функция $f = F$, где F задана формулой (22). Таким образом,

$$H(z) = \frac{2}{e}(1 + z^n), \quad n = 1, \dots, 6,$$

а корни H это всевозможные корни n -й степени из -1 как и в равенстве (20).

Переформулируем теорему 9 для случая когда коэффициенты экстремальной функции действительные.

Следствие 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, тогда, если f имеет действительные коэффициенты, то для любой функции $g \in C^r$

$$\{f\}_n\{g\}_0 + \{f\}_{n-1}\{g\}_1 + \dots + \{f\}_0\{g\}_n \geq 0.$$

В частности, если $h = -\ln f$, то

$$\{f\}_n\{h\}_0 + \{f\}_{n-1}\{h\}_1 + \dots + \{f\}_0\{h\}_n = 0.$$

Доказательство. Доказываемое неравенство сразу вытекает из неравенства (31).

Если f имеет действительные коэффициенты, то и h тоже, поэтому доказываемое равенство сразу следует из равенства (33). ■

20 О единственности экстремальной функции

Как упоминалось выше, класс B инвариантен относительно вращений в плоскостях переменных z и w ($w = f(z)$). То есть, если $n \in \mathbb{N}$ и f — экстремальная функция в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n , то мы можем считать без ограничения общности, что $\{f\}_0 > 0$ и $\{f\}_n > 0$. При таких ограничениях на экстремальную функцию можно ставить вопрос о её единственности.

Теорема 13. Пусть $n \in \mathbb{N}$, и f — экстремальная функция в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n , удовлетворяющая условию $\{f\}_n = 2\{f\}_0 > 0$. Тогда функция f существует, единственна и $f = F(-z^n, 1)$, где функция F задана формулой (22).

Доказательство. Возьмём такой номер n из $\mathbb{N}$ для которого существуют одна или несколько экстремальных функций, удовлетворяющих условию этой теоремы, и выберем из них произвольную экстремальную функцию f . Согласно теореме 9, многочлен H , сгенерированный из коэффициентов функции f по формуле (34), принадлежит классу C^n и удовлетворяет всем условиям утверждения 7. Следовательно,

$$H(z) = \{f\}_n + 2\{f\}_0 z^n,$$

откуда вытекает, что

$$\{f\}_1 = \dots = \{f\}_{n-1} = 0.$$

Пусть $\{f\}_0 = e^{-t}$, где $t > 0$. Тогда, так как по условию $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, то:

$$f(z) = e^{-t} + 2e^{-t}z^n + o(z^n).$$

Проверим, что функция $h := -\ln f = t - 2z^n + o(z^n)$ принадлежит классу C . (Напомним, что миноры M_k определены формулой (25).) Применяя критерий Каратеодори-Тёплица, получаем для $t > 0$:

- Миноры $M_k = 2^{k+1}t^{k+1} > 0$ при $k = 1, \dots, n-1$;
- $M_n = 2^{n+1}t^{n-1}(t^2 - 1) \geq 0$ и $M_n = 0$ если и только если $t = 1$.

Таким образом, $\{f\}_0 = e^{-1}$ и $f(z) = Q_n(z) + o(z^n)$, где $Q_n(z) := e^{-1} + 2e^{-1}z^n$.

Функция $F(-z^n, 1)$, заданная формулой (22), принадлежит классу B , удовлетворяет всем указанным условиям и, согласно критерию Каратеодори-Тёплица (теорема 7), является единственным продолжением многочлена Q_n до функции класса B . Следовательно, $f(z) = F(-z^n, 1)$. ■

Следствием этой теоремы является следующее утверждение.

Теорема 14. Гипотеза Кшижа справедлива при $n = 1$.

Доказательство. Пусть $n = 1$, а f — любая экстремальная функция, удовлетворяющая условиям $\{f\}_0 > 0$ и $\{f\}_1 > 0$. Тогда по формуле (33) имеем

$$\operatorname{Re}(\{f\}_1 + \{f\}_0\{h\}_1) = 0,$$

откуда $\{f\}_1 = -\{f\}_0 \operatorname{Re}\{h\}_1$. По формуле (32) имеем $\{f\}_1 \geq 2\{f\}_0$, но $|\{h\}_1| \leq 2$, согласно следствию 2, откуда $\{f\}_1 = 2\{f\}_0$. Осталось только применить теорему 13. ■

Рассмотрим ещё одно следствие из теоремы 13.

Теорема 15. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда, если $\max_{f \in B} |\{f\}_n| = 2/e$, то гипотеза Кшижа справедлива для коэффициента с номером n .

Доказательство. Фиксируем произвольный $n \in \mathbb{N}$ для которого выполнено условие этой теоремы. Функция $f(z) := F(-z^n, t)$ удовлетворяет условию этой теоремы. По теореме 13 функция f является единственной экстремальной функцией для номера n , следовательно гипотеза Кшижа верна для этого номера n . ■

Справедливо также утверждение, обратное к теореме 13.

Теорема 16. Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — экстремальная функция в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n , $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, и $\{f\}_1 = \dots = \{f\}_{n-1} = 0$, тогда $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, функция f единственная и $f = F(-z^n, 1)$.

Доказательство. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ для которого выполнены все условия этой теоремы. Так как f — экстремальная, то из условий $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$ и неравенства (32) имеем $\{f\}_n \geq 2\{f\}_0 > 0$. Из условия $\{f\}_1 = \dots = \{f\}_{n-1} = 0$ и равенства (33) следует, что $\{f\}_n \{h\}_0 = -\{f\}_0 \operatorname{Re} \{h\}_n$, следовательно

$$\{f\}_n = -\{f\}_0 \frac{\operatorname{Re} \{h\}_n}{\{h\}_0} \leq 2\{f\}_0,$$

поскольку $|\{h\}_n / \{h\}_0| \leq 2$ для $h / \{h\}_0 \in C_1$. (См. [14, стр. 57] или следствие 2.) Стало быть, $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, откуда, согласно теореме 13 вытекает единственность f и то, что $f = F(-z^n, 1)$. ■

Заметим, что из (40) следует, что $\{f\}_n = \sum_{j=0}^n |p_j|^2$, а $\{f\}_0 = p_n \overline{p_0}$. Если показать, что ещё и $|p_1| = \dots = |p_{n-1}| = 0$, $|p_0| = |p_n| > 0$, то из теоремы 13 следует, что экстремальная функция единственная. Покажем, что единственность экстремальной функции влечёт справедливость гипотезы Кшижа.

Теорема 17. Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$. Тогда, если экстремальная функция единственная для номера n , то гипотеза Кшижа справедлива для этого номера n .

Доказательство. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, такой, что функция f , экстремальная в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n , нормирована условиями $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$ и единственна. Имеем

$$f(z) = \{f\}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \{f\}_k z^k + \{f\}_n z^n + \dots$$

Функция

$$g(z) := f(e^{2i\pi/n} z) = \{f\}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \{f\}_k e^{2i\pi k/n} z^k + \{f\}_n z^n + \dots$$

также является экстремальной и нормирована условиями $\{g\}_0 > 0$, $\{g\}_n > 0$. При этом $\{g\}_0 = \{f\}_0$, $\{g\}_k = e^{2i\pi k/n} \{f\}_k$, $k = 1, \dots, n-1$, $\{g\}_n = \{f\}_n$. Следовательно

$e^{2i\pi k/n}\{f\}_k = \{f\}_k$, $k = 1, \dots, n-1$, что возможно если и только если $\{f\}_k = 0$, $k = 1, \dots, n-1$. Осталось только применить теорему 16. ■

В частности, имеет место следующее

Утверждение 13. Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$. Тогда, если экстремальная функция единственная для номера n , то все её коэффициенты действительные.

Доказательство. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, такой, что функция f , экстремальная в проблеме Кшижа для номера n , нормирована условиями $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$ и единственна. Если у экстремальной функции f есть хотя бы один комплексный коэффициент, то $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$ тоже будет экстремальной и притом $f \neq f^*$. ■

Теорема 18. Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция, экстремальная в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, тогда, если все корни полинома H , заданного формулой (34) имеют вид $\zeta_k = e^{i\varphi_k}$, где $\varphi_k \in [0, 2\pi)$ для $k = 1, \dots, n$, то гипотеза Кшижа справедлива для этого номера n .

Доказательство. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, такой, что функция f , экстремальная в проблеме Кшижа для номера n , удовлетворяет всем условиям этой теоремы. Так как все корни полинома H имеют вид $\zeta_k = e^{i\varphi_k}$ для $k = 1, \dots, n$, то есть все они лежат на единичной окружности, а из равенств (41) следует, что $\{f\}_n = 2\{f\}_0$. По теореме 13, если $\{f\}_n = 2\{f\}_0$, то экстремальная функция единственна и, стало быть, это функция $F(-z^n, 1)$, где F задана формулой (22). ■

21 Свойства экстремальной функции, связанные с её значением в нуле

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Наличие выпуклой структуры на множестве всех функций g , подчиненных функции

$$M(z, t) := \frac{e^{-t} + z}{1 + e^{-t}z} = e^{-t} + (1 - e^{-2t})z + \dots$$

позволяет получить оценки $|\{g\}_n| \leq 1 - e^{-2t}$, причём равенство в этом неравенстве достигается только на вращениях $M(z, t)$ в плоскости переменной z .

Каждая функция f класса B_t подчинена мёбиусову отображению $M(z, t)$, стало быть

$$|\{f\}_n| < 1 - e^{-2t} = 1 - |\{f\}_0|^2. \quad (42)$$

Неравенство строгое, так как $M(z, t) \notin B$.

Отметим, что при $t \in [0, 1]$ эта оценка даёт довольно-таки хорошее приближение для предполагаемой верхней границы $|\{f\}_n|$ (гипотеза состоит в том, что $|\{f\}_n| \leq 2te^{-t}$, $f \in B_t$, $t \in [0, 1]$, см. [12]). При $t = 1$ погрешность максимальна и равна $1 - e^{-2} - 2e^{-1} < 0.129$, погрешность монотонно убывает и стремится к нулю при стремлении t к нулю [13].

Оценка (42) позволяет вычислить значение t_0 такое, что

$$|\{f\}_n| < 1 - e^{-2t_0} = 2e^{-1}.$$

Вычисления дают $t_0 = -\ln \sqrt{1-2e^{-1}} \approx 0.665$. Следовательно, если $f \in B$ и $|\{f\}_0| \geq \sqrt{1-2e^{-1}} \approx 0.514$, то справедливы неравенства $|\{f\}_n| < 2/e$.

Из неравенства (32) и оценки (42) вытекает

Следствие 6. *Если f — экстремальная и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, то*

$$2\{f\}_0 \leq \{f\}_n < 1 - \{f\}_0^2.$$

Разрешив неравенство $2\{f\}_0 < 1 - \{f\}_0^2$ из следствия 6 относительно $\{f\}_0$ получим:

Следствие 7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, f — функция экстремальная в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n и $\{f\}_0 > 0$, тогда $\{f\}_0 < \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$ или $t > -\ln(\sqrt{2} - 1) \approx 0.881$, где $t := -\ln\{f\}_0$.*

Из следствия 7 вытекает, что экстремальную функцию нужно искать в классах B_t , $t > -\ln(\sqrt{2} - 1)$. Но $\ln(\sqrt{2} - 1) < 1$, а гипотеза Кшижа утверждает, что $t = 1$. Покажем, как свести поиски экстремальной функции к поискам не обязательно экстремальной функции в классах B_t , $t \geq 1$.

Теорема 19. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Гипотеза Кшижа для номера n верна если и только если в классах B_t , для $t \geq 1$ не существует функция f , такая, что $\{f\}_n = 2e^{-1}$ и $|\{f\}_1| + \dots + |\{f\}_{n-1}| > 0$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный номер $n \in \mathbb{N}$.

Необходимость. Если гипотеза Кшижа для номера n верна, то в силу единственности экстремальной функции очевидно, что функции с указанными свойствами не существуют.

Достаточность. Предположим, что гипотеза Кшижа для номера n не верна. Тогда если f — экстремальная функция, то $\{f\}_n > 2e^{-1}$ в силу теоремы 13 о единственности экстремальной функции.

Если $f \in B$, то $cf \in B$ для всех $0 < c \leq 1$, поэтому возможно два варианта:

1. если $\{f\}_0 > e^{-1}$, то согласно неравенству (32) имеем $\{f\}_n \geq 2\{f\}_0 > 2e^{-1}$ откуда сразу следует, что найдётся положительная константа $c < 1$ такая, что $c\{f\}_n = 2e^{-1}$, а следовательно и $c\{f\}_0 < e^{-1}$;
2. если $\{f\}_0 < e^{-1}$ и $\{f\}_n \geq 2e^{-1}$, то найдётся положительная константа $c < 1$ такая, что $c\{f\}_n = 2e^{-1}$ и $c\{f\}_0 < e^{-1}$. ■

Таким образом, наличие в классе B функции f с $\{f\}_0 < e^{-1}$ и $\{f\}_n = 2e^{-1}$ эквивалентно тому, что гипотеза Кшижа не верна. При этом, например, из равенства (33) ясно, что $|\{f\}_1| + \dots + |\{f\}_{n-1}| > 0$.

Гипотеза Кшижа будет также не верна если в классе B_1 найдётся функция f , такая, что $\{f\}_n = 2\{f\}_0 = 2e^{-1}$ и $|\{f\}_1| + \dots + |\{f\}_{n-1}| > 0$. Из теоремы 13 следует, что f не может быть экстремальной.

22 Линейная инвариантность

Следующий результат [16] является следствием того, что класс B является линейно инвариантным семейством функций.

Теорема 20. Если $n \in \mathbb{N}$ и $f \in B$ — экстремальная функция, то

$$(n+1)\{f\}_{n+1} = (n-1)\overline{\{f\}_{n-1}}.$$

Доказательство. Пусть $\omega(z) := \frac{z+\eta}{1+\bar{\eta}z}$. Так как $f \in B$, то $f_\eta(z) := f(\omega(z)) \in B$, при $\eta \in \Delta$. В окрестности точки $\eta = 0$ имеем $(\omega(z))^m = z^m + mz^{m-1}(\eta - \bar{\eta}z^2) + o(|\eta|)$. Следовательно $f_\eta(z) = f(\omega(z)) = \sum_{m=1}^{\infty} \{f\}_m(z^m + mz^{m-1}(\eta - \bar{\eta}z^2)) + o(|\eta|)$ и

$$\begin{aligned} \{f_\eta\}_n &= \{f\}_n + (n+1)\{f\}_{n+1}\eta - (n-1)\{f\}_{n-1}\bar{\eta} + o(|\eta|) = \\ &= \{f\}_n + ((n+1)\{f\}_{n+1} - (n-1)\overline{\{f\}_{n-1}})\eta + o(|\eta|), \end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{Re} u\bar{v} = \operatorname{Re} \bar{u}v$, для всех $u, v \in \mathbb{C}$. Так как f — экстремальная, то

$$\operatorname{Re} \left(\eta \left((n+1)\{f\}_{n+1} - (n-1)\overline{\{f\}_{n-1}} \right) \right) + o(|\eta|) \leq 0. \quad (43)$$

Неравенство (43) справедливо при любом $\eta \in \Delta$, следовательно, мы можем выбрать число η настолько малым по модулю, что $o(|\eta|)$ перестанет оказывать влияние на знак левой части неравенства (43). Однако, если

$$(n+1)\{f\}_{n+1} \neq (n-1)\overline{\{f\}_{n-1}},$$

то мы можем выбрать число η так, что знак левой части неравенства (43) станет положительным, а это противоречит (43), что и требовалось. ■

При $n = 1$ для экстремальной функции получаем $\{f_\eta\}_1 = \{f\}_1 + 2\{f\}_2\eta + o(|\eta|)$, откуда следует, что $\{f\}_2 = 0$. Действительно $f(z) = F(-z, 1) = e^{-1}(-2z + 2/3z^3 + \dots)$.

Эрмерс в [16] указывает, что функция $F(-z^n, 1)$ удовлетворяет теореме 20. Ясно также, что все $F(-z^n, t)$, $t > 0$ удовлетворяют теореме 20. Существуют и другие функции, удовлетворяющие этому соотношению. Например [16], если n — нечётное число, то любая чётная функция класса B удовлетворяет теореме 20. Более того, если $f \in B$ удовлетворяет теореме 20, то и $cf \in B$ удовлетворяет теореме 20, при $c \in [0, 1]$.

23 Неравенства между коэффициентами

Из предложения (35) и теоремы 9 следует, что $h \in C_1^n$, где

$$h(z) := \frac{H(z)}{\{f\}_n} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\{f\}_{n-k}}{\{f\}_n} z^k,$$

Применив к полиному h теорему 6 сразу получаем следующий результат

Теорема 21. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если f экстремальна и $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, то

$$\frac{|\{f\}_k|}{\{f\}_n} \leq \cos \frac{\pi}{[n/(n-k)] + 2} < 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Этот результат можно уточнить для случая $k < n/2$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а функция f — экстремальная. Рассмотрим её внутреннюю вариацию

$$f_{\varepsilon, \zeta}(z) := f(z)e^{-\varepsilon \frac{1+\zeta z^{n-k}}{1-\zeta z^{n-k}}}, \quad \varepsilon > 0, \quad \zeta \in \overline{\Delta}, \quad k < \frac{n}{2}.$$

Имеем $\{f_{\varepsilon, \zeta}\}_n = \{f\}_n - (\{f\}_n + 2\{f\}_k \zeta)\varepsilon + o(\varepsilon)$. Из того, что f экстремальная следует, что $\operatorname{Re}\{f_{\varepsilon, \zeta}\}_n \leq \{f\}_n$, $\varepsilon > 0$, $\zeta \in \overline{\Delta}$. Если взять достаточно малое значение ε , то становится очевидно, что $\operatorname{Re}(\{f\}_n + 2\{f\}_k \zeta) \geq 0$, $\zeta \in \overline{\Delta}$. То есть функция $h/\{f\}_n \in C_1^n$, где $h(\zeta) := \{f\}_n + 2\{f\}_k \zeta$.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 22. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если функция f экстремальная, $\{f\}_0 > 0$, $\{f\}_n > 0$, то

$$|\{f\}_k| \leq \frac{1}{2}\{f\}_n, \quad k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Отметим, что впервые похожие, результаты с более грубой первой оценкой появились в [17] в неявной форме. В [16] эти результаты присутствуют в явной форме, но также с более грубой первой оценкой.

24 Функции экстремального типа

Теоремы 9, 11 и 19 позволяют дать следующее определение. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Функция f называется функцией экстремального типа в проблеме Кшижа для коэффициента с номером n , если $0 < \{f\}_0 \leq 1$, $\{f\}_n \geq 2/e$, f имеет вид (27), то есть $f := e^{-h}$, где

$$h(z) := \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad 0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_m < 2\pi,$$

$H \in C^n$, где полином H сгенерирован из коэффициентов функции f по формуле (34), то есть $H(z) := \{f\}_n + 2\{f\}_{n-1}z + \dots + 2\{f\}_0 z^n$, и H удовлетворяет равенствам (36), то есть $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$, $k = 1, \dots, m$.

Ясно, что экстремальная функция является функцией экстремального типа.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что если g удовлетворяет неравенству (31), то при любом $t > 0$ функция tg также удовлетворяют этому неравенству. Если h удовлетворяет равенству (33), то при любом $t > 0$ функция th также удовлетворяют этому равенству. Если f — функция экстремальная в проблеме Кшижа, то $cf \in B$, $0 < c < 1$. При этом, хотя cf уже не является экстремальной, для неё тем не менее верны соотношения (31), (32), (33), (35), (36), (41), (19), (20) и теоремы 20, 21 и 22.

Как мы знаем из теоремы 11, неравенство (31) для функций g вида (26) следует из предложения (35), равенство (33) следует из равенств (36). Условие (35), то есть $H \in C^n$ входит в определение, поэтому условие (31) можно исключить. Условие (36) также входит в определение, поэтому условие (33) можно исключить из этого списка.

Мы не знаем чему равно $\{f\}_n$ для экстремальной функции, но мы можем попытаться найти функцию, упомянутую в теореме 19. Нам нужно найти функцию из

$\bigcup_{t \geq 1} B_t$, отличную от $F(-z, t)$ и такую, что $\{f\}_n = 2/e$. Остальные условия можно проверить перед тем, как проверять, что $f \in B$.

Перейдём к конструктивному построению функций экстремального типа при фиксированном $n \in \mathbb{N}$. Один из возможных подходов к решению поставленной задачи заключается в том, чтобы при помощи следствия 4 построить многочлен H , заданный формулой (34). Одна из проблем этого подхода состоит в том, что мы имеем $n+1$ параметр $p_0, \dots, p_n$ на которые наложено условие (41). При больших n подобрать эти параметры так, чтобы найти функцию экстремального типа может быть очень сложно. Кроме того, мы не контролируем нули тригонометрического многочлена $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi})$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Согласно теореме 10 при $m = n$ нули полинома P являются полюсами функции h из определения функции экстремального типа и наоборот. По теореме 8 рассмотрение случая $m = n$ не уменьшает общности, особенно если речь идёт о численных вычислениях.

25 О построении функций экстремального типа I

Лемма 15. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, полином $H \in C^n$ и $\operatorname{Re} H(e^{i\varphi_k}) = 0$ для $k = 1, \dots, m$, причём $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_m < 2\pi$ и

$$H(z) = \{f\}_n + 2\{f\}_{n-1}z + \dots + 2\{f\}_0z^n, \quad \{f\}_0 > 0,$$

где

$$f(z) := e^{-h(z)}, \quad h(z) := \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}.$$

Тогда множители $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, m$, существуют и определяются единственным образом по числам φ_k , $k = 1, \dots, m$, и полиному H .

Доказательство. Полином H сгенерирован из $n+1$ начального коэффициента функции f . Так как $f = e^{-h}$, то мы можем вычислить $n+1$ начальный коэффициент функции h . Составим систему уравнений для определения чисел α_k , $k = 1, \dots, m$:

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k = \{h\}_0, \quad \sum_{k=1}^m \alpha_k e^{ij\varphi_k} = \frac{1}{2}\{h\}_j, \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (44)$$

Матрица коэффициентов этой системы является матрицей Вандермонда и, так как все φ_k попарно различны, то система имеет единственное решение. ■

Предложим подход к поиску функций экстремального типа, опирающийся на теорему 10. Напомним, что рассмотрение случая $m = n$ практически не уменьшает общности по теореме 8.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и f — разыскиваемая функция. Напомним, что в общем случае все корни P лежат вне Δ и многочлен P связан с полиномом H формулой $\operatorname{Re} H(z) = |P(z)|^2$, $z \in \partial\Delta$, а H сгенерирован из коэффициентов функции f по

формуле (34). Так как $\{f\}_n > 0$, то $\psi_0 \geq 1$, а поскольку P определён единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы, то мы можем считать, что $p_n > 0$, откуда сразу получаем, что $p_0 > 0$ (см. пункт 8). Ясно, что f удовлетворяет неравенству (32) по построению, а корни полинома H удовлетворяют условиям (41), (19), (20) также по построению.

1. По утверждению 9 корни многочлена P , лежащие на $\partial\Delta$ совпадают с нулями функции $\operatorname{Re} H$ на $\partial\Delta$, поэтому мы построим многочлен P по его предварительно заданным корням $z_1, \dots, z_n$ ($z_k := e^{-i\varphi_k}$, $k = 1, \dots, n$, $0 \leq \varphi_1 \leq \dots \leq \varphi_n < 2\pi$), лежащим на $\partial\Delta$

$$P(z) = p_n \Psi(z) = p_n(\psi_0 + \dots + \psi_n z^n) = p_n \prod_{k=1}^n (z - z_k),$$

чтобы найти числа $\psi_0, \dots, \psi_n$. Заметим, что $p_k = p_n \psi_k$, $k = 1, \dots, n$, а $\psi_0 = \psi_n = 1$.

2. По следствию 4

$$\{f\}_{n-k} = p_n^2 \sum_{j=0}^{n-k} \psi_{j+k} \overline{\psi_j}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (45)$$

Ясно также, что $\{f\}_n > 0$ и $\{f\}_0 > 0$. Поскольку $\psi_0 = \psi_n = 1$, то $p_0 = p_n > 0$ и $\{f\}_0 = p_n^2$ по формуле (45). Введём параметр $t > 0$ при помощи равенства $\{f\}_0 = e^{-t}$ ($e^{-t} = p_n^2$), как это было сделано при введении классов B_t в пункте 13.

3. Используя формулу (45), получаем отрезок ряда Тейлора для функции f :

$$f(z) = e^{-t} (\psi_n \overline{\psi_0} + (\psi_{n-1} \overline{\psi_0} + \psi_n \overline{\psi_1})z + \dots + (|\psi_0|^2 + \dots + |\psi_n|^2)z^n + o(z^n))$$

или, если учесть, что $\psi_0 = \psi_n = 1$

$$f(z) = e^{-t} + e^{-t}(\psi_{n-1} + \overline{\psi_1})z + \dots + e^{-t}(2 + |\psi_1|^2 + \dots + |\psi_{n-1}|^2)z^n + o(z^n).$$

4. Определим коэффициенты $\{h\}_k$, $k = 0, \dots, n-1$ функции h , используя связь $h := -\ln f$. Функцию h будем искать в виде

$$h(z) := \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{1 + e^{i\varphi_k} z}{1 - e^{i\varphi_k} z}.$$

По лемме 15 множители $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$, существуют и определяются по числам $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_n < 2\pi$ и коэффициентам $\{h\}_k$ единственным образом.

Заметим, что решение системы линейных уравнений (44) можно выписать в явной форме, например, при помощи метода Крамера.

В качестве примера применения нашего алгоритма рассмотрим случай $n = 2$.

Лемма 16. Пусть $f = e^{-h}$ и $\{f\}_2 > 0$, где

$$h(z) := \alpha_1 \frac{1 + e^{i\varphi_1} z}{1 - e^{i\varphi_1} z} + \alpha_2 \frac{1 + e^{i\varphi_2} z}{1 - e^{i\varphi_2} z}, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi.$$

Тогда $\{f\}_2 \leq 2/e$.

Доказательство. Пусть f — экстремальная функция. Тогда $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$ и $\psi_0 = 1$, откуда $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi$. Если $\varphi_1 = 0$, то и $\varphi_2 = 0$, а если $\varphi_1 = \pi$, то и $\varphi_2 = \pi$, что не удовлетворяет наложенным на числа $\varphi_{1,2}$ условиям (функция h вырождается до суммы из одного слагаемого). Таким образом получаем, что $\varphi_1 \in (0, \pi)$, $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$.

Далее, $P(z) = e^{-t}(z - e^{i\varphi_1})(z - e^{-i\varphi_1}) = e^{-t}(1 - 2\cos\varphi_1 z + z^2)$, то есть $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = -2\cos\varphi_1$, $\psi_2 = 1$.

Следовательно, $\{f\}_0 = e^{-t}$, $\{f\}_1 = -4e^{-t}\cos\varphi_1$, $\{f\}_2 = e^{-t}(2 + 4\cos^2\varphi_1)$. Откуда $\{h\}_0 = t$, $\{h\}_1 = \{f\}_1/\{f\}_0 = 4\cos\varphi_1$.

Система уравнений (44) для определения α_1 и α_2 :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = t, \\ \alpha_1 e^{i\varphi_1} + \alpha_2 e^{-i\varphi_1} = 2\cos\varphi_1. \end{cases}$$

Решив систему получаем

$$\alpha_{1,2} = \frac{t}{2} \pm \frac{i}{2}(t-2)\operatorname{ctg}\varphi_1.$$

Ясно, что $\alpha_{1,2} > 0$ если и только если $(t-2)\cos\varphi_1 = 0$.

Решения $t = 2$, $\varphi_1 \in (0, \pi)$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ отбрасываем, так как

$$h(z) = \frac{1 + e^{i\varphi_1}z}{1 - e^{i\varphi_1}z} + \frac{1 + e^{-i\varphi_1}z}{1 - e^{-i\varphi_1}z} = 2\frac{1 - z^2}{1 - 2\cos\varphi_1 z + z^2}$$

и $\{f\}_2 = (2/e)^2 < 2/e$.

Итак, $t > 0$, $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = 3\pi/2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = t/2$ и

$$h(z) = \frac{t}{2} \frac{1 + iz}{1 - iz} + \frac{t}{2} \frac{1 - iz}{1 + iz} = t \frac{1 - z^2}{1 + z^2}.$$

Следовательно, $\{h\}_1 = 0$, откуда $\{f\}_1 = 0$. Применив теорему 16 получим, что $t = 1$. Следовательно, так как $\{f\}_2 = e^{-t}(2 + 4\cos^2\varphi_1)$, где $t = 1$, а $\varphi_1 = \pi/2$, то $\{f\}_2 = 2/e$. ■

Теорема 23. *Гипотеза Кшижа справедлива при $n = 2$.*

Доказательство. По теореме 8 множество функций $f = e^{-h}$ с $\{f\}_2 > 0$, где

$$h(z) := \alpha_1 \frac{1 + e^{i\varphi_1}z}{1 - e^{i\varphi_1}z} + \alpha_2 \frac{1 + e^{i\varphi_2}z}{1 - e^{i\varphi_2}z}, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi,$$

плотно во множестве функций $u = e^{-v}$ с $\{u\}_2 > 0$, где

$$v(z) := \alpha_1 \frac{1 + e^{i\varphi_1}z}{1 - e^{i\varphi_1}z} + \alpha_2 \frac{1 + e^{i\varphi_2}z}{1 - e^{i\varphi_2}z}, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi.$$

Последнее множество функций согласно следствию 3 содержит в себе экстремальную в проблеме Кшижа функцию для случая $n = 2$. Поскольку $\{f\}_2 \leq 2/e$ по лемме 16, то гипотеза Кшижа верна при $n = 2$. ■

Уже при $n = 3$ вычисления, в общем случае, становятся очень громоздкими. Так как на классе B^r экстремальная функция f имеет действительные коэффициенты, то по теореме Рисса-Фейера (теорема 2) полином P имеет действительные коэффициенты. Поэтому, если $z_1 = e^{i\varphi_1}$, $z_2 = e^{i\varphi_2}$, $z_3 = e^{i\varphi_3}$, где $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < 2\pi$ его корни, то из условия $\psi_0 = 1$, то есть $z_1 z_2 z_3 = -1$ следует, что $z_2 = -1$ и $z_1 = \bar{z}_3$. Вычисления, проведённые по аналогии с вычислениями из доказательства леммы 16 дают $\alpha_{1,2,3} > 0$ если и только если $\cos \varphi_1 = 1/2$ или $t = 5/2 - \cos \varphi_1$. Проверка показывает, что второй вариант не даёт экстремальную функцию, а первый приводит к решению $\alpha_{1,2,3} = t/3$. Применив теорему 16 получим, что $t = 1$ и, следовательно $\{f\}_3 = 2/e$.

Таким образом, имеет место

Теорема 24. *Если экстремальная функция имеет действительные коэффициенты, то Гипотеза Кишижа справедлива при $n = 3$.*

Итак, даже при $n = 3$ для облегчения выкладок пришлось наложить на экстремальную функцию дополнительные ограничения. Поэтому для $n \geq 3$ целесообразно проводить численные расчёты.

26 О построении функций экстремального типа II

Рассмотрим ещё один подход к поиску функций экстремального типа, опирающийся на теорему 10. Упомянем, ещё раз, что рассмотрение случая $m = n$ не уменьшает общности в силу теоремы 8. Также мы будем опираться на теорему 19, поэтому в этом пункте считаем, что $t > 1$.

1. Напомним, что $\operatorname{Re} H(z) = |P(z)|^2$, $z \in \partial\Delta$ и все корни P лежат вне Δ . Согласно утверждению 9 корни многочлена P , лежащие на $\partial\Delta$ совпадают с нулями функции $\operatorname{Re} H$ на $\partial\Delta$, поэтому строим многочлен P по его корням $z_1, \dots, z_n$, лежащим на $\partial\Delta$ ($z_k := e^{-i\varphi_k}$, $k = 1, \dots, n$, $0 \leq \varphi_1 \leq \dots \leq \varphi_n < 2\pi$)

$$P(z) = p_n \Psi(z) = p_n (\psi_0 + \dots + \psi_n z^n) = p_n \prod_{k=1}^n (z - z_k),$$

чтобы найти числа $\psi_0, \dots, \psi_n$. Введя обозначение

$$c := |\psi_0|^2 + \dots + |\psi_n|^2,$$

мы получим p_k с необходимым нам свойством $|p_0|^2 + \dots + |p_n|^2 = 2/e$ по формуле

$$p_k := \sqrt{\frac{2}{ce}} \psi_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Так как $\{f\}_n > 0$, то $\psi_0 \geq 1$, а поскольку P определён единственным образом с точностью до унимодулярной мультипликативной константы, то мы можем считать, что $p_n > 0$, откуда сразу получаем, что $p_0 > 0$ (см. пункт 8).

2. Используя теорему 3 строим многочлен H , заданный формулой (34):

$$H(z) := h_0 + 2 \sum_{k=1}^n h_k z^k = \{f\}_n + 2 \sum_{k=1}^n \{f\}_{n-k} z^k, \quad h_0 = \{f\}_n = \frac{2}{e}, \quad h_n = \{f\}_0 > 0,$$

где f — функция, которую мы строим. Согласно следствию 4

$$\{f\}_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} p_{j+k} \overline{p_j}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (46)$$

Ясно, что неравенство (32) выполняется по построению. Заметим, что корни полинома H должны удовлетворять условиям (41), (19), (20) также по построению.

3. Используя формулу (46) с учётом теоремы 20, получаем отрезок ряда Тейлора для функции f :

$$\begin{aligned} f(z) &= p_n \overline{p_0} + (p_{n-1} \overline{p_0} + p_n \overline{p_1})z + \dots + (p_1 \overline{p_0} + \dots + p_n \overline{p_{n-1}})z^{n-1} + \\ &+ \frac{2}{e} z^n + \frac{n-1}{n+1} \overline{(p_1 \overline{p_0} + \dots + p_n \overline{p_{n-1}})} z^{n+1} + o(z^{n+1}). \end{aligned}$$

4. Условия (32), (35), (36), (41), (19), (20), а также условия теорем 20 и 21 выполнены по построению. Если f удовлетворяет теореме 22, то проверяем, что $f \in \bigcup_{t \geq 1} B_t$, то есть отрезок ряда Тейлора функции $h := -\ln f$ удовлетворяет критерию Каратеодори-Тёплица (теорема 7). Если f удовлетворяет теореме 19, то гипотеза Кшижа не верна.

Если существование функции f , опровергающей гипотезу Кшижа будет доказано при помощи этого алгоритма, то пример такой функции можно построить в виде продолжения полинома $\{f\}_0 + \{f\}_1 z + \dots + \{f\}_{n+1} z^{n+1}$ до функции класса B . О продолжении полиномов см. [19, 20].

В качестве примера использования представленного алгоритма докажем теорему 23 другим способом.

Пусть f — функция экстремального типа. Тогда $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$ и $\psi_0 = 1$, откуда $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi$. Таким образом получаем, что $\varphi_1 \in (0, \pi)$, $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$.

Далее, $P(z) = \sqrt{\frac{2}{ce}} (z - e^{i\varphi_1})(z - e^{-i\varphi_1}) = \sqrt{\frac{2}{ce}} (1 - 2 \cos \varphi_1 z + z^2)$, то есть $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = -2 \cos \varphi_1$, $\psi_2 = 1$, а $c = |\psi_0|^2 + |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 2(1 + 2 \cos^2 \varphi_1)$.

Следовательно, $\{f\}_0 = e^{-1}(1 + 2 \cos^2 \varphi_1)^{-1}$, $\{f\}_1 = -4 \cos \varphi_1 e^{-1}(1 + 2 \cos^2 \varphi_1)^{-1}$, $\{f\}_2 = 2e^{-1}$. Откуда получаем, что $\{h\}_0 = 1 + \ln(1 + 2 \cos^2 \varphi_1)$, $\{h\}_1 = 4 \cos \varphi_1$, $\{h\}_2 = -2(1 - 2 \cos^2 \varphi_1)$.

Применим критерий Каратеодори-Тёплица (теорема 7). Для этого вычислим миноры M_k , $k = 0, 1, 2$,

$$\begin{aligned} M_0 &= 2(1 + \ell), \\ M_1 &= 4(\ell^2 + 2\ell - 2\mathfrak{c} + 1), \\ M_2 &= 8(\ell^2 + (1 + \mathfrak{c})\ell - 3\mathfrak{c}^2)(\ell - \mathfrak{c} + 2), \end{aligned}$$

где $\mathfrak{c} := 2 \cos^2 \varphi_1$, $\ell := \ln(1 + \mathfrak{c})$. Миноры M_0 и M_1 положительны при любом φ_1 , а вот $M_2 = 0$ только при $\varphi_1 = \pi/2$ и отрицателен при остальных значениях φ_1 .

Итак, мы доказали, что при $n = 2$ не существует функции $f \in B$, удовлетворяющей теореме 19 поэтому гипотеза Кшижа справедлива при $n = 2$.

При $n = 3$ формулы усложняются, поэтому для $n \geq 3$ целесообразно проводить численные расчёты.

Список литературы

- [1] Fejér L. Über trigonometrische Polynome. // J. Reine Angew. Math. 1916. I. 146. P. 53–82.
- [2] Riesz F. Über ein Problem des Herrn Carathéodory. // J. Reine Angew. Math. 1916. I. 146. P. 83–87.
- [3] Hussen A., Zeyani A. Fejer-Riesz Theorem and Its Generalization. // IJSRP. 2021. V. 11. I. 6.
- [4] Rovnyak J. Fejér-Riesz theorem. Encyclopedia of Mathematics. Springer Verlag GmbH, EMS.
- [5] Tsuji M. Potential theory in modern function theory. Chelsea Pub. Co. N.Y. 1975.
- [6] Александров И. А. Конформные отображения односвязных и многосвязных областей. Издательство Томского университета. Томск. 1976.
- [7] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.
- [8] Levin V. I. Lösing der Aufgabe 163. // Jahresber. DM. 1934. V. 44. N. 2. P. 80–81.
- [9] Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture. // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. V. 48. P. 169–192.
- [10] Samaris N. A proof of Krzyz’s conjecture for the fifth coefficient. // Compl. Var. Theory and Appl. 2003. V. 48. P. 753–766.
- [11] Ступин Д. Л. Один метод оценки модулей тейлоровских коэффициентов подчинённых функций. // Вестник ВГУ. Физика. Математика. 2024. Вып. 2. С. 71–84.
- [12] Ступин Д. Л. 2023. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций. Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 98–120. DOI: 10.20310/2686-9667-2024-29-145-98-120 EDN: FWRLMA
- [13] Ступин Д. Л. Доказательство гипотезы Кшижа в некоторых подклассах. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2006. С. 49–50.
- [14] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.
- [15] Maria J. Martin, Eric T. Sawyer, Ignacio Uriarte-Tuero, Dragan Vukotic. The Krzyz conjecture revisited. // Advances in Mathematics. 2015 V. 273. P. 716–745.
- [16] Ermers R. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Wibro Dissertatiedrukkerij. Helmond. 1990.

- [17] Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // *J.d'Analyse Mathématique* 1977. V 31. P. 169–190.
- [18] Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion. // *Rendiconti Circ. Mat. di Palermo*. 1911. V. 32. P. 193–217.
- [19] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщённый круг и задача Каратеодори-Фейера. // *Применение функционального анализа в теории приближений*. Тверь. 2012. С. 45–74.
- [20] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для ограниченных функций и ее приложения // *Вестник российских университетов. Математика*. 2023. Т. 28. № 143. С. 277–297.
- [21] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука. 1969. 576 с.
- [22] Prokhorov D. V., Szynal J. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions // *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math.* 1981. V. 29. N. 5–6. P. 223–230.
- [23] Ступин Д. Л. Точная оценка третьего коэффициента для ограниченных не обращающихся в нуль голоморфных функций с действительными коэффициентами // *Вестник российских университетов. Математика*. 2025. Т. 30. № 149. С. 79–92.
- [24] Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions // *Compl. Var.* 1992. V. 17. N. 3–4. P. 213–222.
- [25] Ступин Д. Л. Гипотеза Кшижа и выпуклые однолистные функции // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27. № 1. С. 81–96.
- [26] Horowitz C. Coefficients of nonvanishing functions in H^∞ // *Israel J. Math.* 1978. V. 30. P. 285–291.
- [27] Peretz R. Some properties of extremal functions for Krzyz problem // *Compl. Var.* 1991. V. 16. N. 1. P. 1–7.
- [28] Krushkal S. L. Two Coefficient Conjectures for Nonvanishing Hardy Functions, I // *J. Math. Sci.* 2022. V. 268. P. 199–221.
- [29] Kortram R. A. Coefficients of bounded nonvanishing functions. Dep. Univ. Nijmegen. 1992.
- [30] Kortram R. A. Coefficients of bounded nonvanishing functions // *Indag. Math. New Ser.* 1993. V. 4. N. 4. P. 471–478.
- [31] Kiepiela K., Pietrzyk M., Szynal J. Meixner polynomials and nonvanishing holomorphic functions // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2001. V. 133. N. 1–2. P. 423–428.
- [32] Ganczar A., Michalska M., Szynal J. The conjecture parallel to the Krzyz conjecture // *Demonstratio Math. Warsaw Technical University Institute of Mathematics*. 2003. V. 36. N. 1. P. 65–75.

-
- [33] Peretz R. The Krzyz Problem and Polynomials with Zeros on the Unit Circle // *Compl. Var.* 2002. V. 47. N. 3. P. 271–276.
- [34] Peretz R. *The Krzyz Conjecture Theory and Methods*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2021. 620 p.
- [35] Agler J., McCarthy J. E. The Krzyz Conjecture and an Entropy Conjecture // *J. d'Analyse Mathématique*. 2021. V. 144. P. 207–226.
- [36] Ступин Д. Л., Шеретов В. Г., Доказательство локальной гипотезы Кшижа. // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. Тверь. 2005. № 6(12). С. 122–125.
- [37] Carathéodory C. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen // *Mathematische Annalen*. 1907. V. 64. P. 95–115.
- [38] Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion // *Rendiconti Circ. Mat. di Palermo*. 1911. V. 32. P. 193–217.
- [39] Töplitz O. Über die Fouriersche Entwicklung Positiver Funktionen // *Rendiconti Circ. Mat. di Palermo*. 1911. V. 32. P. 191–192.
- [40] Kulkarni D., Schmidt D., Tsui S. K. Eigenvalues of tridiagonal pseudo-Toeplitz matrices // *Linear Algebra and its Applications*. 1999. V. 297. N. 1–3 P. 63–80.
- [41] Yueh W. C. Eigenvalues of several tridiagonal matrices // *Applied Mathematics E-Notes*. 2005. V. 5. P. 66–74.