СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕЗД В ДИСКЕ СПИРАЛЬНОЙ ГАЛАКТИКИ

Парфёнов Анатолий Вениаминович

Ульяновский Государственный Технический Университет
432027, Россия, г. Ульяновск, Сев. Венец, 32.
E-mail parfyonov.anatoly.v@yandex.ru ,

Аннотация

Рассматривая уравнения движения звезд диска спиральной галактики в рамках предложенной автором статьи модели идеальной галактики в статье найдена их скорость движения, совпадающая с наблюдаемой скоростью. Данный результат может служить доказательством того, что в спиральной галактике достаточно звездной массы чтобы обеспечить наблюдаемую величину скорости движения звезд в диске спиральной галактики.

Ключевые слова

Скорость звезд в диске спиральной галактики, галактика Млечный Путь, звездная масса диска спиральной галактики, модель идеальной галактики

1.Введение

Эволюция Вселенной включает в себя два противоположных друг другу процесса. Это процесс расширения Вселенной и процесс концентрации вещества приводящий к образованию звезд и звездных скоплений, называемых галактиками. Неотъемлемой частью эволюции Вселенной является эволюция галактик. Её этапы – это образование звезд, столкновения галактик и их слияния с другими галактиками, формирование диска… Учет даже части этих процессов делает очень сложным теоретическое описание галактик и заставляет искать пути, позволяющие упростить это описание. Одним из способов упростить описание галактики является рассмотрение модели галактики, в которой влияние указанных выше процессов на характер движения и форму галактики сведено к минимуму. Речь идет о модели идеальной галактики. Она состоит всего из одной части представляющей собой скопление звезд в форме тора – геометрического тела образованного вращением круга вокруг не пересекающей его и лежащей в одной с ним плоскости прямой. Данная прямая одновременно является и осью вращения звезд идеальной галактики. Направим вдоль этой прямой ось z прямоугольной декартовой системы координат. Начало отсчета декартовой системы координат (точку 0) совместим с центром окружности (её радиус обозначим r) которую будет описывать центр круга, образующего тор. Плоскость на которой лежит окружность радиуса r будет совпадать с координатной плоскостью xy.

Разобьем тор на цилиндры одинаковой высоты Δl плоскостями для которых ось z будет их общей прямой пересечения. Где $\Delta l = r\Delta\psi$ есть малый элемент дуги на окружности радиуса r, а $\Delta\psi$ есть малый элемент полярного угла (на координатной плоскости xy координаты r и ψ можно рассматривать как полярные координаты).

Модель идеальной галактики позволяет упростить уравнения движения звезд диска спиральной галактики и найти их решение.

2.Уравнения движения звезд идеальной галактики

Общий вид функции Лагранжа замкнутой системы [1] состоящей из n звезд массой m_a $(a = 1,2,\ldots,n)$, имеющих скорости $\boldsymbol{v}_a$ и радиус-векторы своего положения в пространстве $\boldsymbol{r}_a$, есть

$$L = \sum_a^n \frac{m_a \boldsymbol{v}_a^2}{2} - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots) \quad (1)$$

где потенциальная энергия [2] системы состоящей из n звезд взаимодействующих посредством гравитационного взаимодействия есть

$$U = -\frac{1}{2} G \sum_a^n \sum_{b(\neq a)}^n \frac{m_a m_b}{\sqrt{(\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b)^2}} \quad (2)$$

где G есть гравитационная постоянная, $b = 1,2,\ldots,n$.

Подставляя функцию Лагранжа (1) в уравнения Лагранжа [1] получаем n уравнений движения системы состоящей из n взаимодействующих звезд

$$m_a \frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a} \quad (3)$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a} = G \sum_{b(\neq a)}^n \frac{m_a m_b (\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b)}{[(\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (4)$$

При отыскании производной (4) было учтено следующее обстоятельство. В правой части равенства (2) индексы a и b пробегают значения от 1 до n. Поэтому любые два значения которые могут принимать индексы a и b, например 1 и 2, будут представлены в правой части равенства (2) в виде двух выражений: как $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ и как $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$. Это можно проверить, рассмотрев систему состоящую всего из двух звезд ($n=2$).

Найдем сумму уравнений движения (3) описывающих движение звезд, входящих в состав произвольного цилиндра высотой Δl. Обозначив число этих звезд n', получаем

$$\sum_a^{n'} m_a \frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt} = -G \sum_a^{n'} \sum_{b(\neq a)}^{n} \frac{m_a m_b(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b)}{[(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (5)$$

Преобразуем левую часть уравнений (5) следующим образом.

$$\sum_a^{n'} m_a \frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_a^{n'} m_a \boldsymbol{r}_a = m' \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = m' \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} \quad (6)$$

где $m' = \sum_a^{n'} m_a$ есть суммарная масса звезд в произвольно выбранном цилиндре высотой Δl, $\boldsymbol{R} = \frac{1}{m'}\sum_a^{n'} m_a \boldsymbol{r}_a$ есть радиус-вектор центра инерции звезд выбранного цилиндра, $\boldsymbol{V}$ есть скорость центра инерции звезд выбранного цилиндра.

Теперь преобразуем правую часть уравнений (5). Заметим, что модель идеальной галактики обладает симметрией, которая в частности означает, что каждый из цилиндров на которые мы разбили тор состоит из n' звезд. Поэтому всего у нас будет $k=n/n'$ цилиндров. Представим в правой части уравнений (5) сумму в виде $k=n/n'$ сумм:

$$\sum_a^{n'} \sum_{b(\neq a)}^{n} \frac{m_a m_b(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b)}{[(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b)^2]^{\frac{3}{2}}} = \sum_a^{n'} \sum_{b_1(\neq a)}^{n'} \frac{m_a m_{b_1}(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_{b_1})}{\left[(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_{b_1})^2\right]^{\frac{3}{2}}} +$$

$$+ \sum_a^{n'} \sum_{b_2}^{n'} \frac{m_a m_{b_2}(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_{b_2})}{\left[(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_{b_2})^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \cdots + \sum_a^{n'} \sum_{b_k}^{n'} \frac{m_a m_{b_k}\left(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_{b_k}\right)}{\left[\left(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_{b_k}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (7)$$

Равенство (7) получено введением вместо индекса b индексов $b_1, b_2, \dots, b_k$. Где $b_1 = 1, 2, \dots, n'$; $b_2 = n'+1, n'+2, \dots, 2n'$;…, $(k-1)n'+1$, $(k-1)n'+2, \dots, kn'$. Эта замена позволяет связать каждую из этих k сумм с одним из k цилиндров. Чтобы упростить дальнейшее рассмотрение будем считать, что порядок индексов $b_1, b_2, \dots, b_k$ соответствует порядку расположения цилиндров вдоль тора. Будем считать, что первая сумма (индекс b_1) в (7) описывает звезды из произвольно выбранного нами цилиндра. Его мы будем считать первым цилиндром. Заметим, что звезды из произвольно выбранного нами цилиндра описывает и левая часть уравнений (5) которую мы преобразовали в (6). Следовательно первая сумма (индекс b_1) в (7) описывает силу взаимодействия между собой звезд произвольно выбранного нами цилиндра т.е. первого цилиндра. Вторая сумма (индекс b_2) описывает силу взаимодействия звезд первого цилиндра со звездами второго цилиндра и т. д.

Для того чтобы получить реальную скорость движения звезд используя модель идеальной галактики её параметры должны совпадать или быть очень близкими с параметрами реальной галактики. Далее рассмотрим модель идеальной галактики, имеющей параметры очень близкие с параметрами галактики Млечный Путь.

Высота цилиндров $\Delta l \approx \lambda = 4{,}7 \cdot 10^{16}$м есть среднее расстояние между звездами Млечного Пути, $r = 3{,}5 \cdot 10^{20}$м это расстояние от начала отсчета системы координат (точка 0) до центра круга образующего тор оно очень близко к радиусу галактики Млечный Путь. Масса звезд тора должна равняться звездной массе диска Млечного Пути $m = 10^{41}$кг, средняя масса звезды тора должна равняться средней массе звезды Млечного Пути $m_1 = 0{,}45 \cdot 10^{30}$кг. У идеальной галактики все звезды имеют одинаковую массу равную массе m_1. Поэтому параметры идеальной галактики связаны соотношением, определяющим количество звезд в идеальной галактике

$$n = \frac{m}{m_1} = \frac{2\pi r S}{\frac{\pi}{6}\lambda^3} \qquad (8)$$

где $S = \pi\xi_m^2$ есть площадь круга образующего тор, ξ_m есть радиус круга, образующего тор. Соотношение (8) позволяет найти величину радиуса круга, полностью соответствующую указанным выше параметрам идеальной галактики $\xi_m = 4{,}2 \cdot 10^{19}$м.

Зная параметры идеальной галактики можно упростить равенство (7) преобразовав радиус-векторы $\boldsymbol{r}_a, \boldsymbol{r}_{b_1}, \boldsymbol{r}_{b_2}, \dots, \boldsymbol{r}_{b_k}$. Для этого достаточно рассмотреть один из них, так как остальные радиус-векторы, задающие положение звезд в пространстве, будут преобразовываться аналогично. Представим радиус-вектор звезды в виде суммы $\boldsymbol{r}_a = r\boldsymbol{i}_{r_a} + \boldsymbol{\xi}_a$. Где, как уже сказано, r есть радиус окружности которую описывает центр круга образующего тор, $\boldsymbol{i}_{r_a}$ есть единичный вектор полярной системы координат, $\boldsymbol{\xi}_a$ есть вектор направленный из центра круга образующего тор к a-й звезде. Так как каждый из рассматриваемых радиус-векторов задает положение звезд определенного цилиндра высотой $\Delta l \approx \lambda$ относительное отклонение каждого из полярных векторов $\boldsymbol{i}_{r_a}$ будет порядка $\lambda/r \approx 1{,}3 \cdot 10^{-4}$. Малость этой величины позволяет считать, что все векторы задающие положение звезд данного цилиндра $\boldsymbol{i}_{r_a}$ имеют одно и тоже направление. Например все векторы первого цилиндра равны $\boldsymbol{i}_{r_a} = \boldsymbol{i}$. Мы выбрали направление оси x декартовой системы координат так чтобы она проходила через первый цилиндр. Для остальных цилиндров $\boldsymbol{i}_{b_2} = \boldsymbol{i}\cos\psi_2 + \boldsymbol{j}\sin\psi_2$ и т.д. Используя равенство $\boldsymbol{r}_a = r\boldsymbol{i}_{r_a} + \boldsymbol{\xi}_a$ найдем среднее значение радиус-векторов описывающих положения звезд одного цилиндра

$$\frac{1}{n'}\sum_a^{n'} \boldsymbol{r}_a = r\boldsymbol{i}_{r_{(a)}} + \frac{1}{n'}\sum_a^{n'} \boldsymbol{\xi}_a. \tag{9}$$

У идеальной галактики в силу симметрии среднее значение (9) совпадает с центром круга образующего тор и равно $r\boldsymbol{i}_{r_{(a)}} = \frac{1}{n'}\sum_a^{n'} \boldsymbol{r}_a$. Отсюда следует, что у идеальной галактики $\sum_a^{n'} \boldsymbol{\xi}_a = 0$. Так как у идеальной галактики все звезды имеют одинаковую массу равную массе m_1 поэтому радиус-вектор центра инерции звезд принадлежащих к данному цилиндру равен

$$\boldsymbol{R}_{(a)} = \frac{1}{n'}\sum_a^{n'} \boldsymbol{r}_a \tag{10}$$

и совпадает с радиус-вектором центра круга, образующего тор $\boldsymbol{R}_{(a)} = r\boldsymbol{i}_{r_{(a)}}$. Данные выкладки означают, что для идеальной галактики Δl не может быть ни больше λ ни меньше λ так как при любых отклонениях Δl от λ центр инерции цилиндра не будет совпадать с центром круга образующего тор. Заметим, что центр круга является геометрическим центром круга.

Найдем чему будет равна первая сумма в правой части равенства (7) описывающая силу взаимодействия между собой звезд первого цилиндра. Подставим в эту сумму $\boldsymbol{r}_a = r\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\xi}_a$ и $\boldsymbol{r}_{b_1} = r\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\xi}_{b_1}$ получаем

$$\sum_a^{n'} \sum_{b_1(\neq a)}^{n'} \frac{m_a m_{b_1}(\xi_a - \xi_{b_1})}{\left|\xi_a - \xi_{b_1}\right|^3} \tag{11}$$

где $\left|\boldsymbol{\xi}_a - \boldsymbol{\xi}_{b_1}\right| = \sqrt{\left(\boldsymbol{\xi}_a - \boldsymbol{\xi}_{b_1}\right)^2}$ есть модуль разности векторов $\boldsymbol{\xi}_a - \boldsymbol{\xi}_{b_1}$. Для каждого конкретного значения индекса b_1 вектор $\boldsymbol{\xi}_{b_1}$ можно рассматривать как постоянный вектор на который происходит сдвиг положения в пространстве всех звезд первого цилиндра. Новое положение в пространстве звезд проще всего описать введением нового центра круга, который получается смещением старого центра на вектор $\boldsymbol{\xi}_{b_1}$. Очевидно, что относительно нового центра положение звезд будут задавать векторы $\boldsymbol{\xi}'_a = \boldsymbol{\xi}_a - \boldsymbol{\xi}_{b_1}$. Подставим это значение в (11) и введем вместо индекса a индексы $a_1, a_2, \dots, a_p$. Первый индекс $a_1 = 1, 2, \dots, \eta_1$ объединяет η_1 звезд рассматриваемого цилиндра находящихся на одинаковом расстоянии от нового центра $|\boldsymbol{\xi}'_1| = |\boldsymbol{\xi}'_2| = \dots = \left|\boldsymbol{\xi}'_{\eta_1}\right|$. Второй индекс $a_2 = \eta_1 + 1, \eta_1 + 2, \dots, \eta_1 + \eta_2$ объединяет η_2 звезд рассматриваемого цилиндра уже на другом но тоже одинаковом расстоянии от нового центра $\left|\boldsymbol{\xi}'_{\eta_1+1}\right| = \left|\boldsymbol{\xi}'_{\eta_1+2}\right| = \dots = \left|\boldsymbol{\xi}'_{\eta_1+\eta_2}\right|$ и т.д. Это позволяет записать (11) в следующем виде

$$\dots + m_1^2 \sum_a^{n'} \frac{\xi'_a}{|\xi'_a|^3} + \dots = \dots + \frac{m_1^2}{|\xi'_1|^3} \sum_{a_1}^{\eta_1} \boldsymbol{\xi}'_{a_1} + \frac{m_1^2}{\left|\xi'_{\eta_1+1}\right|^3} \sum_{a_2}^{\eta_1+\eta_2} \boldsymbol{\xi}'_{a_2} + \dots$$
$$\dots + \frac{m_1^2}{\left|\xi'_{\eta_1+\eta_2+\dots+1}\right|^3} \sum_{a_p}^{n'} \boldsymbol{\xi}'_{a_p} + \dots \qquad (12)$$

где $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_p = n'$. В левой части и в правой части формулы (12) показаны только члены суммы для одного конкретного значения индекса $b_1 = 1, 2, \dots, n'$ так как для других значений индекса b_1 члены суммы будут аналогичны. Но у идеальной галактики $\sum_a^{n'} \boldsymbol{\xi}_a = 0$. Очевидно, что и $\sum_{a_1}^{\eta_1} \boldsymbol{\xi}'_{a_1} = \sum_{a_2}^{\eta_1+\eta_2} \boldsymbol{\xi}'_{a_2} = \dots = \sum_{a_p}^{n'} \boldsymbol{\xi}'_{a_p} = 0$. Поэтому сумма (12) равна нулю. Отсюда следует, что первая сумма в правой части равенства (7) равна нулю. Таким образом суммарная сила, действующая между звездами первого цилиндра равна нулю.

Рассмотрим второй член в правой части равенства (7) (индекс b_2). Он описывает силу взаимодействия звезд первого цилиндра со звездами второго цилиндра. Подставим в эту сумму $\boldsymbol{r}_a = r\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\xi}_a$ и $\boldsymbol{r}_{b_2} = r\cos\psi_2\,\boldsymbol{i} + r\sin\psi_2\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{\xi}_{b_2}$. Рассмотрим результат этой подстановки в нулевом приближении, пренебрегая $\boldsymbol{\xi}_a$ и $\boldsymbol{\xi}_{b_2}$. Максимальное относительное отклонение этих величин равно $\xi_m/r = 0{,}12$. Поэтому решение в нулевом приближении будет отличаться от решения с учетом $\boldsymbol{\xi}_a$ и $\boldsymbol{\xi}_{b_2}$ на величину порядка 12%. Таким образом в нулевом приближении получаем для второй суммы (индекс b_2) в правой части равенства (7)

$$\sum_a^{n'}\sum_{b_2}^{n'}\frac{m_a m_{b_2}(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_{b_2})}{\left[(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_{b_2})^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{m'^2}{4r^2\sin\frac{\psi_2}{2}}\boldsymbol{i}-\frac{m'^2\sin\psi_2}{8r^2\left(\sin\frac{\psi_2}{2}\right)^3}\boldsymbol{j}. \tag{13}$$

Аналогичные результаты мы получим и для остальных сумм в (7) только у них вместо угла ψ_2 будут соответственно стоять углы ψ_3, ψ_4,…, ψ_k. Это позволяет записать уравнения (5) в следующем виде:

$$m'\frac{dV_x}{dt}=-\frac{Gm'^2}{4r^2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\psi_2}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\psi_3}{2}}+\cdots+\frac{1}{\sin\frac{\psi_k}{2}}\right). \tag{14}$$

$$m'\frac{dV_y}{dt}=\frac{Gm'^2}{8r^2}\left[\frac{\sin\psi_2}{\left(\sin\frac{\psi_2}{2}\right)^3}+\frac{\sin\psi_3}{\left(\sin\frac{\psi_3}{2}\right)^3}+\cdots+\frac{\sin\psi_k}{\left(\sin\frac{\psi_k}{2}\right)^3}\right]. \tag{15}$$

Найдем сумму в правой части каждого из этих уравнений. Это проще всего сделать, перейдя от дискретного распределения масс к непрерывному, что достигается заменой m' на $dm=\mu r d\psi$, где $\mu=m/2\pi r$ есть «линейная» плотность массы связанная с «объемной» плотностью массы ρ следующим равенством $\rho d\Upsilon=\mu r d\psi$, где Υ есть объем тора. После указанной замены получаем

$$\frac{dV_x}{dt}=-\frac{G\mu}{2r}\int_{\frac{\lambda}{2r}}^{2\pi-\frac{\lambda}{2r}}\frac{d\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}=-\frac{Gm}{2\pi r^2}\ln\frac{8r}{\lambda}. \tag{16}$$

$$\frac{dV_y}{dt}=\frac{G\mu}{2r}\int_{\frac{\lambda}{2r}}^{2\pi-\frac{\lambda}{2r}}\frac{d\sin\frac{\psi}{2}}{\left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^2}=0. \tag{17}$$

Эти формулы являются решением в нулевом приближении уравнений движения центра инерции выбранного нами цилиндра. Координаты этого центра инерции в декартовой системе координат есть $\boldsymbol{R}=r\boldsymbol{i}$. Полярные углы звезд образующих этот цилиндр лежат в интервале от $-\lambda/2r$ до $\lambda/2r$. Это и определяет пределы интегрирования в (16) и (17). Формула (16) определяет нормальное ускорение центра инерции выбранного нами цилиндра которое сообщает ему сила гравитационного притяжения со стороны остальных цилиндров тора. Знак минус в правой части формулы (16) говорит о том, что эта сила направлена от центра инерции выбранного нами цилиндра т. е. первого цилиндра к началу отсчета декартовой системы координат (точка 0). Величина нормального ускорения при движении по окружности радиуса r со скоростью v равна v^2/r. Очевидно она равна величине, стоящей в правой части формулы (16)

$$v^2 = \frac{Gm}{2\pi r} \ln \frac{8r}{\lambda}. \tag{18}$$

Подставляя в эту формулу приведенные выше параметры идеальной галактики совпадающие с параметрами галактики Млечный Путь находим величину скорости движения центра инерции звезд первого цилиндра вокруг оси z: $v = 1{,}8 \cdot 10^5\ \text{м/с}$. Она близка к величине наблюдаемой скорости движения звезд в галактике Млечный Путь. Так скорость движения Солнца равна $v = 2{,}2 \cdot 10^5\ \text{м/с}$.

Формула (17) определяет тангенциальное ускорение центра инерции звезд первого цилиндра. Из неё следует, что тангенциальное ускорение равно нулю. Как и должно быть в силу симметрии идеальной галактики.

3.Выводы

Главный результат, полученный в данной статье, состоит в следующем. Предложенная модель идеальной галактики в виде тора, чьи параметры близки к параметрам галактики Млечный Путь показала, что именно учет взаимодействия звезд тора при расчете их скорости движения позволяет получить величину этой скорости близкую к наблюдаемой, не требующую привлечения никаких дополнительных предположений.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: т. I. Механика – М.: Физматлит, 2004.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: т. II. Теория поля – М.: Физматлит, 2014.