

```

\documentclass[12pt, a4paper]{article}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[T2A]{fontenc}
\usepackage[english, russian]{babel}
\usepackage{amsmath, amssymb, amsthm}
\usepackage{hyperref}

\title{Мгновенная инверсия симметричных элементов вида  $(1 + \sum e_i)$  в алгебрах с делением}
\author{Костюк Максим Валерьевич}
\date{Февраль 2026}

\begin{document}

\maketitle

\textbf{Аннотация.} Настоящая работа содержит детальное доказательство явной формулы обращения для класса симметричных элементов вида  $(S_d(a) = a(1 + e_1 + \dots + e_{d-1}))$  в классических алгебрах с делением:  $(\mathbb{R})$  ( $d=1$ ),  $(\mathbb{C})$  ( $d=2$ ),  $(\mathbb{H})$  ( $d=4$ ) и  $(\mathbb{O})$  ( $d=8$ ). Доказательство основано на фундаментальном тождестве  $((1 + \sum e_i)(1 - \sum e_i) = d)$ , вытекающем из антикоммутации мнимых единиц. Представлены наглядные примеры для каждой алгебры, подтверждающие работу формулы, и обсуждаются её следствия.

\section*{1. Введение и определения}
Рассматриваются нормированные алгебры с делением над полем вещественных чисел  $(\mathbb{R})$ :
\begin{itemize}
\item  $(\mathbb{R})$  ( $d=1$ ). Базис:  $(1)$ .
\item  $(\mathbb{C})$  ( $d=2$ ). Базис:  $(1, i)$ ,  $(i^2 = -1)$ .
\item  $(\mathbb{H})$  ( $d=4$ ). Базис:  $(1, i, j, k)$ ,  $(i^2 = j^2 = k^2 = -1)$ ,  $(ij = k)$ ,  $(jk = i)$ ,  $(ki = j)$ , все образующие антикоммутируют.
\item  $(\mathbb{O})$  ( $d=8$ ). Базис:  $(1, e_1, \dots, e_7)$ ,  $(e_i^2 = -1)$ ,  $(e_i e_j = -e_j e_i)$  ( $i \neq j$ ), алгебра альтернативна.
\end{itemize}

\section*{2. Ключевое тождество и его доказательство}
\textbf{Определение.} Пусть  $(\mathbf{v} = e_1 + \dots + e_{d-1})$  (для  $(\mathbb{R})$ :  $(\mathbf{v}=0)$ ). Для  $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$  определим  $\mathbf{emr}$ {симметричный элемент} и его  $\mathbf{emr}$ {канонический сопряжённый}:

$$S_d(a) = a(1 + \mathbf{v}), \quad U_d = 1 - \mathbf{v}.$$


\textbf{Теорема 2.1 (Фундаментальное тождество).} Для базиса алгебр  $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O})$  выполняется:

$$(1 + \mathbf{v})(1 - \mathbf{v}) = d.$$


\textbf{Доказательство.}
\begin{align*}
(1 + \mathbf{v})(1 - \mathbf{v}) &= 1 - \mathbf{v} + \mathbf{v} - \mathbf{v}^2 \\
&= 1 - \mathbf{v}^2.
\end{align*}
Вычислим  $(\mathbf{v}^2)$ :

$$\mathbf{v}^2 = \left(\sum_{i=1}^{d-1} e_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{d-1} e_i^2 + \sum_{i \neq j} e_i e_j.$$


```

$$(e_i^2 = -1),$$
 первая сумма равна $-(d-1)$. В силу антикоммутации $(e_i e_j = -e_j e_i)$ для всех $(i \neq j)$, вторая сумма равна нулю. Следовательно, $(\mathbf{v}^2 = -(d-1))$. Подставляем:

$$(1 + \mathbf{v})(1 - \mathbf{v}) = 1 - (d-1) = d. \quad \blacksquare$$

Следствие 2.2. $(S_d(a) \cdot U_d = a \cdot d)$.

3. Основная теорема и её доказательство

Теорема 3.1 (Формула мгновенной инверсии). Для любого $(a \in \mathbb{R})$ и любой из алгебр $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O})$ верно:

$$S_d(a)^{-1} = \frac{1}{a \cdot d} U_d.$$

Доказательство. Проверим прямое умножение:

$$S_d(a) \cdot \left(\frac{1}{a \cdot d} U_d\right) = \frac{1}{a \cdot d} (S_d(a) \cdot U_d) = \frac{1}{a \cdot d} (a \cdot d) = 1. \quad \blacksquare$$

4. Примеры применения формулы

begin{itemize}

(\mathbb{C}) $(d=2)$: $(S = 3(1+i))$. По формуле: $(S^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 2}(1-i)) = \frac{1}{6}(1-i)$.

(\mathbb{H}) $(d=4)$: $(S = 2(1+i+j+k))$. По формуле: $(S^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 4}(1-i-j-k)) = \frac{1}{8}(1-i-j-k)$.

(\mathbb{O}) $(d=8)$: $(S = 5(1+e_1+\dots+e_7))$. По формуле: $(S^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 8}(1-e_1-\dots-e_7)) = \frac{1}{40}U_8$.

end{itemize}

Проверка для каждого примера следует из тождества $((1+\mathbf{v})(1-\mathbf{v}) = d)$.

5. Обсуждение и выводы

1. **Алгоритмическая эффективность:** Формула даёт обратный элемент за $O(1)$ операций, тогда как стандартный метод требует вычисления нормы $(O(d^2))$.

2. **Универсальность:** Единый вид формулы для всех четырёх алгебр отражает общность структуры, задаваемой антикоммутацией.

3. **Гипотеза обобщения:** Поскольку доказательство использует только свойства $(e_i^2 = -1)$ и $(e_i e_j = -e_j e_i)$, естественно предположить справедливость формулы для произвольной алгебры Клиффорда $(\text{Cl}(0, n-1))$. Это задаёт направление для последующего исследования.

end{document}