АВТОРСКИЙ ПОДХОД К ТОПОЛОГИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Аннотация

Работа обобщает исследования Автора в части топологий параллельных вычислительных систем и решаемых на них задач, включая соответствующие инструменты их моделирования. Представлена оригинальная топологическая модель таких систем, основанная на модифицированном в работе законе Амдала – это позволило формализовать зависимость необходимого числа процессоров и предельного расстояния между информационно смежными вершинами в графе системы от директивных значений ускорения или эффективности. Зависимости этих величин от топологии интерконнекта системы и от информационного графа параллельной задачи также формализованы. Инструментарий сопоставительной оценки этих зависимостей, топологические критерии и функции масштабирования и отказоустойчивого функционирования параллельных систем основаны на авторском методе проективного описания графов и на использующих его алгоритмах.

Ключевые слова

Параллельные вычислительные системы; топология интерконнекта; проективное описание графов; топологические функции масштабируемости и отказоустойчивости.

Введение. Путь к экзафлопным вычислениям состоит в объединении сотен тысяч отдельных вычислительных элементов (узлов) в системы, содержащие миллионы вычислительных ядер. Решающим при этом является адекватность коммутационной сети (интерконнекта) максимально совместному использованию этих ядер в решении больших задач [1-6] и ее отказоустойчивость [7-11]. Исследования Автора направлены на решение фундаментальной проблемы создания формальных методов архитектурного проектирования параллельных вычислительных систем (ВС) и организации их отказоустойчивого функционирования. Суть топологической составляющей этой проблемы заключается в том, что, несмотря на общепризнанность зависимости потенциала параллелизма ВС от используемых в ее построении топологий интерконнекта, формального отражения такие зависимости не имеют. Это вынуждает довольствоваться априорными субъективными, зачастую противоречащими экспертными оценками топологий, отличия которых от апостериорных тестовых оценок готового изделия могут оказаться неприемлемыми.

Проблема анализа и синтеза топологий ВС представлена в научной литературе достаточно широко, и традиционно решается методами теории графов [12-15]. При этом между множеством модулей системы и множеством вершин графа, а также между множеством линий связи и ребер графа устанавливают биективные соответствия. Однако, ни в теории сетей и систем, ни в фундаментальной ее основе – теории графов проблематика исследования топологий детерминированными, исключающими необходимость перебора вариантов методами, практически не исследована. Это объясняется низким уровнем традиционных форм описания графов, задающих лишь элементарные отношения смежности, что изначально обусловливает не полиномиальный характер поиска необходимых для исследования ВС отношений более высокого порядка и сосредоточивает усилия исследователей на разработке нетрудоемких эвристических, стохастических или генетических методов и алгоритмов. Так как присущая таким методам недетерминированность в оперативном управлении функционированием систем неизбежно приводит к непредсказуемым последствиям, то фактически речь при этом может идти лишь о вероятностно-оптимальном управлении, достоверность которого обусловлена размером выборки в стохастических или мощностью исходной популяции в генетических алгоритмах. А использование недетерминированных алгоритмов в оперативном управлении большими системами может привести и к деструктивным последствиям, вызванным запаздыванием (неактуальностью) реакции на текущие изменения системы и неадекватностью (недостоверностью) такой реакции. Наращивание размера и сложности систем приводит к все большему сужению (вплоть до исчезновения) области совместного удовлетворения условиям актуальности и достоверности при том, что вероятность возникновения нештатных ситуаций существенно возрастает [14, 16].

Итак, решаемая в работе проблема связана 1) с отсутствием топологической модели параллельных вычислений, устанавливающей формальные и вполне однозначные зависимости потенциального параллелизма задач от топологии ВС; 2) с отсутствием отражающих эти зависимости количественных топологических критериев параллелизма и детерминированных методов их расчета; 3) с не полиномиальной (комбинаторно «взрывоопасной») зависимостью (от размера ВС и от ее топологии) вычислительной сложности детерминированных методов адаптации ВС к решаемым на ней задачам, что тем более неприемлемо в крупномасштабных системах, кратности отказов в которых с ростом числа составляющих их элементарных вычислительных модулей возрастают, а число возможных комбинаций при этом растет факториально. В данной работе впервые представлены обоснование, обзор и обобщение полученных Автором результатов в единый подход с тем, чтобы позволить читателю получить целостный взгляд на связанное непосредственно с топологиями формализованное решение вышеперечисленных задач и, таким образом, на аналитическое моделирование параллельных систем с учетом используемых в них топологий.

1. Топологическая модель параллельных вычислительных систем. Исследование обусловленности потенциальных в отношении параллелизма возможностей систем именно топологиями их интерконнекта предполагает абстрагирование от ограничений, связанных с присутствием в параллельном алгоритме скалярных (не распараллеливаемых) фрагментов, учитываемых классическим вариантом закона Амдала [16-19]. Однако после исключения в соответствии с этим законом фактора «скалярности», остается еще один фактор, препятствующий линейному масштабированию производительности вычислительной системы – это зависимость от межпроцессных обменов. Но эта зависимость связана не только с топологией системной сети, но и с ее технологическими характеристиками – темпом выдачи сообщений, латентностью, пропускной способностью и др. Таким образом, напрашивается вывод о необходимости такого размежевания топологических и технологических факторов по их влиянию на реальную производительность системы и на предельный (при директивных критериях эффективности) порядок подсистем, которое бы не меняло относительную упорядоченность сопоставляемых топологий ни при изменении технологических характеристик интерконнекта, ни при изменениях классов решаемых задач и обрабатываемых данных.

Суть и новизна реализуемого автором подхода состоят в создании такой топологической модели параллельных вычислений, которая позволит установить абстрагированное от используемых интерконнектом сетевых технологий формальное соответствие топологии ключевому свойству параллельной системы – ее потенциальному параллелизму. Нижняя граница потенциала параллелизма рассматривается здесь в качестве обобщенной единицы измерения и определяется предельным рангом параллельной информационно-полносвязной задачи с лимитируемой достижимостью информационно-смежных ветвей задачи [21]. Обоснование допустимости такого абстрагирования и возможности анализа чисто топологических аспектов повышения потенциального параллелизма представлены в работе [22].

Для оценки влияния топологии ВС на ее параллелизм, мы абстрагируемся от приложений, считая их неограниченно распараллеливаемыми и не содержащими скалярных фрагментов. Введем при этом следующие обозначения: W и w – измеряемые временем объемы вычислений при решении произвольной задачи на одном и на p процессорах вычислительной системы; соответствующие числу p задействованных процессоров объемы подлежащих обмену данных обозначим через Q ($p = 1$) и $q = Q/p$, измеряя их при этом информационными единицами (байтами). Итак, считаем, что:

1. Параллельный алгоритм задачи не содержит скалярных (не распараллеливаемых) фрагментов, и допускает разбиение на произвольное число p информационно-связанных параллельных ветвей, $1 \leq p \leq \infty$.

2. Общий объем вычислений W и объем Q подлежащих обмену данных после разбиения задачи на p параллельных ветвей не зависят от числа процессоров p и распределяются по ним равномерно: $w = W / p$ и $q = Q / p$.

3. Масштабирование данных в задаче с коэффициентом m увеличивает объем вычислений W и объем Q подлежащих обмену данных в m раз.

Общеизвестно, что сдерживающими факторами пропорционального размеру системы наращивания параллелизма являются, во-первых, практическая невозможность реализации полносвязной топологии даже в сравнительно небольших системах, и во-вторых, наличие задержек в реализации межпроцессорных обменов. Поэтому дополним данный выше перечень принятых в нашей модели допущений следующими:

4. Все процессоры системы идентичны, их общее число n достаточно для реализации на них p параллельных ветвей ($n > p$), и изначальное распределение входных данных по задействованным в параллельном приложении процессорам не требуется.

5. Общие объемы W и Q не зависят от топологии сети связи и от используемой сетевой технологии (NT – Network Technology), а ограничения на минимальные объемы w и q отсутствуют.

6. Временны́е затраты $T_{ND}(p)$ на обмены между информационно-смежными процессорами пропорциональны расстояниям $L(p)$ между соответствующими этим процессорам вершинами подграфа ВС и функции задержки $t_{NT}(q)$, зависящей от используемой в системе NT: $T_{ND}(p) = L(p) \times t_{NT}(q)$, здесь индекс ND – аббревиатура от Network Delay.

7. Вычислительные и коммуникационные элементы ВС допускают совмещенную во времени работу, причем $T_{ND}(p) > w$, и время фактических задержек с учетом совмещения определено разностью $T_{ND}(p) - w > 0$.

8. Совокупность используемых в вычислительной системе топологии и NT гарантирует отсутствие сетевых коллизий и связанных с ними задержек.

Шестое из перечисленных выше свойств представленной здесь модели является тривиальным в практике построения и использования коммуникационных сетей: как правило, время передачи сообщений между наиболее удаленными элементами оценивают диаметром соответствующих графов, характеризующим коммуникационную задержку в худшем случае. Отметим при этом, что непременным свойством функции $t_{NT}(q)$ является ее обратная от p и прямая от Q зависимость: $p_1 < p_2 \Rightarrow t_{NT}(Q / p_1) > t_{NT}(Q / p_2)$ и $q_1 > q_2 \Rightarrow t_{NT}(q_1) > t_{NT}(q_2)$. Применение в ВС технологий с иной зависимостью функции $t_{NT}(q)$ противоречило бы основной цели распараллеливания – достижению требуемой оперативности в реализации пользовательских приложений и требуемой их достоверности, связанной с повышением сложности алгоритмов и/или объемов обрабатываемых данных. Однако к сожалению, увеличение числа процессоров p в k_p раз, приводящее к пропорциональному уменьшению удельного объема q обмениваемых данных, приводит к уменьшению времени $t_{NT}(q)$ информационного взаимодействия физически смежных процессоров не в тех же, а в зависимых от применяемой в системе NT пропорциях, т.е. с некоторым технологическим (присущим используемой сетевой технологии) коэффициентом

$$k_{NT} = k_p^{-1} \cdot t_{NT}(q) / t_{NT}\left(k_p^{-1} \cdot q\right).$$

Модифицируя известный закон Амдала с учетом пунктов 6 и 7 нашей модели, получим ускорение S_p, достигаемое от распараллеливания задачи на p ветвей

$$S_p = \frac{W}{w + (L_S(p) \cdot t_{NT}(q) - w)} = \frac{W}{L_S(p) \cdot t_{NT}(q)}.$$

Тогда предельное расстояние $L_S(p) \geq 1$ для предписанного при заданном числе процессоров p ускорения S_p, определится из

$$L_S(p) = \frac{W}{S_p \cdot t_{NT}(q)}.$$

Если приоритетным является, например, не ускорение S_p, а эффективность $E_p = S_p / p$ использования задействованных в решении задачи p процессоров, то

$$E_p = \frac{W}{p \cdot L_E(p) \cdot t_{NT}(q)},$$

и предельное расстояние $L_E(p)$ для предписанного значения эффективности E_p составит

$$L_E(p) = \frac{W}{p \cdot E_p \cdot t_{NT}(q)}.$$

Необходимо понимать различия в источниках обусловленности расстояния L и числа процессоров p в (W, Q)-задаче: если предельное расстояние $L(p)$[1] при заданном p обусловлено функцией $t_{NT}(Q / p)$, т. е. используемой в ВС сетевой технологией, то предельное число $p(L)$ процессоров, которое может быть задействовано при допускаемом задачей расстоянии L, обусловлено только топологически, т. е. зависит от используемого в системе графа. Таким образом, соотношение между объемами вычислений W и информационных взаимодействий Q в параллельной (W, Q)-задаче и быстродействие

[1] Здесь и далее по тексту индексы используемых критериев оценки (ускорения, эффективности и т. п.) – несущественны и мы их опускаем.

используемой в системе NT определяют взаимозависимость числа p задействованных процессоров и предельно допускаемого расстояния $L(p)$ между информационно смежными вершинами соответствующего задаче подграфа в графе ВС, тогда как топология определяет возможность реализации такого подграфа. Учитывая, что расстояния между вершинами невзвешенного графа $G(V, E)$ определяются числом транзитных участков и, таким образом, могут быть выражены только целочисленно, определим предельное расстояние между информационно смежными процессорами целой частью $L(p)$ и назовем его достижимостью $\partial(p)$:

$$\partial(p) = \lfloor L(p) \rfloor,\ 1 \leq \partial(p).$$

Найденное таким образом значение $\partial(p)$ характеризует требование к используемой в ВС топологии, заключающееся в следующем: успешное (в отношении обеспечения критериев S и/или E, предписанных решению задачи с параметрами W и Q) распараллеливание на p процессоров возможно лишь тогда, когда топологией системы гарантируется хотя бы одно вложение информационного графа задачи в граф ВС, при котором расстояния между информационно смежными вершинами не превышают $\partial(p)$. Отметим здесь интуитивно понятную прямую зависимость успешности вложения от расстояния $L(p)$: большему допускаемому расстоянию, обусловленному применением более высокоскоростной NT, соответствует и бóльшая вероятность наличия в графе ВС подграфов, удовлетворяющих директивным значениям p и S_p.

Проблема вложения информационного графа задачи в граф вычислительной системы является одной из важнейших в теории вычислительных систем. Ее решение связано с проблемой распознавания изоморфизма в теории графов и вызывает неувядающий интерес соответствующих специалистов [23-26]. В рамках описанной здесь топологической модели в работе [21] впервые представлено решение проблемы вложения задач в постановке, основанной на замене отношений смежности вершин графа ВС отношениями лимитированной их достижимости. В работах [22, 27] впервые введены топологические показатели масштабируемости параллельных систем и задач. В работе [28] исследована проблема повышения потенциала распараллеливания задач в вычислительной системе без наращивания числа ее процессоров: модифицированием исходной топологии, дополняющим ее отношения смежности между процессорами, при том что базовые способы адресации и маршрутизации остаются прежними. В работах [29-31] рассмотрены проблемы анализа топологической отказоустойчивости масштабируемой вычислительной системы и обеспечения ее устойчивости к отказам заданной кратности, дано понятие топологической адекватности ВС и решаемых на ней задач, рассмотрены условия топологической отказоустойчивости ВС, предложен критерий топологической отказоустойчивости, напрямую связывающий топологию с потенциальным параллелизмом системы при заданной кратности допускаемых отказов, определена взаимосвязь функций топологической масштабируемости и топологической отказоустойчивости систем и показана обусловленность минимума топологической отказоустойчивости обхватом графа вычислительной системы.

2. Проективное описание графов и его использование для анализа топологий ВС. Теоретической основой анализа, сопоставления и синтеза эффективных в отношении потенциального параллелизма топологий параллельных систем служит предложенный в [32] метод описания графов, впервые предоставивший формальную основу для перехода от стохастических и эвристических методов анализа и синтеза топологий к аналитическим. Заметим, что использование этого метода в других приложениях, например, при разработке биохимических проблемно-ориентированных баз данных [33] также доказало свою перспективность. Суть метода состоит в описании графа проекциями, и здесь мы приведем лишь достаточные для понимания излагаемого материала сведения.

Проекция $P(v_j)$ графа $G(V, E)$ представляет собой многоуровневую конструкцию, на нулевом уровне которой расположена вершина $v_j \in V$, выбранная в качестве ракурсной; порожденное ею подмножество вершин первого уровня $V_{1j} \subset V$ содержит все вершины ее окружения $\mathcal{N}(v_j)$, а i-й уровень ($i \geq 1$) представляет собой совокупность подмножеств вершин, каждое из которых порождено вершиной (i - 1)-го уровня и является окружением этой вершины без тех его вершин, что предшествуют ей в данной проекции. Таким образом, отношение «предшествования вершины/порождения подмножества» фактически моделирует отношение смежности предшествующей вершины вершинам порожденного ею подмножества. Формальная запись этих отношений в скобочном описании двух произвольно взятых соседних уровней проекции графа имеет вид

$$v_{i1}{}^{V_{i+1,1}}, \dots, v_{ij}{}^{V_{i+1,j}}.$$

Здесь вершины v_{i1} и v_{ij} одного из подмножеств i-го уровня предшествуют и смежны вершинам порожденных ими подмножеств $V_{i+1,1}$ и $V_{i+1,j}$ вышестоящего (i + 1)-го уровня. Технология построения скобочных (проективных) описаний графа и их свойства достаточно подробно представлены в работах [34-37] и обобщены в [38,39], поэтому здесь остановимся лишь на некоторых используемых в данной работе свойствах.

Вершине v_{ij} k-уровневой проекции $P_k(v_0)$, построенной из ракурсной вершины v_0, соответствует упорядоченное множество вершин $W(v_{ij}) = (v_0, v_{10}, \dots, v_{ij})$, представляющее собой простую цепь из v_0 в v_{ij}, длина этой цепи $\partial(v_0, v_{ij}) = i$. В общем случае некоторые (за исключением ракурсной) вершины проекции $P_k(v_0)$ могут быть m_{ij}-кратными:

$0 \le m_{ij} \le \Sigma_i C_i - \Sigma_i |V_i|$, где C_i – число элементов i-го уровня проекции $P_k(v_0)$, а $V_i \subset V$ – множество вершин графа, представленных i-м уровнем проекции. Отличие m_{ij} от единицы означает наличие соответствующего числа простых цепей из ракурсной вершины v_0 в вершину v_{ij}.

Номер i уровня в проекции $P(v_0)$ определяет удаленность вершин V_i этого уровня от ракурсной вершины v_0 а также то, что уровень k_e, впервые доопределяющий множество вершин всех нижерасположенных уровней проекции графа $G(V, E)$ до V, соответствует эксцентриситету $e(v_0)$ ракурсной вершины v_0 в проекции $P(v_0)$:

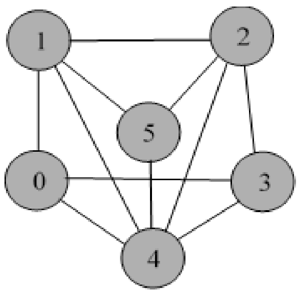
$$e(v_0) = k_e \mid \bigcup_{i=0}^{k_e-1} V_i \subset V, \quad \bigcup_{i=0}^{k_e} V_i = V.$$

Это условие названо условием вершинной полноты проекции, однако для определения всех ребер графа его реализации не всегда достаточно. Проекция $P_k(v_0)$ графа $G(V, E)$ будет полной только, если ею определены все его вершины и ребра. Поэтому необходимые условия полноты проекции могут быть записаны следующим образом:

$$\bigcup_{i=0}^{k} V_i = V \ \text{ и } \ \bigcup_{i=0}^{k} E_i = E,$$

здесь $E_i = \{e_{uv} \mid u \in V_{i-1}, v \in V_i\}$ – множество ребер, инцидентных парам вершин соседних уровней проекции. Нетрудно заметить, что условие вершинной полноты любой проекции графа поглощается условием ее реберной полноты.

Продемонстрируем вышесказанное на простом примере графа, изображенного на рис. 1 вместе с его 2-уровневыми проекциями:



$$P(0) = 0^{(1^{(2,4,5)}, 3^{(2,4)}, 4^{(1,2,3,5)})},$$
$$P(1) = 1^{(0^{(3,4)}, 2^{(3,4,5)}, 4^{(0,2,3,5)}, 5^{(2,4)})},$$
$$P(2) = 2^{(1^{(0,4,5)}, 3^{(0,4)}, 4^{(0,1,3,5)}, 5^{(1,4)})},$$
$$P(3) = 3^{(0^{(2,4,5)}, 2^{(1,4)}, 4^{(0,1,2,5)})},$$
$$P(4) = 4^{(0^{(1,3)}, 1^{(0,2,5)}, 2^{(1,3,5)}, 3^{(0,2)}, 5^{(1,2)})},$$
$$P(5) = 5^{(1^{(0,2,4)}, 2^{(1,3,4)}, 4^{(0,1,2,3)})}.$$

Рисунок 1 - Граф и его проекции

Так как любая проекция в явном виде содержит в себе такие обычно используемые в анализе топологий метрические характеристики, как кратчайшие и альтернативные маршруты, эксцентриситеты вершин и диаметр графа, то применение проективного описания графов избавляет от необходимости довольно трудоемкого вычисления этих характеристик, что было бы неизбежно при традиционном описании графов матрицами смежности/инцидентности. Преобразование проекций исходного графа ВС в проекции графа заданной достижимости также достаточно проста и сводится к сжатию исходных проекций [40, 41]. Вложение информационного графа задачи в граф с повышенной таким образом степенью вершин существенно облегчается. В частности, для характерных в обработке сигналов и изображений задач с кольцевой структурой в [42] дано описание способа выявления и перечисления циклов с длиной, определяемой требуемым ускорением.

В работах [43, 44] рассмотрена проблема выявления в вычислительной системе с гиперкубической топологией компоненты, соответствующей размещаемой подсистеме в отношении достижимости ее вершин. Получена формула предельного распараллеливания такой подсистемы, и предложен способ конкретизации ее элементов. Идея о возможности применения проективного описания графа для создания аналитических методов синтеза системных топологий, обладающих заданными свойствами, впервые изложена в [38, 39]. В работах [25, 26] проблема синтеза топологии вычислительной системы решается как задача построения графа с минимальным диаметром при заданных значениях порядка, степени и обхвата графа. Решение основано на использовании проективного описания графа и сводится к построению совместной (в отношении указанных выше характеристик) системы его вершинно полных проекций. Введено понятие компактного графа, определена его аналитическая модель и изложен основанный на ней алгоритм генерации.

В связи с тем, что в излагаемом в данной работе подходе основным параметром, характеризующим качество топологии, является обеспечиваемый ею потенциальный параллелизм информационно-полносвязных задач, то ниже продемонстрированы возможности использования проективного описания графов для выявления полносвязных подграфов в приведенном на рис.1 графе – клик этого графа. С алгоритмом выявления клик и с его демонстрацией на более сложных примерах, в том числе для значений достижимости $\partial \geq 1$ и при заданных значениях кратности допустимых отказов, более подробно можно ознакомиться в [47].

Первый уровень проекции $P(0)$ графа (рисунок 1) содержит 3 вершины: $V_1(0) = \{1,3,4\}$. Это означает, что порядок максимальной клики $K(G)$, содержащей в своем составе вершину 0, не может быть большим четырех ($|K(G)| \leq 3 + 1$) Учитывая, что подмножества вершин 2-го уровня не могут включать в себя вершины, не входящие в $V_1(0)$, исключаем таковые вершины из проекции, оставив в подмножествах 2-го уровня только вершины 1-го уровня:

$$P(0) = 0^{(1^{(4)},3^{(4)},4^{(1,3)})}.$$

Максимальное подмножество 2-го уровня – $M(0) = (1,3)$ единственно и содержит всего две ($m(0) = |M(0)| = 2$) вершины, и если бы такое подмножество было не одно, а столько же, сколько и вершин 1-го уровня – $n_1(0) = 3$, то мы могли бы рассмотреть возможность существования клики порядка 4. Однако, подмножество мощности $m(0) = 2$ всего одно, поэтому максимальная клика не может иметь здесь порядок, больший трех.

Выявить такие клики (их вершины выделены здесь жирным шрифтом) не представляет сложности:

$$P(0) = \mathbf{0}^{(\mathbf{1}^{(\mathbf{4})}, 3^{(4)}, \mathbf{4}^{(\mathbf{1},3)})}, \text{ клика } (0,1,4),$$

$$P(0) = \mathbf{0}^{(1^{(4)}, \mathbf{3}^{(\mathbf{4})}, \mathbf{4}^{(1,\mathbf{3})})}, \text{ клика } (0,3,4).$$

Но так как нас интересует не любая, а наибольшая максимальная клика, то те же действия, что и для $P(0)$ произведем для остальных пяти проекций графа:

$$P(1) = 1^{(0^{(4)}, 2^{(4,5)}, 4^{(0,2,5)}, 5^{(2,4)})},$$

$$P(2) = 2^{(1^{(4,5)}, 3^{(4)}, 4^{(1,3,5)}, 5^{(1,4)})},$$

$$P(3) = 3^{(0^{(2,4)}, 2^{(4)}, 4^{(0,2)})},$$

$$P(4) = 4^{(0^{(1,3)}, 1^{(0,2,5)}, 2^{(1,3,5)}, 3^{(0,2)}, 5^{(1,2)})},$$

$$P(5) = 5^{(1^{(2,4)}, 2^{(1,4)}, 4^{(1,2)})}.$$

Как видим, проекция $P(3)$ также, как и $P(0)$ не соответствует требованию большего, чем 3, порядка клики ($m(3) > 2$), поэтому рассматриваем и корректируем остальные 4 проекции, исключив из подмножеств этих проекций вершины 0 и 3 (выше мы выяснили, что эти вершины не могут быть в составе клик с порядком, большим трех):

$$P(1) = 1^{(2^{(4,5)}, 4^{(2,5)}, 5^{(2,4)})},$$

$$P(2) = 2^{(1^{(4,5)}, 4^{(1,5)}, 5^{(1,4)})},$$

$$P(4) = 4^{(1^{(2,5)}, 2^{(1,5)}, 5^{(1,2)})},$$

$$P(5) = 5^{(1^{(2,4)}, 2^{(1,4)}, 4^{(1,2)})}.$$

В каждой из полученных здесь проекций подмножества, образуемые любой вершиной 1-го уровня и порожденными ею вершинами 2-го уровня, совпадают, таким образом, наибольшая клика в рассматриваемом графе состоит из четырех вершин (1,2,4,5), соответственно, потенциальный параллелизм такого графа ВС при решении информационно-полносвязных задач – $\varphi_{\partial=1}(G) = 4$.

Заключение. Все параллельные системы в процессе их эксплуатации подвергаются исследованиям быстродействия и эффективности на различных классах и наборах задач и данных. Однако различия в технической, технологической, топологической, прикладной и прочих архитектурных составляющих систем придают полученным результатам эксклюзивность и лишь с некоторыми ограничениями могут быть распространены на другие системы и задачи. Это препятствует получению цельной картины формальной обусловленности параллелизма от топологии систем. В настоящей работе предпринята попытка восполнить имеющийся в этом отношении пробел. С этой целью предложена разделенная на две составляющие модель параллельных вычислений: первая отнесена к параллельным приложениям и приписывает им свойства неограниченной распараллеливаемости, вторая отнесена к вычислительной системе, в которой ограничения параллелизма обусловлены предельно допускаемым расстоянием между информационно смежными вершинами графа ВС, связанным с быстродействием ее коммуникационной среды и объемами вычислительных и обменных операций параллельной задачи.

Использование предложенной модели позволило сконцентрировать внимание на технологической и топологической составляющих коммуникационной среды и исследовать формальную их взаимозависимость в совокупном влиянии на пределы распараллеливания задач, соответствующие предписанным критериям эффективности их решения. Получены формальные выражения, связывающие предельно допускаемые между информационно смежными процессорами расстояния $L(p)$ и число параллельных ветвей с заданными значениями ускорения.

В основе исследования, оптимизации и синтеза топологий интерконнекта вычислительных систем предложено использовать проективное описание графов, оперирующее отношениями более высокого, чем отношения смежности вершин, порядка. Даны описания соответствующего метода и его применения для графов с лимитированными расстояниями (достижимостью) информационно смежных вершин. Рассмотрена проблема вложения в граф ВС параллельных задач с учетом лимитированной достижимости. Даны понятия графа ∂-достижимости, ∂-компоненты графа, представляющей собой клику графа ∂-достижимости, ∂-плотности графа ВС, приведен алгоритм выявления в графе ВС таких клик. Взаимно абстрагированные формализованные показатели и функции топологической масштабируемости параллельных задач и топологической масштабируемости систем позволяют, не привязываясь к конкретной среде реализации задачи, выбирать наименее топологически сложный для ее вложения алгоритм, или выбирать топологии, которые при прочих равных условиях обладают наибольшими возможностями успешного вложения набора вполне определенных задач.

Результаты работы будут полезными не только при анализе уже действующих систем и реализуемых на них параллельных алгоритмов, но и при создании новых систем или алгоритмов с учетом предполагаемого масштабирования тех и других.

Благодарности. Автор выражает искреннюю признательность Российскому фонду фундаментальных исследований, в течение ряда лет финансово поддерживавшему исследования грантами 98-01-00402, 01-01-00790, 05-08-01301, 14-07-00169.

Список литературы:

1. Angela Y Wu, Embedding of tree networks into hypercubes, Journal of Parallel and Distributed Computing, Volume 2, Issue 3, 1985, Pages 238-249, ISSN 0743-7315, https://doi.org/10.1016/0743-7315(85)90026-7.

2. Thomas Hayter, Graham R Brookes, Approach to the simulation of various LAN topologies, Computer Communications, Volume 12, Issue 4, 1989, Pages 204-212, ISSN 0140-3664, https://doi.org/10.1016/0140-3664(89)90197-7.

3. Stefano Caselli, Gianni Conte, Ugo Malavolta, Topology and process interaction in concurrent architectures: A GSPN modeling approach, Journal of Parallel and Distributed Computing, Volume 15, Issue 3, 1992, Pages 270-281, ISSN 0743-7315, https://doi.org/10.1016/0743-7315(92)90008-B.

4. Jaime Lloret, Carlos Palau, Fernando Boronat, Jesus Tomas, Improving networks using group-based topologies, Computer Communications, Volume 31, Issue 14, 2008, Pages 3438-3450, ISSN 0140-3664, https://doi.org/10.1016/j.comcom.2008.05.030.

5. Mostafa Abd-El-Barr, Fayez Gebali, Reliability analysis and fault tolerance for hypercube multi-computer networks, Information Sciences, Volume 276, 2014, Pages 295-318, ISSN 0020-0255, https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.10.031.

6. Frank Emmert-Streib, Matthias Dehmer, Yongtang Shi, Fifty years of graph matching, network alignment and network comparison, Information Sciences, Volumes 346–347, 2016, Pages 180-197, ISSN 0020-0255, https://doi.org/10.1016/j.ins.2016.01.074.

7. Chita R. Das, Laxmi N. Bhuyan, Dependability evaluation of interconnection networks, Information Sciences, Volume 43, Issues 1–2, 1987, Pages 107-138, ISSN 0020-0255, https://doi.org/10.1016/0020-0255(87)90033-8.

8. Ke Huang, Jie Wu, Fault-tolerant resource placement in balanced hypercubes, Information Sciences, Volume 99, Issues 3–4, 1997, Pages 159-172, ISSN 0020-0255, https://doi.org/10.1016/S0020-0255(96)00270-8.

9. Jianxi Fan, Xiaohua Jia, Xin Liu, Shukui Zhang, Jia Yu, Efficient unicast in bijective connection networks with the restricted faulty node set, Information Sciences, Volume 181, Issue 11, 2011, Pages 2303-2315, ISSN 0020-0255, https://doi.org/10.1016/j.ins.2010.12.011.

10. Natalia Chechina, Huiqing Li, Amir Ghaffari, Simon Thompson, Phil Trinder, Improving the network scalability of Erlang, Journal of Parallel and Distributed Computing, Volumes 90–91, 2016, Pages 22-34, ISSN 0743-7315, https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2016.01.002.

11. David Hutchison, James P.G. Sterbenz, Architecture and design for resilient networked systems, Computer Communications, Volume 131, 2018, Pages 13-21, ISSN 0140-3664, https://doi.org/10.1016/j.comcom.2018.07.028.

12. Giorgio Levi, Fabrizio Luccio, A technique for graph embedding with constraints on node and arc correspondences, Information Sciences, Volume 5, 1973, Pages 1-24, ISSN 0020-0255, https://doi.org/10.1016/0020-0255(73)90001-7.

13. VM Grout, PW Sanders, Communication network optimization, Computer Communications, Volume 11, Issue 5, 1988, Pages 281-287, ISSN 0140-3664, https://doi.org/10.1016/0140-3664(88)90039-4.

14. Shantanu Dutt, John P. Hayes, Designing fault-tolerant systems using automorphisms, Journal of Parallel and Distributed Computing, Volume 12, Issue 3, 1991, Pages 249-268, ISSN 0743-7315, https://doi.org/10.1016/0743-7315(91)90129-W.

15. Jianxi Fan, Xiaohua Jia, Edge-pancyclicity and path-embeddability of bijective connection graphs, Information Sciences, Volume 178, Issue 2, 2008, Pages 340-351, ISSN 0020-0255, https://doi.org/10.1016/j.ins.2007.08.012.

16. Subharthi Paul, Jianli Pan, Raj Jain, Architectures for the future networks and the next generation Internet: A survey, Computer Communications, Volume 34, Issue 1, 2011, Pages 2-42, ISSN 0140-3664, https://doi.org/10.1016/j.comcom.2010.08.001.

17. Xian-He Sun, Yong Chen, Reevaluating Amdahl’s law in the multicore era, Journal of Parallel and Distributed Computing, Volume 70, Issue 2, 2010, Pages 183-188, ISSN 0743-7315, https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2009.05.002.

18. Hao Che, Minh Nguyen, Amdahl’s law for multithreaded multicore processors, Journal of Parallel and Distributed Computing, Volume 74, Issue 10, 2014, Pages 3056-3069, ISSN 0743-7315, https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2014.06.012.

19. L. Yavits, A. Morad, R. Ginosar, The effect of communication and synchronization on Amdahl’s law in multicore systems, Parallel Computing, Volume 40, Issue 1, 2014, Pages 1-16, ISSN 0167-8191, https://doi.org/10.1016/j.parco.2013.11.001.

20. James Nutaro, Bernard Zeigler, How to apply Amdahl’s law to multithreaded multicore processors, Journal of Parallel and Distributed Computing, Volume 107, 2017, Pages 1-2, ISSN 0743-7315, https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2017.03.006.

21. V.A. Melent'ev, “Embedding of subsystems limiting length and number of paths between vertexes of computing system graph”, UBS, 47 (2014), 212–246, http://mi.mathnet.ru/eng/ubs749.

22. V.A. Melent'ev, “On topological scalability of computing systems”, UBS, 58 (2015), 115–143. http://mi.mathnet.ru/eng/ubs844.

23. Xian-He Sun, Yong Chen, Reevaluating Amdahl’s law in the multicore era, Journal of Parallel and Distributed Computing, Volume 70, Issue 2, 2010, Pages 183-188, ISSN 0743-7315, https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2009.05.002.

24. L. Yavits, A. Morad, R. Ginosar, The effect of communication and synchronization on Amdahl's law in multicore systems, Parallel Computing, Volume 40, Issue 1, 2014, Pages 1-16, ISSN 0167-8191, https://doi.org/10.1016/j.parco.2013.11.001.

25. Hao Che, Minh Nguyen, Amdahl's law for multithreaded multicore processors, Journal of Parallel and Distributed Computing, Volume 74, Issue 10, 2014, Pages 3056-3069, ISSN 0743-7315, https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2014.06.012.

26. James Nutaro, Bernard Zeigler, How to apply Amdahl's law to multithreaded multicore processors, Journal of Parallel and Distributed Computing, Volume 107, 2017, Pages 1-2, ISSN 0743-7315, https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2017.03.006.

27. Melent'ev VA, Shubin VI, Zadorozhny AF (2015) Topological scalability of hypercubic parallel systems and tasks. ISJ Theoretical & Applied Science 11 (31): 122-129. Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.11.31.19.

28. V. Melentiev, "Edge scaling of computing systems", UBS, 64 (2016), 81–11. http://mi.mathnet.ru/eng/ubs898.

29. V. A. Melent'ev, "On topological fault-tolerance of scalable computing systems", UBS, 70 (2017), 58–86. URL: https://doi.org/10.25728/ubs.2017.70.3

30. Melent'ev VA (2016) Fault-tolerance of hypercubic and compact topology of computing systems. ISJ Theoretical & Applied Science, 12 (44): 98-105. Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2016.12.44.20.

31. Melent'ev VA (2017) On approach to the configuring of fault-tolerant subsystems in case of scarce topological fault-tolerance of the computing system. ISJ Theoretical & Applied Science, 10 (54): 101-105. Doi: https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2017.10.54.20.

32. V.A. Melent'ev, "Bracket form of the graph description and its use in the structural investigations of enduring computer systems", Avtometrija, 4 (2000), 36-51. https://elibrary.ru/item.asp?id=14954075.

33. Kornushk V.F., Bogunova I.V., Flid A.A., Nikolaeva O.M., Grebenshchikov A.A. Information-algorithmic support for development of solid pharmaceutical form. Fine Chemical Technologies. 2018; 13(5): 73-81. https://doi.org/10.32362/2410-6593-2018-13-5-73-81.

34. V.A. Melentiev The bracket Pattern of a Graph // 6th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies, PRIA-6-2002, October 21-26, 2002, Proceedings, Velikiy Novgorod, Russian Federation, 57-61.

35. Melentiev VA (2004) Formalnye osnovy skobochnyh obrazov v teorii grafov. Trudy II Mezhdunarodnoj konferentsii "Parallelnyie vychisleniya i zadachi upravleniya" PACO'2004: In-t problem upravleniya RAN im. V.A. Trapeznikova, pp. 694-706. In-t problem upravleniya RAN im. V.A. Trapeznikova, pp. 694-706.

36. Melentiev VA (2005) Formalnyj podhod k issledovaniyu struktur vychislitelnyh sistem. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. No.14, pp. 167-172.

37. V.A. Melent'ev, The metric, cyclomatic and synthesis of topology of systems and networks (2012) https://elibrary.ru/download/elibrary_22249411_42044045.pdf.

38. V. A. Melent'ev, “An analytical approach to the synthesis of regular graphs with preset values of the order, degree and girth”, Prikl. Diskr. Mat., 2010, no. 2(8), 74–86. http://mi.mathnet.ru/eng/pdm178.

39. Volkova, Asya, “A Technical Translation of Melentiev's Graph Representation Method with Commentary” (2018). University Honors Theses. Paper 503. http://dx.doi.org/10.15760/honors.507.

40. V. A. Melent'ev, “On topological fault-tolerance of scalable computing systems”, UBS, 70 (2017), 58–86. URL: https://doi.org/10.25728/ubs.2017.70.3

41. Melent'ev VA (2016) Fault-tolerance of hypercubic and compact topology of computing systems. ISJ Theoretical & Applied Science, 12 (44): 98-105. Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2016.12.44.20.

42. Melent'ev, V. A. (2018). Use of Melentiev’s graph representation method for identification and enumeration of circuits of the given length. ISJ Theoretical & Applied Science, 11 (67), 85-91. Doi: https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.11.67.16

43. V.A. Melentiev, "Limit configuring of subsystems in hypercubic computing systems", Journal of Information Technologies and Computing Systems, 2 (2015), 20-30. http://www.jitcs.ru/images/documents/2015-02/20_30.pdf.

44. V.A. Melentiev, “The limiting paralleling in the computing system with a hypercube topology under length restriction of interprocess connections. https://elibrary.ru/item.asp?id=23316608.

45. V. A. Melent'ev, “Compact structures of computer systems and their synthesis”, UBS, 32 (2011), 241–261. http://mi.mathnet.ru/eng/ubs536.

46. Melent'ev VA (2014) About topological compactness of computing systems. ISJ Theoretical & Applied Science 11 (19): 59-65. http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2014.11.19.12

43. Melent'ev, V. A. (2018). Use of Melentiev’s graph representation method for detection of cliques and the analysis of topologies of computing systems. ISJ Theoretical & Applied Science, 12 (68), 201-211. Doi: https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.12.68.28.