

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ ПРОСТОМ КОНТУРЕ, ПРОХОДЯЩЕМ ПО ЦЕЛЕВЫМ ВЕРШИНАМ В ОРИЕНТИРОВАННОМ ГРАФЕ

Аннотация

В статье приводится исследование частного случая оптимизационной задачи о минимальном простом контуре, проходящем по всем целевым вершинам в ориентированном графе, удовлетворяющем условиям теоремы о существовании гамильтонова контура. Приводится эвристический алгоритм решения этой задачи.

1. Введение

Данная статья посвящена одной оптимизационной задаче на ориентированном графе.

Формулировка задачи:

Дано: $G = (V, E)$ – обыкновенный ориентированный граф; $H \subseteq V$ – множество «целевых» вершин.

Найти: кратчайший простой контур C в графе, содержащий H .

Очевидно, что если граф G не является сильно связным, то для существования решения необходимо, чтобы все множество H содержалось в одной компоненте сильной связности. Поэтому можно ограничить условие задачи так, чтобы граф G был сильно связным.

Также очевидно, что если граф G гамильтонов, т.е. существует простой контур, проходящий по всем вершинам, то существует решение поставленной задачи. Поэтому в пункте 2 будет рассматриваться частный случай общей задачи, когда в графе выполняются достаточные условия существования гамильтонова цикла, сформулированные в теореме о существовании гамильтонова контура.

2. Частный случай задачи в неориентированном графе, удовлетворяющем теореме о существовании гамильтонова контура

Известная теорема Мейниела о существовании гамильтонова контура, изложенная в [1], утверждает, что если в обыкновенном ориентированном графе выполняются условия:

1) количество вершин $n \geq 2$;

2) для каждой пары несовпадающих несмежных вершины u и v выполняется неравенство $\rho_{in}(u) + \rho_{out}(u) + \rho_{in}(v) + \rho_{out}(v) \geq 2n - 1$;

то в графе есть гамильтонов контур (т.е. простой контур по всем вершинам графа).

Следовательно, для любого множества H «целевых» вершин существует простой контур C , содержащий H .

Рассмотрим эвристический алгоритм, дающий приближенное решение задачи.

Пусть вершины в графе пронумерованы $V = \{v_1, v_2, \dots, v_h, v_{h+1}, \dots, v_n\}$ таким образом, что первые h вершин принадлежат $H = \{v_1, v_2, \dots, v_h\}$. Для изложенного ниже алгоритма удобно, чтобы вершины были упорядочены по возрастанию полустепени исхода, т.е. $\rho_{out}(v_1) \leq \rho_{out}(v_2) \leq \dots \leq \rho_{out}(v_h)$ и $\rho_{out}(v_{h+1}) \leq \dots \leq \rho_{out}(v_n)$.

Алгоритм

Шаг 1. Присвоить значение счетчика $i = 1$.

Найти в G кратчайший простой путь p_1 от v_1 до v_2 .

Построить $G_1 = G \setminus (p_1 \setminus v_2)$, удалив вершины пути p_1 кроме v_2 .

Построить $H_1 = H \setminus (p_1 \setminus v_2)$. Если в H_1 ровно одна вершина – переход на последний шаг.

Выбрать в H_1 первые две вершины p_s и p_t .

Увеличить счетчик i на 1.

Шаг 2. Найти в G_i кратчайший простой путь p_i от v_s до v_t .

Построить $G_{i+1} = G_i \setminus (p_i \setminus v_t)$, удалив вершины пути p_i , кроме v_t .

Если пути p_i не существует, то алгоритм останавливается.

Построить $H_{i+1} = H_i \setminus (p_i \setminus v_t)$. Если в H_{i+1} ровно одна вершина – увеличить счетчик i на 1 и выполнить переход на последний шаг.

Выбрать в H_{i+1} первые две вершины p_s и p_t .

Увеличить счетчик i на 1.

Повторить шаг 2.

...

Последний шаг. Найти в $G_i \cup v_1$ кратчайший простой путь p_i от $v \in H_i$ до v_1 .

Если пути p_i не существует, то алгоритм останавливается.

Если остановок алгоритма не было, то путь $C = p_1 \cup p_2 \cup \dots \cup p_i$ – результат работы алгоритма, где i – номер последнего шага.

В основе алгоритма лежит «жадная» стратегия, не гарантирующая получение оптимального результата.

Приведем пример задачи, где результат работы предложенного алгоритма не равен оптимальному результату. На рисунке 1 представлен ориентированный граф, имеющий 10 вершин, для каждой вершины полустепени захода и исхода равны 5. Тогда для любых вершин u и v выполняется неравенство $\rho_{in}(u) + \rho_{out}(u) + \rho_{in}(v) + \rho_{out}(v) = 2 \cdot 10 \geq 2 \cdot 10 - 1$.

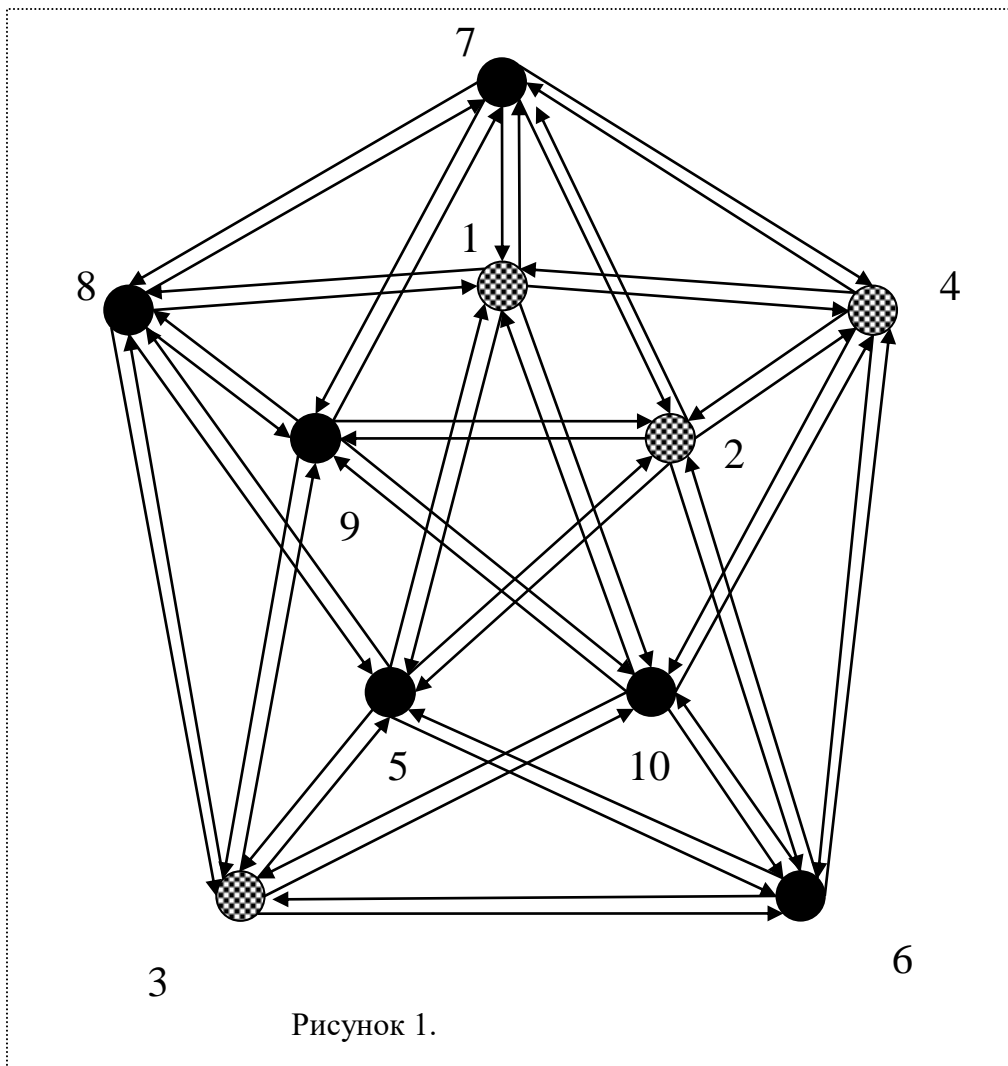
Пусть $H = \{1, 2, 3, 4\}$. Контур $C = (1, 4, 2, 6, 3, 5, 1)$ является оптимальным решением задачи. Однако алгоритм может найти четыре пути, образующие при объединении контур, содержащий 7 ребер.

На шаге 1 – $p_1 = 1, 5, 2$.

На шаге 2 – $p_2 = 2, 6, 3$.

На шаге 3 – $p_3 = 3, 10, 4$.

На последнем шаге – $p_4 = 4, 1$.



Для данного примера отношение длины $APP = 7$ контура, полученного предложенным эвристическим алгоритмом к длине $OPT = 6$ контура, являющегося оптимальным решением, равно $\frac{7}{6}$.

Для исследования оценки отношения $\frac{APP}{OPT}$ в общем случае задачи можем использовать два параметра – количество вершин в графе, равное n , и количество целевых вершин, равное h . Очевидно, что $APP \leq n$, $OPT \geq h$. Тогда $\frac{APP}{OPT} \leq \frac{n}{h}$.

Существование гарантированной числовой оценки отношения $\frac{APP}{OPT}$ для предложенного эвристического алгоритма остается открытой проблемой.

Список литературы

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.–Лекции по теории графов. М.: Наука 1990.– 384 с.