# О ПРОБЛЕМЕ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ $n$-АРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ИХ ПОЛУГРУППАМИ ЧАСТИЧНЫХ ИЗОТОННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

*А. В. Решетников*

*Текст в том виде, в каком он представлен в данной заметке, не претендует на то, чтобы быть опубликованным в виде статьи в каком-либо научном журнале. Я излагаю здесь некоторые соображения, связанные с проблемой обобщения результатов Л. М. Поповой, полученных ею в статье [2]. Материал, представленный ниже, может быть использован для подготовки полноценной публикации после доработки.*

## Введение

Пусть на множестве $X$ задано $n$-арное отношение $\rho$. Отображение $\alpha : X' \to X$ мы называем *частичным преобразованием* множества $X$, если $X' \subseteq X$. Используем обозначение $X' = \mathrm{dom}\,\alpha$ – это множество называется *областью определения* частичного преобразования $\alpha$. Мы говорим, что $\alpha$ *сохраняет* отношение $\rho$ (или, по-другому, $\alpha$ является *изотонным* частичным преобразованием множества $X$), если

$$\bar{x} \in \rho \cap (\mathrm{dom}\,\alpha)^n \;\Rightarrow\; \bar{x}\alpha \in \rho \tag{1}$$

для всех $\bar{x} \in X^n$; здесь $\bar{x}\alpha$ – результат покомпонентного действия отображения $\alpha$ на элементы кортежа $\bar{x}$. Например, если $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$, то

$$\bar{x}\alpha \,\equiv\, (x_1, ..., x_n)\,\alpha \,=\, (x_1\alpha,\, ...,\, x_n\alpha).$$

В работе [2] была доказана лемма 2, из которой следует, что *если на множестве $X$ задано нетривиальное бинарное отношение $\rho$ (т.е. $\rho \neq \emptyset$, $\rho \neq \Delta_X$, $\rho \neq X^2$), которое, однако, является рефлексивным или антирефлексивным, то его полугруппа $P_\rho(X)$ – состоящая из всех частичных преобразований множества $X$, сохраняющих $\rho$ – определяет отношение $\rho$ с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма.*

Другими словами: любое бинарное отношение $\rho$, удовлетворяющее определённым, весьма слабым условиям (нетривиальность плюс либо рефлексивность, либо антирефлексивность), определяется своей полугруппой ч а с т и ч н ы х изотонных преобразований с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма. *Если* указанные условия выполнены для $\rho$ и при этом его полугруппа $P_\rho(X)$ совпадает с полугруппой $P_\sigma(X)$ для какого-либо другого бинарного отношения $\sigma$, заданного на том же множестве (причём $\sigma$ – произвольное отношение, не обязательно рефлексивное или антирефлексивное), то лемма 2 Л. М. Поповой утверждает[1], что либо $\rho = \sigma$, либо $\rho = \sigma^{-1}$ (обратное бинарное отношение).

Было бы небезынтересно получить какой-либо более общий результат, применимый к $n$-арному отношению $\rho$ при разных значениях $n$ (или хотя бы при $n = 3$). В связи с этим возникают следующие вопросы: *при каких условиях на* $\rho \subseteq X^n$ *его полугруппа частичных изотонных преобразований* $P_\rho(X)$ *определяет* $\rho$ *с той или иной точностью? И насколько точно в прицнипе можно определить* $\rho$ *по его полугруппе* $P_\rho(X)$?

Автору неизвестны ответы на обозначенные вопросы. Но в этом направлении исследований имеется ряд предварительных результатов – их изложению как раз и посвящена настоящая заметка. Сразу стоит отметить, что схожие вопросы рассматривались в работах [1], [3] и [4].

В рамках данной проблемы важно, что И. Б. Кожуховым были найдены необходимые и достаточные условия на $n$-арное отношение $\rho \subseteq X^n$, при выполнении которых *любое* частичное преобразование множества $X$ является изотонным [4, теорема 2]. Нахождение таких условий фактически означает, что обобщена лемма 1 из статьи Л. М. Поповой, и тем самым получено описание тривиального случая для $\rho$ при $n > 2$.

Что же касается леммы 2 [2], то её доказательство в исходной работе состоит из нескольких пунктов; мы покажем (см., например, теорему 9), что видоизменённые рассуждения, на которых строится доказательство этих пунктов, могут быть перенесены на любые $n$-арные отношения.

## Основные определения и обозначения

Решётку отношений эквивалентности на каком-либо множестве $X$ будем обозначать через $\mathrm{Eq}\, X$. Символы $T(X)$ и $P(X)$ будут обозначать, соответственно, множество всех преобразований множества $X$ и множество всех его частичных преобразований.

Через $T_\rho(X)$ и $P_\rho(X)$, где $\rho \subseteq X^n$, обозначены множество всех изотонных преобразований и, соответственно, всех частичных изотонных преобразований, заданных на множестве $X$, сохраняющих отношение $\rho$. Определение (частичного) изотонного преобразования см. во «Введении».

Для произвольного кортежа $\bar{x} = (x_1, ..., x_n) \in X^n$ и произвольного индекса $k$ (то есть $1 \leq k \leq n$) по определению полагаем, что $k\bar{x} = x_k$. Та-

[1] Пусть бинарные отношения $\rho$ и $\sigma$ заданы на р а з н ы х множествах: соответственно, $\rho \subseteq X^2$ и $\sigma \subseteq Y^2$. Тогда, на самом деле, *в случае, когда* $\rho$ *удовлетворяет обозначенным условиям, из изоморфизма полугрупп* $P_\rho(X)$ *и* $P_\sigma(Y)$ *будет следовать, что алгебраические системы* $(X, \rho)$ *и* $(Y, \sigma)$ *изоморфны или антиизоморны друг другу* – это утверждает основная теорема, доказанная в [2]. Однако, доказательство данной теоремы существенно более сложное, чем доказательство леммы 2. Так что далее мы ограничимся обсуждением лишь частного случая, когда $X = Y$, $P_\rho(X) = P_\sigma(Y)$.

ким образом, *любой упорядоченный набор, составленный из n элементов множества $X$, мы рассматриваем как отображение* $\{1, 2, ..., n\} \to X$. В частности, мы определяем *ядро* $\ker \bar{x}$ кортежа $\bar{x}$ и его *образ* $\operatorname{im} \bar{x}$ как ядро и образ соответствующего отображения $\bar{x} : \{1, ..., n\} \to X$:

$$\ker \bar{x} \;=\; \left\{ (a,b) \in (\operatorname{dom} \bar{x})^2 \;\middle|\; a\bar{x} = b\bar{x} \right\}; \quad \operatorname{im} \bar{x} \;=\; \{k\bar{x} \,|\, k \in \operatorname{dom} \bar{x}\}.$$

Далее мы, как правило, будем индексировать элементы кортежей не последовательными натуральными числами, а *индексами* из какого-либо *множества индексов* $N$. В этой связи напомним, что $X^N$ – это по определению множество, состоящее из всевозможных отображений $N \to X$. Каждое из таких отображений можно рассматривать как кортеж.

### Предварительные сведения. Соглашения об индексации

В качестве примера рассмотрим на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ очень похожие тернарные отношения

$$\rho = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \;\middle|\; z = x - y \right\}, \quad \sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \;\middle|\; z = y - x \right\}. \quad (2)$$

Любое из них пригодно для того, чтобы на языке теории множеств выразить одно и то же условие, налагаемое на три целых числа: *разность двух заданных чисел равна третьему числу.* Оба высказывания $(x, y, z) \in \rho$ и $(y, x, z) \in \sigma$ равносильны друг другу: каждое из них оказывается верным в том и только том случае, когда $x = y + z$.

Мы видим, что упорядоченный набор $(x, y, z)$ принадлежит множеству $\rho$ тогда и только тогда, когда *другой* упорядоченный набор $(y, x, z)$ принадлежит $\sigma$. Притом, что оба набора составлены из одних и тех же элементов, они отличаются друг от друга *порядком* перечисления элементов. Таким образом, $\rho$ и $\sigma$ – это в данном случае разные тернарные отношения (поскольку множества $\rho$ и $\sigma$, несомненно, различны). Но эти отношения обладают *двойственными алгебраическими свойствами*: то есть, каким бы ни было свойство отношения $\rho$, оно может быть переформулировано как свойство отношения $\sigma$ путём перестановки соответствующих символов в кортежах, и наоборот. Переход от формул, содержащих атомарные $(x, y, z) \in \rho$, к формулам, содержащим $(x, y, z) \in \sigma$, осуществляется простой перестановкой символов «$x$» и «$y$» в этих формулах.

Предположим, что $\rho$ обладает тем свойством, что заданное преобразование $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ сохраняет отношение $\rho$. Двойственное алгебраическое свойство отношения $\sigma$ состоит в том, что $\alpha$ сохраняет $\sigma$. Это видно из (1): коль скоро всякий кортеж $\bar{x} \in X^n$ удовлетворяет условию (1), то этому же условию будет удовлетворять и любой кортеж вида $\bar{y} = \varphi\bar{x}$, где $\varphi$ – произвольное преобразование индексов $\operatorname{dom} \bar{x} \to \operatorname{dom} \bar{x}$:

$$\bar{y} = \varphi\bar{x} \in \rho \cap (\operatorname{dom} \alpha)^n \;\Rightarrow\; \bar{y}\alpha \in \rho \quad \text{для всех } \bar{x} \in X^n. \quad (3)$$

В нашем случае $n = 3$, $X = \mathbb{Z}$. В качестве $\varphi$ выберем взаимно однозначное отображение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, определяемое равенством $(1,2,3)\varphi = (2,1,3)$. Ясно, что (3) становится условием сохранения отношения $\sigma$ под действием $\alpha$. В самом деле: $\varphi\bar{x} \in \rho \Leftrightarrow \bar{x} \in \sigma$; кроме того, $\bar{y}\alpha \in \rho \Leftrightarrow \bar{x}\alpha \in \sigma$.

В свою очередь отсюда вытекает, что в случае тернарных отношений $\rho$ и $\sigma$, указанных в примере (2), их полугруппы $P_\rho(\mathbb{Z})$ и $P_\sigma(\mathbb{Z})$ не могут отличаться друг от друга[2].

Итак, *для указанных выше тернарных отношений* $\rho$ *и* $\sigma$ *их полугруппы* $P_\rho(\mathbb{Z})$ *и* $P_\sigma(\mathbb{Z})$ *оказались одинаковыми, не смотря на то, что сами отношения* $\rho$ *и* $\sigma$ *различны.* Иначе говоря, $\rho$ и $\sigma$ оказались неотличимыми по своим полугруппам частичных изотонных преобразований. Теперь – после того, как мы специально разобрали данный пример очень подробно – попытаемся выявить глубинную причину, по которой перестановка элементов внутри кортежей оставляет инвариантным их свойство сохраняться под действием того или иного частичного преобразования.

Рассматривая всё те же $\rho$ и $\sigma$ более внимательно, мы замечаем, что всё дело в используемой *индексации элементов* внутри тех упорядоченных наборов, из которых составлено множество $\mathbb{Z}^3$: ведь с любым упорядоченным набором элементов явно или неявно связана какая-либо их индексация. Пусть сейчас $X$ – произвольное множество. Когда мы говорим, что $a$ является *первым* элементом в упорядоченной тройке $(a,b,c) \in X^3$, элемент $b$ является её *вторым*, а $c$ – *третьим* элементом, то на самом деле мы имеем в виду, что тройка $(a,b,c)$ – это некое отображение

$$\bar{x} : \{1,2,3\} \to X : \quad 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto b, \quad 3 \mapsto c. \tag{4}$$

Фиксируя данное отображение, мы тем самым *индексируем* элементы внутри заданной упорядоченной тройки.

Но ведь можно внутри того же самого набора $(a,b,c)$ ввести индексацию по-другому – например, неотрицательными целыми числами:

$$\bar{t} : \{0,1,2\} \to X : \quad 0 \mapsto a, \quad 1 \mapsto b, \quad 2 \mapsto c. \tag{5}$$

И поскольку $\bar{x}$ и $\bar{t}$ – *различные* отображения, то и кортежи $\bar{x}$, $\bar{t}$ мы тоже вынуждены считать р а з л и ч н ы м и, не смотря на то, что оба они имеют одну и ту же форму записи с помощью скобок: «$(a,b,c)$».

---

[2]Грубо говоря, понятие сохранения отношения $\rho$ частичным отображением $\alpha$ не чувствительно к тому, в каком порядке записываются элементы упорядоченных наборов, входящих в состав множества $\rho$. Неважно, используем ли мы порядок $x$, $y$, $z$ и применяем частичное отображение $\alpha$ к тернарному отношению $\rho$, или же мы используем порядок $y$, $x$, $z$ и применяем $\alpha$ к отношению $\sigma$: в обоих случаях $\alpha$ переведёт тройку исходных чисел в три новых числа, которые будут либо удовлетворять исходному тернарному отношению – соответственно, $\rho$ или $\sigma$ – либо не удовлетворять ему. Именно поэтому в данном случае мы имеем $P_\rho(\mathbb{Z}) = P_\sigma(\mathbb{Z})$.

Если же внутри тройки $(a, b, c)$ ввести индексацию элементов совсем иначе:

$$\bar{y} : \{1, 2, 3\} \to X : \quad 2 \mapsto a, \quad 1 \mapsto b, \quad 3 \mapsto c, \tag{6}$$

то получится кортеж, имеющий новую *форму записи*: «$(b, a, c)$». Конечно, использование такой индексации на практике вызовет справедливое недоумение. Но с точки зрения теории это правомерно: *смена индексации не должна приводить к каким-либо логическим противоречиям.*

Столь тонкие вопросы, касающиеся формы записи кортежей, обычно остаются без внимания, потому что индексация элементов внутри упорядоченных наборов, как правило, фиксирована. Но мы увидели, что запись таких наборов элементов с помощью скобок бессмысленна, если отсутствует возможность восстановить их индексацию по записи[3]. Уже сам термин «упорядоченный набор элементов» подразумевает, что внутри него множество индексов элементов упорядочено каким-либо способом. В более общем случае, когда для кортежа не задан порядок на множестве его индексов, мы говорим о нём далее как об «индексированном», но не обязательно «упорядоченном» наборе элементов.

Будем говорить о кортежах $\bar{x}$ и $\bar{y}$, указанных в (4) и (6), что они *совпадают с точностью до индексации* своих элементов. Более точно:

**Определение 1.** Пусть $\bar{x}, \bar{y} : N \to X$ – какие угодно отображения. Рассматривая $\bar{x}$ и $\bar{y}$ как индексированные наборы элементов множества $X$, мы говорим, что они *совпадают с точностью до индексации*, если существует такое взаимно однозначное отображение $\varphi : N \to N$, что $\bar{y} = \varphi\bar{x}$.

Кортежи $\bar{x}$ и $\bar{t}$ из (4) и (5) мы считаем различными полностью, не совпадающими друг с другом даже с точностью до индексации – не смотря на то, что форма записи для них с помощью скобок одна и та же.

Естественным образом понятие совпадения с точностью до индексации с кортежей переносится на отношения, заданные на множестве:

**Определение 2.** Пусть $\rho, \sigma \subseteq X^N$ – произвольные множества, рассматриваемые как $|N|$-арные отношения на множестве $X$. Мы говорим, что $\rho$ и $\sigma$ *совпадают с точностью до индексации*, если существует такое взаимно однозначное отображение $\varphi : N \to N$, что $\sigma = \{\varphi\bar{x} \mid \bar{x} \in \rho\}$.

Примером тернарных отношений, совпадающих с точностью до индексации элементов, служат отношения $\rho$ и $\sigma$ на $\mathbb{Z}$, определённые условием (2). Полагая $N = \{1, 2, 3\}$, находим, что $\varphi = \{1 \mapsto 2;\ 2 \mapsto 1;\ 3 \mapsto 3\}$.

[3] Такое положение дел может показаться непривычным на первый взгляд, но вспомним, например, что в линейном пространстве понятие координат вектора тоже остаётся лишённым смысла до тех пор, пока в явном или неявном виде не задан базис для этих координат.

Мы готовы дать п р е д в а р и т е л ь н ы й ответ на второй из вопросов, поставленных в разделе «Введение». *Полугруппа частичных изотонных преобразований $n$-арного отношения $\rho$ в принципе может определить это отношение лишь с точностью до индексации тех кортежей, из которых состоит* $\rho$. В случае $n = 2$ изменение индексации означает переход от бинарного отношения $\rho$ к обратному для него отношению $\rho^{-1}$ – именно это и было отмечено в трудах Л. М. Поповой, т.е. что отношения $\rho$ и $\rho^{-1}$ неразличимы по их полугруппам $P_\rho(X) = P_{\rho^{-1}}(X)$.

Но даже в случае $n = 2$ есть примеры таких отношений $\rho, \sigma \in X^2$, которые с точностью до индексации не совпадают друг с другом и тем не менее обладают одинаковыми полугруппами частичных изотонных преобразований $P_\rho(X)$ и $P_\sigma(X)$ (например, $\rho = \emptyset$ и $\sigma = X^2$ при естественном условии, что $|X| \geq 1$). Из теоремы 2, доказанной в [4], напрямую следует, что существуют и другие примеры таких отношений. Мы считаем необходимым сейчас подробно обсудить результат теоремы И. Б. Кожухова.

## Алгебраические системы $(X, \rho)$ с условиями $P_\rho(X) = P(X)$ и $T_\rho(X) = T(X)$

Пусть $X$ и $N$ – произвольные множества. Рассмотрим какое-либо отношение $\rho \subseteq X^N$ (заданное на $X$, проиндексированное множеством $N$). Согласно определению (1), каким бы ни было частичное преобразование $\alpha$ множества $X$, утверждение о том, что $\alpha$ сохраняет $\rho$, равносильно тому, что

$$\bar{x} \in \rho \cap (\mathrm{dom}\,\alpha)^N \;\Rightarrow\; \bar{x}\alpha \in \rho \tag{7}$$

для всякого отображения $\bar{x} : N \to X$. В свою очередь любое отображение $N \to X$ можно рассматривать как множество пар вида $(k, k\bar{x})$, где $k \in N$:

$$\bar{x} \;=\; \{(k, k\bar{x}) \,|\, k \in N\}. \tag{8}$$

Так что $\bar{x} \subseteq N \times X$. При таком подходе становится понятно, например, что́ представляют собой (частичные) изотонные преобразования множества $X$ в тех вырожденных случаях, когда $X = \emptyset$ или $N = \emptyset$:

**Предложение 1.** *Пусть $\rho \subseteq X^\emptyset$ (т.е. $\rho$ – отношение нулевой арности*[4]*, заданное на множестве $X$). Тогда $P_\rho(X) = P(X)$ и $T_\rho(X) = T(X)$. При этом, если $X = \emptyset$, то $P(\emptyset) = T(\emptyset) = \{\emptyset\}$ (не пустые множества!).*

[4]Пусть $N = \emptyset$. Тогда вне зависимости от мощности множества $X$ имеем

$$\bar{x} \in X^\emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} \;=\; \{(k, x) \,|\, k \in \emptyset;\, x = k\bar{x}\} \;=\; \emptyset. \tag{9}$$

То есть всегда $X^\emptyset = \{\emptyset\}$. Следовательно, *на любом множестве существует ровно два различных отношения нулевой арности*: пустое отношение $\emptyset$ (как и для любой другой арности) и отношение $\{\emptyset\}$. Это полностью согласуется с утверждением о том, что на любом множестве $X$ существует всего $2^{|X|^n}$ различных $n$-арных отношений.

*Доказательство.* Условие (7) заведомо выполняется для $\rho = \emptyset$. Если же $\rho = \{\emptyset\}$, то $\rho \cap (\operatorname{dom}\alpha)^{\emptyset} = \{\emptyset\}$ вне зависимости от $\alpha$; поэтому в данном случае существует ровно один элемент $\bar{x} \in \rho \cap (\operatorname{dom}\alpha)^{\emptyset}$: им является кортеж нулевой длины $\bar{x} = \emptyset$. Для него тоже выполняется условие (7), поскольку $\bar{x}\alpha = \emptyset$ как результат покомпонентного действия частичного отображения $\alpha$ на $\bar{x}$. Таким образом, любое частичное преобразование множества $X$ сохраняет $\rho$, если $\rho \subseteq X^{\emptyset}$. Наконец, если $X = \emptyset$ и $\alpha \in P(X)$, то $\alpha = \emptyset$ (это следует из (9), см. сноску[4]) и $\alpha \in T(\emptyset) \equiv \emptyset^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. □

**Предложение 2.** *Пусть $N \neq \emptyset$, но $X = \emptyset$ и $\rho \subseteq \emptyset^N$. Тогда $\rho = \emptyset$.*

*Доказательство.* Легко видеть из (8), что $N \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset^N = \emptyset$. Следовательно, $\rho = \emptyset$ в условиях предложения. □

**Замечание.** Каким бы ни было множество $X$, всегда $P_{\emptyset}(X) = P(X)$ и $T_{\emptyset}(X) = T(X)$. Это очевидно из определений полугрупп $P(X)$ и $T(X)$.

Важную роль в дальнейшем будут играть отношения $\rho \subseteq X^N$, удовлетворяющие следующему условию:

$$\left.\begin{array}{r} \bar{x} \in \rho \\ \ker \bar{x} \subseteq \ker \bar{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \bar{y} \in \rho \quad \text{для любых } \bar{x}, \bar{y} \in X^N. \tag{10}$$

Это связано с теоремой 2 [4], которая утверждает:

**Теорема 3.** *Пусть $\rho \subseteq X^N$ – произвольное подмножество, рассматриваемое как $|N|$-арное отношение на $X$. Следующие условия равносильны:*

*(i)* $P_{\rho}(X) = P(X)$ *(т.е. любое частичное преобразование множества $X$ изотонно по отношению к алгебраической системе $(X, \rho)$);*

*(ii)* $T_{\rho}(X) = T(X)$*;*

*(iii)* $\rho$ *удовлетворяет условию* (10).

*Доказательство.* Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ напрямую следует из равенства $T_{\rho}(X) = T(X) \cap P_{\rho}(X)$, верного для всех $\rho \subseteq X^N$. Для доказательства импликации $(ii) \Rightarrow (iii)$ достаточно заметить, что

$$\ker \bar{x} \subseteq \ker \bar{y} \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha \in T(X) \quad \bar{x}\alpha = \bar{y} \tag{11}$$

для любых $\bar{x}, \bar{y} \in X^N$. А исходя из соотношения

$$\operatorname{im} \bar{x} \subseteq \operatorname{dom} \alpha \quad \Rightarrow \quad \ker \bar{x} \subseteq \ker(\bar{x}\alpha), \tag{12}$$

справедливого для всякого отображения $\bar{x} : N \to X$ и какого угодно частичного преобразования $\alpha \in P(X)$, легко вывести, что $(iii) \Rightarrow (i)$. □

Постараемся представить условие (10) более наглядно. Коль скоро ядро любого отображения $N \to X$ представляет собой отношение эквивалентности на множестве $N$, рассмотрим решётку *всех* эквивалентностей на $N$ (данную решётку мы обозначаем через $\mathrm{Eq}\,N$), выберем произвольным образом подмножество $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Eq}\,N$ и введём следующее обозначение:

$$\rho_{\mathcal{K}} = \left\{ \bar{y} \in X^N \,\middle|\, \omega \subseteq \ker \bar{y} \text{ для какого-либо } \omega \in \mathcal{K} \right\}. \tag{13}$$

**Предложение 4.** *Отношение* $\rho \subseteq X^N$ *удовлетворяет условию* (10) *тогда и только тогда, когда* $\rho = \rho_{\mathcal{K}}$ *для некоторого* $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Eq}\,N$.

*Доказательство.* Очевидно, что (10) в самом деле выполняется в том случае, когда $\rho = \rho_{\mathcal{K}}$. Наоборот, пусть выполнено условие (10) для какого-либо отношения $\rho \subseteq X^N$. Положим $\mathcal{K} = \{\ker \bar{x} \mid \bar{x} \in \rho\}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Eq}\,N$ и $\rho = \rho_{\mathcal{K}}$. □

Ввиду предложения 4 мы теперь можем переформулировать теорему 3 в следующем виде (опуская упоминание о соотношении (ii)):

**Теорема 5.** *Пусть* $X$, $N$ *– произвольные множества. Каким бы ни было подмножество* $\rho \subseteq X^N$, *равенство* $P_\rho(X) = P(X)$ *выполняется в том и только том случае, когда* $\rho = \rho_{\mathcal{K}}$ *для какого-либо* $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Eq}\,N$.

Причём теоремы 3 и 5 верны, даже если $N = \emptyset$, согласно предложению 1. Утверждения (11) и (12) тоже верны при $\bar{x}, \bar{y} \in X^\emptyset$: потому что произведение $\bar{x}\alpha$ можно рассматривать как произведение бинарных отношений.

Приведём несколько примеров отношений вида $\rho_{\mathcal{K}} \subseteq X^N$. Напомним, что решётка $\mathrm{Eq}\,N$ всегда содержит по меньшей мере элементы $\Delta_N$ и $N^2$ (где $\Delta_N$ – отношение равенства на множестве $N$). Понятно, что

$$\mathcal{K} = \emptyset \;\Rightarrow\; \rho_{\mathcal{K}} = \emptyset;$$
$$\mathcal{K} = \mathrm{Eq}\,N \;\Rightarrow\; \rho_{\mathcal{K}} = X^N.$$

Эти два отношения отличаются при $X \neq \emptyset$ и совпадают в случае $X = \emptyset$, $N \neq \emptyset$ (притом, что $\emptyset \neq \mathrm{Eq}\,N$ всегда, каким бы ни было множество $N$).

Пусть $\mathcal{K} = \{N^2\}$. Тогда отношение $\rho_{\mathcal{K}}$ – это множество всех кортежей, индексированных множеством $N$, состоящих из одинаковых элементов:

$$\mathcal{K} = \left\{N^2\right\} \;\Rightarrow\; \rho_{\mathcal{K}} = \{(x, x, ..., x, ...) \mid x \in X\}. \tag{14}$$

Действительно: если $N^2 \subseteq \ker \bar{x}$ для какого-либо $\bar{x} \in X^N$, то $\ker \bar{x} = N^2$. Поэтому $\rho_{\mathcal{K}}$ имеет вид (14) при $\mathcal{K} = \{N^2\}$. В частности, если $|N| = 2$, то $\rho_{\mathcal{K}} = \Delta_X$. А если $|N| = 1$, то $\rho_{\mathcal{K}} = X$. При $|N| = 0$ имеем $\mathcal{K} = \mathrm{Eq}\,N$.

Ещё примеры:

**Пример 1.** Пусть $\Delta_N \in \mathcal{K}$. Тогда для всех $\bar{x} \in X^N$ выполняется соотношение $\Delta_N \subseteq \ker \bar{x}$. Следовательно, в данном случае $\rho_{\mathcal{K}} = X^N$.

**Пример 2.** Пусть $n$-арное отношение $\rho \subseteq X^n$ определено формулой вида

$$\rho \;=\; \{\,(a_1, a_2, ..., a_n) \in X^n \mid a_1, a_2, ..., a_n \in X\}\,,$$

где $a_1$, ..., $a_n$ – формальные символы, среди которых могут быть совпадающие (например, если они все совпадают, то $\rho$ имеет вид (14)). Положим $N = \{1, 2, ..., n\}$ и введём на $N$ отношение эквивалентности

$$\omega \;=\; \left\{\,(i, j) \in N^2 \;\middle|\; a_i = a_j\right\}.$$

Легко видеть, что $\rho = \rho_{\{\omega\}}$.

Последний пример имеет исключительную важность ввиду того, что позволяет представить любое $n$-арное отношение вида $\rho_{\mathcal{K}}$ в достаточно наглядной форме: мы покажем в следующем разделе, что всегда

$$n < \infty \quad \Rightarrow \quad \rho_{\mathcal{K}} \;=\; \bigcup_{\omega \in \mathcal{K}} \rho_{\{\omega\}} \;=\; \bigcup_{\omega\,\in\,\mathrm{Min}\,\mathcal{K}} \rho_{\{\omega\}}, \tag{15}$$

где $\mathrm{Min}\,\mathcal{K}$ – множество всех минимальных элементов множества $\mathcal{K}$ в решётке $\mathrm{Eq}\,N$. Причём первое из этих равенств справедливо даже при $n = \infty$, а для выполнения второго равенства в общем случае необходимо и достаточно отсутствия в $\mathcal{K}$ не ограниченных снизу цепей элементов.

### Свойства отношений вида $\rho_{\mathcal{K}}$

В данном разделе мы рассмотрим важнейшие свойства отношений вида $\rho_{\mathcal{K}}$. Далее, при доказательстве основных лемм, мы не будем их использовать. Тем не менее, мы считаем важным привести эти утверждения: иначе наше представление об этих объектах будет неполным.

В формулировках всех следующих утверждений везде предполагается, что $\rho_{\mathcal{K}} \subseteq X^N$ ($N$ – множество индексов). Соответственно, $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Eq}\,N$.

**Предложение 6.** *Каким бы ни было индексирующее множество $I$:*

$$\mathcal{K} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{K}_i \quad \Rightarrow \quad \rho_{\mathcal{K}} = \bigcup_{i \in I} \rho_{\mathcal{K}_i}.$$

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{K} = \cup\{\mathcal{K}_i \,|\, i \in I\}$. Исходя из определения (13):

$$\rho_{\mathcal{K}} \;=\; \left\{\bar{x} \in X^N \;\middle|\; \exists i \in I \quad \exists \omega \in \mathcal{K}_i \quad \omega \subseteq \ker \bar{x}\right\};$$

$$\bigcup_{i \in I} \rho_{\mathcal{K}_i} \;=\; \bigcup_{i \in I} \left\{\,\bar{x} \in X^N \;\middle|\; \exists \omega \in \mathcal{K}_i \quad \omega \subseteq \ker \bar{x}\right\}.$$

Ясно, что $\bar{x} \in \rho_{\mathcal{K}} \Leftrightarrow \bar{x} \in \cup\{\rho_{\mathcal{K}_i} \,|\, i \in I\}$ для любого $\bar{x} \in X^N$. $\square$

**Предложение 7.** *Пусть множество $\mathcal{K}$ не имеет не ограниченных снизу цепей элементов. Тогда* $\rho_{\mathcal{K}} = \rho_{\operatorname{Min}\mathcal{K}}$.

*Доказательство.* Для доказательства достаточно заметить, что

$$(\exists \omega \in \mathcal{K} \quad \omega \subseteq \ker \bar{x}) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists \omega \in \operatorname{Min}\mathcal{K} \quad \omega \subseteq \ker \bar{x})$$

в условиях предложения, каким бы ни был кортеж $\bar{x} \in X^N$. □

Из предложений 6 и 7 немедленно следует утверждение (15).

### Об определяемости сверхсимметричных отношений их полугруппами частичных изотонных преобразований

Рассмотрим произвольные отношения $\rho, \sigma \subseteq X^N$ и предположим, что $P_\rho(X) \subseteq P_\sigma(X)$. Выберем любую пару кортежей $\bar{x} \in \sigma$, $\bar{y} \in X^N$, удовлетворяющую условию $\ker \bar{x} \subseteq \ker \bar{y}$ (если такая пара существует). Для неё можно построить отображение $\alpha : \operatorname{im} \bar{x} \to \operatorname{im} \bar{y}$ такое, при котором $\bar{x}\alpha = \bar{y}$ (а именно: положим $k\bar{x}\alpha = k\bar{y}$ для всех $k \in N$). Если окажется, что $\alpha$ сохраняет $\rho$, то, согласно нашему исходному предположению, отношение $\sigma$ также будет сохраняться под действием $\alpha$. И тогда мы сможем утверждать, что $\bar{y} \in \sigma$:

$$\left.\begin{array}{r} P_\rho(X) \subseteq P_\sigma(X) \\ \bar{x} \in \sigma,\ \bar{y} \in X^N,\ \ker \bar{x} \subseteq \ker \bar{y} \\ \text{отображение } \bar{x} \mapsto \bar{y} \text{ сохраняет } \rho \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \bar{y} \in \sigma. \tag{16}$$

**Лемма 8.** *Пусть $\rho, \sigma \subseteq X^N$. Какими бы ни были подмножество $A \subseteq X$ и кардинальное число $m$, если выполнены следующие условия:*

*i)* $P_\rho(X) \subseteq P_\sigma(X)$;

*ii)* $\tau \cap \left\{ \rho_{\{\ker \bar{t}\}} \,\middle|\, \bar{t} \in \rho \right\} \subseteq \rho$

*для отношения* $\tau = A^N \cap \left\{ \bar{y} \in X^N \,\middle|\, |\operatorname{im} \bar{y}| < m \right\}$;

*iii)* $\forall \bar{y} \in \tau \quad \exists \bar{x} \in \sigma \quad \ker \bar{x} \subseteq \ker \bar{y}$,

*то справедливо соотношение* $\tau \subseteq \sigma$.

*Доказательство.* Пусть $\bar{y} \in \tau$. Из (iii) следует, что существуют кортеж $\bar{x} \in \sigma$ и отображение $\alpha : \operatorname{im} \bar{x} \to \operatorname{im} \bar{y}$, для которых $\bar{x}\alpha = \bar{y}$. Докажем, что $\alpha \in P_\rho(X)$. Для этого произвольным образом выберем элемент $\bar{t} \in \rho$ и предположим, что $\bar{t} \in (\operatorname{dom} \alpha)^N$. Введём обозначение: $\bar{u} = \bar{t}\alpha$. Тогда

$$\bar{u} \in (\operatorname{im} \alpha)^N = (\operatorname{im} \bar{y})^N \subseteq A^N; \quad |\operatorname{im} \bar{u}| \le |\operatorname{im} \alpha| = |\operatorname{im} \bar{y}| < m,$$

поскольку $\bar{y} \in \tau$. Следовательно, $\bar{u} \in \tau$. Кроме того: $\ker \bar{t} \subseteq \ker \bar{u}$, а значит, $\bar{u} \in \rho_{\{\ker \bar{t}\}}$. Поэтому $\bar{u} \in \rho$, согласно (ii). Таким образом, $\alpha \in P_\rho(X)$ в силу того, что $\bar{t}$ был выбран по произволу. Применяя теперь конструкцию (16), мы приходим к выводу, что $\bar{y} \in \sigma$. Отсюда $\tau \subseteq \sigma$. □

Если в лемме 8 в качестве $m$ выбрать любой кардинал $m > |N|$, то для $\tau$ мы получим соотношение $\tau = A^N$. А если ещё более усилить предпосылки (ii) и (iii) в лемме, то мы придём к следующему выводу:

**Следствие.** *Пусть следующие условия выполнены для каких-либо отношений* $\rho, \sigma \subseteq X^N$ *и какого-либо подмножества* $A \subseteq X$*:*

*j)* $P_\rho(X) \subseteq P_\sigma(X)$*;*

*jj)* $A^N \subseteq \rho$*;*

*jjj) существует* $\bar{x} \in \sigma$ *с ядром* $\ker \bar{x} = \Delta_N$.

*Тогда* $A^N \subseteq \sigma$.

Данное следствие обобщает п.2 леммы 2 [2] в том случае, когда бинарное отношение $\rho$ рефлексивно[5]. Покажем на примере, что условие (jjj) здесь очень существенно.

**Пример 3.** Пусть $X = \{a, b, c\}$ – некое множество, на котором заданы тернарные отношения $\rho$ и $\sigma$ следующим образом:

$$\rho = A^3 \cup \{(c, c, c)\}, \quad A = \{a, b\};$$

$$\sigma = \{(a, a, a), (b, b, b), (c, c, c)\} \cup \{(a, a, b), (b, b, a)\}.$$

Легко видеть, что частичное преобразование $\alpha \in P(X)$ сохраняет отношение $\rho$ в том и только том случае, когда

$$\{a\alpha, b\alpha\} \subseteq \{c\} \quad \text{или} \quad \{a\alpha, b\alpha\} \subseteq \{a, b\}. \tag{17}$$

Аналогично, $\alpha$ сохраняет $\sigma$ тогда и лишь тогда, когда выполняется (17). Так что $P_\rho(X) = P_\sigma(X)$. При этом $A^3 \subset \rho$, но $A^3 \not\subseteq \sigma$. Интересно, что в этом примере оба множества $\rho$ и $\sigma$ содержат диагональ $\{(x, x, x) \mid x \in X\}$.

*Пусть* $\rho$ *– б и н а р н о е отношение, заданное на множестве* $X$*, причём* $\Delta_X \subset \rho = \rho^{-1} \subset X^2$ *(оба включения строгие). Если выполняется* $P_\rho(X) = P_\sigma(X)$ *для какого-либо отношения* $\sigma \subseteq X^2$*, то либо* $\rho = \sigma$*, либо же* $\rho = \sigma^{-1}$ – данное утверждение следует из п.3 леммы 2 [2]. Сейчас, опираясь на следствие из леммы 8, мы готовы предложить более общее утверждение.

**Определение 3.** Пусть $\rho \subseteq X^N$. Назовём отношение $\rho$ *сверхсимметричным*, если включение $(\operatorname{im} \bar{x})^N \subseteq \rho$ имеет место для всех $\bar{x} \in \rho$.

[5]Действительно, если $N = \{1; 2\}$ и выполнено условие $\Delta_X \subset \rho \subset X^2$, а также условие $P_\rho(X) = P_\sigma(X)$, то непосредственно из леммы 8 мы получаем, что $(a, a) \in \sigma$ для всех $a \in X$ (для этого полагаем $\tau = \{(a, a)\}$ в лемме 8 и учитываем, что $\sigma \neq \emptyset$ ввиду теоремы 3); а опираясь на следствие из леммы 8, мы получаем, что $\{(a, b), (b, a)\} \subseteq \sigma$ для любой пары $(a, b) \in \rho \cap \rho^{-1}$ (опять же: $\Delta_X \subset \sigma \subset X^2$ ввиду теоремы 3).

*Сверхсимметризатором* заданного отношения $\rho$ назовём наибольшее (по включению) сверхсимметричное отношение $\rho' \subseteq \rho$. При этом используем обозначение $\rho' = \operatorname{ssym} \rho$.

Понятно, что в случае бинарного отношения $\rho$ его сверхиссемтризатор есть симметричное отношение, но оно не обязательно рефлексивное. Любое отношение $\rho$ сверхсимметрично тогда и только тогда, когда $\rho = \operatorname{ssym} \rho$. Очевидно, любое отношение имеет сверхсимметризатор.

**Теорема 9.** *Пусть $\rho, \sigma \subseteq X^N$ – произвольные отношения, заданные на множестве $X$, причём выполнены следующие условия:*

*1) отношение $\rho$ сверхсимметрично;*

*2) существуют $\bar{u} \in \rho$ и $\bar{v} \in \sigma$ с ядрами $\ker \bar{u} = \ker \bar{v} = \Delta_N$.*

*Если $P_\rho(X) = P_\sigma(X)$, то $\rho = \sigma$.*

*Доказательство.* Ввиду следствия из леммы 8 выполняется соотношение $\operatorname{ssym} \rho \subseteq \sigma$ (произвольно выбираем кортеж $\bar{t} \in \operatorname{ssym} \rho$ и применяем следствие, полагая $A = |\operatorname{im} \bar{t}|$ и $\bar{x} = \bar{v}$). Отсюда $\operatorname{ssym} \rho \subseteq \operatorname{ssym} \sigma$ по определению сверхсимметризатора (подмножество $\operatorname{ssym} \rho$ множества $\sigma$ сверхсимметрично, а значит, содержится внутри его $\operatorname{ssym} \sigma$). Аналогичным образом доказывается обратное включение $\operatorname{ssym} \rho \supseteq \operatorname{ssym} \sigma$. Имеем $\rho = \operatorname{ssym} \rho = \operatorname{ssym} \sigma \subseteq \sigma$ (здесь первое равенство выполнено по условию теоремы, а второе мы только что доказали). Теперь предположим, что $\rho \not\supseteq \sigma$. Тогда найдётся кортеж $\bar{w} \in \sigma \setminus \rho$, причём $\bar{w} \notin \operatorname{ssym} \sigma$. То есть $\bar{w} \notin \operatorname{ssym} \rho$, откуда $(\operatorname{im} \bar{w})^N \cap \rho = \emptyset$ (ведь отношение $\rho$ сверхсимметричное). Это означает, что частичное преобразование $\bar{v} \mapsto \bar{w}$ (а оно существует, поскольку $\ker \bar{v} = \Delta_N$) сохраняет отношение $\rho$, но не сохраняет $\sigma$ – что противоречит условию $P_\rho(X) = P_\sigma(X)$. Следовательно, $\rho \supseteq \sigma$. Тем самым установлено[6], что $\rho = \sigma$. $\square$

**Следствие.** *Пусть $\rho, \sigma \subseteq X^2$ – бинарные отношения, удовлетворяющие условиям ($\rho \not\subseteq \Delta_X$) и ($\sigma \not\subseteq \Delta_X$). Если к тому же $\rho$ – сверхсимметричное отношение и выполнено равенство $P_\rho(X) = P_\sigma(X)$, то $\rho = \sigma$.*

Обращаем внимание на то, что данное следствие из теоремы 9 не требует ни рефлексивности, ни антирефлексивности, ни даже нетривиальности от отношения $\rho$ (потому что случаи $\rho = \emptyset$ и $\rho = \Delta_X$ здесь исключены по условию, а в случае $\rho = X^2$ следствие из теоремы совершенно верно утверждает, что $\sigma = X^2$). Так что данное утверждение является новым: оно не следует из результатов статьи [2]. Сам факт появления этой теоремы обнадёживает, и складывается впечатление, что проблема определяемости отношений этим отнюдь не исчерпывается.

[6]Ход рассуждений полностью позаимствован из статьи [2] (лемма 2, п.3).

## Список литературы

[1] Глускин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований. // *Успехи мат. наук* **т. 16, вып. 5** (1961), 157–162.

[2] Попова Л. М. Полугруппы частичных эндоморфизмов множества с отношением. // *Сибирский матем. журнал* **т. 4, №2** (1963), 309–317.

[3] Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs. // *Semigroup Forum* **v. 27** (1983), 155–199.

[4] Клюшин А. А., Кожухов И. Б., Манилов Д. Ю., Решетников А. В. Определяемость отношений полугруппами изотонных преобразований. // *Дискр. ан. и иссл. оп.* **т. 31, №1** (2024), 19–34.