Инфинитезимальное доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции

© Н. М. Мусин

30.01.2026

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t.

Изучение одного из двух уравнений показало, что его левая часть не возрастает, правая часть возрастает при фиксированном $t = t_0 > 0$ как функции переменной σ на множестве так называемых критических значений, значит, на «высоте» $t = t_0$ это решение единственно. Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $\sigma = \dfrac{1}{2}$ следует, что $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

Ключевые слова: гипотеза Римана, дзета-функция, нетривиальные нули.

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
$x \in \mathbb{R}$ - действительная переменная.

Известно [1], что при $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \tag{1}$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x. Перепишем равенство 1 в виде

$$\zeta(s) = s \left(\frac{1}{s-1} - \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right)$$

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1} \tag{2}$$

Имеют место равенства

$$\frac{1}{x^{s+1}} = \frac{1}{x^{\sigma+1}} \left(\cos(t \ln x) - i \sin(t \ln x)\right),$$
$$\frac{1}{s-1} = \frac{\sigma - 1}{(\sigma-1)^2 + t^2} - i \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}.$$

Поэтому уравнение 2 будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx = \frac{\sigma - 1}{(\sigma-1)^2 + t^2}, \\ \int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно вещественной оси, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1, \ t > 0$.

Пусть $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - некоторый нетривиальный нуль.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

О левых и правых частях уравнений системы 3

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma, t) = \int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t \ln x) dx,$$
$$v_1(\sigma, t) = \int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t \ln x) dx,$$
$$u_2(\sigma, t) = \frac{\sigma - 1}{(\sigma-1)^2 + t^2},$$
$$v_2(\sigma, t) = \frac{t}{(\sigma-1)^2 + t^2}.$$

Таким образом, систему 3 можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma, t) = u_2(\sigma, t), \\ v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t). \end{cases} \tag{4}$$

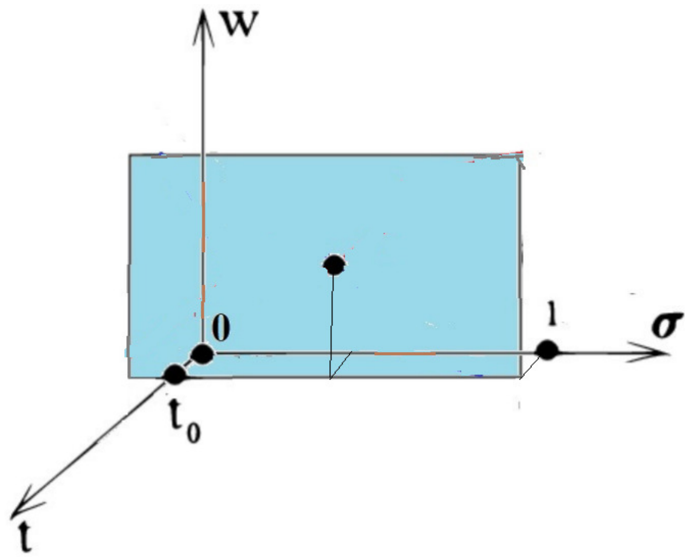

Рис. 1: Плоскость $t = t_0$

$s = \sigma + it$ является нетривиальным нулём дзета-функции тогда и только тогда, когда (σ, t) является решением системы 4.

В дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$.

Лемма 1. *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ возрастает как функция от переменной σ.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma - 1)t_0}{(t_0^2 + (\sigma - 1)^2)^2} > 0$$

□

Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0; 1)$ принадлежат интервалу $U = \left(\frac{t_0}{1 + t_0^2}, \frac{1}{t_0} \right)$.

Другими словами, график функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ целиком лежит в прямоугольнике $\Pi = \left\{ (\sigma, w) \;\middle|\; \sigma \in (0; 1), w \in U \right\}$. Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 1. *Прямоугольник Π будем называть критическим прямоугольником.*

Замечание 1. *Критические прямоугольники очень тонкие, их ширина равна $\frac{1}{t_0} - \frac{t_0}{1 + t_0^2} = \frac{1}{(1 + t_0^2)t_0}$. Уже для нетривиального нуля с самой маленькой положительной мнимой частью $t_0 = 14.134725141...$ получается ширина $0.0003523461812...$*

Определение 2. *Значение переменной σ, при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.*

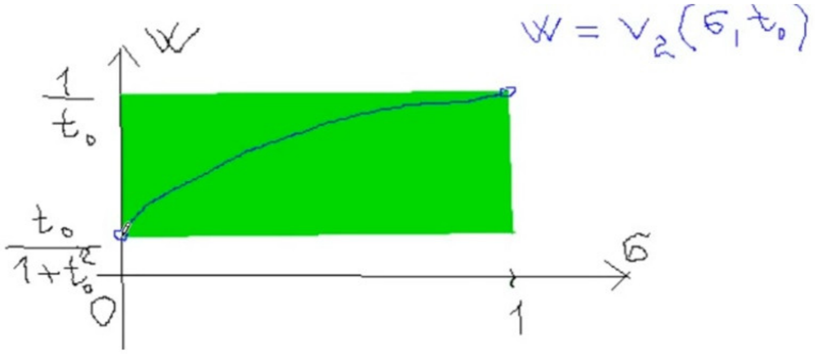

Рис. 2: Критический прямоугольник

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ, т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике; в то же время это точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Но тогда для σ_0 имеет место неравенство

$$v_1(\sigma_0, t_0) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0+1}} \sin(t_0 \ln x) dx = \frac{t_0}{\sigma_0^2 + t_0^2} > 0.$$

Более того, если σ - произвольное критическое значение, то, согласно определению, $v_1(\sigma, t_0) \in \left(\frac{t_0}{1+t_0^2}, \frac{1}{t_0}\right)$; в частности, $v_1(\sigma, t_0) > 0$.

Обозначим

$$\Psi(\sigma, x) = \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t_0 \ln x).$$

Тогда имеет место равенство

$$v_1(\sigma, t_0) = \int\limits_1^{\infty} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Лемма 2. *Функция $v_1(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ не возрастает на множестве критических значений переменной σ.*

Доказательство. Пусть σ' - некоторое положительное число такое, что $\sigma + \sigma'$ - критическое значение. Надо показать, что $v_1(\sigma, t_0) \geqslant v_1(\sigma + \sigma', t_0)$.

Очевидно, что

$$\Psi(\sigma + \sigma', x) = \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x).$$

Тогда

$$v_1(\sigma + \sigma', t_0) = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Так как σ и $\sigma + \sigma'$ - критические значения, то $v_1(\sigma, t_0) > 0$ и $v_1(\sigma + \sigma', t_0) > 0$, поэтому для некоторого достаточно большого X_0 и любого $X > X_0$ имеют место неравенства

$$\int_{1}^{X} \Psi(\sigma,x)dx > 0 \text{ и } \int_{1}^{X} \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma,x)dx > 0.$$

Нам сначала нужно доказать неравенство

$$\int_{1}^{X} \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma,x)dx \leqslant \int_{1}^{X} \Psi(\sigma,x)dx. \tag{5}$$

Обозначим $\Re[a,b]$ множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$. Нам будет полезна [2, с. 352]

Теорема (вторая теорема о среднем для интеграла)**.** *Если $f,g \in \Re[a,b]$ и g - монотонная на $[a,b]$ функция, то найдётся точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx = g(a)\int_{a}^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)dx.$$

Так как функция $g(x) = \dfrac{1}{x^{\sigma'}}$ монотонно убывает по x, то по второй теореме о среднем для интеграла найдётся точка $\xi = \xi(X) \in [1,X]$ такая, что

$$\int_{1}^{X} \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma,x)dx = A + \gamma B,$$

$$\text{где } \gamma = \frac{1}{X^{\sigma'}}, A = A(\xi) = \int_{1}^{\xi} \Psi(\sigma,x)dx \text{ и } B = B(\xi) = \int_{\xi}^{X} \Psi(\sigma,x)dx.$$

Ясно, что $0 < \gamma < 1, A + B > 0, A + \gamma B > 0$.

Приступим теперь к доказательству неравенства 5.

Пусть σ' - некоторое бесконечно малое положительное число. Согласно принципу переноса нестандартного (инфинитезимального) анализа имеет место инфинитезимальный аналог вышеприведённой второй теоремы о среднем для интеграла. Поэтому существует соответствующее гипердействительное число $\xi \in [1,X]$.

Так как функция $g(x) = \dfrac{1}{x^{\sigma'}}$ монотонно убывает по x, то существуют гипердействительные числа η и η_0 такие, что $\dfrac{1}{\eta^{\sigma'}} = \xi$ и $\dfrac{1}{\eta_0^{\sigma'}} = X$.

Так как $\eta \geqslant \eta_0$, то $\eta^{\sigma'} \geqslant \eta_0^{\sigma'}$, поэтому $1 \leqslant \xi = \dfrac{1}{\eta^{\sigma'}} \leqslant \dfrac{1}{\eta_0^{\sigma'}} \approx 1$.

Следовательно, $\xi \approx 1$.

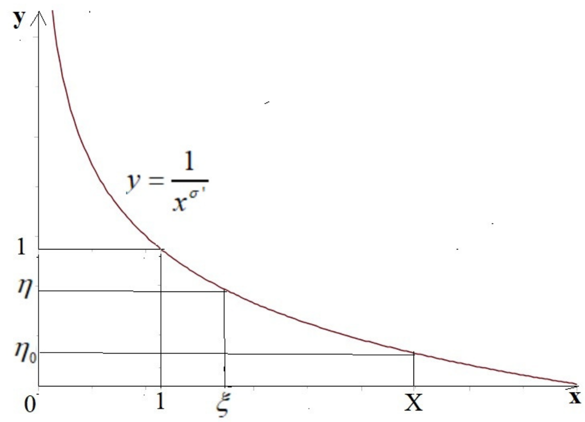

Рис. 3: Числа η и η_0

Итак, согласно второй теореме о среднем для интеграла,

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma,x)dx = \int_1^\xi \Psi(\sigma,x)dx + \frac{1}{X^{\sigma'}}\int_\xi^X \Psi(\sigma,x)dx. \tag{6}$$

Мы установили,что $\xi \approx 1$, поэтому $\int\limits_1^\xi \Psi(\sigma,x)dx \approx 0$. Но $\int\limits_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma,x)dx > 0$, поэтому из равенства 6 следует, что $\frac{1}{X^{\sigma'}}\int\limits_\xi^X \Psi(\sigma,x)dx > 0$ и, следовательно, $\int\limits_\xi^X \Psi(\sigma,x)dx > 0$. Но тогда из равенства 6 следует также, что

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma,x)dx = \int_1^\xi \Psi(\sigma,x)dx + \frac{1}{X^{\sigma'}}\int_\xi^X \Psi(\sigma,x)dx < \int_1^\xi \Psi(\sigma,x)dx + \int_\xi^X \Psi(\sigma,x)dx = \int_1^X \Psi(\sigma,x)dx,$$

то есть мы получили неравенство

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma,x)dx < \int_1^X \Psi(\sigma,x)dx,$$

то есть неравенство 5 и в этом случае имеет место.

Итак, для любого $X > X_0$ доказано неравенство 5, следовательно, верно неравенство

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma,x)dx \leqslant \int_1^\infty \Psi(\sigma,x)dx,$$

что и доказывает лемму 2. $\square$

Доказательство гипотезы Римана

Теорема. *Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$, где $t_0 > 0$, то $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.*

Доказательство. Нетривиальный нуль дзета-функции является решением уравнения 2, значит, пара (σ_0, t_0) удовлетворяет системе 4 и, в частности, второму уравнению этой системы, а именно $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$, то есть соответствует точке пересечения графиков функций $w = v_1(\sigma, t_0)$ и $w = v_2(\sigma, t_0)$.

Обозначим $w_0 = v_1(\sigma_0, t_0) = v_2(\sigma_0, t_0)$.

Согласно лемме 1, график $w = v_2(\sigma, t_0)$ правой части возрастает и полностью содержится в критическом прямоугольнике. Согласно лемме 2, график $w = v_1(\sigma, t_0)$ левой части не возрастает внутри критического прямоугольника, значит, эти графики имеют не более одной точки пересечения, причём только внутри критического прямоугольника. Так как графики, как указано выше, пересекаются в точке (σ_0, w_0), то эта точка является единственной точкой пересечения.

Как известно, в комплексной плоскости, если точка $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то точка $1 - \sigma_0 + it_0$, то есть симметричная ей относительно прямой $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$, тоже является нетривиальным нулём дзета-функции. Поэтому число $1 - \sigma_0$ является решением уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$.

Обозначим $\sigma_1 = 1 - \sigma_0, w_1 = v_1(\sigma_1, t_0) = v_2(\sigma_1, t_0)$. Следовательно, если при этом $\sigma_0 \neq \dfrac{1}{2}$, то точка (σ_1, w_1) тоже является точкой пересечения графиков функций $w = v_1(\sigma, t_0)$ и $w = v_2(\sigma, t_0)$, отличной от точки (σ_0, w_0). Но выше было установлено, что эти графики могут пересекаться только в одной точке. Получается противоречие, следовательно, $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$. $\square$

Гипотеза Римана доказана.

Список литературы

[1] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. Изд-во Московского университета, 1984.

[2] Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997.

[3] Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.