УДК 530.182 : 517.938

Полюков П.А.
г. Москва,
Российская Федерация

ТЕОРЕМА О НЕИЗБЕЖНОЙ ГИБЕЛИ: ДИССИПАТИВНЫЙ ЦИКЛ, РЕИНВЕСТИРОВАНИЕ И КРИТЕРИЙ ВЫЖИВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Аннотация

Установлен математический изоморфизм стик-слип осциллятора и класса диссипативных систем с реинвестированием. Получены уравнения динамики ресурса, изменчивости и консолидации. Доказаны теорема о неизбежной гибели, критерий выживания, порог необратимости, необходимость фазовых переключений и каскад эволюционных взрывов. Введён квант метаболической мощности. Установлен изоморфизм спектральной плотности мощности и формулы Планка.

Ключевые слова: диссипативные системы, реинвестирование, теорема о гибели, квант мощности, эволюционный взрыв.

1 Введение

1.1 Предмет исследования

Настоящая работа посвящена построению и анализу математической модели универсального класса диссипативных систем, способных поддерживать свою структуру за счёт реинвестирования энергии, диссипированной в ходе циклического функционирования.

Под диссипативной системой в данном контексте понимается открытая система, устойчивое состояние которой обеспечивается оттоком энергии во внешнюю среду. Особый интерес представляют системы, в которых диссипированная энергия не теряется безвозвратно, а частично утилизируется для компенсации внутренней деградации параметров состояния.

1.2 Мотивация

Исследование мотивировано наличием общих структурных и динамических закономерностей у широкого круга явлений различной природы:

- биофизические системы (поддержание трансмембранного потенциала);
- эволюционные процессы (утилизация прироста биомассы);
- экономические агенты (реинвестирование прибыли);
- историческая макродинамика (инновационные потоки);
- искусственные когнитивные архитектуры (реинвестирование вычислительного ресурса).

Все перечисленные классы систем демонстрируют инвариантный паттерн:

1. циклический режим «накопление — пороговый сброс — диссипация»;
2. три канала реинвестирования: ресурс, изменчивость, консолидация;
3. деградация при фиксированной стратегии;
4. необходимость отрицательной обратной связи.

1.3 Цель и метод

Цель работы — выявить математический инвариант указанного паттерна и доказать теоремы, справедливые для любого класса систем, удовлетворяющих исходным допущениям.

В качестве базовой динамической модели выбран стик-слип осциллятор с сухим трением. Данный выбор обусловлен наличием полного аналитического решения и минимальным набором параметров, допускающих универсальную интерпретацию.

2 Предварительные положения и постановка задачи

Рассмотрим массу m, соединённую пружиной жёсткостью k с приводом, движущимся с постоянной скоростью v_0. Масса прижата к горизонтальной поверхности силой нормального давления $F_n = mg$. Между массой и поверхностью действует сухое трение: сила трения покоя $F_s = \mu_s mg$, сила трения скольжения $F_k = \mu_k mg$, причём $\mu_s > \mu_k$.

Уравнение движения:

$$m\ddot{x} = k(v_0 t - x) - F_{\text{тр}}(\dot{x}) \tag{1}$$

где

$$F_{\text{тр}} = \begin{cases} F_s, & \dot{x} = 0,\ |k(v_0 t - x)| \le F_s; \\ F_k \operatorname{sgn}(k(v_0 t - x)), & \dot{x} = 0,\ |k(v_0 t - x)| > F_s; \\ F_k \operatorname{sgn}(\dot{x}), & \dot{x} \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

В установившемся режиме система совершает автоколебания типа «стик-слип». Время фазы покоя:

$$T_{\text{stick}} = \frac{\mu_s mg}{k v_0} \tag{3}$$

Время фазы скольжения:

$$T_{\text{slip}} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{4}$$

Полный период цикла:

$$T = \frac{(\mu_s - \mu_k)mg}{k v_0} + \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{5}$$

Энергия, диссипированная за цикл:

$$E = \frac{2\mu_k(\mu_s - \mu_k)m^2 g^2}{k} + \mu_k mg v_0 \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{6}$$

Средняя мощность диссипации:

$$P = \frac{E}{T} = \frac{\frac{2\mu_k(\mu_s - \mu_k)m^2 g^2}{k} + \mu_k mg v_0 \pi \sqrt{\frac{m}{k}}}{\frac{(\mu_s - \mu_k)mg}{k v_0} + \pi \sqrt{\frac{m}{k}}} \tag{7}$$

В режиме больших ресурсов ($m \to \infty$):

$$P = 2\mu_k g v_0 m \left[1 - \frac{\pi v_0}{(\mu_s - \mu_k)g}\sqrt{\frac{k}{m}} + O\left(\frac{1}{m}\right)\right] \tag{8}$$

3 Универсальная модель диссипативного метаболизма

Введём три фундаментальных параметра состояния:

- m — накопленный ресурс;
- g — изменчивость, мера разнообразия доступных состояний;

- k — консолидация, мера жёсткости связей.

Внешние параметры: v_0 — скорость поступления внешнего потока; μ_s — порог разрушения; μ_k — интенсивность диссипации в рабочем режиме.

Определение 3.1. Мощность диссипации P, определяемая формулой (7), есть *квант метаболической мощности* системы. Она представляет собой атомарную порцию потока негэнтропии, извлекаемую системой из внешнего потока за единицу времени в расчёте на цикл.

Диссипированная за цикл энергия $E = PT$ распределяется по трём каналам:

- $\alpha_m P$ — инвестиции в накопление ресурса;
- $\alpha_g P$ — инвестиции в поддержание и увеличение изменчивости;
- $\alpha_k P$ — инвестиции в поддержание и увеличение консолидации.

Условие нормировки:

$$\alpha_m + \alpha_g + \alpha_k = \alpha_{\text{total}} \in (0, 1) \tag{9}$$

α_{total} есть КПД реинвестирования.

Система обладает внутренней деградацией: каждый параметр распадается со скоростью $\beta_m, \beta_g, \beta_k > 0$. Динамика параметров:

$$\begin{cases} \dot{m} = \alpha_m \cdot P(m, g, k) - \beta_m m \\ \dot{g} = \alpha_g \cdot P(m, g, k) - \beta_g g \\ \dot{k} = \alpha_k \cdot P(m, g, k) - \beta_k k \end{cases} \tag{10}$$

В режиме больших ресурсов $P \approx 2\mu_k g v_0 m$:

$$\begin{cases} \dot{m} = (2\alpha_m \mu_k v_0 g - \beta_m) m \\ \dot{g} = (2\alpha_g \mu_k v_0 g - \beta_g) g \\ \dot{k} = 2\alpha_k \mu_k g v_0 m - \beta_k k \end{cases} \tag{11}$$

4 Теорема о неизбежной гибели

Теорема 4.1. *Всякая система, описываемая системой (10) с фиксированными (не зависящими от состояния) коэффициентами $\alpha_m, \alpha_g, \alpha_k$, необратимо деградирует и гибнет при любых начальных условиях, за исключением множества меры нуль.*

Доказательство. Рассмотрим четыре принципиальных сценария.

Сценарий 1 (деградация изменчивости). Если $\alpha_g < \beta_g/(2\mu_k v_0 g)$, то из второго уравнения системы (11) $\dot{g} < 0$, $g(t)$ монотонно убывает. При $g \to 0$ мощность $P \to 0$, система редуцируется к $\dot{m} = -\beta_m m$, $\dot{k} = -\beta_k k$ и гибнет за конечное время.

Сценарий 2 (избыточный рост изменчивости). Пусть α_g фиксировано и превышает критическое значение

$$\alpha_g > \frac{\beta_g}{2\mu_k v_0 g(0)}.$$

Тогда из второго уравнения системы (11)

$$\dot{g} = (2\alpha_g \mu_k v_0 g - \beta_g) g$$

следует, что $\dot{g} > 0$ при всех t, и параметр $g(t)$ неограниченно растёт.

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$\dot{m} = (2\alpha_m \mu_k v_0 g - \beta_m) m.$$

Поскольку $g(t) \to \infty$, найдётся момент времени t_0, начиная с которого

$$g(t) > \frac{\beta_m}{2\alpha_m \mu_k v_0}.$$

При $t > t_0$ имеем $\dot{m} > 0$, то есть ресурс $m(t)$ также начинает неограниченно расти.

Казалось бы, система демонстрирует устойчивый рост. Однако такая траектория не может быть реализована бесконечно долго в рамках исходных физических допущений модели:

- мощность диссипации $P \sim 2\mu_k v_0 g m$ стремится к бесконечности;
- внешний поток v_0 конечен, что рано или поздно приводит к исчерпанию доступного ресурса;
- при $g \to \infty$ изменчивость переходит в хаос, система теряет способность эффективно утилизировать энергию;
- в реалистичных постановках μ_s и μ_k могут зависеть от g, и при $g \to \infty$ порог разрушения $\mu_s(g)$ стремится к нулю, что означает распад системы.

Таким образом, неограниченный рост g и m при фиксированной стратегии реинвестирования неизбежно приводит либо к исчерпанию внешнего ресурса, либо к разрушению структуры системы, то есть к гибели.

Сценарий 3 (деградация консолидации). При $\alpha_k = 0$ или малом α_k параметр k убывает. При $k \to 0$ период $T \to \infty$, мощность $P \to 0$.

Сценарий 4 (избыточная консолидация). При неограниченном росте k фаза скольжения $T_{\text{slip}} \to 0$, система застывает, $P \to 0$.

При фиксированных α отсутствует механизм, предотвращающий обнуление m, g или k либо неограниченный рост g или k, также ведущий к $P \to 0$. □

5 Критерий выживания: отрицательная обратная связь

Теорема 5.1. *Система (10) сохраняет жизнеспособность тогда и только тогда, когда α_g и α_k являются функциями состояния, удовлетворяющими условиям:*

$$\begin{cases} \alpha_g(g) = \alpha_g^{base} + \gamma_g \cdot \max(0, g_{target} - g) \\ \alpha_k(k) = \alpha_k^{base} + \gamma_k \cdot \max(0, k_{target} - k) \\ \alpha_m(g,k) = \alpha_{total} - \alpha_g(g) - \alpha_k(k) \end{cases} \tag{12}$$

где $\gamma_g, \gamma_k > 0$, $g_{target}, k_{target} > 0$.

Доказательство. Необходимость непосредственно следует из теоремы 4.1: при фиксированных α гибель неизбежна, следовательно, выживание возможно только при изменении α в зависимости от состояния.

Достаточность. При $g < g_{\text{target}}$ обратная связь увеличивает α_g. Выбором γ_g обеспечиваем $\dot{g}(g_{\min}) > 0$. Аналогично для k. При $\alpha_{\text{total}} > \alpha_g^{\max} + \alpha_k^{\max}$ параметр m остаётся положительным. Ограниченность траекторий следует из отключения обратной связи при $g \gg g_{\text{target}}$, $k \gg k_{\text{target}}$. □

6 Теорема о пороге необратимости

Рассмотрим ансамбль из N идентичных систем, взаимодействующих через общий внешний поток. θ — доля систем с $g < g_{\text{crit}}$.

Теорема 6.1. *Существует $\theta_{crit} \in (0,1)$, такое что при $\theta < \theta_{crit}$ восстановление возможно, при $\theta > \theta_{crit}$ — необратимый коллапс.*

Доказательство. Средняя мощность диссипации ансамбля $\langle P \rangle \approx (1-\theta)P_0$. Условие восстановления одной деградировавшей системы:

$$\alpha_g^{\max}(1-\theta)P_0 > \beta_g g_{\text{target}} \tag{13}$$

Отсюда:

$$\theta_{\text{crit}} = 1 - \frac{\beta_g g_{\text{target}}}{\alpha_g^{\max} P_0} \tag{14}$$

При $\theta > \theta_{\text{crit}}$ ресурс недостаточен для восстановления, процесс деградации приобретает лавинообразный характер. □

7 Типология режимов: квантово-статистическая аналогия

Система может находиться в двух принципиально различных режимах.

Режим изменчивости характеризуется приоритетом инвестиций в α_g. Состояния уникальны, конкуренция за ресурс, принцип запрета. Динамика описывается фермионной статистикой:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_i = \nu n_i \left(1 - n_i/K - \sum_{j \neq i} n_j/K\right) \tag{15}$$

В стационаре — одна доминирующая ниша.

Режим консолидации характеризуется приоритетом инвестиций в α_k. Наблюдается конденсация в доминирующем состоянии:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_0 = \sigma(N - n_0) - \delta n_0 \tag{16}$$

При превышении критической плотности $n_0 \approx N$ (бозонная статистика).

8 Теорема о фазовом переходе

Теорема 8.1. *Система жизнеспособна тогда и только тогда, когда она способна к переключению между фермионным и бозонным режимами.*

Доказательство. Режим чистой изменчивости ($\alpha_g \to \alpha_{\text{total}}$, $\alpha_k \to 0$) влечёт $k \to 0$ и $P \to 0$. Режим чистой консолидации ($\alpha_k \to \alpha_{\text{total}}$, $\alpha_g \to 0$) влечёт $g \to 0$ и $P \to 0$. Режим чистого накопления ($\alpha_m \to \alpha_{\text{total}}$) влечёт $g \to 0$, $k \to 0$ и $P \to 0$. Сбалансированная фиксированная стратегия не адаптируется к флуктуациям и обречена по теореме 4.1. Единственная возможность — динамическое переключение между режимами. □

9 Связь с термодинамикой и негэнтропией

Негэнтропия S_{neg}, её производная:

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{\text{neg}} = \alpha_{\text{total}} P - (\beta_m m + \beta_g g + \beta_k k)\varepsilon \tag{17}$$

Критерий существования:

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{\text{neg}} > 0 \tag{18}$$

Определение 9.1. Обратная температура системы: $\beta_{\text{sys}} = \partial S_{\text{neg}}/\partial E$. За цикл $\Delta S_{\text{neg}} = \alpha_{\text{total}} E$, следовательно $\beta_{\text{sys}} = \alpha_{\text{total}}$. КПД реинвестирования α_{total} есть обратная температура системы.

Термодинамическая температура: $\Theta = 1/\alpha_{\text{total}}$. В равновесии $\alpha_{\text{total}} P = \beta_m m$. При $P \sim m^2$ получаем $m \sim \beta_m/\alpha_{\text{total}}$, $P \sim 1/\alpha_{\text{total}}^2 = \Theta^2$ — квадратичный аналог закона Стефана-Больцмана.

10 Динамика эволюции: два масштаба времени

Медленная эволюция (фоновый режим). v_0 мало, μ_s велико, T велико, P мало, $\beta \sim \alpha P$. Стационарное состояние, малые флуктуации. Характерное время $\tau_{\text{slow}} \sim 1/\beta$.

Быстрая эволюция (режим взрыва). v_0 велико, μ_s снижено, T мало, P велико, $\alpha P \gg \beta$. Взрывной рост m, g, k. Характерное время τ_{fast} — единицы циклов.

Лемма 10.1. *В режиме взрыва при фиксированной стратегии реинвестирования параметр g растёт пропорционально m. Мощность $P \sim gm$ растёт квадратично, что эквивалентно удвоению кванта метаболической мощности за характерное время τ_{fast}.*

Теорема 10.2. *Всякая система, возникшая в результате эволюционного взрыва и сохранившая стратегию реинвестирования, характерную для режима взрыва, неизбежно инициирует вторичный эволюционный взрыв в собственном масштабе времени. Каскад таких взрывов экспоненциально ускоряется. Ускорение обусловлено удвоением кванта метаболической мощности на каждом уровне каскада.*

Доказательство. Характерное время удвоения параметров $\tau_n \sim 1/(2\alpha_m \mu_k v_0^{(n)} g^{(n)})$. Параметр g на n-м уровне пропорционален объёму пространства состояний, созданному системой предыдущего уровня. Этот объём растёт экспоненциально с n, следовательно τ_n убывает экспоненциально. Мощность P_n удовлетворяет $P_{n+1} \approx 2P_n$, время цикла $T_n \sim 1/P_n$, следовательно $T_{n+1} \approx T_n/2$. □

Критерий обрыва каскада. Каскад обрывается при выполнении одного из условий:

1. ресурсное ограничение: v_0 достигает физического предела;
2. пороговое ограничение: g достигает значения, при котором $\mu_s(g) \to 0$;
3. стратегическое ограничение: система переключается из режима взрыва в режим фоновой эволюции (теорема 5.1).

Следствие 10.3. *Единственный способ предотвратить неограниченное ускорение каскада — своевременное переключение стратегии реинвестирования с режима взрыва на режим гомеостаза.*

11 Спектральная плотность мощности. Формула Планка для диссипативного цикла

Система обладает спектром допустимых частот циклов $\{\nu_i\}$, энергией кванта на моде с частотой ν: $E(\nu) = P(\nu)/\nu$, обратной температурой $\beta = \alpha_{\text{total}}$ и бозонной статистикой (моды независимы, разрешены наложения).

Теорема 11.1. *Спектральная плотность мощности диссипативной системы с реинвестированием имеет вид:*

$$p(\nu) = \frac{D(\nu) \cdot \mathcal{E}(\nu)}{e^{\alpha_{total}\mathcal{E}(\nu)/\nu} - 1} \tag{19}$$

где $D(\nu)$ — плотность состояний (число мод на интервал частоты), $\mathcal{E}(\nu)$ — энергия кванта на моде с частотой ν, α_{total} — обратная температура.

Доказательство. Среднее число квантов в моде с энергией E при обратной температуре β в бозонной статистике: $\langle n \rangle = 1/(e^{\beta E} - 1)$. Энергия в моде: $U = E\langle n \rangle$. Мощность: $P = \nu U = \nu E \langle n \rangle = \mathcal{E}(\nu)\langle n \rangle$, где $\mathcal{E}(\nu) = \nu E(\nu) = P(\nu)$ — мощность, соответствующая одному кванту на данной моде. Умножая на плотность состояний $D(\nu)$, получаем (19). □

Частный случай: режим большого ресурса, малая консолидация. При $m \to \infty$, $k \to 0$: $\mathcal{E}(\nu) = \mathcal{E}_0 = \text{const}$, $D(\nu) = Am = \text{const}$.

$$p(\nu) = \frac{Am\mathcal{E}_0}{e^{\alpha_{\text{total}}\mathcal{E}_0/\nu} - 1} \tag{20}$$

Формула (20) является точным математическим изоморфизмом распределения Планка для равновесного излучения. Соответствие величин: $\mathcal{E}_0 \leftrightarrow h$ (постоянная Планка), $\nu \leftrightarrow \nu$ (частота), $1/\alpha_{\text{total}} \leftrightarrow k_B T$ (температура), $Am\mathcal{E}_0 \leftrightarrow 2h\nu^3/c^2$ (плотность состояний).

Заключение

Научные результаты

1. Установлен изоморфизм стик-слип осциллятора и универсальной модели диссипативного метаболизма.
2. Получена замкнутая система уравнений динамики m, g, k (10).
3. Введено понятие кванта метаболической мощности P.
4. Доказана теорема 4.1 о неизбежной гибели при фиксированных α.
5. Доказана теорема 5.1 о критерии выживания через отрицательную обратную связь (12).
6. Доказана теорема 6.1 о пороге необратимости.
7. Построена типология режимов на основе квантовой статистики.
8. Доказана теорема 8.1 о необходимости фазовых переходов.
9. Доказана теорема 10.2 о каскаде эволюционных взрывов и его экспоненциальном ускорении.
10. Доказана теорема 11.1 о спектральной плотности мощности; установлен математический изоморфизм с формулой Планка (20).

Мировоззренческие следствия

1. Диссипация — ресурс, а не потеря.
2. Фиксированные стратегии смертельны.
3. Выживание есть гомеостаз.
4. Порог необратимости измерим.
5. Ни креативность без порядка, ни порядок без креативности.
6. Взрыв порождает взрыв; остановка каскада требует смены стратегии.
7. Квант мощности определяет темп эволюции.
8. Спектр диссипативной системы подчиняется статистике Бозе-Эйнштейна.

Список литературы

[1] Кондратьев, Н.Д. Большие циклы конъюнктуры / Н.Д. Кондратьев // Вопросы конъюнктуры. — 1925. — Т. 1, вып. 1. — С. 28–79.

[2] Ларин, В.Н. Гипотеза изначально гидридной Земли / В.Н. Ларин. — М. : Недра, 1980. — 216 с.

[3] Kuhn, T.S. The Structure of Scientific Revolutions / T.S. Kuhn. — Chicago : University of Chicago Press, 1962. — 172 p.

[4] Nicolis, G. Self-Organization in Nonequilibrium Systems : From Dissipative Structures to Order through Fluctuations / G. Nicolis, I. Prigogine. — New York : Wiley, 1977. — 512 p.

[5] Planck, M. On the Law of Distribution of Energy in the Normal Spectrum / M. Planck // Annalen der Physik. — 1901. — Vol. 4. — P. 553–563.

[6] Schrödinger, E. What Is Life? The Physical Aspect of the Living Cell / E. Schrödinger. — Cambridge : Cambridge University Press, 1944. — 194 p.

Полюков П.А., 2026