

Новые результаты полифинитного анализа

Алексей Торгашин

Date: 31 декабря 2025 г.

Аннотация

В статье изложены новые результаты полифинитного анализа: в первом параграфе дано экзистенциальное и одновременно формализованное обоснование реальности бесконечного, опровергнуто (контрпример) определение бесконечности по Дедекинду, в том числе на примере $\arctg(x)$, дается решение парадокса Рассела; во втором параграфе изложены свойства чисел π и e , и дано доказательство их алгебраической независимости.

Содержание

1	Введение	2
2	Что такое бесконечность и почему она существует	3
2.1	Свойство Кантора-Дедекинда	3
2.2	Конечные номера бесконечных списков	9
2.3	Тройной софизм	11
2.4	Почему существует бесконечность	14
2.5	Больше чем доказательство	20
2.6	Парадокс возможного	21
2.7	Парадокс Рассела	22
2.8	Формальное и эмпирическое	25
3	Цифровое представление	27
3.1	Свойства π	27
3.2	Свойства e	29
3.3	Алгебраическая независимость π и e	32

1 Введение

Эта статья предваряет второе издание монографии «Полифинитный анализ и основания математики» [Торгашин, 2020] (исправленное, существенно переработанное и дополненное) в неопубликованной части. Книга, по сути, является уже другой работой и выйдет под заголовком «Конечное о бесконечном». Здесь в двух главах представлены разные результаты, которые объединены только большой темой («объектом», а не «предметом» исследования). В первом параграфе дается эмпирическая предметная область теории бесконечности в широком смысле, пригодная не только для полифинитного анализа (ПФА), но и для любой ее теоретической рецепции. Во втором - значимые результаты ПФА в теории чисел. Первое издание содержало только аксиоматику и формальное понимание бесконечности, в экзистенциальной части ровно настолько, сколько дает увидеть формализм. С тех пор очень многое изменялось. Была издана книга «Язык и реальность» [Лысенко, Торгашин, 2025], написание которой привело к изменению самой идеи формального и абстрактного. В ней была дана теорема о фундаментальной эмпирической неопределенности, к сожалению, в не до конца формализованном виде («для гуманитариев») и не совсем верно названная «прагматической теоремой Геделя». По своему содержанию и способу доказательства это другая теорема. Этот пробел в ближайшее время будет исправлен как раз в «Конечное о бесконечном». Прежде всего абстрактное теперь понимается нами не как предельно обобщенное, а как поддающееся буквальной интерпретации при любом использовании. Например, углы при основании равнобедренного треугольника окажутся равными, будь это хоть пластиковые детали детской площадки или хоть титановые элементы космического корабля. Парадокс Рассела возник из-за нарушения такой буквальности: определение «нормального» множества меняло свое определение при его построении. Это будет опубликовано уже здесь.

Такое видение приводит к существенным методологическим последствиям, а именно не имеет смысла бездумное стремление к «максимально общим условиям», обобщение должно быть не предельным, а адекват-

ным. Это избавляет от синтаксической заботы о разделении на множества и классы, все такие разделения происходит на уровне смысла, а где смысла нет - исследовать нельзя. В этой части мы солидарны с интуиционизмом. Вдобавок ПФА построен так, что определить «множество множеств» - нетривиальная и очень сложная задача, любое множество - это число на полифинитной Оси. Нечисловые множества (расселовские «носки» и т.п.) могут быть только конечными, «абстрактные» из них так или иначе «замешаны на алефах» и «вещами» быть не могут. Для любой теории необходим остенсионал, экзистенциальная предметная область. Мы не назвали ее экзистенционалом из-за того, что она, вообще говоря, может быть неопределима без указания, и слово экзистенциал уже занято.

Теперь можно обозначить тему первого параграфа. В нем происходит построение остенсионала теории бесконечности. Во втором параграфе даются свойства чисел π и e , которые следуют из ПФА, в том числе их алгебраическая независимость. Особенность ПФА в том, что он дает развернутую цифровую нотацию бесконечных чисел, иногда позволяющую вычислять значение разрядов на инфрафинитном отрезке. Ничего этого в первом издании не было и в какой-то степени мотивация теории была непонятна, книга оказалась похожа на компьютер без монитора. Здесь мы даем самую главную часть этого «монитора». Вдобавок изданная в ковидной год, она содержит значительное число опечаток, технических и даже смысловых ошибок, например, в интерпретации множества Витали аксиоматика Лебега рассмотрена, как «незначительная подробность». Эти ошибки связаны с болезнью роста, и мы начинаем их исправлять.

2 Что такое бесконечность и почему она существует

2.1 Свойство Кантора-Дедекинда

В одной из предыдущих работ [Торгашин, 2025a] была установлена неопределенность, приводящая к парадоксу биективного отображения бесконечного множества на собственное бесконечное подмножество, и было обещано продолжение.

Чтобы двигаться дальше, нам придется воспроизвести теорему Дедекинда.

Определение 2.1. Множество X называется *бесконечным по Дедекинду*, если оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству. То есть существует биекция $f : X \mapsto Y$, где $Y \subset X$.

Теорема 2.1 (Дедекинд). При условии однозначности канторовой нумерации: множество A бесконечно тогда и только тогда, когда существует биекция на его собственное подмножество.

Доказательство. Пусть A — бесконечное множество. Построим явную биекцию $f : A \mapsto A \setminus \{a_0\}$.

Шаг 1: Выделение счётного подмножества

Так как A бесконечно, мы можем выбрать последовательность различных элементов:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \in A$$

Обозначим $N = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} \subseteq A$.

Шаг 2: Определение отображения на N

Определим сдвиг на N :

$$g : N \mapsto N \setminus \{a_0\}, \quad g(a_n) = a_{n+1} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}$$

Шаг 3: Распространение на всё множество A

Определим $f : A \mapsto A \setminus \{a_0\}$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = a_{n+1}, & \text{если } x = a_n \in N \\ x, & \text{если } x \in A \setminus N \end{cases}$$

Шаг 4: Проверка биективности

• **Инъективность:** Если $f(x) = f(y)$, то:

- Если оба образа в $N \setminus \{a_0\}$ — следует $x = y$ из инъективности g
- Если оба образа в $A \setminus N$ — тогда $x = y$
- Случай разных частей невозможен, так как $f(N) \subseteq N \setminus \{a_0\}$ и $f(A \setminus N) \subseteq A \setminus N$

• **Сюръективность** на $A \setminus \{a_0\}$:

- Для $y \in N \setminus \{a_0\}$: $y = a_{n+1} = f(a_n)$
- Для $y \in A \setminus N$: $y = f(y)$
- Элемент a_0 не имеет прообраза, что соответствует $A \setminus \{a_0\}$

Таким образом, f — биекция между A и его собственным подмножеством $A \setminus \{a_0\}$. $\square$

Визуализация отображения:

$$\begin{array}{cccccccc} A : & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_1 & x_2 & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ f(A) : & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x_1 & x_2 & \cdots \end{array}$$

Предложение 2.1. В теореме Дедекинда образ не является подмножеством прообраза.

Доказательство. Рассмотрим функцию, определенную на двух множествах:

$$IS_{\text{inside}}(X, Y) = \begin{cases} 0, & \text{если } Y \not\subseteq X; \\ 1, & \text{если } Y \subseteq X \end{cases}$$

Обозначим множество из элементов $\{a_0, a_1\}$ теоремы 2.1 как N_1 , $\{a_0, a_1, a_2\}$ как N_2 , $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ как N_n .

Соответственно, $A_n = (A \setminus N) \cup N_n$.

Очевидно, $IS_{\text{inside}}(A_n, A_{n+1} \setminus \{a_0\}) = 0$ при отображении

$$\begin{array}{cccccccc} A_n : & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & x_1 & x_2 & \cdots \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ f(A_n) = A_{n+1} : & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x_1 & x_2 & \cdots \end{array}$$

Из определения Дедекинда 2.1 следующий предел должен быть таким:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} IS_{\text{inside}}(A_n, A_{n+1} \setminus \{a_0\}) = IS_{\text{inside}}(A, A) = 1,$$

поскольку $A \setminus \{a_0\} \subset A$ и A_n сходится к A («в бесконечности сдвиг индекса значения не имеет»).

Однако,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} IS_{\text{inside}}(A_n, A_{n+1} \setminus \{a_0\}) = 0$$

как предел стационарной последовательности, каждый элемент которой равен 0.

□

Сохранить критерий Дедекинда не представляется возможным, искусственное сохранение нецелесообразно и приведет только к путанице. Переход к элементу за пределы множества одинаково возможен как для бесконечных, так и для конечных совокупностей, например, эта диаграмма структурно отличается от аналогичной с бесконечными a_n не более чем самой бесконечностью:

$$\begin{array}{cccc} A_n : & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(A_n) = A_{n+1} : & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}$$

Незаметный переход к большей бесконечности в теории множеств - явление обыденное.

Определение 2.2. Назовём референцией (ссылкой) на элемент при отображении $f(A) = B$ отображение элемента a на элемент b , если $a \in A$, $b \in B$ и $f(a) = b$.

Пример 2.1. Пусть U - универсальное множество, которое содержит буквально «всё», оно максимально по мощности, тогда каким будет $P(U)$ - множество всех его подмножеств? В силу элементарной теоремы, $\text{Card}(U) < \text{Card}(P(U))$. Однако $P(U) \in U$ по начальному условию, U определено как множество, которое содержит «всё». Обычно здесь видят противоречие и не обращают внимание, что термин «всё» не определён до конца и предполагает внешнюю конструктивную референцию, необходимым условием которой является наличие элемента для ссылки.

Определение множества U как универсального фиксирует состояние до включения в целокупность множества $P(U)$. Возникает ситуация как при складском учете, где материальные ценности делятся на оприходованные и неоприходованные. Для лучшего запоминания возьмем этот фактурный термин.

Будем обозначать неоприходованные множества без подстрочного индекса, а оприходованные - с ним в порядке построения. Первое $P(U)$ запишется как U_1 , $P(U_1) = U_2$. U_1 универсально для своей иерархии подчиненных совокупностей. U (сознательно без индекса) содержит ссылку на $P(U)$, реализуя пример вынужденной референции за пределы множества.

Если мы объявим максимальным уже $P(U_n)$, ссылка за его пределы неминуемо возникает уже для него.

Это второй пример одного и того же явления, просто в примере Дедекинда референция вовне оказывалась латентной. Поскольку это свойство имеет двойное авторство, его имеет смысл называть свойством Кантора-Дедекинда.

Лемма 2.1. Пусть заданы две последовательности:

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \arctg \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого конечного набора значений $y_{n_1}, y_{n_2}, \dots, y_{n_k}$ найдётся такой номер $m \in \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, что

$$y_m < \min\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}\}.$$

Доказательство. Заметим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$0 < y_n = \arctg \frac{1}{n} < \frac{1}{n} = x_n,$$

поскольку $\arctg t < t$ при $t > 0$.

Пусть $\varepsilon = \min\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}\} > 0$. Выберем натуральное m так, чтобы

$$\frac{1}{m} \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$y_m < \frac{1}{m} \leq \varepsilon = \min\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}\},$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 2.2. Область значения $\arctg(x)$ не является подмножеством его области определения.

Доказательство. Пусть $\{arctg(x)\} \subset \{x\} \Rightarrow \{arctg(\frac{1}{n})\} \subset \{\frac{1}{n}\}$.

Однако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} IS_{\text{inside}}(\frac{1}{n}, arctg(\frac{1}{n})) = 0,$$

что противоречит допущению. $\square$

Таким образом, несмотря на графическую принадлежность одной области $\{arctg(x)\}$ - не подмножество $\{x\}$.

И это не парадокс, а фундаментальное свойство бесконечных множеств, открытое Кантором и исследованное Дедекиндом с некорректной интерпретацией.

Об этом можно было догадаться раньше и независимо от теоремы 2.2. В любом случае $\{arctg(x)\} \subset \{x\}$ имеет заявку на правоту только при отождествлении числовых значений с «точками», и эта метафора никогда не была конструктивной. «Точечный» рост $arctg(x)$ вообще не имеет смысла и выражения в виде производной.

Свойство Кантора-Дедекинда предполагает конструктивный субстрат, то есть выход за пределы формально определенного множества, как это было на примере парадокса Кантора, теоремы Дедекинда и арктангенса. Этот субстрат всегда необходим, его отсутствие противоречит основным определениям.

Отчего так произошло? В ракурсе конечных множеств бесконечные множества - «одинаковы». По этой же причине возникло представление об уникальной счетной мощности. Исключение - $2^{\aleph_0}$, из-за разительной дистинкции в определении оно различимо «с Земли». Просто теория множеств не ставила своей целью детализацию на основе конечных свойств бесконечных множеств. Отождествление $\mathbb{N}$ со «всеми числами» было наивностью, и почему в нашем случае это кого-то удивляет, если «наивность» - титульное свойство этой теории?

В работе «Два новых парадокса теории множеств Кантора» [Торгашин, 2025a] была доказана принципиальная невозможность биекции множества на собственное подмножество даже в случае их бесконечности. Эта теорема была сильнее, чем примеры с биекцией Дедекинда и арктангенсом, обобщения не были сделаны по нематематическим причинам. На самом деле это никакие не парадоксы, а свидетельства незавершенности канторова проекта, который преждевременно стали фиксировать в жестких аксиоматиках. Однако даже в таком виде мы считаем

новый вариант теории канторовым, основные идеи остаются, бесконечные множества становятся более разнообразными и больше похожи на конечные. В полифинитном анализе вместо арифметики алефов, точнее наряду с ней в другом виде, возникает арифметика «обычных», но бесконечных чисел в виде последовательности вложенных полей, что сближает ее с анализом Робинсона. Однако у него построение исключительно аксиоматическое, у нас - экзистенциальное и аксиоматическое, как у геометрии.

2.2 Конечные номера бесконечных списков

Сказать, что диагональная (загагообразная) нумерация Кантора [Александров, 2008, с.18-23], неубедительна и необоснованна - ничего не сказать. Она не существует даже в виде синтаксического тела логического вывода. В конце этого параграфа мы убедимся что риторика этого аргумента целиком основана на иллюзии, даже если бесконечные множества существуют.

В «классическом» представлении все нумерации (упорядоченное множество номеров) бесконечных списков имеют одну и ту же мощность. Достаточно показать, что это не так.

Возьмем канторовскую нумерацию зигзагом zz , как на рисунке:

Рассмотрим два любые упорядоченные по возрастанию списка обыкновенных дробей с разными знаменателями. Например, первый - со знаменателем 2, второй - со знаменателем 3. Для простоты будем считать дроби $\frac{m}{n} = \frac{l}{k}$, где $n \neq k$, - разными,

$$A = [\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2} \dots] \text{ и}$$

$$B = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \dots].$$

Отобразим элементы списка A , кроме $\frac{1}{2}$, на себя. Отобразим $\frac{1}{2}$ на первый элемент второго списка $\frac{1}{3}$. Пронумеруем элементы образа натуральными числами слева направо, начиная с $\frac{2}{2}$ и заканчивая $\frac{1}{3}$ как последним элементом. Такая конструкция может быть реализована предельным переходом от конечных к бесконечной последовательности дробей со знаменателем 2.

Определим дискретное расстояние на элементах образа с метрикой

$$d_k(x, y) = |N_k(x) - N_k(y)|,$$

где $N_k(x)$ - номер элемента x слева направо в объединённой нумерации, включающей $k - 1$ дробей со знаменателем 2.

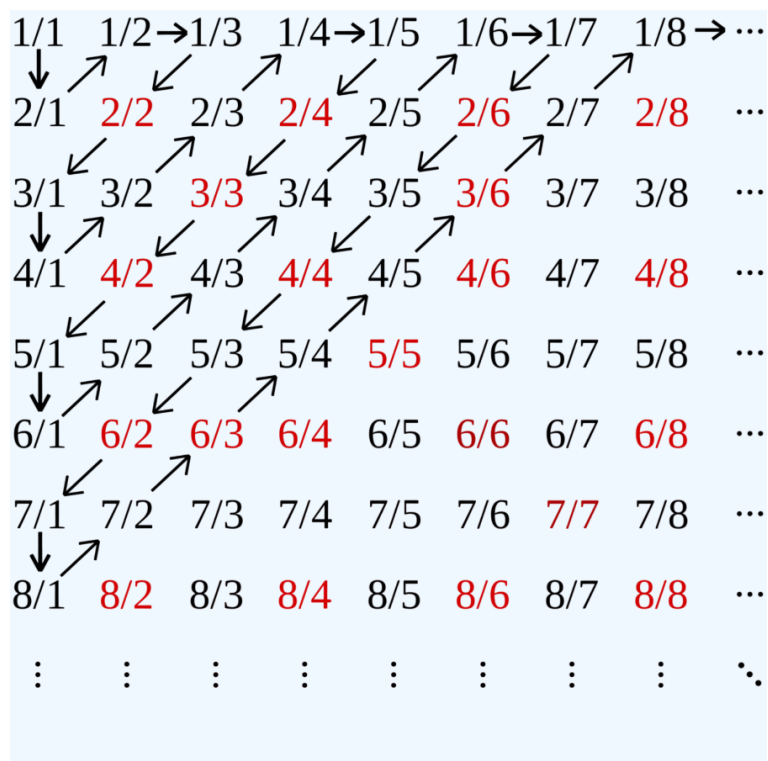


Рис. 1: Диагональная (зигзагообразная) нумерация Кантора, функция $zz(\mathbb{Q})$.

Такая биекция существует для любого k . Для любого числа элементов каждая дробь в первом списке имеет конечный натуральный номер; тогда, по Кантору, между $N_k(\frac{2}{2})$ и $N_k(\frac{1}{3})$ все числа конечны; дискретное расстояние от первого элемента $\frac{2}{2}$ до последнего $\frac{1}{3}$ вычислимо и также конечно, включая случай бесконечного списка дробей со знаменателем 2.

Тогда, согласно канторовой нумерации:

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad d_k(x, y) = |N_k(x) - N_k(y_k)| < \infty,$$

где $y_k = \frac{1}{3}$, а все остальные номера $N_k(x)$ принадлежат первым $k - 1$ дробям со знаменателем 2.

По сути, такого представления достаточно, но для тех, кто «не верит» предлагаем рассмотреть функцию:

$$fin(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{конечное.} \\ 1, & \text{если } x - \text{бесконечное} \end{cases}$$

В рамках канторовского положения о том, что «каждое натуральное число имеет конечный номер», этот предел конечен:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} fin(N_k(\frac{1}{3}) - N_k(\frac{1}{2})) = 0.$$

Любое из чисел списка находится на конечном расстоянии. С другой стороны, *согласно финитной арифметике и теории последовательностей*, предел также равен 1.

Между Кантором и арифметикой мы выбираем арифметику. Это значит, что допущение конечной нумерации в бесконечности с «конструктивными номерами» было ошибочным.

Для чистоты аргументации, правда, целиком и полностью риторической, N_k можно пустить прямо по значениям канторовой функции, которая на любых неограниченных списках «умеет» не выходить за рамки конечных номеров.

Наш контрпример не содержит ничего, кроме биекции и отношений «больше-меньше» на натуральных числах. Даже бесконечность появляется в нем по сценарию Кантора с конечными вычислимыми номерами.

2.3 Тройной софизм

Софизм 2.1.

- (a) Все числовые множества целых неотрицательных чисел - конечны.
- (b) Все мощности числовых множеств - конечны.
- (c) Каждое рациональное число имеет натуральный номер.

Доказательство. Доказываем индукцией по n . Во всех трех случаях ссылка на текущий конечный номер.

- (a) Любое целое неотрицательное число конечно, и большее на единицу - тоже конечно.
- (b) Мы не знаем никаких множеств, кроме содержащих конечное число элементов. И так для каждого n .
- (c) Аналогично предыдущим пунктам из существования номера числа $\mathbb{Q}$ в канторской нумерации следует конечность всех номеров. И они не имеют отношения к бесконечным множествам, вне метафизической экстраполяции.

□

Все три софизма доказываются одним и тем же доказательством.

Таким образом, натуральных чисел, которыми можно было бы пронумеровать что-то бесконечное, и бесконечных множеств, подлежащих нумерации по правилу «диагонального прохода», не существует. Это более сильное следствие, чем предполагал Кантор.

Его построения верны и даже тривиальны, но относятся лишь к конечным числам. Использовать это для описания бесконечного представляет собой противоречие в определении.

Равенства диагональной нумерации имеют смысл только на конечном отрезке, противоположное означает, что пользователи могут привести пример бесконечного номера.

У бесконечного есть единственное количественное свойство быть бесконечным, и в нумерации исключается именно оно. Она предполагает финитность любого номера, то есть работает исключительно при условии того, что призвана нарушить. Это классическое предвосхищение основания, добавок содержащее противоречие.

Ни одно из натуральных чисел не является бесконечным ровно по тому же определению, по которому они составили биекцию $\mathbb{N}$. «Все натуральные числа» представляют собой неограниченное множество, при переходе к бесконечности конечность утрачивается и теорема там не доказана.

Диагональная нумерация воспринимается как нечто «математически решенное», когда ее валидность определена не математическим способом. Более того, математическая часть нумерации вообще не содержит обозначения бесконечности на уровне сигнатуры и не способна выражать её и что бы то ни было с нею связанное по формальным основаниям. В этом месте последователи теории просто «надеются», что «читатель поймет» и вместо необходимых знаков используют аналог «и так далее».

Мы не говорим, что нет биекции, а только то, что номера и натуральные числа - не одно и то же. Биекция не способна определить границу натуральных чисел.

Если последователи Кантора считают нетождественность номеров и натуральных чисел мракобесием, почему они вводят сверхсчетную импровизированную «с некоторого места» нумерацию бесконечных ординалов и не считают это таковым? Особенностью этой теории является крайне не соответствующая духу математики выборочная строгость, которая определяет содержание по принципу: мы принимаем за свойства, что посчитали нужным, а вы вслед за нами.

Они допускают бесконечные множества, но как только доказательство неизбежно уходит на бесконечные номера внезапно начинают «стесняться» и сворачивают выкладки. В результате возникает бесконечное множество с конечными номерами.

Парадокс нумерации в $\mathbb{N}$ Кантора состоит в том, что на конечном подмножестве множество рациональных чисел не может быть исчерпано, обязательно понадобится переход к бесконечности, а на нем аргумент конечных номеров не работает.

Нумерация не определяет бесконечность совокупности, оперируя исключительно конечными номерами и создавая иллюзию исчерпанности $\mathbb{N}$ только ими. Эта скрытая коллизия не распознавалась из-за отсутствия альтернативы $\mathbb{N}$, она, в свою очередь, была правдоподобной по причине конечности всех актуальных номеров и уникальности «ближайшей бесконечности» $\aleph_0$ как их совокупности. Это напоминает анекдот о комбинаторе, который устроился директором крупного банка, назвав себя женихом дочери олигарха, и посватался к ней в качестве директора

крупного банка.

Чтобы убедиться, что шары в двух урнах одного цвета, - мало осмотреть шары из одной урны. Кантор доказал, что все числа - нумерованы, но не доказал, что все нумерованные числа - конечны. А если бы ему это удалось, это еще очевиднее опровергло бы его теорию! В конце концов, биекция определяет взаимную однозначность, а не конечность или бесконечность, но ее упорно используют как аргумент в пользу тотальной конечности номеров. Это детская ошибка включения только в одну, но не в обратную сторону.

2.4 Почему существует бесконечность

Прежде чем исследовать бесконечность необходимо убедиться, что она есть. Пикантность ситуации в том, что мы не можем толком назвать бесконечность даже «феноменом», когда она именно то, из чего преимущественно состоит Вселенная в математическом смысле.

Рассмотрим простейшие выражения (в этом месте цель - не поразить читателя сложностью):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{3} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{n} + 10}{3} = \frac{10}{3}, \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty.$$

Выделим два момента:

- бесконечность, участвующая в операции, отображается как на конечные, так и на бесконечные числа;
- и результат *при ее участии* осмысленно варьируется.

Определим булевы последовательности следующим способом:

$$bool(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{ложно;} \\ 1, & \text{если } x - \text{истинно} \end{cases}$$

Берем любые числа числовой оси, например, «3» и «5» и проверяем их отношения по «больше, меньше, равно» как отношения сумм стационарных рядов:

$$bool(\sum_{n \rightarrow \infty} 3 < \sum_{n \rightarrow \infty} 5).$$

Отображение, элиминируя «знак предела», переводит все отношения между числами и функциями $\langle \mathbb{R}, +, \circ \rangle$ в новую алгебру $\langle \mathbb{R}', +, \circ \rangle$.

Единственный «жадный» алеф, который бы нарушал эти отношения - вообще не о числах, и он не принадлежит этой схеме.

Результат сходимости булевых последовательностей (будем рассматривать ряды как последовательности частичных сумм) однозначно определяет место каждого элемента во всех операциях алгебры $\langle \mathbb{R}', +, \circ \rangle$. Из-за того, что они абсолютно идентичны, не нужно заменять операции внутреннего сложения и умножения альтернативными знаками. Внешние операции определены в ПФА. [Торгашин, 2020, с.157-173]

Не обязательно быть левшой, чтобы увидеть структуру вложенных полей и фрактальность. С любым вновь образованным полем ничто не мешает поступить точно также. Требуется только найти всё на своих местах и описать отношения и операции.

Это иллюзия, что «анализ бесконечных величин (больших и малых)», который до сих пор неуклюже называют «математическим анализом» работает с бесконечными суммами. Тем более на несчетных множествах, где никаких сумм нет, а «операции» определены. Он всего лишь использует схему, вне вопроса конечности или бесконечности констант в нее подставляемых. И элементы, участвующие в ней, просто определенным способом относятся друг к другу.

Если бы предел суммы давал чепуху в

$$bool(\Sigma_{n \rightarrow \infty} 3 < \Sigma_{n \rightarrow \infty} 5),$$

чепуха по еще «классическому» построению возникала бы на конечных суммах, но этого не происходит.

Бесконечность - это конечно определенный феномен. Она не более и не менее эмпирична, чем длинное или синее. Почему критики бесконечности этого не заметили?

Вложенные поля, несмотря на то, что их число не ограничено, - тоже конечны, именно поэтому слово «полифинитный» («многоконечный») не содержит указания на ∞ .

Более того, нам интересны только отношения между числами, а не экзистенциальная природа бесконечности, ее вообще может не существовать, *насколько у неё это получится, не организуя противоречие*. А там, где не получится, возникает конечная теория бесконечности. Все свойства каких угодно доступных определению элементов возникают не из нее а из финитных и актуально определенных отношений. Они определены независимо от «внутренних» свойств чисел. Точнее, эти свойства полно-

стью определяются своим местом в отображении *bool*. Мы обнаруживаем «бесконечные числа» на своих местах, в качестве элемента в системе они - тоже конечные.

Кантор не использовал такого статичного схемного построения и ему противоречит значительная часть канторовской теории, противоречит в позитивной конечной части. Это легко проверяемо.

Обратим внимание что полифинитный анализ - не гипотеза, мы всё нашли в готовом виде.

Перечисленные методологические ограничения не мешают дополнительно исследовать бесконечность без попыток сделать это основаниями точных и эмпирических наук. Вид декартовой прямой можно рассматривать как свидетельство её реального существования. Более того, бесконечность не может не существовать, ее отрицание требует ограниченного предела, который порождает вопрос о том, «что за ним находится». Бесконечное - самой природой определенный элемент, при попытке его убрать разрушается смысл остающегося.

Есть фундаментальное заблуждение на тему, что бесконечность необходимо «преодолевать». Отсюда, «арифметика алефов». В реальности ничего такого не требуется. В содержательной части бесконечное - всего лишь элемент математического универсума, возникающий из арифметических операций.

0 определен дискретным отсутствием. Если на складе нет мандаринов, мы не обозначим эту ситуацию числом 5. И мандаринов будет меньше, чем 2. Наличие на складе яблок не выручит, даже если они цветом похожи на мандарины. Как ни выкручивайся, понадобится число 0.

Поезд Москва-Владивосток прибывает через шесть суток. Физическую непреодолимость точно также придётся обозначить числом. Через какое время Париж окажется в Китае? Не иносказательно, как «дни Парижа в Поднебесной», а буквально с камнями Нотр-Дама?

Бесконечность более обыденна, чем принято думать. Она не загадочнее нуля. Ей не нужно приписывать свойства, кроме тех, которые ей присущи из рутинного положения вещей. Все её настоящие свойства, которые есть смысл математически описывать, - исключительно такие. Их не так уж мало.

Там, где бесконечность располагает «к высокому образу мыслей», понимать ее не нужно и вредно. Это верный признак решать проблему каким-то другим способом, где нет указанного «высокого образа мыслей». Как ни странно, у финитизма он тоже есть в виде высокомерной и

ничем неподкрепленной уверенности обойтись дискретным.

Если бесконечность не поддается естественному интуитивному пониманию, ее не нужно понимать специально и с усилием. Вместо понимания все равно возникнут фантазии.

Использование слова «бесконечность» - референтно, иначе бы не возникло проблемы квадратуры круга, а число $\sqrt{2}$ имело бы конечную запись в виде десятичной дроби.

Существование актуальной бесконечности ставится под сомнение. При этом речь идет и о математической, и о какой бы то ни было физической бесконечности. Рассмотрим отрезок $[0,1]$. Пусть на нём существует конечное или хотя бы счетное число точек, тогда мера этого отрезка, согласно конечной и, соответственно, счетной аддитивности меры Лебега, окажется равной нулю как конечная или счетная сумма нулей. Возникает вопрос, что делает этот отрезок равным 1 в некотором репере. Можно сослаться на физическую очевидность длины. Однако такой ответ не имеет отношения к математике, и длина отрезка оказывается оторванной от анализа его элементов, кроме ремесленного снятия размера штангенциркулем или его более точным аналогом.

999 из 1000 математиков здесь воскликнут «А как же континуум?». В том-то и дело, что континуума без актуальной бесконечности не бывает. И, если мы понимаем бесконечность исключительно как возможность выполнения одной и той же операции ничем неограниченное число раз (алгорифм), у нас отсутствует объект (терм), который бы обозначал субстрат, в котором это происходит. Континуум наличествует как бы в виде призрака, который есть, когда возникают трудные вопросы, и которого нет, когда нужно широко провозгласить отказ от бесконечности.

Предложение 2.2. *Если элементы множеств A и B сопоставлены биекцией $f(A)=B$, кроме двух элементов $a \in A$ и $b \in B$, — это автоматически задаёт расширение $f(a)=b$.*

Доказательство. По построению.

□

Теорема 2.3 (Теорема схематизма). *Каждому $a \in \mathbb{R}$ соответствует уникальный бесконечно большой элемент.*

Доказательство. Уравнение $x \circ a = b$ имеет единственное решение на $\mathbb{R}$ для любого b . Согласно предложению 2.2, формула $a = \frac{b}{x}$ определяет

биекцию, в которой 0 однозначно отображается на бесконечно большое число при фиксированном b . Пусть его значение не уникально. Тогда при $c \neq b$

$$\text{bool}(\lim_{x \rightarrow \infty} c \circ x = \lim_{x \rightarrow \infty} b \circ x) = 1,$$

что арифметически неверно.

Таким образом, бесконечно большие значения определены и уникальны для каждого действительного числа. $\square$

Точка и отрезок существуют, отношение между ними - тоже, тогда что именно придумано в порядке недобросовестных фантазий, на которые любят указывать интуиционисты? Наоборот их мир, в котором дословно не существует актуальной бесконечности - фантастичен на формальном уровне.

Берем отрезки меры $a \neq 0$, и меры 0, частное их мер не является неопределенным. Оно отличается от других частных только тем, что его бояться называть, не понимая, что этим уже дают ему имя.

Если ограничить математику конечными отрезками, на пример древнеавилонской традиции, придется ограничиваться сравнением конечных длин.

Здесь возможна уловка, заключающаяся в отказе рассматривать части отрезка с нулевой мерой, таким образом, актуальными признаются только отрезки рациональной длины. Заметим, что рассмотрение открытого множества на прямой (полуинтервала, интервала) в этом случае проблематично из-за необходимости построения элемента нулевой меры. На такой прямой невозможно разделить отрезок надвое.

Математика с минимальным ненулевым отрезком не является конструктивной, а недостроенной, свойства такой математики неконтролируемы, мы не можем решить, участвует в ней бесконечность или не участвует. В ней анонимно подразумеваются объекты, которые нельзя получить при помощи конечного числа операций, и вопрос об актуальности бесконечного не сводим к возможности построения с помощью конечного алгоритма. Отношение отрезка и точки существует не в силу неаккуратности какой-либо математической школы, не потому что их кто-то «придумал». Отказаться от их исследования только из-за неудобства и «опасности» обращения с ними - весьма напоминает попытку плохого программиста решить задачу не по техническому заданию заказчика, а

по соображениям удобства её реализации, даже если заказчику при такой реализации будет крайне неудобно работать.

Тем более понятием бесконечно близкой точки уже вносится бесконечность. Иррациональные числа по той же причине - никакие не конечные. Существует иллюзия конечности иррациональных чисел классического анализа. В реальности они содержат бесконечную составляющую и не поддаются простой референции.

Удобна ли «грязная длина с отрезками на концах» при существовании «незаконной» но арифметически корректной чистой длины? Реально точку и «число» точек в отрезке не признает только «математический плоскоземелец». Отрицание бесконечности - неконструктивно, конструктивно только в собственной системе оценки конструктивности, которая, как мы видели, не соответствует общим представлением об универсуме без выпадения огромных участков спектра.

Если вместо одной точной грани, мы будем использовать две, по той же причине нам понадобятся уже четыре элемента, потом - восемь и т.д. Через некоторое время мы вообще потеряем место точной оценки, но будем «конструктивны». Обычно думают, что скептицизм и сомнение - это, как прыжки в длину: разбежался и падай вперёд, сколько хочешь, ничего не случится, кроме зачёта. Но есть демагогическое декоративное сомнение, которое подменяет содержательную часть.

Если удаление объекта формализованной теории приводит к ее разрушению, каким должен быть еще математический объект, чтобы существовать? Быть непротиворечиво описан, соответствовать реальности. В случае актуальной бесконечности и то, и другое - на месте. В случае интуиционизма - нет.

Определение 2.3. *Назовем актуальным элемент математической теории, который имеет референтное соответствие в физической реальности или/и отрицание существования такого элемента приводит к противоречию.*

Бесконечность актуальна не по титулу, а по сути. Если бесконечность фантазия, иррациональные числа имеют от чисел рациональных только фантазийно-мистическое отличие.

2.5 Больше чем доказательство

На отрезке чисел больше любого конечного числа, - и это реальная оценка, соответствующая реальному количеству объектов, да еще и формализованных. Это достаточное доказательство, прямое и имеющее материальный референт. В математике трудно найти нечто, что было бы доказано так исчерпывающе. Это ничей результат как очевидность Солнца или Луны на небе. Тот, кто отрицает бесконечность, чтобы не выглядеть молчаливым недотепой, будет вынужден изобретать формальные способы учёта этих количественных характеристик, то есть описывать бесконечность другим контрабандным способом. Ее нельзя не описывать, потому что она есть, и без нее разрушается смысл остающегося и «конструктивного».

В случае с бесконечностью модель существует раньше аксиоматики и не существовать не может. Теории, отрицающие бесконечность, добровольно соглашаются на плановую неадекватность, то есть ради устранения гипотетических противоречий создают систему заведомо противоречащую реальности. Это стратегия басенного страуса, который прячет голову в песок.

Математика описывает бесконечность вынужденно, не менее вынужденно, чем механика скорость движения тела, и не может придать ей большей достоверности, чем та, которая существует вне зависимости от этих усилий.

Существование бесконечности доказано очевидностью противоречий, которые возникают из ее отрицания. При этом геометрия не доказывает существование прямых, механика - падающих камней. Теория бесконечного располагает и аналитическими доказательствами, и протоколами экспериментов по ее отрицанию, протоколами наблюдений актуальной непрерывности, в качестве таковых можно использовать хотя бы феноменологию Гуссерля. Да и без Гуссерля: бесконечность продолжается, их большей одной, одна из них может быть больше другой и подлежит точному измерению, в этом качестве их можно наблюдать. Как ни странно, обе бесконечности (актуальная и потенциальная) являются элементами конечной математики, потому что последняя без них оказывается противоречивой в части топологии вещественной прямой.

Таким образом, математический анализ в широком смысле не менее обоснован, чем геометрия. И казусы вроде парадокса Рассела - явление несоизмеримое с ним по значимости. Тем более, как мы убедились, он

возник из частных и неизощренных ошибок автора и интерпретаторов.

2.6 Парадокс возможного

Бесконечные числа - это числа, которые обозначают числовую меру невозможного и она в таком виде утрачивает характер потустороннего, по сути, оказываясь этим «потусторонним». Она просто числовая оценка, такая же, как 0.

Самое интересное, любое отрицание того, что бесконечность - это числовая мера невозможного, содержательно утверждает то же самое, потому что бесконечность невозможна и она не совпадает ни с каким конечным числом, и в таком виде обозначает меру того, что *нельзя* обозначить этими числами.

Невозможного много больше чем хотелось бы. Необходимо спросить, как оно может не учитываться? Или мы заранее и исчерпывающе знаем, где оно у нас?

Возникает истинный в нашей терминологии (неустранимый и не нуждающийся в устранении) парадокс возможного. Если невозможное не существует, то все возможно, в том числе невозможное. Если существует, то все возможно в качестве возможного и невозможного. Результаты совпадают с точностью до перестановки в коммутативной диаграмме.

Возможное буквально утверждено и основано на невозможном, «висит в нем». Просто посмотрите на рисунок:

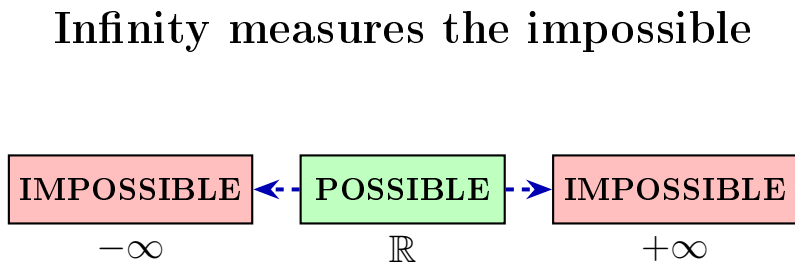


Рис. 2: Визуализация бесконечности как меры невозможного

Более того, возможное инфильтрировано невозможным из-за бесконечности малых промежутков прямой. Нам пришлось бы рисовать новую диаграмму, где зеленый цвет перемешан с «тревожным».

Обобщённая теорема Геделя делает нетривиальным понятие противоречия. Определенное в бесконечности не противоречиво, если даже его части говорят контраридикторное. Здесь возникает потребность в термине *похабного* противоречия. И противоречивое в бесконечности - не *похабно*.

Возможное - это фрагмент невозможного, причем в самом строгом арифметическом смысле. Однако невозможное - это всего лишь разновидность того, что есть, оно существует и в опять же в строго определенном смысле возможно. Это так похоже на мудрость в духе «Все есть во всем», к которой философы по долгу службы обязаны проявлять «любовь»? Нет, это рутинное положение арифметики.

2.7 Парадокс Рассела

Что значит принадлежность элемента множеству? Какой у этого статуса физический смысл? Например, множество вилок - не вилка, но множество объемных совокупностей песка («количеств», а не куч!), очевидно, - совокупность песка.

Различимы нормальные множества по интенционалу (множество вилок - не вилка) и формально отнесенные к нормальным. Множество всех нормальных по интенционалу множеств вообще не имеет интенционала, потому что установить содержательный принцип некому и нечем. Отношение «принадлежать себе» в этом случае ничем не определено. Его устанавливают директивным формальным способом. Вдруг возникает ситуация, что оно принадлежит себе и уже не формально, а содержательно. Это происходит потому, что без интенционала, то есть без экзистенциальной спецификации, нормальное множество не имеет никакого даже формального смысла.

Ошибка Рассела и других интерпретаторов заключалась в следующем: содержательное, экзистенциальное было принято за формальное. От него не ожидали возможности внезапно дать стихийную «игру на ту же тему».

Формальное, действительно, на такое не способно, потому что все его свойства определены заранее. Речь идет лишь о конечном, например, о комбинаторике, которая исключает неконтролируемые определения. Однако обязанности брадобрея, определение гомологического, свойство быть мэром города мэров, принадлежность несут в себе экзистенциальную содержательность, крайне похожую на формализм. Тем более многое из формального неизбежно такое и оно не дает коллизий, потому что

имеет контролируемое содержание.

Разница между нормальными и ненормальными множествами вне онтологии не определена. При формальном определении - тоже, но возникает содержательная грязь как при инициализации переменной, требующей чистки (заполнения нулем или *Null*).

Все множества, «не принадлежащие себе», собираются по псевдоинтенциональному условию A_0 , после этого интенциональное условие определено по результату этой сборки как A_1 . Оно продолжает рассматриваться как A_0 . Парадокс Рассела возникает из-за нарушения кондового закона тождества. Двойного, в первый раз автор не знает, что он якобы строго определил, во второй - переходом от одного условия классификации к другому.

Нормальность не может по смыслу быть неэкзистенциальной. Это была иллюзия, и содержание за себя отомстило. В парадоксе брадобрее это очевидно, и он был решен раньше, еще в студенческие годы. [Торгашин, 2025b]

Почти все парадоксы организованы темпорально с указанием «в разное или в одно и то же время». В исходном парадоксе темпоральность оказалась скрытой и возникающей в виде «стадий понимания экспертом», сначала по условию A_0 , потом по A_1 .

Анонимная принадлежность множеству по содержательному принципу (ненормальность) - оксюморон, это что-то наподобие секретного от всех, в том числе от хозяина дома, адреса. Такая принадлежность предполагает стихийную и непредсказуемую остенсию, которая, собственно, и произошла.

Удивляет реакция Фреге и Рассела! Множество нормальных множеств есть универсальное множество с наложенным на него анонимным экзистенциональным условием. Чего они хотели - ясновидения или, чтобы ведра пошли от проруби сами?

Множества всех множеств не существует по смыслу. Кантор помогает Расселу. И нормальное множество нормальных множеств составляет парадокс при определении по частям в условиях ложной темпоральности. Если не по частям, это противоречие, а не парадокс. Точно также нет и множества всех конечных чисел. Его нельзя выделить.

Множество всех нормальных множеств предполагает противоречивый перформанс. Оно одновременно объявляет целокупность и тут же изменяет ее. Отсюда, темпоральность. Множество обязано содержать себя и не существует в результате описания. Происходящее не распознается

как противоречие, только благодаря «разным стадиям».

Нужно ли уточнять, что если неформализованное не реализуемо, то нереализуемо и формальное о том же?

Формализм Рассела стихийно впадает в гуссерлевскую мереологию («наука о части и целом»), но ведет себя так словно ничего такого не имел в виду. Перед нами случай псевдопарадокса не в сторону совместимости, а в сторону тривиального противоречия, которое не составляет проблемы ни в математике, ни в логике. Противоречия отчасти в метаопределении, что делает возможным его классификацию как парадокса с пустым условием: авторы не договорились, что они понимают под принадлежностью. Понятие всех нормальных множеств исключает эмпирическое содержание и одновременно требует его, это и есть причина сбоя. При такой причине никакой другой не требуется. Просто попалось экзистенциальное положение *очень похожее на формализм*. Обе редакции «нормальных множеств» были восприняты как одно и то же из-за восприятия их как формального описания.

Парадокс Кантора - не парадокс, а способ существования множеств наподобие «самого большого числа».

Исторический повод к Третьему кризису математики исчерпан.

К парадоксу Рассела привела наивная вера в формальное и ее стали лечить еще большим формальным. Лечение оказалось неизящным, ради формализма множествам прописали откровенно экзистенциальные костыли в виде запретов и *ad hoc* онтологий. И поменяли естественную эмпиричность наивной теории на придуманную и извращенную. В этом месте интуиционизм выглядит гораздо привлекательней.

Физический смысл результата Козна (применение форсинг-метода) в том, что «формальное в чистом виде» не способно вместить идею эмпирической и реально существующей множественности без экзистенциальной опоры.

Математика возможна и даже безупречна в чисто формальном виде, но она окажется слепой в эмпирическом, то есть *более узкой и конкретной в своей предельной общности*.

С другой стороны, почему формальная математика именно такая? Почему она не ограничивается сложением 0 с собой, любуясь самой беспроблемной абелевой группой? Потому что есть одно, два, три и больше, много больше яблок; и пространство простирается за горизонт и в мыслях. Это иллюзия, что геометрия более «материальна», чем арифметика или аксиоматическая теория множеств. Именно этот урок преподнес па-

парадокс Бертрана Рассела.

Это иллюзия, что формальное каким-то особым образом «ни от чего не зависит». Дело даже не в метаязыке. Нельзя запретить пользоваться символами неправильно, запись об этом потребует методики правильности составления такой записи, которая снова потребует того же для себя и так до бесконечности.

Парадокс имел тяжелые последствия, потому что Рассел и Фреге слепо верили в «формальное определение». Даже в паре Куратовского ($a + a, a$) элемент $a + a$ «больше» a по экзистенциальным причинам.

2.8 Формальное и эмпирическое

Парадокс Рассела возник из непонимания особенной эмпирической природы математики, которая *опытна, но не экспериментальна*. Последний статус для, казалось бы, светлого интеллектуального полдня Европы был абсолютно неразлечим. Гуссерль сокрушал эмпиризм, эмпиризм призывал к измерениям и никто не обратил внимание, что есть измерения, которые происходят незамеченными. Деление на нормальные и ненормальные множества в парадоксе Рассела возникает без всякого смысла иметь такой смысл. Оно вообще неприменимо для бесконечных («всех») множеств, и эта неформальная, но эмпирическая *по математическому типу* часть данных была проигнорирована. Если бы не естественное деление на нормальные и ненормальные множества, которое демонстрируется на бытовых примерах, — деление, опирающееся на наш эмпирический опыт, парадокс бы не возник, просто потому что мы не понимали бы, о чём вообще речь. В таком виде оно не имеет никакого даже парадоксального смысла. Интуиционизм будто не смог отыскать подходящих слов. Возможно, Кант термином «априорное» одновременно двусмысленным и директивно однозначным убил необходимое различие.

Множества все одинаковы. Если они определены исключительно формально, мы не застрахованы от противоречия при внесении любого интенционального уточнения, которое вносят «ручным» способом и при возникновении проблемы ждут автоматического решения. Его не будет. Ошибка в том, что парадокс Рассела интерпретировался как полностью экстенциональная конструкция. В реальности незамечаемое противоречие возникало из бытового представлении и раньше саморефлексии. Это была слишком сложная задача для начала XX века.

У нас в основаниях нет экзистенциальной бесконечности, но мы мо-

жем ее исследовать как эмпирическое. У Кантора она есть и по этой причине там фантазия перемешана с реальным. Почему «бесконечные числа» должны быть все равны, если они не имеют никакого референта? Точнее, имеют в таком виде, как у нас, и Кантор его не указал.

В классическом анализе происходит перескок от счета по точкам, «находящимся друг от друга на нулевом расстоянии» к отрезку. Эти точки «в континууме» не конструктивны, нет указания, где они находятся, при устранении этого недостатка получается полифинитный анализ. Численно точка и «бесконечно близкая» к ней точка - одно и то же. Это гуманитарный остаток в математике - способ мышления, который ни формален, ни эмпиричен.

Результат теоремы Гёделя остается даже если нет *уникального бесконечного* списка формул. Однако прямая остенсия позволяет выйти за пределы системы по Тарскому, и это происходит каждую секунду. Не человек для системы, а система для человека, иначе сама теорема Тарского оказалась бы невыразимой.

Реальный смысл теоремы Гёделя в следующем: любая бесконечность предполагает контрадикторно противоположное. Это нетривиальный результат. При интерпретации счетной бесконечности как характеристики неограниченных конечных совокупностей возникает вывод о неполноте. В отрезке, как в мраморной глыбе, сидят «все шифры» происходящего. Посмотрите под стол, возможно, там лежит обертка от шоколадки, или клякса шерсти вашей любимой собаки, или растоптанная авторучка, - все это там есть и «одновременно» нет. «Оцифровано» все что, вы видели по дороге на работу. Что из них реально, зависит не от формальной составляющей.

Эмпирическая определенность - не вынужденность, не «костыли», а онтология формального знания.

Витгенштейн пытался сделать любую рецепцию мира формальной и там, где это не удавалось все объявлял «бессмысленным». В реальности с точностью до наоборот, по гамбургскому счёту, всё экзистенциально, даже синтаксис, это тема Деррида, который довел эту крайность до своего абсурда. Ошибка Деррида в том, что синтаксис - это такое формальное, которое экзистенциально «по предъявлению». Если некто не понимает значения 0 и 1 - синтаксис не поможет. А если понимает, дополнения не требуются. Форма по своей природе - содержание.

Возможен такой критерий конструктивности. Если экзистенциальная часть не создается формализмом, то она не конструктивна, и может быть

частью теории только при наличии эмпирической опоры. Если у чего-то такой поддержки нет, - оно окончательно неконструктивно. Часть из конструктивного *по эмпирическому типу* такое, что его утрата приводит к разрушению формального.

Почему так важна конструктивность и как это объяснить детям? Допустим вам предлагают дозу жизненно необходимого лекарства, превышение которой вас точно убьет, будете ли вы спокойны, узнав, что при расчете этой дозы в качестве промежуточного результата она трижды побывала под знаком предела и возникла из последовательности бесконечных чисел?

На самом деле механика подтверждает анализ, иначе бы он имел такой же статус, как арифметика ординалов. Однако понять себя для этого подтверждения и вообще иметь возможность что-то здесь подтверждать механика может только благодаря математике. Это не семьи, обменивающиеся долгами, а одна семья.

3 Цифровое представление

Для понимания этих результатов понадобится обратиться к книге «Полифинитный анализ и основания математики» [Торгашин, 2020] в части глав 3-5.

3.1 Свойства π

Определение 3.1. Будем называть смешанное число a трансцеллым, если его младшая компонента не имеет дробной части в своем порядке.

Определение 3.2. Будем называть смешанное число a трансрациональным, если его младшая компонента имеет не более чем конечную дробную часть в своем порядке.

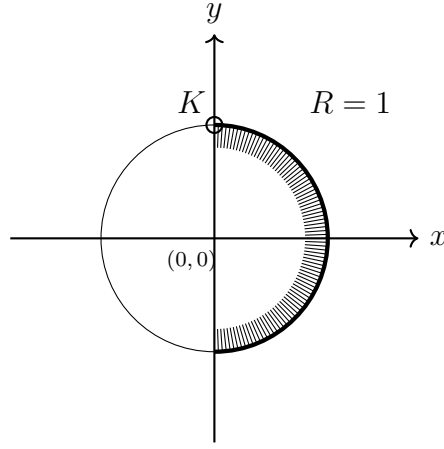


Рис. 3: Единичная окружность с выделенной дугой длины π от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$

Теорема 3.1.

- (a) Длина полуокружности, приходящаяся на 1_1 равна $1_1 + \alpha$, где α - некоторый остаток младших порядков.
- (b) π - смешанное иррациональное число с трансцеллой компонентой порядка 1 и с последующими целыми.

Доказательство. Примем репер r_1 за архимедов, это возможно, благодаря изоморфизму полей.

- (a) Построим единичную окружность с центром в начале координат. Длина дуги от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ составляет число π . На рисунке 3 указанная дуга длины π заштрихована.

В ракурсе r_1 прямая $y = 1$ в окрестности K (рис. 3) совпадает с левой частью дуги нашей окружности, так как ее кривизна равна $0_1 = \frac{1_1}{1_0}$, где 1_1 - архимедово, а 1_0 - s-число в ракурсе μ_1 . С другой стороны, прирост длины окружности на отрезке $[0_1, 1_1]$ равен 1_1 . π равно этому числу, значит, его последний разряд равен 1_1 .

- (b) Чтобы выполнялся пункт (a) настоящей теоремы, π не может иметь в порядке 1 дробной части того же порядка. Из-за непрерывности функции длины дуги окружности πx , это условие наследуется младшими порядками, в ракурсе которых в окрестности K дуга окружности тоже представляет собой ту же самую прямую.

□

Выше было дано определение трансцелого числа, однако разнообразие характеристик чисел настолько велико, что обозначение их новыми вербальными терминами приведет к путанице, устранить которую можно только тяжелой конвенцией и зубрежкой. Лучше использовать формулу числа. Например, π удобно обозначить как $\mathbb{J}[\mathbb{Z}]$, то есть старшая иррациональная часть и целая часть в периоде.

3.2 Свойства e

Определение 3.3. Будем называть смешанное число a монотонно трансиррациональным, если каждая его компонента - иррациональное число.

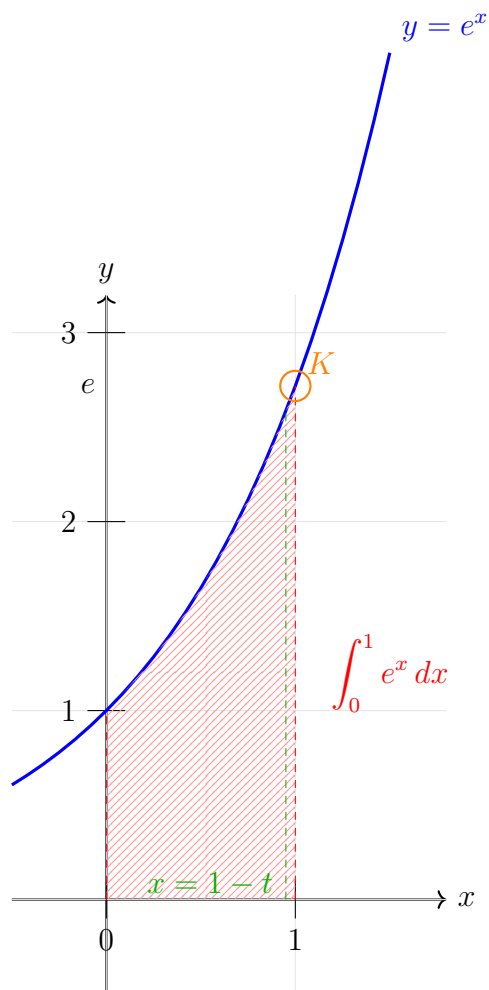


Рис. 4: Свойства числа e : локальная аппроксимация e^x трапецией в окрестности $x = 1$

Теорема 3.2. Число e - монотонно транскрациональное.

Доказательство. Число $e - 1$ можно представить как

$$\int_0^1 e^x dx.$$

Это число равно площади криволинейной фигуры под графиком (рис. 4). Используем рассуждение, как в предыдущем пункте. Правая часть

этой фигуры на отрезке меры μ_1 равна трапеции, ограниченной прямыми $y = 0_1$, $x = 1_1 - t$ и $y = ex$, поскольку из-за нулевой кривизны в текущей мере экспонента на достаточно малом отрезке $[1_1 - t, 1_1]$ совпадает с касательной в этой отметке.

Площадь этой трапеции, сразу обозначим ее ΔS , равна произведению высоты Δt на полусумму оснований e и $e - e\Delta t$, где $e\Delta t$ - это приращение y , полученное умножением Δt на тангенс угла касательной, равный e (геометрический смысл):

$$\Delta S = \frac{e\Delta t + (e - 1)(\Delta t)^2}{2} \quad (1).$$

Пусть число $e - 1$ - рационально в ракурсе меры μ_1 , тогда при достаточно малом, в том числе рациональном, Δt обязательно найдётся рациональное значение ΔS как рациональный остаток дроби (это есть опровергаемая рациональность $e - 1$ в ракурсе μ_1). На то и трансрациональное число, чтобы оторванный от старшей компоненты «хвост» был рациональным.

С другой стороны, ΔS не может быть рациональным в (1) при рациональном Δt (табличный поразрядный рост аргумента) из-за трансцендентности e .

Мы получили противоречие, значит, числа $e - 1$ и e не являются трансрациональными. Экспонента во всех остальных порядках представляет собой касательную в точке $x = 1$, поэтому e - трансирационально во всех порядках, то есть монотонно. $\square$

Число e имеет формулу $J|[J]$.

Необходимо обратить внимание, что e в (1) - это не супрафинитное e в порядке 1, а соразмерное. Происходит это оттого, что тангенс наклона касательной к экспоненте в точке $x = 1$ - один и тот же во всех порядках. Это и позволило делать выводы об e .

Способ решения у обеих задач этого и предыдущего пункта один и тот же: зажать величину в ограниченном числе разрядов, где иное предположительное ее описание будет вынуждено противоречить.

Вероятнее всего, такое поведение e и π - не новость, особенно π с прозрачным линейным смыслом, и эти результаты могут быть получены другими способами без привлечения ПФА.

3.3 Алгебраическая независимость π и e

Теорема 3.3.

$$\forall P \in \mathbb{Q}[\pi, e], P \not\equiv 0 \Rightarrow P(\pi, e) \neq 0$$

$$\text{где } P(\pi, e) = \sum_{i,j} c_{ij} \pi^i e^j$$

Доказательство. Пусть есть такой не тождественно равный нулю многочлен $P(\pi, e) = \sum_{i,j} c_{ij} \pi^i e^j = 0$ (*).

Берем рациональное число, близкое к π , и начинаем его поразрядно уточнять. Обозначим $a_j = \sum_i c_{ij} q^i$, получаемое заменой π на некоторое рациональное q в $\sum_i c_{ij} \pi^i$ при степени e^j . Для любых рациональных q , как угодно близких к π , каждая алгебраическая сумма $\sum_i c_{ij} q^i$ при степени e_j в (*) окажется рациональной. Поэтому, в силу трансцендентности e : $a_k e^k + a_{k-1} e^{k-1} + \dots + a_0 \neq 0$ (**).

При любом поразрядном уточнении $\vec{a} = (a_k, \dots, a_0)$ это равенство сохраняется. Введем индекс n по уточнению q . Обозначим сохранение (**) как отношение S между $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_{n+1}$. Оно конечное, так как не выходит за пределы конечных арифметических операций.

Отсюда, по теореме о наследовании [Торгашин, 2020, с.136-137] для последовательности $\vec{a}_n$ есть вектор $\vec{b} = (b_k, \dots, b_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n$ неразличимый с $\sum_i c_{ij} \pi^i$ в архимедовой мере, такой, что: $b_k e^k + b_{k-1} e^{k-1} + \dots + b_0 \neq 0$.

Запишем (*) в таком виде $(b_k + \alpha_k) e^k + (b_{k-1} + \alpha_{k-1}) e^{k-1} + \dots + (b_0 + \alpha_0) = 0$, где $b_j + \alpha_j = \sum_i c_{ij} \pi^i$ при степени e_j . После раскрытия скобок и обнуления слагаемых, равных 0 в ракурсе архимедовой меры, получаем:

$b_k e^k + b_{k-1} e^{k-1} + \dots + b_0 \neq 0$. Мы получили противоречие. Значит предположение о возможности (*) было неверным и такое равенство невозможно, что и является алгебраической независимостью π и e . $\square$

4 Заключение

В Заключении этой публикации необходимо подчеркнуть, чтобы была создана совершенно новая теория бесконечности, которая имеет несоизмеримо больше экзистенциальных предпосылок, чем у Кантора (только диагонализация и диагональная нумерация), остальное у Кантора имеет

исключительно «формальное» происхождение. ПФА построен на контролируемом понимании отрезка и схемы отношения бесконечных сумм, при нарушении которых возникают противоречия в конечной арифметике. В перспективе это более богатая отношениями теория, потому что в ней бесконечные элементы имеют не менее развернутое числовое представление, чем в обычной арифметике. Даже сейчас, когда ею практически никто не занимался, она содержит больше базовых свойств, чем теория кардинальных чисел. Традиционная теория множеств почти не пересекается с теорией чисел, у нас в этой области получены результаты. Они конструктивны, потому что возникают из элементарных представлений об отрезке, свойства которого сохраняются при предельном переходе в бесконечность. Конструктивны ровно настолько же, насколько конструктивны сами иррациональные числа.

Кроме этого, числовые системы, теория множеств и математический анализ строятся из одного набора аксиом, они родные друг другу. Немаловажно, что ПФА - прост. Это теория доступна старшекласснику, в том числе потому что возникает из естественного понимания отрезка, точки, внутренности и неограниченности. Наконец, это развернутая демонстрация неисключительности традиционного понимания бесконечности и математики в целом.

Список литературы

- [1] Александров, П.С. Введение в теорию множеств и общую и топологию - М.:Издательство ЛКИ, 2008.-368 с.
- [2] Лысенко, Е. М., Торгашин, А. Ю. Язык и реальность - СПб, Реноме, 2025. - 396 с.
- [3] Торгашин А. Ю. Два парадокса теории множеств Георга Кантора. - PREPRINTS.RU, 2025. <https://doi.org/10.24108/preprints-3113875>
- [4] Torgashin A. Yu. What is a genuine paradox? Through the Barber Paradox : preprint / A. Yu. Torgashin. — Electronic text data (1 file : 132.1 KB). — Zenodo, 2025. — November 30. — URL: <https://zenodo.org/records/17769300> (accessed: 31.12.2025).