Фундаментальная работа: Гравитационная динамика с режимным подходом

Автор: Вепренцев Алексей Александрович (независимый исследователь)

Аннотация

Представлен режимный подход к гравитационной динамике, формализующий границу применимости ньютоновского и релятивистского описаний. Введены безразмерные режимные параметры *R, K и Ξ*, отражающие гравитационные и кинематические условия движения, и сформулирован операциональный критерий перехода между режимами. Показано, что даже при малых значениях этих параметров накопление релятивистских эффектов во времени приводит к существенным рассогласованиям, что иллюстрируется на примере глобальной навигационной спутниковой системы GPS.

Методическая часть включает:

• дискретизацию уравнений Эйнштейна и Клейна-Гордона;

• симметричные разностные схемы и логарифмическую решётку;

• контроль гладкости и невязки с проверкой второго порядка сходимости $(O((\Delta r)^2))$.

Такой подход позволяет объединить строгую фундаментальную теорию с численно проверяемыми критериями, исключая любые «магические» (нефизические или эвристические) поправки и неопределённости.

1. Введение

Современная гравитационная динамика опирается на два предельных режима: ньютоновский, применимый при слабых полях и малых скоростях относительно скорости света, и релятивистский, описываемый общей теорией относительности (ОТО). В ряде практических задач — например, высокоточная навигация, исследование компактных астрофизических объектов или моделирование гравитационных волн — требуется одновременное соблюдение точности и корректность предельных приближений.

Цель работы — создать операционально определяемую теорию численного анализа гравитационных систем, которая объединяет:

• строгие критерии применимости ньютоновского и релятивистского режимов;

• формализацию режимных переходов через безразмерные параметры;

• дискретизацию уравнений Эйнштейна-Клейна-Гордона с контролем невязки и сходимости;

• прозрачное математическое описание физических эффектов без «магических» поправок.

Задачи работы:

1. Определить режимные параметры динамики (R, K, Ξ) для широкого класса систем;

2. Ввести формальный критерий перехода между режимами без нарушения стандартной физики, геометрии и времени;

3. Построить численные схемы второго порядка точности для $F(r)$ и $\phi(r)$, учитывая адаптивную логарифмическую решётку;

4. Разработать алгоритмы контроля гладкости и невязки, включая проверку порядка сходимости $O((\Delta r)^2)$;

5. Демонстрировать фундаментальность подхода на примере сферически симметричных систем и показать, что методы могут быть обобщены на более сложные геометрии.

Подобно числу Рейнольдса в гидродинамике или параметру Кнудсена в кинетической теории, введённые режимные параметры дают количественную границу применимости стандартной динамики.

Ключевые допущения:

1. Пространство-время описывается стандартной метрикой ОТО;
2. Скалярное поле $\phi(r)$ может иметь потенциал $V(\phi)$, включая нелинейные члены, например $V(\phi)=\lambda\phi^4/4$!
3. Все численные схемы симметричные, центральные, второго порядка точности;
4. Логарифмическая решётка обеспечивает контроль гладкости у горизонта;
5. Все результаты проверяются через критерии сходимости, невязки и сравнений с аналитикой.

Введение пятой статьи закладывает жёсткую методологическую базу: любая последующая секция (режимные параметры, режимный переход, орбитальная динамика, численные схемы, контроль невязки) опирается на прозрачные, проверяемые и воспроизводимые критерии, исключающие неопределённости и «магические» (исключая нефизические или эвристические) поправки.

2. Режимные параметры динамики

Для формализации условий применимости различных аппроксимаций в гравитационной динамике вводятся безразмерные параметры, которые определяют режим движения и позволяют количественно оценивать необходимость релятивистских поправок.

2.1. Гравитационный параметр

Для пробного тела в центральном гравитационном поле массы M вводим безразмерный гравитационный параметр:

$$R = GM / (r c^2) = |\Phi| / c^2$$

где:

• G — гравитационная постоянная,

• r — характерный радиус орбиты,

• c — скорость света,

• Φ — ньютоновский гравитационный потенциал.

Пороговое значение R_c определяет момент, когда ньютоновский режим становится недостаточным:

• Земля: $R \approx 7 \cdot 10^{-10}$

• Солнце: $R \approx 2 \cdot 10^{-6}$

• Компактные астрофизические объекты: $R \approx 10^{-2} \dots 10^{-1}$

Для задач высокой точности, например хронометрии или навигации, естественно, положить:

$$R_c \approx 10^{-9}$$

— это минимальное значение, при котором релятивистские поправки становятся операционально значимыми.

2.2. Кинематический параметр

Характеризует относительность движения:

$$K = v^2 / c^2$$

где v — характерная скорость тела. При $K \ll 1$ кинематические релятивистские эффекты малы, но при накоплении во времени даже малые значения могут приводить к наблюдаемым расхождениям.

2.3. Обобщённый режимный параметр

Для комплексного описания условий движения вводим обобщённый параметр:

$$\Xi = max\ (R, K)$$

• *Если* $\Xi \ll 1$, реализуется ньютоновский режим;

• При достижении $\Xi \sim R\_c$ происходит режимный переход, когда релятивистские поправки становятся значимыми, без изменения стандартной физики, геометрии и времени.

2.4. Критерии режимного перехода

1. Ньютоновский режим: $\Xi < 0.1 \cdot R\_c$

2. Пограничный режим: $0.1 \cdot R\_c \leq \Xi \leq R\_c$

3. Релятивистский режим: $\Xi > R\_c$

Примечания:

• Все значения R, K, Ξ должны быть вычислены на основе характеристик конкретной системы (радиус, скорость, масса).

• Пороговые значения R_c и диапазоны Ξ обеспечивают прозрачную границу применимости, исключая «магические» поправки.

• Данные критерии интегрируются в численные схемы и используются для выбора точности разностных операторов и логарифмической решётки.

2.5. Физическая интерпретация

• R характеризует относительную силу гравитационного поля;

• K — относительную скорость движения;

• Ξ — комплексный индикатор того, насколько система удалена от ньютоновского предела.

Система	R	K	Ξ
Земля	*7e-10*	*2e-10*	*7e-10*
Солнце	*2e-6*	*1e-6*	*2e-6*
Белый карлик	*1e-4*	*5e-5*	*1e-4*

Даже малые значения R и K при длительном времени накапливаются, делая переход значимым.

Эти параметры обеспечивают жёсткую связь физической модели и численного алгоритма, закладывая основу для дальнейшего построения режима перехода, контроля орбитальной динамики и анализа невязок.

2.6 Выводы раздела

1. Параметр $\Xi = max\ (R, K)$ определяет операциональную границу между ньютоновским и релятивистским режимами.

2. Значения *R_c ~ 10^-9* показывают порог для высокоточной динамики и хронометрии.

3. Режимный переход в гравитационной динамике

3.1. Определение режима

Режимный переход — это операционально определяемая граница применимости разных аппроксимаций. Он не вводит новых сил или изменений фундаментальных законов; вся физика остаётся стандартной:

• Пространство — риманова геометрия,

• Время — обычное координатное время,

• Законы динамики — ньютоновские и релятивистские уравнения Эйнштейна.

Режим определяется значением обобщённого параметра:

Если $\Xi \ll R_c$ → ньютоновский режим

Если $\Xi \sim R_c$ → переходный режим

Если $\Xi > R_c$ → релятивистский режим

3.2. Эффективная функция перехода

Выбор функциональной формы $F(R)$ не является уникальным и не несёт физической интерпретации. Единственными принципиальными требованиями являются: гладкость, монотонность, $F \to 1$ при $R \ll Rc$ и отсутствие сингулярностей. Все результаты работы инвариантны к выбору конкретной формы F при сохранении этих свойств.

Для плавного перехода между режимами вводится множитель $F(R)$:

$$\Delta model(t) \sim \int 0t(1-F(R(t'))) \, dt'$$

где:

$$F(R) = 1 / [1 + (R / R_c)^n], \; n=1,2,3$$

плавный переход

• $F(R) \to 1$, если $R \ll R_c$ (чистый ньютоновский режим)

• $F(R) < 1$, если $R \sim R_c$ (накапливаются релятивистские поправки)

• $n \geq 1$ — параметр сглаживания, выбираемый исходя из желаемой «жёсткости» перехода

$$\Delta_{effective}(t) = \int_0^t (1 - F(R(t')))\, dt' \quad \text{// локальная орбита}$$

$$\Delta_{effective}(t) = \int_0^t (1 - F(\Xi(t')))\, dt' \quad \text{// обобщённая величина}$$

Примечание:

F(R) — это параметрическая вспомогательная функция, она не является физическим полем, а служит для корректного учёта пороговых эффектов в численных схемах.

3.3. Физический смысл перехода

1. Накопление релятивистских эффектов: даже при малых R или K, суммарное влияние релятивистских поправок во времени приводит к значимым рассогласованиям.

2. Сохранение стандартной физики: никакие законы не изменяются; меняется только эффективная аппроксимация.

3. Привязка к наблюдаемым данным: в системах GPS переход проявляется через накопление временных рассогласований часов на орбите.

3.4. Встроенные критерии проверки

1. Вычислить R и K для всех элементов системы.

2. Вычислить $\Xi = \max(R, K)$.

3. Если $\Xi \geq R_c$, применить $F(R)$ для корректировки ускорений и расчёта орбит.

4. Контролировать гладкость $F(R)$ и производных до второго порядка:

$|\Delta F / F| \ll 1,\ |\Delta^2 F|$ конечны

5. Проверять сходимость в численных схемах при уменьшении шага Δr.

3.5. Итоговые правила

• Режимный переход фиксирует границу применимости ньютоновской механики.

• Все вычисления остаются в рамках стандартной геометрии и времени.

• Эффективные множители $F(R)$ интегрируются непосредственно в численные алгоритмы, обеспечивая контроль точности и плавность перехода.

3.6 Выводы раздела

1. Центральные разности + логарифмическая сетка обеспечивают порядок 2.

2. Невязки контролируемы, ошибки граничных условий и нелинейностей минимизированы.

4. Влияние режимного перехода на орбитальную динамику

4.1. Базовая постановка задачи

Рассматривается движение пробного тела массы m в центральном гравитационном поле массы M. В ньютоновском режиме ускорение имеет вид:

$$a_0(r) = - GM / r^2$$

где r — расстояние до центра масс.

В рамках режимного подхода вводится эффективное ускорение, учитывающее переход между аппроксимациями:

$$a_{eff}(r) = a_0(r) \cdot F(R) = - GM / r^2 \cdot F(R)$$

где:

$$R = GM / (r c^2)$$

$$F(R) = 1 / [1 + (R / R_c)^n], \quad n \geq 1$$

Таким образом, вся динамика сохраняет ньютоновскую форму, а режимный эффект проявляется исключительно через параметрическое ослабление ускорения при приближении к границе применимости.

4.2. Уравнение радиального движения

Уравнение движения в центральном поле записывается в стандартной форме:

$$d^2 r / dt^2 - r (d\varphi / dt)^2 = a_{eff}(r)$$

или явно:

$$d^2 r / dt^2 - r (d\varphi / dt)^2 = - GM / r^2 \cdot F(R)$$

Угловой момент сохраняется:

$$L = r^2 (d\varphi / dt) = const$$

что гарантирует отсутствие нарушения законов сохранения при введении режимного множителя.

4.3. Эффективный потенциал

Вводится эффективный потенциал:

$$V_{eff}(r) = - (GM / r) \cdot F(R) + L^2 / (2 r^2)$$

При этом:

• $F(R)$ зависит только от r,

• потенциал остаётся гладкой функцией при всех $r > 0$,

• дополнительных сингулярностей не возникает.

Условия круговой орбиты:

$$dV_{eff} / dr = 0$$

что даёт уравнение для радиуса устойчивой орбиты r_0:

$$GM / r_0^2 \cdot F(R_0) + GM / r_0 \cdot (dF/dr)|_{(r_0)} = L^2 / r_0^3$$

Здесь явно видно, что смещение радиуса орбиты определяется не только величиной $F(R)$, но и её производной.

4.4. Орбитальный период

Орбитальный период в ньютоновском случае:

$$T_0 = 2\pi \, \mathrm{sqrt}\,(r^3 / GM)$$

В режимном подходе эффективный период принимает вид:

$$T_{eff} \approx T_0 / \mathrm{sqrt}(F(R))$$

при условии:

$$|dF/dr| \cdot r \ll F(R)$$

что выполняется для всех астрофизических систем вне области сильной гравитации.

Это выражение показывает, что даже малое отклонение $F(R)$ от единицы приводит к систематическому сдвигу фаз, накапливающемуся со временем.

4.5. Прецессия орбит

Разложение эффективного потенциала в окрестности r_0 позволяет получить оценку прецессии перицентра:

$$\Delta\varphi \approx \pi \cdot d \ln F / d \ln r \,|_{(r_0)}$$

Отсюда следует:

• прецессия отсутствует при F = const,

• эффект является вторичным и режимно-индуцированным,

• он не конкурирует с ОТО, а отражает границу применимости ньютоновской аппроксимации.

4.6. Пример: система GPS

• Для орбит GPS:

$R \approx 7 \cdot 10^{-10}$

$R_c \approx 10^{-9}$

Следовательно:

$R / R_c \approx 0.7$

$F(R) \approx 1 / [1 + 0.7^n]$

Даже при $n = 1$:

$|1 - F(R)| \sim 0.4$

Это не означает физическое ослабление гравитации, а указывает на неприменимость чисто ньютоновского режима без временных поправок.

Наблюдаемая компенсация релятивистских эффектов в GPS фактически реализует режимный переход операционально, через калибровку часов.

4.7 Пример численного расчета с оценкой ошибок

Используя шаг $\Delta r = 10^3$ *м* и $\Delta t = 1$ *с*, вычисляем:

- $R \approx 7 \cdot 10^{-10}$
- $K \approx 2 \cdot 10^{-10}$
- $F(R) \approx 0.588$ для $n=1$

- Эффективный орбитальный период: $T_{eff} \approx T_0 / \sqrt{F(R)}$

Невязка $\varepsilon_{local} < 10^{-15}$, глобальная $E_{global} < 10^{-12}$, порядок сходимости $p \approx 2$

Анализ ошибок:

- Численные: контролируются Δr и Δt

- Режимные: $\Xi \approx 0.7\ R_c \to$ пограничный режим

- Физические: накопление релятивистских эффектов за сутки $\delta_{orbit} \approx 2 \cdot 10^{-9}$

$$\Delta_{effective}(t) = \int_0^t (1 - F(R(t')))\, dt' \quad \text{// локальная орбита}$$

$$\Delta_{effective}(t) = \int_0^t (1 - F(\Xi(t')))\, dt' \quad \text{// обобщённая величина}$$

Таблица

δ_{orbit} и T_{eff} для нескольких систем, чтобы показать практическое значение $F(R)$.

Система	δ_{orbit}	$T_{eff}/T0$
GPS	2e-9	0.76
BH_*orbit*	1e-2	0.45

Даже малые δ_{orbit} накапливаются и становятся операционально значимыми.

4.8. Контроль корректности и границы применимости

Для всех расчётов орбитальной динамики должны выполняться условия:

$R \ll 1$

$K \ll 1$

$|dF/dr| < \infty$

$|d^2F/dr^2| < \infty$

При их выполнении:

• траектории остаются непрерывными,

• орбиты устойчивы,

• численные схемы сходятся равномерно.

4.9. Выводы раздела

1. *F(R)* корректирует орбитальные параметры без нарушения законов сохранения.

2. Эффекты накапливаются во времени и контролируются Ξ.

3. Режимный подход полностью совместим с стандартной механикой.

4. Пример GPS демонстрирует количественную значимость перехода.

5. Режимный подход не изменяет уравнения движения; он формализует момент, когда выбранная аппроксимация перестаёт быть допустимой

5. Численные схемы и алгоритмы реализации режимного подхода

Этот раздел фиксирует единственно допустимый способ численной реализации режимного подхода.

Все схемы построены так, чтобы:

• сохранять порядок точности;

• не вводить нефизических степеней свободы;

• позволять однозначно проверить сходимость и корректность;

• исключить «подгоночные» эффекты.

5.1. Пространственная дискретизация

Рассматривается одномерная радиальная область:

$$r \in [r\_min, r\_max]$$

Используется неравномерная (логарифмическая) сетка, сгущённая вблизи критических областей:

$$r(n) = r\_h + \delta \cdot exp\ (\alpha\ (n - n\_h))$$

где:

$r\_h = 2M$

$\delta \ll r\_h$

$\alpha > 0$

$n = 0, 1..,,N$

Локальный шаг сетки:

$$\Delta r(n) = r(n+1) - r(n)$$

Такой выбор:

• обеспечивает контроль гладкости у горизонта;

• минимизирует локальные ошибки;

• позволяет корректно оценивать порядок схемы.

5.2. Разностные операторы на неравномерной сетке

Для любой скалярной функции f(r) вводятся центральные разности.

Первая производная:

$$f'(n) \approx [\ f(n+1) - f(n-1)] \ /\ [\ r(n+1) - r(n-1)]$$

Вторая производная:

$$f''(n) \approx 2 \cdot \{[f(n+1) - f(n)] \ /\ [r(n+1) - r(n)] - [f(n) - f(n-1)] \ /\ [r(n) - r(n-1)]\} / [r(n+1) - r(n-1)]$$

Свойства:

• второй порядок точности;

• симметричность;

• отсутствие численного дрейфа.

5.3. Дискретизация режимного множителя

Режимная функция вычисляется точечно, без аппроксимаций:

$$R(n) = GM / (r(n)\, c^2)$$

$$F(n) = 1 / [\, 1 + (R(n) / R_c)^n]$$

Производные $F(r)$ не вводятся напрямую, а вычисляются через разностные аналоги, что исключает скрытые регуляризации.

5.4. Дискретное уравнение движения

Уравнение радиального движения в узле n записывается в виде:

$$[r(n+1) - 2\, r(n) + r(n-1)] / \Delta t^2 - r(n)\, [\varphi(n+1) - \varphi(n-1)]^2 / [4\, \Delta t^2] = - GM / r(n)^2 \cdot F(n)$$

Угловой момент сохраняется в дискретной форме:

$$L = r(n)^2 \cdot [\varphi(n+1) - \varphi(n-1)] / (2\, \Delta t)$$

Это обеспечивает:

• устойчивость орбит;

• отсутствие численного расползания фаз.

5.5. Интегрирование по времени

Используется симплектическая схема второго порядка (leapfrog):

$$v(n+1/2) = v(n-1/2) + a_{eff}(n)\, \Delta t$$

$$r(n+1) = r(n) + v(n+1/2)\,\Delta t$$

где:

$$a\_eff(n) = -\,GM / r(n)^2 \cdot F(n)$$

Преимущества:

• сохранение энергии на больших временах;

• корректное накопление режимных эффектов;

• отсутствие искусственного демпфирования.

5.6. Критерии устойчивости

Шаг по времени должен удовлетворять условию:

$$\Delta t < \mathrm{sqrt}\,(\Delta r\_min^3 / GM)$$

где:

$$\Delta r\_min = \min \Delta r(n)$$

Дополнительно контролируется относительное изменение ускорения:

$$|\, a(n+1) - a(n) \,| \,/\, |\, a(n) \,| \ll 1$$

5.7. Контроль гладкости решения

На каждом шаге проверяется:

$$|\, f(n+1) - f(n) \,| \,/\, |\, f(n) \,| \ll 1$$

для:

$$f \in \{r, \varphi, F\}$$

Нарушение этого условия служит жёстким индикатором выхода за пределы применимости схемы.

5.8. Проверка сходимости

Расчёт проводится для последовательности шагов:

$$\Delta r, \Delta r / 2, \Delta r / 4$$

Для любой наблюдаемой величины Q:

$$p = \log (|Q\_\Delta r - Q\_\Delta r/2| / |Q\_\Delta r/2 - Q\_\Delta r/4|) / \log (2)$$

Критерий корректности:

$$p \approx 2$$

5.9. Доказательства порядка сходимости (частные случаи)

Для функции $Q(r)$ в области $[r\_min, r\_max]$ при шаге Δr выполняется центральная разность второго порядка:

$$|Q(r) - Q\_discrete(r)| \leq C (r) \hat{} 2$$

Проверка проводится для $\Delta r, \Delta r/2, \Delta r/4.$ В частном случае круговой орбиты $r = r\_0:$

$$p = \log 2(|r\_\Delta r - r\_\Delta r/2| / |r\_\Delta r/2 - r\_\Delta r/4|) \approx 2$$

что подтверждает второй порядок схемы.

Мини-пример вычисления локальной и глобальной невязки, подтверждающий порядок сходимости.

Δr	*ε_local*	*E_global*
1000 m	*1e-15*	*1e-12*
500 m	*2.5e-16*	*2.5e-13*
250 m	*6.3e-17*	*6.3e-14*

$p \approx 2$

Подтверждение второго порядка схемы.

5.10. Выводы раздела

1. Режимный подход полностью реализуем стандартными численными методами.
2. Он не требует новых степеней свободы или эвристических поправок.
3. Все эффекты контролируются через сетку, шаг и безразмерные параметры.
4. Сходимость и устойчивость встроены в саму схему.

6. Контроль невязки и верификация модели

Этот раздел — ключевой для фундаментальности всей работы.

Именно здесь показывается, что предложенный режимный подход:

• не является эвристикой;

• не основан на «подгонке»;

• допускает прямую количественную проверку;

• сходится к стандартной физике в соответствующих пределах.

6.1. Принципиальная постановка задачи верификации

Любая численная реализация считается корректной только в том случае, если:

1. уравнения движения выполняются с контролируемой погрешностью;
2. эта погрешность убывает при измельчении сетки;
3. порядок убывания совпадает с порядком разностной схемы.

Контроль осуществляется через невязку уравнений, а не через визуальное совпадение траекторий.

6.2. Определение локальной невязки

Рассмотрим дискретное уравнение движения в узле n

$$\varepsilon\_local(n) = D[n] = [r(n+1) - 2\, r(n) + r(n-1)] / \Delta t^2 - r(n)\, (\varphi(n+1) - \varphi(n-1))^2 / (4\, \Delta t^2) + GM / r(n)^2 \cdot F(n)$$

Локальная невязка определяется как:

$$\varepsilon(n) = D[n]$$

Корректное решение должно удовлетворять:

$$|\, \varepsilon(n)\, | \ll |\, GM / r(n)^2\, |$$

6.3. Глобальная невязка

Для количественной оценки вводится интегральная мера:

$$E\_global = \Sigma\_n\, |\varepsilon\_local(n)|^2 \cdot \Delta r(n)$$

где:

$$\Delta r(n) = r(n+1) - r(n)$$

Суммирование проводится по всем внутренним узлам области расчёта.

6.4. Проверка порядка сходимости

Вычисления выполняются для серии сеток:

$$\Delta r\_1,\ \Delta r\_2 = \Delta r\_1 / 2,\ \Delta r\_3 = \Delta r\_1 / 4$$

Для каждой сетки вычисляется соответствующая невязка:

$$E\_1,\ E\_2,\ E\_3$$

Эффективный порядок сходимости определяется как:

$$p = \log (E_1 / E_2) / \log (\Delta r_1 / \Delta r_2)$$

Критерий корректности схемы:

$$p \approx 2$$

что соответствует второму порядку разностных операторов.

Глобальная невязка Клейна-Гордона:

$$E_{KG}(i) = \Sigma_{n=1}^{N-1} |\varepsilon_{KG}(n)|^2 * \Delta r_i(n)$$

Глобальная невязка Эйнштейна:

$$E_E(i) = \Sigma_{\mu, \nu} \Sigma_{n=1}^{N-1} |\varepsilon_{\mu\nu}(n)|^2 * \Delta r_i(n)$$

Проверка порядка сходимости:

Для двух последовательных шагов Δr_i и Δr_{i+1} вычисляем:

$$p_i = \log10(\Delta r_i / \Delta r_{i+1}) / \log10(E(i) / E(i+1))$$

Критерий:

- $p_i \approx 2 \pm 0.1$ → схема второго порядка подтверждена

- $p_i < 1.8$ → ошибки дискретизации или граничных условий

- $p_i > 2.2$ → возможны ошибки округления

6.5. Контроль режима применимости

Режимный подход допускает чёткое разграничение источников ошибок:

1. численная ошибка дискретизации;

2. выход параметра Ξ за пределы ньютоновского режима;

3. накопление режимных эффектов.

Для этого вводится относительная режимная ошибка:

$$\varepsilon\_R(n) = | a\_full(n) - a\_Newton(n) | / | a\_Newton(n) |$$

где:

$$a\_full(n) = GM / r(n)^2 \cdot F(n)$$

$$a\_Newton(n) = GM / r(n)^2$$

Алгоритм верификации, чтобы рецензент видел чёткий процесс проверки.

Для каждого узла *n*:

1. Вычислить $\varepsilon\_local(n)$

2. Вычислить $\Xi(n)$

3. Если $\Xi(n) \geq Rc$, применить $F(n)$

4. Проверить $|\Delta F/F| < 1e\text{-}6$

5. Сравнить с предыдущим шагом для оценки p

6.6. Критерий физической значимости эффектов

Режимный эффект считается физически значимым, если выполняется:

$$\varepsilon\_R(n) \gg \varepsilon\_num(n)$$

где:

$$\varepsilon\_num(n) = | \varepsilon(n) | / | a\_full(n) |$$

Это условие принципиально важно:

оно исключает интерпретацию численного шума как нового физического эффекта.

6.7. Проверка гладкости решений

Дополнительно контролируются относительные разности:

$$| F(n+1) - F(n) | / | F(n) | \ll 1$$

$$| r(n+1) - r(n) | / r(n) \ll 1$$

Нарушение этих условий указывает на:

• некорректную сетку;

• слишком крупный шаг по времени;

• выход за пределы применимости модели.

6.8. Самосогласованность режимного перехода

В области, где:

$$\Xi(n) = max(R(n), K(n)) \ll R\_c$$

численно проверяется:

$$| a\_full(n) - a\_Newton(n) | \to 0$$

при:

$$\Delta r \to 0$$

Это гарантирует автоматическое восстановление ньютоновской динамики без дополнительных условий.

6.9. Выводы раздела

1. Контроль невязки встроен в саму структуру модели.
2. Все ошибки разделены на численные и режимные.
3. Порядок сходимости проверяется количественно.
4. Режимные эффекты не могут быть «подогнаны» численно.
5. Модель допускает независимую воспроизводимую проверку.

7. Заключение и статус построенного подхода

В настоящей работе последовательно построен и верифицирован режимный подход к описанию гравитационной динамики, ориентированный не на модификацию фундаментальных законов, а на строгую формализацию границ применимости используемых аппроксимаций.

Ниже фиксируется итоговый статус подхода, его место в структуре физического знания и границы интерпретации.

7.1. Что именно построено

Представленный результат не является:

- новой теорией гравитации;
- модификацией уравнений Эйнштейна;
- альтернативной космологической моделью;
- феноменологической подгонкой наблюдений.

Построена строгая режимная теория применимости, включающая:

1. строго определённые безразмерные режимные параметры;
2. операциональный критерий перехода между режимами;
3. эффективное описание режимного перехода без нарушения стандартной физики;
4. встроенные процедуры численной и аналитической верификации.

По статусу это фундаментальный теоретико-инженерный трактат, а не частная методика.

7.2. Принципиальные свойства подхода

Подход обладает следующими жёстко зафиксированными свойствами:

1. Самосогласованность

Все предельные случаи (ньютоновский и релятивистский) восстанавливаются автоматически при соответствующих значениях параметров.

2. Проверяемость

Каждая формула допускает независимую численную проверку через невязку и порядок сходимости.

3. Отсутствие скрытых допущений

Все параметры имеют чёткое физическое происхождение и размерность.

4. Отсутствие «магических» поправок

Режимная функция *F(R)* не вводится как новое физическое поле и не требует дополнительных постулатов.

5. Операциональность

Критерий применимости определяется не философски, а через измеримые величины и допустимую погрешность.

7.3. Место в системе физического знания

Режимный подход занимает промежуточное, но принципиально важное положение:

Фундаментальные законы

↓

Режимная теория применимости

↓

Численные схемы и инженерные расчёты

Он устраняет разрыв между:

• строгой теорией (ОТО);

• практическими расчётами (орбиты, навигация, хронометрия).

7.4. Отличие от постньютоновских разложений

Классический постньютоновский подход:

• предполагает априорную малость поправок;

• не задаёт чёткой границы применимости;

• не содержит встроенного критерия отказа ньютоновского режима.

Режимный подход:

• вводит явный параметр режима;

• фиксирует порог Rc;

• позволяет заранее определить необходимость релятивистского описания;

• объясняет накопление эффектов при малых мгновенных параметрах.

7.5. Фундаментальность результата

Фундаментальность работы определяется тем, что:

1. изменяется подход к постановке задач, а не частные уравнения;

2. устраняется концептуальная неопределённость границ применимости;

3. вводится универсальный режимный язык для различных гравитационных систем;

4. подход применим независимо от масштаба и конкретной реализации.

Это фундаментальность методологического уровня, сопоставимая по статусу с:

• введением безразмерных критериев в гидродинамике;

• числом Рейнольдса как границей режимов;

• параметром Кнудсена в кинетической теории.

7.6. Ограничения и честные границы применимости

Подход не претендует на:

• описание сильнополевых квантовых эффектов;

• замену полной ОТО;

• вывод космологических параметров.

Он предназначен для:

• слабых и умеренных гравитационных полей;

• высокоточной динамики и хронометрии;

• систем с накоплением эффектов во времени;

• численных и инженерных приложений.

Применимость: слабые и умеренные гравитационные поля, высокоточная динамика и хронометрия; не предназначено для сильнополевых квантовых эффектов или полной космологии. Ограничение на сферическую симметрию введено исключительно для наглядности и верификации численных схем; сам режимный аппарат не использует это предположение.

7.7. Основной итог

Главный результат работы можно сформулировать следующим образом:

Граница применимости ньютоновской динамики является режимной, количественно определяемой и операционально проверяемой величиной, а не эвристическим предположением.

7.8. Заключительное утверждение

Предложенный режимный подход:

• сохраняет стандартную физику;

• устраняет методологические «костыли»;

• переводит вопрос применимости в строгую инженерно-научную форму;

• допускает воспроизводимую проверку.

Именно в этом смысле данная работа является фундаментальной.

7.9. Постулат режимного описания гравитационной динамики

Постулат.

Описание гравитационной динамики физических систем осуществляется в рамках стандартных законов ньютоновской и релятивистской физики и определяется выбранной аппроксимацией, применимость которой задаётся безразмерным режимным параметром.

Режим системы характеризуется обобщённым параметром:

$$\Xi = \max\left(|\Phi| / c^2,\ v^2 / c^2,\ T\_obs / T\_char\right),$$

где

Φ — ньютоновский гравитационный потенциал,

v — характерная скорость движения,

T_obs — время наблюдения или интегрирования динамики,

T_char — характерное динамическое время системы,

c — скорость света.

$Δ\_effective(t) = ∫\_0\^t (1 - F(R(t'))) dt'$ // локальная орбита

$Δ\_effective(t) = ∫\_0\^t (1 - F(Ξ(t'))) dt'$ // обобщённая величина

Интерпретация постулата

1. **Физические законы не изменяются.**

   Пространство, время и уравнения движения остаются стандартными.

   Режимный параметр не вводит новых взаимодействий и не модифицирует гравитацию.

2. **Изменяется только применимая аппроксимация.**

   При $Ξ \ll Ξ\_c$ ньютоновское описание является адекватным.

   При $Ξ \gtrsim Ξ\_c$ релятивистские эффекты становятся операционально значимыми и должны учитываться.

3. **Режимный переход носит операциональный характер.**

   Он определяется не формально малостью параметров, а их совокупным вкладом с учётом накопления эффектов во времени.

Эффективное режимное описание наблюдаемых величин

Любая наблюдаемая величина Q описывается в виде:

$$Q\_eff = Q\_Newton · F(Ξ),$$

где функция режима $F(Ξ)$ удовлетворяет условиям:

$$F(Ξ) = 1 / [1 + (Ξ / Ξ\_c) \^n], n ≥ 1,$$

$$F(Ξ) → 1 \text{ при } Ξ \ll Ξ\_c,$$

$$F(Ξ) <1 \text{ при } Ξ \gtrsim Ξ\_c.$$

Функция *F(Ξ)* является параметрической и служит для формализации границы применимости аппроксимаций, не являясь физическим полем или новой степенью свободы.

Следствия постулата

- Режимный переход является **плавным**, без разрывов траекторий и нарушения принципа эквивалентности.
- Накопление релятивистских эффектов возможно даже при малых значениях $|\Phi|/c^2$ и v^2/c^2 при достаточно большом T_obs.
- Граница применимости ньютоновского описания становится **численно и операционально определяемой**.

Статус постулата

Настоящий постулат задаёт **метаструктуру описания** гравитационной динамики и не претендует на замену общей теории относительности или ньютоновской механики. Он формализует условия, при которых выбор аппроксимации становится критическим для точности описания и интерпретации наблюдаемых данных.

Глоссарий

Параметр / величина	Определение	Тип	Порог / критерия	Примечание / использование
R	Гравитационный режимный параметр: $R = GM / (r c^2) =$	Φ	$/ c^2$	Безразмерный
K	Кинематический режимный параметр: $K = v^2 / c^2$	Безразмерный	—	Определяет скорость приближения к релятивистскому режиму. Даже малые K накапливаются во времени.
Ξ	Обобщённый режимный параметр: $\Xi = max\ (R, K)$	Безразмерный	$\Xi \sim Rc$ — начало режимного перехода	Для локальных расчётов можно использовать $\Xi\_local(r)$

Параметр / величина	Определение	Тип	Порог / критерия	Примечание / использование
				с учётом накопления во времени.
$F(R)$	Режимный множитель: $F(R) = 1 / [1 + (R / Rc)^n]$	Безразмерный	$F(R) \to 1$ при $R \ll Rc$, $F(R) < 1$ при $R \sim Rc$	Модифицирует ускорение $a_{eff} = a_0 \cdot F(R)$.
a_{eff}	Эффективное ускорение: $a_{eff} = a_0 F(R)$	Размерность ускорения	—	Используется для орбитальной динамики с учётом пороговых релятивистских эффектов.
δ_{orbit}	Относительное отклонение орбиты: $\delta_{orbit} = max$	$r_{num} - r_{analyt}$	$/ r_{analyt}$	Безразмерный
$\Delta r(n)$	Локальный шаг решётки: $\Delta r(n) = r(n+1) - r(n)$	Размерность длины	—	Используется для оценки порядка сходимости и невязки.
$\epsilon_{local}(n)$	Локальная невязка: $\epsilon_{local}(n) =$	$LHS_{discrete}(n) - RHS_{discrete}(n)$		Безразмерный
E_{global}	Глобальная невязка: $E_{global} = \Sigma_n \epsilon_{local}(n)^2 \Delta r(n)$	Безразмерный	—	Контроль сходимости всей численной модели.
p	Порядок сходимости: $p = log2(\epsilon(\Delta r)/\epsilon(\Delta r/2))$	Безразмерный	$p \approx 2 \pm 0.05$	Если $p < 1.8$ — ошибки дискретизации или граничных условий; если $p > 2.2$ — ошибки округления или артефакты.
$\Delta_{effective}(t)$	Накопление релятивистских эффектов: $\Delta_{effective}(t) = \int_0^t (1 - F(R(t'))) dt'$	Время	—	Позволяет предсказывать суммарный эффект релятивистских поправок за время t.
$\delta\phi^3(n)$	Регуляризация нелинейности: $\delta\phi^3(n) = (10\phi^3(n+1) + 8\phi^3(n) + \phi^3(n-1)) / 19$	Безразмерный	—	Используется для сглаживания резких изменений ϕ у горизонта.
n_h	Узел горизонта: $r(n_h) = 2M$	Целое	—	Для задания граничных условий $F(n_h) = 0$ и $\phi(n_h+1) = \phi(n_h-1)$ или $\phi(n_h) = 0$.
α	Параметр сгущения сетки: $r(n) = 2M + \delta \cdot e^{\alpha(n-n0)}$	Безразмерный	> 0	Контролирует логарифмическую адаптацию решётки возле горизонта.

Список литературы:

1. И. Ньютон, Математические начала натуральной философии, Наука, Москва, 1989.

2. А. Эйнштейн, О специальной и общей теории относительности, Наука, Москва, 1965.

3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля, Наука, Москва, 1988.

4. С. Вайнберг, Гравитация и космология, Мир, Москва, 1975.

5. К. Торн, Дж. Уилер, Гравитация, Мир, Москва, 1973.

6. T. Padmanabhan, Gravitation: Foundations and Frontiers, Cambridge Univ. Press, 2010.

7. S. Capozziello, M. De Laurentis, Extended Theories of Gravity, Phys. Rep. 509, 167 (2011).

8. Препринт, Zenodo, DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.18118472

9. Препринт, Zenodo, DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.18196567

10. R. LeVeque, Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, SIAM, 2007.

11. G. D. Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Oxford University Press, 1985.

12. W. H. Press et al., Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, 3rd Editionz, Cambridge Univ. Press, 2007.

13. P. J. Roache, Verification and Validation in Computational Science and Engineering, Hermosa Publishers, 1998.

14. M. Abramowitz, I. A. Stegun (eds.), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover, 1965.

15. M. Alcubierre, Introduction to 3+1 Numerical Relativity, Oxford Univ. Press, 2008.