Дельта-функции Дирака и нестандартный анализ

© Н. М. Мусин

21 февраля 2026

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $f(x)$. В нестандартном анализе [2] интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ определяется как $[f(a)+f(a+dx)+f(a+2dx)+\dots+f(a+(H-1)dx)]dx$, где $dx = \dfrac{b-a}{H}$ для некоторого бесконечно большого гипердействительного числа H. Геометрически это сумма площадей бесконечного количества прямоугольников с бесконечно малыми основаниями dx и высотами, равными значениям функции на левых концах отрезков разбиения.

Определим функцию $\delta(x)$ следующим образом. Возьмём некоторое положительное бесконечно малое число dx и на отрезке $\left[-\dfrac{dx}{2}, \dfrac{dx}{2}\right]$ зададим этой функции постоянное значение $\dfrac{1}{dx}$. Во всех остальнх точках гипердействительной прямой полагаем $\delta(x) = 0$

Таким образом, дельта-функция Дирака построена как самая обычная функция. При этом её значение в точке $x = 0$ зависит от выбора бесконечно малого числа dx и принимает значение именно как бесконечно большое число в том смысле, какое оно имеет в рамках нестандартного анализа.

Если, например, dx определяется последовательностью $\left[1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots\right]$, тогда $\delta(0)$ определяется как бесконечно большое число $[1, 2, 3, \dots, n, \dots]$.

Такого рода бесконечно большие числа гораздо более осязаемы, чем безликий значок ∞.

Из построений следует, что $\int\limits_{-\frac{dx}{2}}^{\frac{dx}{2}} \delta(x)dx = 1.$

Теперь пусть бесконечно маленькому отрезку длины dx приписана масса 1. Тогда имеет смысл говорить о линейной плотности этого отрезка (она, конечно, равна $\dfrac{1}{dx}$). Более того, под материальной точкой лучше бы говорить как о шарике бесконечно малого радиуса ε. Если вес этой материальной точки равен 1, то плотность будет равна $\dfrac{3}{4\pi} \cdot \dfrac{1}{\varepsilon^3}$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[-\dfrac{dx}{2}, \dfrac{dx}{2}\right]$; для любой точки x этого отрезка $f(x) \approx f(0)$, поэтому $\int\limits_{-\frac{dx}{2}}^{\frac{dx}{2}} f(x)\delta(x)dx \approx f(0) \int\limits_{-\frac{dx}{2}}^{\frac{dx}{2}} \delta(x)dx = f(0)$.

Итак, для произвольной непрерывной функции $f(x)$ мы получили равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0).$$

Список литературы

[1] Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. The Principles of Quantum Mechanics. — Перевод 4-го изд. — М.: Наука, 1979

[2] Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.