ГИБРИДНАЯ СТРУКТУРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ, НЕЛИНЕЙНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Интеграция аппроксимаций Черноффа и режимно-накопительного метода)

Автор: Вепренцев Алексей Александрович
Организация: Независимый исследователь

Аннотация

Представляется единая математическая структура, интегрирующая метод аппроксимации Черноффа с режимно-накопительным подходом для решения линейных, нелинейных и многомерных динамических систем. Метод сочетает строгие свойства сходимости операторных полугрупп с физически интерпретируемыми механизмами интегрального накопления малых эффектов.

Настоящая работа развивает независимую методологическую линию. Вводится гибридный оператор эволюции, параметр переключения режимов и функционал памяти системы. Доказаны сходимость, устойчивость и согласованность метода, а также приведена численная верификация. Подход формирует масштабируемый мост между строгой операторной теорией и физически мотивированным моделированием сложных динамических процессов.

Ключевые слова

операторные полугруппы, теорема Черноффа, режимно-накопительный метод, гибридные схемы, численные методы, нелинейная динамика, устойчивость, аппроксимации

1. Введение

Классические методы аппроксимации операторов, основанные на теореме Черноффа, обеспечивают строгую сходимость для линейных эволюционных уравнений, но часто оказываются вычислительно затратными и слабо интерпретируемыми в физическом смысле при переходе к нелинейным и многомерным системам.

В отличие от существующих аппроксимационных и операторных методов, в настоящей работе вводится дополнительная динамическая переменная накопления, обладающая собственной эволюцией и физической интерпретацией. Метод не является частным случаем схем Черноффа или вариационных принципов.

В то же время режимно-накопительные методы позволяют учитывать постепенное накопление малых эффектов во времени, обеспечивая устойчивость и физическую интерпретируемость, однако требуют строгой математической формализации.

Цель данной работы — построить гибридную структуру, объединяющую строгую операторную аппроксимацию и интегральный механизм накопления эффектов в рамках единого математического каркаса.

2. Математические предварительные сведения

Пусть X — банахово пространство, а линейный оператор $L: D(L) \to X$ является плотно определённым и порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)$:

$$T(t) = exp(tL)$$

Резольвента оператора определяется как:

$$R(\lambda, L) = (\lambda I - L)^{(-1)}$$

Рассматривается эволюционное уравнение:

$$du/dt = L\, u,\ u(0) = u_0$$

2.1 Аксиомы гибридной динамики

Аксиома А1 (Операторная эволюция)
Существует замкнутый, плотно определённый оператор L, порождающий сильно непрерывную полугруппу $T(t)$.

Аксиома А2 (Накопительная динамика)
Существует функционал $\Delta(t)$, определяемый интегральным законом накопления и не сводимый к аппроксимационной ошибке.

Аксиома А3 (Неразложимость)
$\Delta(t)$не представим как функционал от локальной дискретизационной ошибки.

Аксиома А4 (Физическая реализуемость)
Существует наблюдаемая величина, ассоциированная с $\Delta(t)$.

3. Метод аппроксимации Черноффа

Пусть $\{S(h)\}$ — семейство ограниченных операторов, удовлетворяющее локальному разложению:

$$S(h) = I + hL + O(h^2),\ h \to 0$$

Теорема 3.1 (Чернофф)

При выполнении стандартных условий согласованности и ограниченности выполняется:

$$\lim (n \to \infty)\ S(t/n)^n = \exp(tL)$$

Лемма 3.1 (локальная погрешность)

$$||S(h) - (I + hL)|| \le C\, h^2$$

Предполагается, что оператор L является замкнутым, плотно определённым и порождает C_0-полугруппу. Таким образом, метод обладает строгой сходимостью, но его вычислительная сложность возрастает при переходе к сложным системам.

4. Режимно-накопительный метод

В настоящей работе $\Delta(t)$ не интерпретируется как численная ошибка,
а рассматривается как самостоятельная физико-математическая переменная,
отражающая интегральное накопление малых эффектов динамики.

4.1 Режимный параметр

Вводится безразмерный нормализованный параметр режима:

$$\Xi(t) = \max(R(t)/R_0 ,\ K(t)/K_0)$$

где R и K — гравитационные и кинематические масштабы, а R_0, K_0 — нормирующие параметры.

4.2 Пороговая функция

$$F(\Xi) = 1 / (1 + (\Xi / \Xi_c)^m),\ m \ge 1$$

Для многомерных систем, таких как сеточные модели или многокомпонентные динамические системы, вводится индексная форма режима: $\Xi_{ij}(t)$. Функционал накопления $\Delta(t)$ суммируется по всем компонентам системы, обеспечивая интегральное накопление локальных эффектов.

4.3 Функционал накопления

$$\Delta(t) = \int_0^t (1 - F(\Xi(\tau)))\, d\tau,\ \Xi \in L^1\_loc([0,T])$$

Лемма 4.1 (ограниченность)

$$0 \le \Delta(t) \le t$$

Теорема 4.1 (устойчивость накопления)

Интегральное накопление не нарушает устойчивость базовой динамики и удовлетворяет:

$$\varepsilon\_total(t) \leq \int_0^t \varepsilon\_step(\tau)\, d\tau$$

Функционал накопления *Δ(t)* интерпретируется как интегральный эффект долгосрочного смещения фаз, энергий, орбитальных элементов или временных шкал системы.
Он не является вычислительной ошибкой и может проявляться в наблюдаемых величинах как долговременный дрейф.

5. Гибридная конструкция операторов

5.1 Формальное определение

Гибридный оператор задаётся как:

Гибридный оператор определяется как:

$$T\_hybrid(t) = exp(tL) \cdot exp(-\Delta(t) / T\_ref)$$

Где:

exp(tL) — операторная полугруппа Черноффа,
а exp(−Δ(t)/T_ref) — накопительный масштабный множитель.

Гибридный оператор принадлежит классу масштабированных полугрупп.

Теорема 5.1 (Строгая сходимость гибридного оператора)

Условия:

1. Оператор *S(h)* удовлетворяет теореме Черноффа:
   $$\lim (n \to \infty)\ S(t/n)^\wedge n = exp(t\, L)$$
2. Функция *F(Ξ)* липшицева и ограничена:
   $$|F(\Xi 1) - F(\Xi 2)| \leq L\_F \cdot |\Xi 1 - \Xi 2|$$
3. *Δ(t)* абсолютно непрерывна на *[0, T]:*
   $$\Delta(t) \in AC([0, T]), \quad d\Delta/dt \in L\infty([0, T])$$

Структура доказательства:

1. Разложение оператора:
   $$S(t/n)^\wedge n \cdot F(\Xi(t)) = (I + t/n \cdot L + o(t/n))^\wedge n \cdot F(\Xi(t))$$

2. Оценка нормы:

$$|| S(t/n)^n - \exp(t L) || \leq C t^2 / n, \quad \text{для всех } t \in [0, T]$$

$$|| F(\Xi(t)) || \leq \sup (t \in [0, T]) |F(\Xi(t))| < \infty$$

3. Сильный предел:

$$\lim (n \to \infty) S(t/n)^n \cdot F(\Xi(t)) = \exp(t L) \cdot F(\Xi(t))$$

Умножение на F(Ξ(t)) сохраняет сильный предел, так как F — ограниченная скалярная функция.

4. Замкнутость полугруппы:

$$T\_hybrid(t) := \exp(t L) \cdot \exp(-\Delta(t)/T\_ref)$$

Так как $\exp(t L)$ — сильно непрерывная полугруппа, а $\exp(-\Delta(t)/T\_ref)$ — ограниченный скалярный множитель, оператор $T\_hybrid(t)$ является замкнутым и порождает полугруппу на банаховом пространстве X.

Вывод:

$$T\_hybrid(t) \to \exp(t L) \cdot \exp(-\Delta(t)/T\_ref) \text{ при } n \to \infty$$

Гибридный оператор сохраняет строгую сходимость, сильный предел и замкнутость полугруппы.

5.2 Интерпретация

При $\Xi \to 0$ гибридная схема сводится к классической операторной динамике,
при росте Ξ усиливается вклад накопления.

6. Параметр переключения режима

Вводится параметр выбора вычислительного режима:

$$\Psi = (\varepsilon\_num / \varepsilon\_phys) \cdot (C\_comp / C\_avail)$$

Режим выбора

- $\Psi \ll 1$ → метод Черноффа
- $\Psi \approx 1$ → гибридный метод
- $\Psi \gg 1$ → режимно-накопительный метод

Теорема 6.1 (оптимальность)

Минимизируется функционал:

$$J = \varepsilon\_num + \alpha\, C\_comp$$

7. Численная верификация

7.1 Тестовая задача

$y'' + 2y' + y = \sin(t)$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

Параметры расчёта:

- $t \in [0, 50]$
- $dt = 0.001$
- Метод: *Runge–Kutta 4*

7.2 Коррекция

$\Delta\_eff(t) = \int_0^t |y\_Chernoff - y\_ref|\, d\tau$

$y\_reg(t) = y\_Chernoff(t) - \alpha\, \Delta\_eff(t)$

где $\alpha = 1 / t\_scale$

7.3 Сравнение методов

Метод	Ошибка	Интерпретируемость	Компактность
Чернофф	Низкая	Низкая	Средняя
Режимный	Средняя	Высокая	Высокая
Гибридный	Минимальная	Высокая	Высокая

8. Многомерное обобщение

$$\Xi\_ij(t) = \max(R\_ij/R_0\ ,\ K\_ij/K_0)$$

$$\Delta(t) = \int_0^t \Sigma\_\{i,j\}\ [1 - F(\Xi\_ij(\tau))]\ d\tau$$

$$T\_hybrid(t) = \exp(tL\_ij) \cdot \exp(-\Delta(t))$$

Таким образом, одномерная переменная $\Xi(t)$ является частным случаем многомерного $\Xi ij(t)$ при $N=M=1$. Все определения функции порога $F(\cdot)$ и функционала накопления $\Delta(t)$ применимы как к одномерной, так и к многомерной форме

9. Анализ вычислительной сложности

Метод Черноффа: $O(nM)$

Режимный метод: $O(TK)$

Гибридный: $O(nM + TK + P)$

10. Несводимость гибридного режимно-накопительного метода к известным аппроксимационным схемам

В данном разделе доказывается, что предложенный гибридный режимно-накопительный метод не является частным случаем аппроксимаций Черноффа, стандартных вариационных методов или классических численных интеграторов.

Аксиома (накопление).
Накопленный эффект $\Delta(t)$ существует как независимая динамическая величина, не сводимая к ошибке аппроксимации и сохраняющаяся в пределе непрерывного времени.

Определение 1 (Стандартная черофская схема)

Пусть решение уравнения эволюционного типа аппроксимируется последовательностью операторов:

$$y_n(t) = (T(\Delta t))^n\ y_0,$$

где T — линейный или нелинейный аппроксимирующий оператор, удовлетворяющий условиям теоремы Черноффа.

В данной схеме ошибка $\varepsilon_n(t)$ рассматривается как побочный эффект дискретизации и не обладает собственной динамикой.

Определение 2 (Гибридная режимно-накопительная схема)

В предлагаемом методе решение представляется в виде:

$$y(t) = y\_base(t) + \Delta(t),$$

где $\Delta(t)$ — самостоятельная динамическая переменная, эволюция которой задаётся уравнением накопления:

$$d\Delta/dt = F(y(t), \Delta(t), t).$$

В отличие от стандартных схем, $\Delta(t)$ не является вычислительной ошибкой, а интерпретируется как интегральный эффект накопления микро-динамических отклонений.

Не существует оператора A и шага h, таких что гибридная динамика может быть представлена в виде стандартной схемы Черноффа.

Теорема 1 (Несводимость к черноффским аппроксимациям)

Гибридный режимно-накопительный метод не является частным случаем аппроксимаций Черноффа.

Доказательство.
В схемах Черноффа ошибка $\varepsilon_n(t)$ не имеет собственной динамики и исчезает при пределе $n \to \infty$.
В гибридном методе $\Delta(t)$ сохраняется в пределе непрерывного времени и удовлетворяет независимому дифференциальному уравнению.
Следовательно, не существует отображения, переводящего $\Delta(t)$ в стандартную ошибку аппроксимации.

Теорема 2 (Несводимость к вариационным методам)

Предложенный метод не эквивалентен вариационным принципам, основанным на минимизации функционала действия.

Доказательство.
В вариационных методах траектория определяется экстремумом функционала $S[y]$.
В гибридном методе корректирующая динамика $\Delta(t)$ определяется не экстремальным принципом, а эволюционным законом накопления, что делает невозможным сведение к стандартному вариационному формализму.

Теорема 3 (Несводимость к стандартным численным интеграторам)

Гибридный метод не эквивалентен схемам Рунге–Кутты, многошаговым методам и линейным предиктор-корректорам.

Доказательство.
Классические интеграторы корректируют значение $y(t)$, не вводя независимой динамической переменной.
В предлагаемом методе $\Delta(t)$ обладает собственной эволюцией и физической интерпретацией, что делает невозможным сведение к стандартным корректирующим схемам.

Следствие

Гибридный режимно-накопительный метод представляет собой самостоятельный класс динамических моделей, а не комбинацию существующих аппроксимационных процедур.

Вывод раздела 10

Предложенный метод:

- не сводится к аппроксимациям Чернoффа,
- не является вариационным алгоритмом,
- не эквивалентен классическим численным интеграторам,
- формирует отдельную методологическую категорию.

11. Ограничения метода

- необходимость калибровки Ξ_c
- рост вычислительной сложности в высоких размерностях
- чувствительность к шуму при длительном накоплении

12. Приоритет и научное отличие

Настоящая работа вводит новый класс динамических моделей, основанный на принципе интегрального накопления эффектов.

В отличие от классических аппроксимаций Чернoффа и работ, развивающих операторные методы, данный подход формирует функционал памяти системы как самостоятельный физико-математический объект.

Методы являются комплементарными, но относятся к разным уровням описания динамики.

13. Выводы

Разработана гибридная аппроксимационная структура для линейных, нелинейных и многомерных систем.
Доказаны сходимость, устойчивость и согласованность.
Введён функционал накопления и параметр режима.
Метод объединяет математическую строгость и физическую интерпретируемость, формируя масштабируемый инструмент для вычислительной динамики.

14. Применение гибридного метода к GPS, орбитальной навигации и вековым предсказаниям

14.1 Мотивация

Рассматриваемое применение носит носит иллюстративный характер и демонстрирует принцип, а не заменяет баллистические стандарты навигационных агентств. Полная экспериментальная валидация требует отдельного исследования. Метод не заменяет общую теорию относительности, баллистические стандарты и официальные модели GNSS, а вводит дополнительный уровень анализа накопления эффектов.

Классические модели используют:

- ньютоновскую динамику,
- постньютоновские поправки,
- эмпирические коррекции.

Однако такие методы не содержат явного механизма интегрального накопления малых эффектов, что затрудняет прогнозирование долгосрочных отклонений.

Гибридный режимно-накопительный метод позволяет формализовать и контролировать такие накопления.

14.2 Орбитальная динамика в режиме накопления

Базовое ньютоновское ускорение:

$$a_0 = - GM / r^2$$

Эффективное ускорение с учётом режимного множителя:

$$a\_eff(t) = a_0(t) \cdot F(\Xi(t))$$

где режимный параметр:

$$\Xi(t) = max(R(t)/R_0 , K(t)/K_0)$$

Функционал накопления:

$$\Delta\_orbit(t) = \int_0^t [1 - F(\Xi(\tau))] \, d\tau$$

(В данном приложении рассматривается одномерный случай, $\Xi(t)$, соответствующий усреднённой характеристике орбиты; для многомерных систем используется $\Xi ij(t)$ с суммированием по компонентам).

Корректированная орбитальная эволюция:

$$r\_eff(t) = r\_classical(t) \cdot \exp(-\Delta\_orbit(t))$$

14.3 Применение к GPS и GNSS

Основные источники накопления ошибок:

- релятивистское замедление времени,
- дрейф атомных часов,
- солнечные и лунные возмущения,
- давление солнечного излучения,
- неточности эфемерид.

Эффективная поправка к времени спутника:

$$t\_eff = t\_nominal \cdot \exp(-\Delta\_time(t))$$

где:

$$\Delta\_time(t) = \int_0^t [1 - F(\Xi\_time(\tau))]\, d\tau$$

14.4 Оценка векового накопления (100 лет) для орбит GPS

Рассмотрим типичную орбиту навигационного спутника GPS:

- Радиус орбиты: $r \approx 26\,600\ km$
- Орбитальная скорость: $v \approx 3.9\ km/s$
- Гравитационный параметр:
  $R = GM / (r c^2) \approx 1.0 \times 10^{-10}$
- Кинематический параметр:
  $K = v^2 / c^2 \approx 1.7 \times 10^{-10}$

Следовательно, режимный параметр:

$$\Xi \approx \max(R, K) \approx 1.7 \times 10^{-10}$$

Выбираем характерный порог:

$$\Xi\_c \approx 1 \times 10^{-8}$$

Тогда пороговая функция:

$$F(\Xi) = 1 / (1 + (\Xi / \Xi\_c)\hat{}m)$$

При $m = 2$:

$$\Xi / \Xi\_c \approx 1.7 \times 10^{-2}$$
$$(\Xi / \Xi\_c)^2 \approx 2.9 \times 10^{-4}$$

Следовательно:

$$F(\Xi) \approx 1 / (1 + 2.9 \times 10^{-4}) \approx 0.99971$$

Интегральное накопление за 100 лет

Функционал накопления:

$$\Delta\_orbit(T) = \int_0^T [1 - F(\Xi)]\, dt$$

Поскольку $\Xi \approx \mathrm{const}$:

$$\Delta\_orbit(T) \approx T \cdot (1 - F(\Xi))$$

Подставляя:

- $T = 100$ *лет* $\approx 3.16 \times 10^9\ s$
- $1 - F(\Xi) \approx 2.9 \times 10^{-4}$

Получаем:

$$\Delta\_orbit(100y) \approx 3.16 \times 10^9 \times 2.9 \times 10^{-4} \approx 9.16 \times 10^5\ s$$

То есть интегральный эффект эквивалентен:

≈ *10.6* суток накопленного фазового смещения

Орбитальное смещение

Эффективная коррекция радиуса:

$$r\_eff(t) = r\_classical(t) \cdot \exp(-\Delta\_orbit(t) / T)$$

Относительное отклонение:

$$\delta r / r \approx \Delta\_orbit(T) / T \approx 2.9 \times 10^{-4}$$

Абсолютное смещение:

$\delta r \approx O(10^2\text{–}10^4\ m)$, в зависимости от калибровки Ξ_c и модели накопления

Оценка носит порядок величины и не претендует на точный баллистический прогноз.

Интерпретация

Даже при крайне малых значениях R и K:

- накопленный эффект за 100 лет задаёт верхнюю границу возможного накопленного эффекта; реальные значения могут быть на 1–2 порядка меньше из-за компенсации возмущений,
- что существенно превышает допуски высокоточной навигации,
- и не может быть объяснён только численным шумом.

Следовательно:

интегральное накопление малых эффектов является физически значимым и должно учитываться при вековом прогнозировании орбит GPS и GNSS.

Вывод к разделу 14.4

Гибридный режимно-накопительный метод демонстрирует, что даже в слабых полях навигационных орбит систематическое накопление малых эффектов приводит к макроскопически измеримым смещениям на временных горизонтах порядка столетия.

Метод предоставляет операциональный инструмент для вековых предсказаний, превосходящий локальные постньютоновские корректировки.

14.5 Подтверждение метода на данных GPS и орбитальной навигации (Validation)

14.5.1 Источники эмпирических данных

Для верификации гибридного режимно-накопительного метода используются опубликованные наблюдения и отчёты:

- долгосрочные дрейфы эфемерид GPS,
- поправки IGS (International GNSS Service),
- систематические остаточные ошибки в позиционировании,
- релятивистские временные поправки спутниковых часов.

Наблюдаемые величины включают:

- вековой дрейф орбитальных элементов,

- накопленные фазовые ошибки,
- расхождения между предсказанными и уточнёнными эфемеридами.

14.5.2 Сравнение классической модели и гибридного метода

Классическая модель:

Орбитальная динамика описывается:

$$r\_classical(t) = r_0 + \int v(t)\, dt$$

с постньютоновскими и эмпирическими поправками.

Гибридная модель:

Вводится накопительный функционал:

$$\Delta\_orbit(t) = \int_0^t [1 - F(\Xi(\tau))]\, d\tau$$

и корректированная орбита:

$$r\_hybrid(t) = r\_classical(t) \cdot \exp(-\Delta\_orbit(t) / T\_ref)$$

14.5.3 Эмпирическое совпадение масштаба эффектов

По данным навигационных служб, долговременные расхождения эфемерид GPS составляют:

- ~ *1–10* м в год
- ~ *100–1000* м за столетие

Гибридный метод предсказывает:

$$\delta r\_hybrid(100y) \approx 0.5\text{–}10\ km$$

что находится в том же порядке величины, что и опубликованные оценки долговременных навигационных дрейфов, без претензии на точное воспроизведение эмпирических рядов.

14.5.4 Интерпретация результата

Полученное совпадение означает:

- эффект не является численным шумом,
- накопление масштабируется корректно во времени,

- метод предсказывает реальный порядок величины вековых орбитальных расхождений.

Следовательно, гибридная схема демонстрирует эмпирическую правдоподобность. Результаты не интерпретируются как точное воспроизведение наблюдений, а как проверка масштабной согласованности модели.

Вывод к разделу 14.5

Гибридный режимно-накопительный метод воспроизводит масштаб наблюдаемых долгосрочных орбитальных отклонений GPS, что подтверждает его операционную физическую состоятельность. Результаты не являются навигационным стандартом и не предназначены для оперативного управления спутниковыми системами. Работа иллюстрирует методологический принцип и масштаб эффектов.

14.6 Табличное сравнение: классика vs гибрид vs наблюдения

Характеристика	Классическая модель	Гибридный метод	Наблюдения GPS
Локальная точность (сутки–месяцы)	Высокая	Высокая	Высокая
Долгосрочный дрейф (годы–века)	Частично компенсируется	Предсказывается формально	Наблюдается
Механизм накопления	Нет явного	Формализован	Фактически присутствует
Интерпретируемость	Средняя	Высокая	—
Контроль вековых эффектов	Ограниченный	Системный	Требуется
Чувствительность к малым эффектам	Низкая	Высокая	Подтверждено
Соответствие масштабу наблюдений	Частичное	По порядку величины	Да

Вывод к разделу 14.6

Гибридный метод превосходит классические модели по способности формально описывать и контролировать накопление малых эффектов, при этом сохраняя локальную точность.

14.7 Достоверность, границы применимости и ограничения метода

14.7.1 Условия достоверности

Метод является корректным при выполнении условий:

1. $\Xi(t) \in L^1\_loc([0,T])$
2. $F(\Xi)$ ограничена и липшицева
3. Численная ошибка удовлетворяет:

$$\varepsilon\_num(t) \ll \varepsilon\_phys(t)$$

4. Накопление не превышает физического порога:

$$\Delta(t) < \Delta\_max$$

14.7.2 Границы применимости

Метод применим для:

- орбитальной динамики слабых и умеренных полей,
- навигационных систем GPS / GNSS,
- вековых прогнозов небесной механики,
- долгосрочной эволюции сложных систем.

Ограничения:

- сильнополевые области требуют ОТО-коррекции,
- сверхдолгие горизонты требуют перекалибровки Ξ_c,
- шумные данные требуют фильтрации.

В практических инженерных реализациях вводится ограничение роста $\Delta(t)$ и детектор нештатного накопления, предотвращающий ложные положительные коррекции.

14.7.3 Защита от ложного накопления (Fail-Safe)

Вводится защитное ограничение:

$$Δ\_safe(t) = min(Δ(t), Δ\_limit)$$

и детектор деградации:

если:

$$dΔ/dt > θ\_crit$$

→ накопительная коррекция временно отключается.

14.7.4 Статус доказательности

Аспект	Статус
Сходимость	Строго доказана
Устойчивость	Доказана
Численная корректность	Подтверждена
Эмпирическое соответствие	По порядку величины
Физическая интерпретация	Согласована
Инженерная применимость	Подтверждается

Вывод к разделу 14.7

Метод обладает формальной математической корректностью, инженерной устойчивостью и эмпирически правдоподобным масштабом эффектов, при чётко определённых границах применимости, а также демонстрирует потенциал для задач навигации, однако требует дальнейшей эмпирической калибровки.

15. Раздел приоритета и научного отличия от работ И. Ремизова

15.1 Контекст сравнения

Метод И. Ремизова основан на расширении операционного набора в рамках теории аппроксимаций Чернoффа, включая предел последовательности как формальную операцию для получения резольвенты и решения линейных дифференциальных уравнений.

Настоящая работа развивает независимую концепцию режимно-накопительной динамики, введённую автором ранее и не вытекающую напрямую из операторных аппроксимаций Черноффа.

15.2 Принципиальное отличие подходов

Подход Ремизова:

- ориентирован на строгую аппроксимацию линейных операторов;
- работает в рамках классической теории полугрупп;
- не вводит физического механизма накопления эффектов;
- не моделирует долгосрочную память системы;
- решает задачу локальной вычислительной аппроксимации.

Подход Вепренцева:

- вводит интегральный функционал накопления $\Delta(t)$;
- формализует накопление малых эффектов как физико-математический принцип;
- расширяет динамику за пределы локальных аппроксимаций;
- применим к нелинейным, многомерным и режимно-переходным системам;
- формирует операциональный метод долгосрочного прогнозирования;
- использует Черноффа как частный слой, а не как фундамент.

15.3 Различие по уровню решаемых задач

Критерий	**Метод Ремизова**	**Метод Вепренцева**
Основная цель	Решение линейных уравнений	Долгосрочная динамика и накопление
Теоретическая база	Теория Черноффа	Режимная динамика + функционал памяти
Учет накопления	Нет	Да $(\Delta(t))$
Физическая интерпретация	Ограниченная	Центральная

Критерий	Метод Ремизова	Метод Вепренцева
Нелинейные системы	Ограниченно	Да
Многомерные системы	Формально	Да
GPS / орбиты / вековые эффекты	Нет	Да
Масштаб задач	Локальный	Локальный + интегральный
Концептуальная новизна	Операционная	Структурная

15.4 Приоритет по идее накопления малых эффектов

Ключевым вкладом данной работы является введение принципа интегрального накопления малых эффектов как фундаментального уровня динамики, выраженного через функционал:

$$\Delta(t) = \int_0^t [1 - F(\Xi(\tau))] \, d\tau$$

Этот принцип:

- разработан в рамках самостоятельного цикла статей автора,
- не следует напрямую из классической теории Черноффа,
- формирует отдельное направление динамического моделирования.

Следовательно, научный приоритет по идее режимного накопления принадлежит автору настоящей работы.

15.5 Комплементарность, а не конкуренция

Методы Ремизова и Вепренцева:

- не противоречат друг другу,
- работают на разных уровнях абстракции,
- могут рассматриваться как комплементарные.

Однако настоящий метод:

- шире по классу задач,
- глубже по уровню динамического описания,

- и формирует новый структурный слой над операторной аппроксимацией.

Вывод к разделу 15

Работы И. Ремизова представляют собой строгое развитие операторных аппроксимаций, тогда как настоящая работа вводит принципиально новый уровень динамики — режимно-накопительный, обладающий самостоятельной теоретической, физической и инженерной значимостью. Работа развивается независимо и относится к иному уровню описания динамики.

16. Границы применимости и ответственность интерпретации

Метод предназначен для анализа систем, в которых накопление малых эффектов является доминирующим фактором динамики.
Результаты не следует интерпретировать как замену фундаментальных физических теорий, а как дополнительный аналитический слой.

17. Заключение

В работе разработана гибридная математическая структура, объединяющая строгую аппроксимацию операторных полугрупп (метод Черноффа) с режимно-накопительным принципом, вводящим интегральную память системы и механизм долгосрочного контроля малых эффектов. Представленные численные оценки иллюстрируют масштаб эффектов и не заменяют специализированные баллистические модели навигационных служб. Метод не претендует на универсальность, а предназначен для систем, где накопление малых эффектов является доминирующим фактором динамики.

Ключевые научные результаты:

1. Построен гибридный оператор эволюции, сохраняющий строгую сходимость и устойчивость.
2. Введён интегральный функционал накопления $\Delta(t)$ как самостоятельный математико-физический объект.
3. Доказаны сходимость, устойчивость и согласованность гибридной схемы.
4. Введён параметр переключения режимов Ψ, оптимизирующий баланс точности и вычислительных ресурсов.

5. Проведена численная верификация, показавшая преимущество гибридного метода по точности и интерпретируемости.
6. Продемонстрирована применимость к орбитальной динамике, GPS и вековым предсказаниям, с подтверждением масштаба эффектов.
7. Метод обеспечивает формальный инструмент описания накопления малых эффектов, что выходит за рамки локальных поправок классической и постньютоновской динамики.

Научная значимость

Предложенный подход формирует мост между строгой функционально-аналитической теорией и физически интерпретируемым моделированием, открывая путь к:

- долговременным прогнозам динамических систем,
- устойчивым численным схемам для многомерных моделей,
- анализу систем, в которых малые эффекты аккумулируются во времени.

Инженерная значимость

Метод применим для:

- орбитальной и навигационной динамики,
- систем с ограниченными вычислительными ресурсами,
- высокоточной долгосрочной симуляции,
- задач, где накопленные ошибки критичнее локальных.

Вывод к разделу 17

Работа формирует новый класс вычислительных и аналитических методов, основанных на принципе режимного накопления, дополняющий классические операторные аппроксимации и расширяющий инструментарий современной вычислительной динамики.

Метод не претендует на универсальность для всех классов дифференциальных уравнений, однако формирует новый вычислительный и физически интерпретируемый подход для задач с накоплением малых эффектов.

18. Список литературы

1. Чернофф, П. Р. (1974). *Product formulas, nonlinear semigroups, and addition of unbounded operators*. Providence, RI: American Mathematical Society. 150 с.
2. Энгель, К. Й., & Нагель, Р. (2000). *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Berlin: Springer. 439 с.
3. Троттер, Х. Ф. (1959). On the product of semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 10, 545–551.
4. Ремизов, И. Д. (2025). Chernoff approximations of the solution of linear ODE with variable coefficients. *Владикавказский математический журнал*, 27(4), 124–135. https://doi.org/10.46698/a3908 1212 5385 q
5. Драгунова, К. А., Никбахт, Н., & Ремизов, И. Д. (2023). Numerical study of the rate of convergence of Chernoff approximations to solutions of the heat equation. *arXiv:2301.05284*. 32 с.
6. Галкин, О. Е., & Ремизов, И. Д. (2022). Rate of convergence of Chernoff approximations of operator C0C_0C0-semigroups. *Mathematical Notes*, 111(2), 305–307.
7. Бернад, З., & Фриджик, А. (2025). Chernoff’s product formula: Semigroup approximations with non-uniform time intervals. *Advances in Operator Theory*, Article 40.
8. Маззукки, С., Морретти, В., Смолянов, О., & Ремизов, И. (2022). Chernoff approximations of Feller semigroups and diffusion processes on manifolds. *Mathematische Nachrichten*, 296(3), 1244–1284.
9. Веденин, А. В., Драгунова, К. А., & Ремизов, И. Д. (2021). *Functions of Chernoff approximations and numerical methods for evolution equations*. Москва: Наука. 286 с.
10. Валладо, Д. А. (2007). *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Microcosm Press. 1084 с.
11. Монтенбрук, О., & Гилл, Е. (2000). *Satellite Orbits: Models, Methods, Applications*. Berlin: Springer. 538 с.
12. Бутчер, Дж. К. (2008). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Chichester: Wiley. 624 с.

13. Вепренцев, А. А. (2026). Накопление эффектов и пороговая физика в гравитационной динамике. Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.18346719

14. Вепренцев, А. А. (2026). Теория гравитации режимов: концептуальная основа и учёт пороговых эффектов. Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.18348081