Счётица — математика конечных чисел

А. Н. Пан

Аннотация

Предложено вернуться к математике как "науке о количестве" (счётица), использующей арифметику чисел (конечные, целые, неотрицательные) и вытекающую из них геометрию (счётоме́трия). Учёт точности счёта и обязательно приближённый переход к числовой непрерывности (сплошница) позволяет обходиться без бесконечных множеств, иррациональных чисел и точек нулевого размера. Основанный на числах анализ следует из опыта предметного восприятия мира и является строгим по сути, а не по воображению. Вместо комплексных и гиперкомплексных чисел вводятся переходники, в которых, начиная с октав, часть мнимых единиц (переходы между числовыми наборами) перестановочны.

Действительной бесконечности нет.
Аристотель

Никто не обнимет необъятного.
Козьма Прутков

Введение

Счётица использует буквы русской азбуки (кириллица), помеченные в формулах синим цветом. Общепринятые в математике обозначения показаны латинскими и греческими буквами.

Математика, определяемая Аристотелем как "наука о количестве", вытекала из предметного восприятия окружающего мира и деятельности людей. Она началась с подсчёта предметов и привела к понятию числа. Потом появились действия над числами, отражающие изменение количества предметов. Однако требование к действиям "не выводить за пределы предметного набора" показалось слишком ограничительным, было отвергнуто и заменено условием применимости действий к любым числам, что нарушало непосредственную связь с опытом жизни и могло быть выполнено только при расширении понятия числа с выходом за пределы области его естественного определения.

Вначале число ч обозначало количество предметов и было всегда конечным $ч \in \mathbf{Ч} = [0, Ч] = \{0, 1, \cdots, Ч\}$. Расширение набора чисел началось с переноса его границ на бесконечность $Ч \to \infty$, что дало множество натуральных чисел с нулём $\mathbf{N} = [0, \infty]$. Введение отрицательных чисел привело к множеству целых чисел $\mathbf{Z} = [-\infty, \infty]$, в котором сложение и вычитание применялись к любым его членам. Затем из сложения выделили умножение, как сложение одинаковых чисел, и обратное ему деление. Требование их всегда применимости привело к введению множества рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Далее из умножения было выделено возведение в степень, как умножение одинаковых чисел, и обратные ему извлечение корня и логарифмирование, которые стали всюду возможными после введения иррациональных $\mathbf{I}$ и комплексных $\mathbf{C}$ чисел. Рациональные и иррациональные числа объединились в вещественные $\mathbf{R} = \mathbf{Q} + \mathbf{I}$.

Вещественные числа, из-за вхождения в них иррациональных, стоят особняком. Их невыразимо много. В любом конечном числовом промежутке содержится несчётное (невозможно пересчитать) количество вещественных чисел. На каждое число приходится нулевой размер промежутка (числа меры нуль). А введены они ради удобства выполнимости любых действий с "числами" и функций от них, что требует бесконечных точности и близости "чисел". Образовалось несоответствие нашему миру, воспринимаемому только предметно и приближённо.

Все основные множества чисел $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{I}$ и $\mathbf{R}$ из-за своей бесконечности потеряли связь с конечным миром предметов. Арифметика сошла с естественной опытной основы "науки о количестве" и стала воображаемой "наукой о действиях". Ей пришлось в качестве объектов вводить бесконечные множества, разные бесконечности, трансфинитные числа, бесконечно большие и малые величины, что привело к противоречиям.

На этом пути арифметика потеряла строгость, которую сама себе приписывала в качестве основного достоинства. Строгость заключается в следовании определению числа количеством предметов без размывания этого определения ради подгонки под свои желания. Количество предметов и соответствующую ему величину числа можно представить сколь угодно большими, но не бесконечными, поскольку это противоречит естественным представлениям о нашем мире. Строго бесконечность возможна лишь как недостижимый предел, который не становится ближе при любом к нему движении. Величина чисел и их количество обязаны быть конечными по определению. Все используемые математикой числа, начиная с натуральных, и бесконечные множества этому требованию не удовлетворяют.

Предлагается вернуться к математике как "науке о количестве" (конечном). Такая счётная математика названа счётица для отличия её от общепринятой математики бесконечных множеств чисел. Она состоит из счётных арифметики и геометрии.

Числа и их наборы

Любящий Бог создал целые числа,
всё остальное — дело рук человека.
Л. Кронекер.

Предмет — часть среды обитания, которую можно рассматривать как некоторую отдельность, пренебрегая её связями с остальной средой и отвлекаясь от любых её особенностей (тождественность предметов).

Число — обозначение количества предметов, взятых из конечного их запаса. Предметы не нумеруются, т. к. это нарушает их неразличимость.
Ноль означает отсутствие предметов, единица — один предмет.
Бесконечность строго отсутствует.
Набор (set) или ч.набор (числовой набор, т. к. конечный набор любых предметов тождественен числовому набору) обозначают конечные количества чисел. Набор заменяет привычное "множество", оставленное для обозначения бесконечных количеств.
Суб.число — конечное сколь угодно большое (суб, $\overline{\infty}$) число. Оно вводится вместо бесконечно большого числа и позволяет решать любые конечные задачи. Суб.число является не числом в прямом его смысле, а указателем отсутствия конечной границы роста чисел в данной задаче (безграничная конечность) и занимает место бесконечности. Умножение суб.числа на число или сложение с ним не меняет его смысла: $Ч \cdot \overline{\infty} = \overline{\infty}$, $Ч + \overline{\infty} = \overline{\infty}$.

Действие — изменение числа, сводящееся к последовательности его изменений на единицу. Предметы добавляются и убавляются по одному.

Обратное действие совершается лишь с числами из прямого действия.
Сложение двух чисел — прибавление к одному числу количества единиц, равное другому числу.
Вычитание — действие, обратное сложению.
Умножение — сложение одинаковых чисел. Один множитель представляет число, а другой — их количество.
Деление — действие, обратное умножению.
Возведение в степень — умножение одинаковых чисел. Основание представляет число, а степень — количество множителей.
Извлечение корня и логарифмирование — обратные возведению в степень действия для нахождения основания и степени соответственно.
Гипердействие — редко применяемое продолжение ряда действий арифметики после возведения в степень, которое всё больше изменяет число и быстрее выводит его за пределы числовых наборов.

Ч-ч.набор означает набор $\mathbf{Ч} = [0, Ч]$ чисел $ч = 0, 1, \ldots, Ч$, имеющий ёмкость (мощность) Ч+1. Множество натуральных чисел $\mathbf{N} = [0, \infty]$ заменяется на суб-ч.набор $\overline{\mathbf{Ч}} = [0, \overline{\infty}]$.

Ч.счётчик — система счёта чисел, содержащая начало отсчёта в нуле $0_ч = 0$ и единицу перехода $1_ч = 1$. При большом Ч-ч.наборе можно перейти к другому счётчику, выбирая $0_ч$ внутри Ч и возможно меняя $1_ч$. Тогда числа $ч < 0_ч$ становятся отрицательными, а промежуток между числами меняется на $1/1_ч$.

Ц.числа, целы — положительные и отрицательные целые числа. Они образуют ц.набор членов $ц = ч - 0_ц$, получаемый из ч.набора при выборе начала отсчёта $0_ц$ в середине **Ч** и единицы перехода $1_ц = 1$ — ц.счётчик. Так если Ч=2Ц, $0_ц = Ц$, то получим Ц-ц.набор **Ц**=[-Ц, Ц]. Множество целых чисел $\mathbf{Z} = [-\infty, \infty]$ заменяется на суб-ц.набор $\overline{\mathbf{Ц}} = [-\overline{\infty}, \overline{\infty}]$.

Дроби составляют д.набор членов $д = (ч - 0_д)/1_д$, который получен из ч.набора при выборе начала отсчёта $0_д$ в середине Ч и единицы перехода $1_д > 1$ — д.счётчик. Если взять $Ч = 20_д$, $Д = 0_д/1_д$, то получим Д-д.набор **Д**=[-Д, Д]. Множество рациональных чисел $\mathbf{Q} = [-\infty, \infty]$ заменяется на суб-д.набор $\overline{\mathbf{Д}} = [-\overline{\infty}, \overline{\infty}]$.
Десятичные дроби являются удобным представлением дробей. Пусть $Ч = 2 \cdot 10^{а+б}$, $0_д = 10^{а+б}$, $1_д = 10^б$. Тогда $\mathbf{Д} = [-Д, Д]$, $Д = 10^а$ и дробь записывается в виде $д = \pm Ц_1 Ц_2 \ldots Ц_а, ц_1 ц_2 \ldots ц_б$, где целая часть дроби имеет а цифр $0, \ldots, 9$, дробная — б.

Целы и дроби, полученные линейным преобразованием сдвига и сжатия в ч.наборе, являются простым переименованием чисел. Только они представляют числа в разных счётчиках. Суб-ч|ц|д.наборы введены для предупреждения возможного выхода получаемых при разных действиях чисел за пределы числовых наборов. Среди них наиболее охватывающим является суб-д.набор, который и берётся за общий суб.набор $\overline{\overline{\mathbf{Д}}}$. Теперь каждый ч|ц|д.набор становится вложенным в суб.набор, а любая конечная последовательность конечных действий с конечными числами не покидает суб.наборы и является законной.

Недроби (иррациональные числа $i \in \mathbf{I}$) определяются как непредставимый дробями предел бесконечных последовательностей дробей, требующий бесконечной точности. Из-за отсутствия достижимой бесконечности такой подход неприемлем. Если же бесконечную точность заменить конечной или ограничить количество членов последовательности, то недроби приближённо выражаются дробями, как обычно и делают.

Точность счёта не плод воображения, а имеет основание в опыте нашего взаимодействия с предметным миром. При введении чисел подразумевалось относительно небольшое количество пересчитываемых предметов. Однако очевидно, что оно может быть очень большим и известным лишь приближённо. Нельзя точно знать сколько листьев в лесу, рыб в море, частиц во вселенной. Следовательно при счёте необходим учёт погрешности, выражаемый числовой точностью или разрешением.

Это второе опытное основание арифметики, которое не было замечено во времена её зарождения, обходится и теперь. Вместо этого предлагается принять, что математика есть плод чистого разума и не связана с внешним миром, а числа можно вводить аксиомами, определяя свойства объектов бесконечных множеств. Такой путь оказался неестественно громоздким и привёл к появлению неустранимых противоречий.

Точность чисел т (неточность, разрешение) — наименьшее количество соседних чисел, различимое в данной задаче. Тогда близкие числа $ч_1$ и $ч_2$ будут неразличимы при $|ч_2 - ч_1| \lesssim т$. Эта неразличимость, распространяясь по всему ч.набору, создаёт ряд различимых чисел, окружённых областями неразличения. Первая такая область [0,т] с числом т/2 в середине продолжается рядом [к-1,к]т, где к=2,...,Ч/т.

Различимые числа $ч_т = \{(к - 1/2)т\}$, заменяя числа ч набора **Ч**, образуют т-ч.набор $\mathbf{Ч}_т$ с промежутком между числами т вместо 1.Это означает введение новой единицы $1_т = т$ и переход к т-ч.счётчику, от которого можно перейти к т-ц|д|суб.счётчикам. Если же действия в наборах различимых чисел не выражаются дробями, то их результат заменяется на дробь в пределах используемой точности. Например $\sqrt{2}$ строго не является числом, но с точностью т=0,1 заменяется на $\sqrt{1,96} = 1,4$.

Счёт в числовом наборе определён пятью числами $Ч, 0_ч, 1_ч, т$ и $\triangle ч$ — существенным изменением чисел в задаче. Если $\triangle ч \gg т$, то счёт является почти определённым — учёт точности не обязателен. При $\triangle ч \gtrsim т$ её влияние необходимо учитывать как неопределённость чисел. Если же $\triangle ч \ll т$, то действия с числами не выводят их из неопределённости и числам можно приписать любое значение внутри неё.

Сплошница — приближенный подход к описанию очень больших наборов чисел, подобный приближению сплошной среды в механике. Он заменяет связанную с бесконечностью непрерывность вещественных чисел. В сплошнице точные значения функции заменяются на средние по промежутку точности и их разбросы. Если функция здесь меняется слабо, то разбросами можно пренебречь.

Переход к сплошнице происходит при выполнении условий:
1) количество чисел должно быть очень большим $Ч \gg 1$,
2) промежуток точности содержит много чисел $т \gg 1$.
3) существенные для задачи изменения $\triangle ч$ охватывают много расположенных рядом чисел $Ч \gg \Delta ч \gtrsim т \gg 1$ и не достигают границ набора.

Сплошные числа (сплоши) — приближённо непрерывное множество чисел, заменяющее вещественные числа, сохраняя удобства непрерывности и не теряя связи с предметным восприятием мира.

Сплошные наборы чисел|цел|дробей $\mathbf{C}_ч|\mathbf{C}_ц|\mathbf{C}_д$ заменяют в сплошнице наборы $\mathbf{Ч}|\mathbf{Ц}|\mathbf{Д}$. Наиболее удобен набор сплошных дробей $\mathbf{C}_д$, который и будет представлять сплоши. После перехода к суб.числу образуется суб-с.набор $\overline{\mathbf{C}}$ сплошных чисел, заменяющий вещественные числа $\mathbf{R}$.

Строгая непрерывность невозможна. Она противоречит определению чисел из счёта предметов и не может быть описана числовым образом. Строгая теория чисел должна исходить из их раздельности, а непрерывность вводить приближённо с заменой вещественных чисел на сплоши.

Сложности анализа происходят от желания использовать в нём непрерывные переменные и описывать их числовым образом. Для этого ввели вещественные числа, бесконечно узкие и уложенные бесконечно тесно. Образовалось неустранимое противоречие между предметным определением чисел и числовым описанием беспредметной непрерывности, которое разрешалось выходом в недоступную область бесконечности. Исчезающее различие близких вещественных чисел стали представлять бесконечно малыми числами. Были введены бесконечные ряды, последовательности и их пределы, которые, несмотря на свою недостижимость, стали по умолчанию считаться как-бы "достижимыми в пределе"и потому существующими. Анализ стал сложным и противоречивым.

Вещественные числа вводились ради выполнимости обратных действий, записи решений уравнений и соотношений в геометрии. Для конечного набора чисел или даже их счётного множества количество действий, включая обратные, и решений уравнений тоже конечно или счётно, хотя много больше количества чисел. А введённое множество вещественных чисел несчётно. В нём все итоги указанных действий составляют подмножество меры нуль. Т. е. ради кажущегося улучшения теории введено ненужных элементов бесконечно больше, чем нужных. Соответственно теория получилась неоправданно сложной и приводящей к противоречиям. А обосновывается она с помощью дробей, используя их бесконечные последовательности и недостижимые за конечное число шагов пределы, или вводится с помощью неестественной надуманной аксиоматики, что даже основу арифметики делает громоздкой и малопонятной. По сути аксиомы являются лишь подгонкой под набор свойств объектов, очень похожих на числа, но не имеющих их основы и поэтому не тождественных им.

Счётица возвращает математику в рамки науки о количестве, которое не бывает бесконечным. Введение конечной числовой точности узаконивает обычное в математике обращение с недробями, в котором недроби записываются в виде действий с дробями, функций от них или представляются дробями с нужной точностью. Применимость действий ко всем числам возможна приближённо, если использовать точность и ввести граничные условия для наборов.

Граничные условия для числовых наборов вытекают из естественных правил обращения с предметами. Пусть набор **Ч** представляет склад предметов ёмкостью Ч, а действия с числами $\hat{д}ч$ подчинены трём правилам их изменения или их сочетаниям:

1. Запрет. Нельзя добавлять или убавлять количество предметов переполняющее или опустошающее склад, что запрещает действия, выводящие за пределы Ч-ч.набора, т. е. при $\hat{д}ч < 0$ и $\hat{д}ч > Ч$.

2. Прилипание к границам набора **Ч**. Оказавшиеся вне склада предметы удаляют: $\hat{д}ч = 0$ при $\hat{д}ч \leq 0$ и $\hat{д}ч = Ч$ при $\hat{д}ч \geq Ч$.

3. Свёртывание набора **Ч**. Заполнение склада сопровождается удалением из него всех предметов, а добавочные складываются в пустой склад (берётся $\hat{д}ч = ч_д$ при $\hat{д}ч = кЧ + ч_д$, где к — кратность переполнения). С другой стороны опустошение склада сменяется его заполнением и про-

должением опустошения (берётся $\hat{д}ч = Ч - ч_д$ при $\hat{д}ч = (1 - к)Ч - ч_д$, где к — кратность опустошения). Это действие по модулю Ч выражает замыкание набора на себя с отождествлением его границ $Ч \equiv 0$. Пусть свёрнутый набор обозначается как $\mathring{ч}$.набор $\mathring{\mathbf{Ч}}$.

Граничные условия 2 или 3 снимают запрет 1 на действия, выводящие за пределы Ч-ч.набора. Добавление действий с точностью до т позволяет заменить недопустимое с числом ч действие на допустимое с другим числом из области точности $ч \pm т$, что делает все действия с числами $ч \in \mathbf{Ч}$ допустимыми с данной точностью. Переход к суб.наборам упраздняет любые ограничения.

Числовые наборы и действия с числами из них составляют единственный предмет изучения в счётице, из которого должны следовать все остальные разделы математики. Счётица упрощает и даже отменяет некоторые из них. В ней отсутствуют бесконечные множества, кроме недостижимого счётного. Любые наборы сводятся к числовым. Отменяются бесконечно большие, малые и другие неестественные числа. Она избавляет математику противоречий и парадоксов.

Существенно меняется теория функций. Для её обоснования не требуются "строгие"и громоздкие доказательства на основе анализа бесконечно малых величин в бесконечномерных пространствах, а достаточно элементарной математики. Функция чисел $ф(ч) : \mathbf{Ч} \to \mathbf{Ч}$ является конечной и ограниченной последовательностью. Набор функций $\mathbf{Ф}$ имеет конечную ёмкость $(Ч + 1)^2$. Но в сплошнице может представляться сплошным (как-бы "бесконечным") пространством, если в рассматриваемых задачах его границы не достигаются. Понятие предела бесконечных последовательностей становится ненужным из-за их отсутствия.

Производная функции есть разность соседних членов последовательности, а интеграл — сумма ряда. В строении к-ой производной $ф^{(к)}(ч)$ участвуют $к+1$ соседних чисел — производные не являются функциями одного числа, но могут стать такими в сплошнице, если поддерживающие их числа попадают в промежуток разрешения. Понятие дифференцируемости функции становится ненужным вместе с понятием её непрерывности. Непрерывность, дифференциал (линейная часть приращения функции, содержащая много чисел) и запись производных с его помощью вводятся лишь приближённо в сплошнице.

Многоместные наборы и переходы в них

Зри в корень.
Козьма Прутков.

На основе чисел $ч \in \mathbf{Ч}_ч$ строятся более сложные строи. Для этого $\mathbf{Ч}_ч$ повторяется М раз с присвоением полученным ч.наборам $\mathbf{Ч}_ч^м$ меток (мест) м=1, ..., М. Их объединение $\bigcup_{м=1}^{М} \mathbf{Ч}_ч^м$ даёт набор пар место-число ёмкости (Ч+1)М, а прямое произведение $\mathbf{Ч}_ч^М = \bigotimes_{м=1}^{М} \mathbf{Ч}_ч^м$ — М-местный набор чисел ёмкости $(Ч+1)^М$ (МЧ-мч.набор).

Если набор помеченных числами мест (М-м.набор) $\mathbf{М}_М$: м=1, ..., М повторить Н раз с метками н=1, ..., Н, то получим м.наборы $\mathbf{М}_М^н$. Их прямое произведение $\mathbf{М}_М^Н = \bigotimes_{н=1}^{Н} \mathbf{М}_М^н$ даёт Н-местный набор мест ёмкости $М^Н$, а после заполнения мест числами получится $М^Н$Ч-мч.набор — $М^Н$-местный набор $\mathbf{Ч}_ч^{М^Н}$ ёмкости $(Ч+1)^{М^Н}$.

Если же МЧ-мч.набор представить прямым произведением двух меньших наборов $\mathbf{Ч}_ч^М = \mathbf{Ч}_ч^{М_1} \bigotimes \mathbf{Ч}_ч^{М_2}$, $М_1$+$М_2 = М$, то получим $М_1$Ч-мч.набор, члены которого представлены $М_2$Ч-мч.наборами. Следовательно из основного набора $\mathbf{Ч}_ч$ можно получать многоместные наборы с членами, являющимися числами или многоместными наборами.

Кроме наборов $\mathbf{Ч}_ч$ существуют свёрнутые наборы $\mathring{\mathbf{Ч}}_ч$, которые также могут входить в состав многоместных наборов. Пусть такой многоместный свёрнутый набор обозначается $\mathring{М}Ч - \mathring{м}ч.набор$ $\mathring{\mathbf{Ч}}_ч^{\mathring{М}}$, а частично свёрнутый набор — $(М + \mathring{М})Ч - \mathring{м}ч.набор$ $\mathring{\mathbf{Ч}}_ч^{(М+\mathring{М})} = \mathbf{Ч}_ч^М \bigotimes \mathring{\mathbf{Ч}}_ч^{\mathring{М}}$, где $\mathring{М}$ — количество свёрнутых наборов.

Переходы между числовыми наборами. Пусть имеется многоместный числовой набор $\mathbf{Ч}_ч^М$ в любом счётчике, составленный из одноместных наборов $\mathbf{Ч}_ч^м$, $м = 1, \ldots, М$ и переходы $п_а^б$ из $\mathbf{Ч}_ч^а$ в $\mathbf{Ч}_ч^б$, включая тождественный переход $п_а^а = 1$. Всего 1+М(М-1)/2 переходов, которые связаны между собой общими для них наборами.

Любой переход представляется последовательностью других связанных с ним переходов $п_а^б = п_в^б п_а^в$, где первым действует правый переход. Пусть положительными будут переходы $п_а^б$ от меньшей метки к бóльшей а<б. Обратные переходы записываются в виде $п_б^а = (п_а^б)^{-1} = -п_а^б$, что даёт $(п_а^б)^2 = -п_б^а п_а^б = -1$. Здесь $(п_а^б)^2$ не является последовательностью двух переходов $п_а^б$. Если перешли из $\mathbf{Ч}_а$ в $\mathbf{Ч}_б$, то следующим должен быть переход из $\mathbf{Ч}_б$, т. е. $п_б^а$. Поэтому $(п_а^б)^2$ есть лишь перезапись $-п_б^а п_а^б$.

Опорные переходы (Опоры). Любой переход $п^б_а$ можно составить из последовательности опорных переходов $о_а$, количество которых равно ёмкости $М$ набора $\mathbf{Ч}^М_ч$. Если взять опорными переходы от $\mathbf{Ч}^1_ч$ (или другого $\mathbf{Ч}^м_ч$) к остальным: $о_а = п^а_1$, $а = 1, \dots, М$, то переходы состоят из произведений только двух опор $п^б_а = о_а о_б$. Другой выбор опор даёт таких множителей больше. Так при $о_а = п^а_{а-1} (а > 1)$ их количество достигает $М$-1: $п^М_1 = о_М о_{М-1} \dots о_2$.

Переходы $п^б_а$ являются переходами между единицами (или одинаковыми числами) наборов $\mathbf{Ч}^а_ч$ и $\mathbf{Ч}^б_ч$. Тогда переход от числа $ч_а \in \mathbf{Ч}^а_ч$ к числу $ч_б \in \mathbf{Ч}^б_ч$ запишется как $ч_б п^б_а / ч_а$ или $ч^б_а п^б_а$, где $ч^б_а = ч_б / ч_а$. Из этих чисел и переходов составляются переходники $П^М$ — многочлены действий, перемножаемые как числовые с требованием сохранения при этом их строения $П^М_1 П^М_2 = П^М_3$:

$$П^М = \sum_{а<б} ч^б_а п^б_а + \sum_{а<б<в<г} ч^б_а ч^г_в п^б_а п^г_в + \dots$$
$$= \sum_{а<б} ч^б_а о_а о_б + \sum_{а<б<в<г} ч^б_а ч^г_в о_а о_б о_в о_г + \dots = \sum_и ч_и О_и.$$

В переходниках произведение переходов означает их последовательное действие, а сложение — совместное. Последняя сумма записана в обычном для гиперкомплексных чисел виде, где вместо их мнимых единиц введены опорники $О_и = о_а о_б \dots$, выражаемые через переходы.

Переходники при умножении должны сохранять своё строение. Это будет, если опорники состоят из всех произведений опор с разными метками. Тогда при увеличении ёмкости $М$ числового набора на единицу добавляется опора $о_{М+1}$ и её произведения с уже имеющимися опорами, что даёт количество членов в переходнике $2^{М-1}$, т. е. их удвоение с $М$.

Видно, что переходники по строению похожи на гиперкомплексные числа, взятые в соответствующих счётчиках, а при $М = 1, 2, 3$ их строение совпадает со строением вещественных, комплексных чисел и кватернионов. Начиная с $М = 4$ и далее появляются всё бо́льшие отличия от гиперкомплексных чисел из-за разных правил умножения.

То, что в гиперкомплексных числах принято за мнимые единицы, в переходниках является сочетаниями переходов между числовыми наборами. Отсюда возникает их коренное различие. Гиперкомплексные числа строятся на правилах Кэли-Диксона об антикоммутации их мнимых единиц, введёнными экстраполяцией по подобию с кватернионами. Правила коммутации для опор, выведенные из общих свойств чисел, указывают, что антикоммутируют лишь опоры, связанные общими ч.наборами, а остальные независимы. Т. е. антикоммутируют опорники с нечётным количеством меток и частично одинаковыми метками, остальные же коммутируют. Совпадают в этих правилах только законы удвоения количества членов чисел с ростом их размерности.

Переходники описывают переходы между числами (числовые функции) в МЧ-ч.наборах или в М-мерных пространствах сплошных чисел. А гиперкомплексные числа, начиная с октав, на это не способны.

Умножение переходников следует из умножения опорников и простых правил: соседние опоры в этом произведении переставляются со сменой знака при разных метках, или сокращаются до -1 при одинаковых. Умножение опорников $O_2 \ldots O_{16}$ представлено в дополнении.

Матричное представление переходов. Т. к. переходы связывают два ч.набора, то применены матрицы 2×2. Присутствие в $\mathbf{Ч}_{а}$ показано столбцом $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)^{а}_{б}$, а в $\mathbf{Ч}_{б}$ — $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)^{а}_{б}$, где значки отмечают метки наборов. Переход $п^{б}_{а}$ из $\mathbf{Ч}^{а}_{ч}$ в $\mathbf{Ч}^{б}_{ч}$ представлен матрицей $п^{б}_{а} = \left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, а обратный переход $п^{а}_{б} = (п^{б}_{а})^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{smallmatrix}\right) = -п_{аб}$.Тогда

$$п^{б}_{а}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{а}_{б} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{а}_{б} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^{а}_{б},\ п^{а}_{б}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^{а}_{б} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^{а}_{б} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{а}_{б}.$$

Следовательно

$$п^{б}_{а}п^{а}_{б} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = 1.$$

Произведение переходов $п^{в}_{а} = п^{в}_{б}п^{б}_{а}$ переводит из $\mathbf{Ч}^{а}_{ч}$ в $\mathbf{Ч}^{б}_{ч}$, затем в $\mathbf{Ч}^{в}_{ч}$:

$$п^{в}_{б}п^{б}_{а}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{а}_{б} = п^{в}_{б}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^{а}_{б} = п^{в}_{б}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{б}_{в} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^{б}_{в} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^{а}_{в} = п^{в}_{а}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{а}_{в}.$$

Квадрат перехода

$$(п^{б}_{а})^2 = п^{б}_{а}п^{б}_{а} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = -1.$$

Он является последовательностью переходов из $\mathbf{Ч}^{а}_{ч}$ в $\mathbf{Ч}^{б}_{ч}$ и обратно с изменением знака $(п^{б}_{а})^2 = -п^{а}_{б}п^{б}_{а}$. Переходы между числами $ч_{а} \in \mathbf{Ч}^{а}_{ч}$ и $ч_{б} \in \mathbf{Ч}^{б}_{ч}$ записываются в виде $ч^{б}_{а}п^{б}_{а}$, где $ч^{б}_{а} = ч_{б}/ч_{а}$.

Функция

На всякого мудреца довольно простоты.
Пословица

Числовая функция $ф(ч)$ (последовательность) есть переход от числа $ч$ из области определения к числу $ф$ в области значений $\mathbf{Ф}$. Следовательно она является переходником (действием). Так функция одной переменной $ф(ч_а)$, $ч_а \in \mathbf{Ч}^а_Ч$ представима переходом $ф = ч^ф_а п^ф_а$, а сложная функция $ф(ч_у(\ldots(ч_б(ч_а))\ldots))$ — произведением переходов $ч^ф_у п^ф_у \ldots ч^б_а п^б_а$. Функция многих переменных $ф(ч_а, ч_б, \ldots)$ сначала каждый аргумент $ч_и$, $и = а, б, \ldots$ переводит в единицу своего набора $\mathbf{Ч}^и_Ч$. Затем они переходят в единицу набора $\mathbf{Ф}$, а из неё в значение $ф$. Переход записывается суммой $ф = \sum_и ч^ф_и п^ф_и$.

Аргументами функции могут быть и действия (функции, переходники). Тогда она является действием, применённым к другим действиям, и представляется их произведением, т. е. остаётся действием, или переходником. В итоге любые функции представимы переходниками.

Все свойства функции определяются её значениями, но для больших ч.наборов описание становится слишком громоздким и неудобным для понимания. Требуются способы, упрощающие запись и проясняющие понимание. Это нахождение пределов изменения функции, её разных усреднений, сопоставление значений, введение ограничивающих связей — представления элементарными функциями, рекуррентными соотношениями и т. п.. Одним из таких способов является проводимое простыми действиями сравнение значений функции в соседних точках.

Функции одной переменной $ф(ч)$ имеют области определения и значений на наборе $\mathbf{Ч} = [0, Ч]$. Чтобы для них все конечные действия проходили без ограничений, их надо рассматривать в суб.наборе $Ч = \overline{\infty}$. Для лучшего понимания свойств функции удобно ввести её перестрои $ф_у(ч)$ разных уровней $у = 1, 2, \ldots$, связывающие значения функции в соседних числах действием $\hat{д}$ в виде $ф_у(ч) = ф_{у-1}(ч+1)\hat{д}ф_{у-1}(ч)$, где $ф_у(ч)$ опираются на область поддержки, составленную из чисел $[ч, ч+у]$ и обозначенную лишь одним первым числом $ч$. Обратное действие $\hat{д}^{-1}$ есть $ф_у(ч+1) = ф_у(ч)\hat{д}^{-1}ф_{у+1}(ч)$. Если обозначить $ф(ч) \equiv ф_0(ч)$, то номера уровней начинаются с нуля $у = 0, 1, \ldots$.

Пусть функции $ф_у(ч)$ создаются следующими действиями:
Разность: $ф_у(ч) = ф_{у-1}(ч+1) - ф_{у-1}(ч)$, $ф_у(ч+1) = ф_у(ч) + ф_{у+1}(ч)$.
Сумма: $ф_у(ч) = ф_{у-1}(ч+1) + ф_{у-1}(ч)$, $ф_у(ч+1) = ф_у(ч) - ф_{у+1}(ч)$.
Деление: $ф_у(ч) = ф_{у-1}(ч+1)/ф_{у-1}(ч)$, $ф_у(ч+1) = ф_у(ч) \cdot ф_{у+1}(ч)$.
Умножение: $ф_у(ч) = ф_{у-1}(ч+1) \cdot ф_{у-1}(ч)$, $ф_у(ч+1) = ф_у(ч)/ф_{у+1}(ч)$.
Все они заменой функций переходят одно в другое и сводятся к разности.

Действие разности приводит к выражению функций рядом Ньютона

$$ф_1(ч) = ф(ч+1) - ф(ч), \quad ф_2(ч) = ф(ч+2) - 2ф(ч+1) + ф(ч),$$

$ф_3(ч) = ф(ч+3) - 3ф(ч+2) + 3ф(ч+1) - ф(ч)$ и т. д. до

$$ф_у(ч) = \sum_{а=0}^{у} (-1)^{а+у} Н_у^а ф(ч+а),\ Н_у^а = у!/а!(у-а)!,\ у = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $Н_у^а$ — число сочетаний из $у$ по $а$, или члены разложения бинома Ньютона степени $у$.

Обратное действие $ф_у(ч+1) = ф_у(ч) + ф_{у+1}(ч)$ даёт
$ф_у(ч) = ф_у(ч-1) + ф_{у+1}(ч-1) = ф_у(ч-2) + ф_{у+1}(ч-2) + ф_{у+1}(ч-1)$ и

$$ф_у(ч) = ф_у(0) + \sum_{а=0}^{ч-1} ф_{у+1}(а) \tag{2}$$

— функция выражается своим начальным значением и суммой изменений. Отсюда также следует
$ф(1) = ф(0) + ф_1(0)$, $ф(2) = ф(0) + ф_1(0) + ф_1(1) = ф(0) + 2ф_1(0) + ф_2(0)$,
$ф(3) = ф(0) + 3ф_1(0) + 3ф_2(0) + ф_3(0)$ и т. д. до

$$ф(ч) = \sum_{а=0}^{ч} Н_ч^а ф_а(0),\ Н_ч^а = ч!/а!(ч-а)!. \tag{3}$$

Замена нуля на другое число $ч_0$ выполняется сдвигом на него. Видно, что каждая функция представима степенным рядом с наибольшей степенью, равной промежутку до числа отсчёта. Если значения $ф(ч)$ лежат в наборе $\mathbf{Ф}$, отличном от набора $\mathbf{Ч}$, то функцию и её перестрои надо умножить на переход $п_ч^ф$ между этими наборами.

Это представление упрощается если рассматривать большие числа $ч \gg а$ и функцию, меняющуюся не слишком резко, чтобы основной вклад в сумму вносили члены с небольшими номерами $а$. Тогда $Н_ч^а \approx ч^а/а!$, а суммирование можно продлить до суб.числа, что даёт

$$ф(ч) \approx \sum_{а=0}^{ч} (ч^а/а!) ф_а(0) \approx \sum_{а=0}^{\overline{\infty}} (ч^а/а!) ф_а(0). \tag{4}$$

После перехода к суб.набору и приближению сплошности, с учётом равного единице различия чисел, функции $ф_у(ч)$ становятся производными порядка $у$, имеющими $у$ чисел поддержки. При этом их можно привязывать к одному числу только если точности счёта недостаточно для разрешения области поддержки $т > у$.

Функции многих переменных $ф(\mathbf{ч})$, $\mathbf{ч} = \{ч_1, ч_2, \ldots, ч_M\}$, имеющие области определения и значений на наборе $\mathbf{Ч}_{Ч}^{М}$, находятся подобно функциям одной переменной (1-4). Это следует из независимости действия разности на каждую переменную. Пусть $\mathbf{у} = \{у_1, у_2, \ldots, у_M\}$ — набор уровней для переменных $\mathbf{ч}$, а $ф_{\mathbf{у}}(\mathbf{ч})$ — соответствующие им перестрои. Тогда из (1) получим

$$ф_{\mathbf{у}}(\mathbf{ч}) = (-1)^{У} \sum_{а_1=0}^{у_1} \cdots \sum_{а_М=0}^{у_М} (-1)^{А} Н_{у_1}^{а_1} \ldots Н_{у_М}^{а_М} ф(\mathbf{ч} + \mathbf{а}), \tag{5}$$

где $У = ч_1 + \cdots + ч_M$, $А = а_1 + \cdots + а_M$. Обратно из (3) следует

$$ф(\mathbf{ч}) = \sum_{а_1=0}^{у_1} \cdots \sum_{а_М=0}^{у_М} Н_{у_1}^{а_1} \ldots Н_{у_М}^{а_М} ф_{\mathbf{а}}(0). \tag{6}$$

Переход к приближению сплошности подобен тому же переходу для функции одной переменной.

Счётоме́трия — счётная геометрия

И мно́жае от нихъ, сы́не мой, храни́ся:
твори́ти кни́ги мно́ги несть конца́,
и уче́ние многа́е труд пло́ти.
Екклезиаст.

Геометрия основана на опыте измерений расстояний и направлений на поверхности Земли или вблизи неё, а числа в ней только применяются для описания расстояний и углов. Она началась с точки Евклида: "Точка есть то, что не имеет частей". В современной геометрии добавлено требование, чтобы точка не имела размера и лишь отмечала место пребывания. Получилась крайняя идеализация опытных точек. Точки нулевого размера не могут служить мерой длины — длина меряется только отрезками. Построенная из них прямая (числовая ось) соответствует множеству вещественных чисел, представляет их геометрически и вбирает в себя все их недостатки.

Переход от сколь угодно малого конечного размера точки к бесконечно малому или отсутствующему является не только отвлечением от размера, как это обычно представляют, а переходом в новое качество. В масштабе единицы сколь угодно малое число почти не отличается от нуля и вполне может быть им заменено. Но после перехода в масштаб этого числа оно будет также далеко от нуля, как и единица, которая теперь стала сколь угодно большой. Между бесконечностью и любым конечным числом всегда остаётся непреодолимая пропасть. Попытки её перехода приводят к введению других объектов математики, качественно отличных от обычных чисел. А перенос на них способов представления и преобразования конечных чисел нельзя считать достаточно правомерным.

Строгий переход к счётной геометрии возможен, если отталкиваться от ч.наборов, представлять точки многоместными числами, приписывать им единичный размер числового промежутка и использовать приближение сплошности. Для этого в многоместных наборах $\mathbf{Ч}_{\text{ч}}^{\text{М}}$ вводятся площади и объёмы областей чисел, которые определяются количеством расположенных в них числовых промежутков. На этой основе вводятся расстояния и направления между числами. Геометрические понятия здесь условны — от числа к числу переходят ступенчато вдоль наборов $\mathbf{Ч}_{\text{ч}}^{\text{м}}$ с переходами между ними, а расстояния представлены разностями чисел в $\mathbf{Ч}_{\text{ч}}^{\text{м}}$. Линии, поверхности и объёмы получают гладкость лишь в пределах заданной точности.

Здесь достаточно рассмотреть расстояния и направления между нулём и другим числом. В двухместном ц.наборе расстояние р_2 между нулём и числом $\mathbf{ц} = (\text{ц}_1, \text{ц}_2)$ находится из строя

$$(0,0) - (\text{ц}_1, 0) - (\text{ц}_1, \text{ц}_2) - (0, \text{ц}_2) - (0,0),$$

названного прямоугольником и имеющего площадь $\text{ц}_1\text{ц}_2$. При $\text{ц}_1 = \text{ц}_2$ строй назван квадратом. Из симметрии направление (0,0)-($\text{ц}_1, \text{ц}_2$) делит площадь пополам, если ц_1 и ц_2 чётные (если нет, то их надо умножить на 2). Строим ещё три прямоугольника такой же площади:

$$(\text{ц}_1, \text{ц}_2) - (\text{ц}_1 + \text{ц}_2, \text{ц}_2) - (\text{ц}_1 + \text{ц}_2, \text{ц}_2 - \text{ц}_1) - (\text{ц}_1, \text{ц}_2 - \text{ц}_1) - (\text{ц}_1, \text{ц}_2),$$
$$(\text{ц}_2, \text{ц}_2 - \text{ц}_1) - (\text{ц}_1 + \text{ц}_2, \text{ц}_2 - \text{ц}_1) - (\text{ц}_1 + \text{ц}_2, -\text{ц}_1) - (\text{ц}_2, -\text{ц}_1) - (\text{ц}_2, \text{ц}_2 - \text{ц}_1),$$
$$(0,0) - (\text{ц}_2, 0) - (\text{ц}_2, -\text{ц}_1) - (0, -\text{ц}_1) - (0,0).$$

Эти четыре прямоугольника имеют одинаковые площади $\text{ц}_1\text{ц}_2$ и диагонали равной длины р_2. Прямоугольники составляют квадрат со стороной $\text{ц}_1 + \text{ц}_2$, а их диагонали — квадрат со стороной р_2. Внутри большого квадрата расположен маленький квадрат со стороной $|\text{ц}_2 - \text{ц}_1|$. Два уравнения площади этого строя есть $(\text{ц}_1 + \text{ц}_2)^2 = 4\text{ц}_1\text{ц}_2 + (\text{ц}_2 - \text{ц}_1)^2$ и $(\text{ц}_1 + \text{ц}_2)^2 = 2\text{ц}_1\text{ц}_2 + \text{р}_2^2$. Тогда $\text{р}_2^2 = \text{ц}_1^2 + \text{ц}_2^2$.

Переход к бóльшей ёмкости наборов $\text{М} > 2$ очевиден. Искомое расстояние $р_М$ между нулём и числом $\{ц_1, ц_2, \ldots, ц_М\}$ есть длина диагонали прямоугольника со сторонами $р_{М-1}, ц_{М-1}: р^2_М = р^2_{М-1} + ц^2_{М-1}$. Отсюда следует теорема Пифагора $р^2_М = \sum^М_{м=1} ц^2_м$.

Направления определяются числами $ц_м$ (с точностью до одинакового множителя у них) и описываются отношениями чисел, т. е. переменными $н_м = ц_м/р_М$, которые в сплошнице становятся косинусами углов между направлением и осями $м$ (наборами $\mathbf{Ч}^м_Ч|\mathbf{Ц}^м_Ц|\mathbf{Д}^м_Д$). Промежуток между числами (единица) $1_н$ вдоль направления есть расстояние от нуля до ближайших чисел $ц_м$ (они не имеют общего делителя).

Введение в многоместном наборе $\mathbf{Ч}^М_Ч|\mathbf{Ц}^М_Ц|\mathbf{Д}^М_Д$ расстояний и направлений превращает его в многомерный числовой куб: МЧ-ч|МЦ-ц|МД-д.куб $\mathbf{К}^М_Ч|\mathbf{К}^М_Ц|\mathbf{К}^М_Д$. Увеличение размера МЧ-ч.куба до сколь угодно большого переводит его в многомерный суб-ч.куб $\overline{\mathbf{К}}^М_{\overline{\infty}}$.

Переход к сплошнице, при достаточных для этого количестве чисел и их точности, переводит числа в сплоши, а числовой куб $\mathbf{К}^М_Ч$ в многомерный сплошной куб — МЧ-с.куб $\mathbf{С}^М_Ч$. Если размер его рёбер выразить суб.числом $Ч = \overline{\infty}$, то получим М-мерный суб-с.куб $\mathbf{С}^М_{\overline{\infty}}$ с абсолютными числовыми осями, или М-мерное сплошество — сплошное абсолютное пространство $\mathbf{С}^М$. Приближённый переход от абсолютной числовой системы отсчёта к относительной делает сплошество относительным, заменяющим вещественное векторное пространство.

Числовой куб абсолютен — он сам единственная система отсчёта. Строго прямыми в нём являются лишь переходы между числами осевых наборов $\mathbf{Ч}^м_Ч$. Это свойство сохраняется и в сплошнице. Все другие линии, направления, углы и системы отсчёта получаются только приближённо с заданной точностью. Так отношение длин окружности и диаметра (число π), соотношения сторон треугольника и т. п. не могут быть абсолютно точными, как это общепринято в математике. Ломанные пути числового куба заменяются в сплошнице приближённо гладкими. Выделенность направлений сменяется приближённой изотропностью. Любые длины линий становятся соизмеримы с данной точностью. Геометрия становится обычной геометрией Евклида с длинами и углами, выраженными числами или дробями приближённо, без использования недробей.

Векторное пространство относительно. Составляющие его векторы есть "вещи в себе", которые проявляются лишь относительно других векторов, образующих некую систему отсчёта, одну из множества подобных. После проявления оставшаяся от числового куба абсолютная система отсчёта становится неотличимой от множества относительных. Её абсолютность теряется во множественной относительности.

К направлениям также можно перейти от замкнутого Ч-$\mathring{\text{ч}}$.набора $\mathring{\mathbf{Ч}}_{\text{ч}}$. Пусть имеется $(1+\mathring{\text{М}})$-местный 1Ч,$\mathring{\text{М}}$Ч$-\mathring{\text{ч}}$.набор, составленный из одного Ч-ч.набора и $\mathring{\text{М}}$ свёрнутых Ч-$\mathring{\text{ч}}$.наборов. В нём Ч-ч.набор представляет расстояние $\text{р}_{\text{М}}$ от начала отсчёта, а Ч-$\mathring{\text{ч}}$-наборы — углы $\text{у}_{\text{м}}$. Тогда образуется М-мерный числовой шар (МЧ-ч.шар), связанный с числовым кубом лишь приближённо в сплошнице.

Итог

Истина одна и проста, а заблуждений много, разных и сложных.

Арифметика возникла и развивалась на основе полученного из опыта предметного знания окружающего мира с отвлечением от всех его свойств, кроме счёта предметов и обозначения его числами. Действия были вторичны и не могли выводить за пределы набора чисел. Современная же арифметика строится на основе первичности действий и введения подчинённых им "числовых" множеств. Она выводит эти множества за пределы области определения чисел, делает арифметику воображаемой наукой о действиях, сдвигает её с опытного основания и приводит к неестественным построениям и неизбежным противоречиям.

Незамечаемым опытным основанием нашего взаимодействия с предметным миром является точность счёта, необходимая при подсчёте очень большого и недостаточно определённого количества предметов. Это приводит математику к запредельной идеализации (требование бесконечной точности и обязательной соизмеримости величин) с последующим появлением противоречий. На деле же конечная точность везде и всегда применяется в математике. Недроби всегда выражаются дробями, а очень длинные дроби сокращаются до разумных размеров. В то же время бесконечная точность недостижима и неестественна. Она не просто отвлечение, но качественное искажение математики введением в неё бесконечности как объекта, подобного конечному.

Основное противоречие арифметики вещественных чисел состоит в конечной величине недробей (иррациональных чисел) и отсутствие (бесконечная малость) промежутка между ними. Такие "числа" потеряли обязательное в предметном мире и отражённое в числах понятие раздельности. Они заменяются конечными промежутками с бесконечным количеством чисел в них. Введение бесконечности и применение к ней понятий конечных чисел не совместимы. На это указывают проницательные математики уже не одно столетие.

Данная работа идёт путём возвращения математики к её естественной основе "науки о количестве". Вводится набор (конечное множество) чисел (целых неотрицательных), который может быть представлен наборами целых чисел или дробей. Качество набора меняется с помощью числового счётчика (системы счёта), а не требования применимости действий ко всем числам. Недостижимыми пределами этих наборов являются множества натуральных, целых и рациональных чисел.

Счётица изучает только конечные числа, их многоместные наборы и действия над ними. Такой подход не приводит к тупикам и противоречиям, поскольку следует из предметного восприятия. Для любой конечной задачи с числами, найдётся включающий их набор, границы которого в задаче не достигаются и который можно условно считать бесконечным. Если же действия не выражаются числами, то надо использовать числовую точность и в её пределах результат действий заменять числом.

Предметы изучения счётицы составляют конечные числа, их наборы и переходы между ними. Из этой простой основы должны следовать все другие разделы математики, как изучение частных видов и свойств наборов, переходов или их приближений. Так могут быть построены сколь угодно сложные числовые строения с соответствующими действиями. В отличие от искусственных аксиоматик этот естественный подход не должен приводить к тупикам и противоречиям.

Сплошница — приближение сплошных чисел (или дробей). Если взять очень большой набор чисел с достаточно большим разрешением, то можно перейти к сплошным (приближённо непрерывным) числам. Сплошные дроби (сплоши) сменяют вещественные числа, сохраняя удобства их непрерывности и не теряя связи с предметами. Они не требуют для обоснования сложного и громоздкого аппарата бесконечно малых величин. Анализ становится простым и строгим в своей простоте.

С бесконечностью из рассмотрения выводятся бесконечные множества, пространства, недостижимые пределы и неестественные функции. Пределам возвращается их обычное определение как достижимых границ. Теория функций качественно упрощается.

Вместо комплексных и гиперкомплексных чисел надо использовать переходники — многочлены, построенные из произведений чисел на переходы между наборами. В переходниках мнимые единицы заменены на опорники — сочетания опорных переходов между наборами. Переходники описывают переходы между числами в многоместных наборах, а в сплошнице — в многомерных пространствах сплошных (приближённо непрерывных) чисел. А гиперкомплексные числа, начиная с октав, на это не способны. Числовые функции представимы переходниками.

Счётомéтрия (счётная геометрия) есть применение чисел и их наборов к описанию расстояний и направлений. Она, отталкиваясь от числовых наборов, представляет точки многоместными числами. В многоместных наборах вводятся площади и объёмы числовых областей, расстояния и направления между числами. В сплошнице числовые наборы образуют сплошество — сколь угодно большой, но конечный многоместный набор сплошных чисел, заменяющий многомерное вещественное векторное пространство. Так получается геометрия в непрерывном пространстве.

Вывод. Для обоснования математики существует строгий и естественный подход, состоящий в использовании известного определения чисел как обозначения конечного количества предметов, введения числовых счётчиков и точности счёта, применения приближения сплошных чисел. Он позволяет обходиться без сомнительных иррациональных чисел и неестественных надуманных аксиом, приводящих к сложным, громоздким и противоречивым теориям.

Введённые обозначения

Действие — изменение числа, сводящееся к последовательности его изменений на единицу.

Дроби (д.числа) составляют д.набор членов $д = (ч - 0_д)/1_д$, получаемый из ч.набора при выборе начала отсчёта $0_д$ в середине Ч и единицы перехода $1_д > 1$ — д.счётчик.

Многоместный числовой набор (МЧ-ч.набор, $\mathbf{Ч}_{МЧ}$) — прямое произведение М числовых наборов, помеченных местами м=1...М. Также может состоять из членов, являющихся числами или многоместными наборами.

Многомерный сплошной куб (МЧ-с.куб, $\mathbf{С}_{МЧ}$) — многомерный числовой куб, построенный из сплошных чисел.

Многомерный числовой куб (МЧ-ч|МЦ-ц|МД-д.куб $\mathbf{К}_{МЧ}|\mathbf{К}_{МЦ}|\mathbf{К}_{МД}$) — многоместный ч.набор с введёнными в нём площадями, направлениями и расстояниями.

Набор — конечная совокупность любых предметов.

Направления от числа к числу вводятся через числовые переменные, которые в сплошнице становятся квадратами косинусов углов между данным направлением и рёбрами (ч.наборами на местах м).
Недроби — иррациональные числа.
Опорники — произведения опор с разными метками, заменяющие мнимые единицы гиперкомплексных чисел.
Опоры — Переходы в многоместном числовом наборе между одноместным набором, выбранным в качестве основного, и остальными наборами.
Перестрои $ф_у(ч)$ разных уровней $у = 1, 2, \ldots$ связывают значения функции $ф(ч)$ в соседних числах.
Переходники — многочлены, составленные из произведений чисел на опорники и перемножаемые как числовые с сохранением их строя.
Площадь|объём области МЧ-ч.набора — количество в ней промежутков между числами.
Предмет — отдельная часть среды обитания.
Расстояние между числами в М-местном наборе находится через площадь и выражается теоремой Пифагора.
Свёрнутый набор ($\mathring{ч}$.набор $\mathring{\mathbf{Ч}}$) — замкнутый на себя путём отождествления его границ (циклическое граничное условие).
Сплошество — сплошное абсолютное пространство $\mathbf{С}_{М}$, получаемое из многомерного суб-ч.набора в приближении сплощницы.
Сплошница — приближенный подход к описанию очень больших наборов чисел, подобный приближению сплошной среды в механике.
Сплоши (с.числа) — приближённо непрерывный набор чисел, заменяющий множество вещественных чисел.
Сплошной куб (МЧ-с.куб, $\mathbf{С}_{МЧ}$) — построен из сплошных чисел.
Суб.число $\overline{\infty}$ — сколь угодно большое конечное число.
Счётица — счётная математика конечного количества, состоящая из счётных арифметики и геометрии.
Точность чисел т — количество соседних чисел или дробей, которое не различимо в данной задаче.
Целые числа (ц.числа, целы) образуют ц.набор членов $ц = ч - 0_ц$, получаемый из ч.набора при выборе начала отсчёта $0_ц$ в середине $\mathbf{Ч}$ и единицы перехода $1_ц = 1$ — ц.счётчик.
Число обозначает конечное количество предметов.
Числовой набор (ч.набор, $\mathbf{Ч} = \{0, \ldots Ч\}$) — конечный набор чисел.
Числовой счётчик (ч.счётчик) содержит начало отсчёта в нуле и единицу перехода между числами.

Дополнение: Умножение опорников

Умножении опорников $О_и$, $и = 2 \dots 16$ для 5-местного набора $\mathbf{Ч}_{5ч}$.
Здесь $О_1 = 1$, $О_2 = о_2$, $О_3 = о_3$, $О_4 = о_2о_3 = о_{23}$, $О_5 = о_4$, $О_6 = о_2о_4 = о_{24}$, $О_7 = о_3о_4 = о_{34}$, $О_8 = о_2о_3о_4 = о_{234}$, $О_9 = о_5$, $О_{10} = о_2о_5 = о_{25}$, $О_{11} = о_3о_5 = о_{35}$, $О_{12} = о_2о_3о_5 = о_{235}$, $О_{13} = о_4о_5 = о_{45}$, $О_{14} = о_2о_4о_5 = о_{245}$, $О_{15} = о_3о_4о_5 = о_{345}$, $О_{16} = о_2о_3о_4о_5 = о_{2345}$.

$О_2О_2 = о_{22} = -1$, $О_2О_3 = о_{23} = О_4$, $О_2О_4 = о_{24} = -О_3$,
$О_2О_5 = о_{24} = О_6$, $О_2О_6 = о_{224} = -О_5$, $О_2О_7 = о_{234} = О_8$,
$О_2О_8 = о_{2234} = -О_7$, $О_2О_9 = о_{25} = О_{10}$, $О_2О_{10} = о_{225} = -О_9$,
$О_2О_{11} = о_{235} = О_{12}$, $О_2О_{12} = о_{2235} = -О_{11}$, $О_2О_{13} = о_{245} = О_{14}$,
$О_2О_{14} = о_{2245} = -О_{13}$, $О_2О_{15} = о_{2345} = О_{16}$, $О_2О_{16} = о_{22345} = -О_{15}$,

$О_3О_2 = о_{32} = -О_4$, $О_3О_3 = о_{33} = -1$, $О_3О_4 = о_{323} = О_2$,
$О_3О_5 = о_{34} = О_7$, $О_3О_6 = о_{324} = -О_8$, $О_3О_7 = о_{334} = -О_5$,
$О_3О_8 = о_{3234} = О_6$, $О_3О_9 = о_{35} = О_{11}$, $О_3О_{10} = о_{325} = -О_{12}$,
$О_3О_{11} = о_{335} = -О_9$, $О_3О_{12} = о_{3235} = О_{10}$, $О_3О_{13} = о_{345} = О_{15}$,
$О_3О_{14} = о_{3245} = -О_{16}$, $О_3О_{15} = о_{3345} = -О_{13}$, $О_3О_{16} = о_{32345} = О_{14}$,

$О_4О_2 = о_{232} = О_3$, $О_4О_3 = о_{233} = -О_2$, $О_4О_4 = о_{2323} = -1$,
$О_4О_5 = о_{234} = О_8$, $О_4О_6 = о_{2324} = О_7$, $О_4О_7 = о_{2334} = -О_6$,
$О_4О_8 = о_{23234} = -О_5$, $О_4О_9 = о_{235} = О_{12}$, $О_4О_{10} = о_{2325} = О_{11}$,
$О_4О_{11} = о_{2335} = -О_{10}$, $О_4О_{12} = о_{23235} = -О_9$, $О_4О_{13} = о_{2345} = О_{16}$,
$О_4О_{14} = о_{23245} = О_{15}$, $О_4О_{15} = о_{23345} = -О_{14}$, $О_4О_{16} = о_{232345} = -О_{13}$,

$О_5О_2 = о_{42} = -О_6$, $О_5О_3 = о_{43} = -О_7$, $О_5О_4 = о_{423} = О_8$,
$О_5О_5 = о_{44} = -1$, $О_5О_6 = о_{424} = О_2$, $О_5О_7 = о_{434} = О_3$,
$О_5О_8 = о_{4234} = -О_4$, $О_5О_9 = о_{45} = О_{13}$, $О_5О_{10} = о_{425} = -О_{14}$,
$О_5О_{11} = о_{435} = -О_{15}$, $О_5О_{12} = о_{4235} = О_{16}$, $О_5О_{13} = о_{445} = -О_9$,
$О_5О_{14} = о_{4245} = О_{10}$, $О_5О_{15} = о_{4345} = О_{11}$, $О_5О_{16} = о_{42345} = -О_{12}$,

$$\begin{array}{lll}
O_6O_2 = o_{242} = O_5, & O_6O_3 = o_{243} = -O_8, & O_6O_4 = o_{2423} = -O_7, \\
O_6O_5 = o_{244} = -O_2, & O_6O_6 = o_{2424} = -1, & O_6O_7 = o_{2434} = O_4, \\
O_6O_8 = o_{24234} = O_3, & O_6O_9 = o_{245} = O_{14}, & O_6O_{10} = o_{2425} = O_{13}, \\
O_6O_{11} = o_{2435} = -O_{16}, & O_6O_{12} = o_{24235} = -O_{15}, & O_6O_{13} = o_{2445} = -O_{10}, \\
O_6O_{14} = o_{24245} = -O_9, & O_6O_{15} = o_{24345} = O_{12}, & O_6O_{16} = o_{242345} = O_{11},
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
O_7O_2 = o_{342} = O_8, & O_7O_3 = o_{343} = O_5, & O_7O_4 = o_{3423} = O_6, \\
O_7O_5 = o_{344} = -O_3, & O_7O_6 = o_{3424} = -O_4, & O_7O_7 = o_{3434} = -1, \\
O_7O_8 = o_{34234} = -O_2, & O_7O_9 = o_{345} = O_{15}, & O_7O_{10} = o_{3425} = O_{16}, \\
O_7O_{11} = o_{3435} = O_{13}, & O_7O_{12} = o_{34235} = O_{14}, & O_7O_{13} = o_{3445} = -O_{11}, \\
O_7O_{14} = o_{34245} = -O_{12}, & O_7O_{15} = o_{34345} = -O_9, & O_7O_{16} = o_{342345} = -O_{10},
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
O_8O_2 = o_{2342} = -O_7, & O_8O_3 = o_{2343} = O_6, & O_8O_4 = o_{23423} = -O_5, \\
O_8O_5 = o_{2344} = -O_4, & O_8O_6 = o_{23424} = O_3, & O_8O_7 = o_{23434} = -O_2, \\
O_8O_8 = o_{234234} = 1, & O_8O_9 = o_{2345} = O_{16}, & O_8O_{10} = o_{23425} = -O_{15}, \\
O_8O_{11} = o_{23435} = O_{14}, & O_8O_{12} = o_{234235} = -O_{13}, & O_8O_{13} = o_{23445} = -O_{12}, \\
O_8O_{14} = o_{234245} = O_{11}, & O_8O_{15} = o_{234345} = -O_{10}, & O_8O_{16} = o_{2342345} = O_9,
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
O_9O_2 = o_{52} = -O_{10}, & O_9O_3 = o_{53} = -O_{11}, & O_9O_4 = o_{523} = O_{12}, \\
O_9O_5 = o_{54} = -O_{13}, & O_9O_6 = o_{524} = O_{14}, & O_9O_7 = o_{534} = O_{15}, \\
O_9O_8 = o_{5234} = -O_{16}, & O_9O_9 = o_{55} = -1, & O_9O_{10} = o_{525} = O_2, \\
O_9O_{11} = o_{535} = O_3, & O_9O_{12} = o_{5235} = -O_4, & O_9O_{13} = o_{545} = O_5, \\
O_9O_{14} = o_{5245} = -O_6, & O_9O_{15} = o_{5345} = -O_7, & O_9O_{16} = o_{52345} = O_8,
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
O_{10}O_2 = o_{252} = O_9, & O_{10}O_3 = o_{253} = -O_{12}, & O_{10}O_4 = o_{2523} = -O_{11}, \\
O_{10}O_5 = o_{254} = -O_{14}, & O_{10}O_6 = o_{2524} = -O_{13}, & O_{10}O_7 = o_{2534} = O_{16}, \\
O_{10}O_8 = o_{25234} = O_{15}, & O_{10}O_9 = o_{255} = -O_2, & O_{10}O_{10} = o_{2525} = -1, \\
O_{10}O_{11} = o_{2535} = O_4, & O_{10}O_{12} = o_{25235} = O_3, & O_{10}O_{13} = o_{2545} = O_6, \\
O_{10}O_{14} = o_{25245} = O_5, & O_{10}O_{15} = o_{25345} = -O_8, & O_{10}O_{16} = o_{252345} = -O_7,
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
O_{11}O_2 = o_{352} = O_{12}, & O_{11}O_3 = o_{353} = O_9, & O_{11}O_4 = o_{3523} = O_{10}, \\
O_{11}O_5 = o_{354} = -O_{15}, & O_{11}O_6 = o_{3524} = -O_{16}, & O_{11}O_7 = o_{3534} = -O_{13}, \\
O_{11}O_8 = o_{35234} = -O_{14}, & O_{11}O_9 = o_{355} = -O_3, & O_{11}O_{10} = o_{3525} = -O_4, \\
O_{11}O_{11} = o_{3535} = -1, & O_{11}O_{12} = o_{35235} = -O_2, & O_{11}O_{13} = o_{3545} = O_7, \\
O_{11}O_{14} = o_{35245} = O_8, & O_{11}O_{15} = o_{35345} = O_5, & O_{11}O_{16} = o_{352345} = O_6,
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&O_{12}O_2 = o_{2352} = -O_{11}, && O_{12}O_3 = o_{2353} = O_{10}, && O_{12}O_4 = o_{23523} = -O_9,\\
&O_{12}O_5 = o_{2354} = -O_{16}, && O_{12}O_6 = o_{23524} = O_{15}, && O_{12}O_7 = o_{23534} = -O_{14},\\
&O_{12}O_8 = o_{235234} = O_{13}, && O_{12}O_9 = o_{2355} = -O_4, && O_{12}O_{10} = o_{23525} = O_3,\\
&O_{12}O_{11} = o_{23535} = -O_2, && O_{12}O_{12} = o_{235235} = 1, && O_{12}O_{13} = o_{23545} = O_8,\\
&O_{12}O_{14} = o_{235245} = -O_7, && O_{12}O_{15} = o_{235345} = O_6, && O_{12}O_{16} = o_{2352345} = -O_5,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&O_{13}O_2 = o_{452} = O_{14}, && O_{13}O_3 = o_{453} = O_{15}, && O_{13}O_4 = o_{4523} = O_{16},\\
&O_{13}O_5 = o_{454} = O_9, && O_{13}O_6 = o_{4524} = O_{10}, && O_{13}O_7 = o_{4534} = O_{11},\\
&O_{13}O_8 = o_{45234} = O_{12}, && O_{13}O_9 = o_{455} = -O_5, && O_{13}O_{10} = o_{4525} = -O_6,\\
&O_{13}O_{11} = o_{4535} = -O_7, && O_{13}O_{12} = o_{45235} = -O_8, && O_{13}O_{13} = o_{4545} = -1,\\
&O_{13}O_{14} = o_{45245} = -O_2, && O_{13}O_{15} = o_{45345} = -O_3, && O_{13}O_{16} = o_{452345} = -O_4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&O_{14}O_2 = o_{2452} = -O_{13}, && O_{14}O_3 = o_{2453} = O_{16}, && O_{14}O_4 = o_{24523} = -O_{15},\\
&O_{14}O_5 = o_{2454} = O_{10}, && O_{14}O_6 = o_{24524} = -O_9, && O_{14}O_7 = o_{24534} = O_{12},\\
&O_{14}O_8 = o_{245234} = -O_{11}, && O_{14}O_9 = o_{2455} = -O_6, && O_{14}O_{10} = o_{24525} = O_5,\\
&O_{14}O_{11} = o_{24535} = -O_8, && O_{14}O_{12} = o_{245235} = O_7, && O_{14}O_{13} = o_{24545} = -O_2,\\
&O_{14}O_{14} = o_{245245} = 1, && O_{14}O_{15} = o_{245345} = -O_4, && O_{14}O_{16} = o_{2452345} = O_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&O_{15}O_2 = o_{3452} = -O_{16}, && O_{15}O_3 = o_{3453} = -O_{13}, && O_{15}O_4 = o_{34523} = O_{14},\\
&O_{15}O_5 = o_{3454} = O_{11}, && O_{15}O_6 = o_{34524} = -O_{12}, && O_{15}O_7 = o_{34534} = -O_9,\\
&O_{15}O_8 = o_{345234} = O_{10}, && O_{15}O_9 = o_{3455} = -O_7, && O_{15}O_{10} = o_{34525} = O_8,\\
&O_{15}O_{11} = o_{34535} = O_5, && O_{15}O_{12} = o_{345235} = -O_6, && O_{15}O_{13} = o_{34545} = -O_3,\\
&O_{15}O_{14} = o_{345245} = O_4, && O_{15}O_{15} = o_{345345} = 1, && O_{15}O_{16} = o_{3452345} = -O_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&O_{16}O_2 = o_{23452} = O_{15}, && O_{16}O_3 = o_{23453} = -O_{14}, && O_{16}O_4 = o_{234523} = -O_{13},\\
&O_{16}O_5 = o_{23454} = O_{12}, && O_{16}O_6 = o_{234524} = O_{11}, && O_{16}O_7 = o_{234534} = -O_{10},\\
&O_{16}O_8 = o_{2345234} = -O_9, && O_{16}O_9 = o_{23455} = -O_8, && O_{16}O_{10} = o_{234525} = -O_7,\\
&O_{16}O_{11} = o_{234535} = O_6, && O_{16}O_{12} = o_{2345235} = O_5, && O_{16}O_{13} = o_{234545} = -O_4,\\
&O_{16}O_{14} = o_{2345245} = -O_3, && O_{16}O_{15} = o_{2345345} = O_2, && O_{16}O_{16} = o_{23452345} = 1.
\end{aligned}
$$