О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СОВМЕСТИМОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.Ф. Задорожный, канд. техн. наук, профессор **(НГАСУ (Сибстрин), г. Новосибирск), В.А. Мелентьев,** канд. техн. наук, ст. научн. сотр. **(ИФП СО РАН, г. Новосибирск)**

Аннотация: Исследуются аспекты топологической совместимости параллельных вычислительных систем и задач, предложено и обосновано введение соответствующих показателей, базирующихся на оригинальной топологической модели параллельных вычислений и на нетрадиционном описании графа его проекциями. На примере гиперкубической вычислительной системы (ВС) и задач с кольцевой и звездной информационными топологиями продемонстрировано определение показателей и их использование в сопоставительном анализе применимости интерконнекта с заданной топологией для решения задач с однотипной и разнотипной ему информационными топологиями.

Ключевые слова: топологическая модель параллельных вычислений, проективное описание графа, топологическая совместимость

ON PARALLEL TASKS AND COMPUTING SYSTEMS TOPOLOGICAL COMPATIBILITY

A.F. Zadorozhny, PhD in Technical Sciences, Professor **(Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, NGASU (Sibstrin), Novosibirsk), V.A. Melent'ev,** PhD in Technical Sciences, Senior Research Associate **(Rzhanov Institute of Semiconductor Physics Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISP SB RAS), Novosibirsk))**

Введение. Основанная на законе Амдала (Amdahl’s law) [1] модель позволяет оценить потенциальный параллелизм *задачи* с учетом скалярности (нераспараллеливаемости) отдельных ее фрагментов и по умолчанию предполагает, что задержки, связанные с информационными обменами между параллельно выполняющимися процессами, отсутствуют. Однако решение задачи множеством параллельно действующих процессоров вносит превалирующие над «скалярностью» задачи ограничения, связанные с технической реализацией крупномасштабных параллельных *систем* и обусловленные физической невозможностью обеспечения в них полносвязного интерконнекта [2], по быстродействию сопоставимого с используемыми в системе вычислительными узлами [3].

В работах [4-6] впервые высказана идея о том, что, так как актуальность взаимодействия ресурсов подсистемы, образуемой в ВС для решения той или иной параллельной задачи, зависит 1) от объемно-временных характеристик этой задачи и 2) от коммуникационной производительности ВС, то для определенных соотношений определенных параметрами задачи и интерконнекта характеристиками при поиске изоморфного вложения информационного графа задачи в граф системы, требование смежности процессоров, реализующих информационно смежные процессы, может быть ослаблено. В таком случае ВС можно представить графом, дополненным ребрами, инцидентными вершинам, длина пути между которыми не превышает предельного значения, соответствующего объемно-временным характеристикам задачи и быстродействию интерконнекта. Понятно, что сопутствующее такому представлению увеличение степени вершин графа ВС повысит вероятность успешного вложения задачи и порядок образуемой для ее решения подсистемы.

Таким образом, реальновременная реализация того или иного параллельного приложения на ВС может быть успешной, если: 1) быстродействие ее интерконнекта достаточно для того, чтобы задержки, вносимые обменными процессами между параллельными ветвями, не превышали допускаемых условиями реального времени и 2) граф системы, дополненный ребрами, соответствующими предшествующему условию, содержит подграф, изоморфный информационному графу задачи с числом вершин (параллельных ветвей), соответствующим тому же условию.

Для установления формальных отношений, связывающих параметры задачи и быстродействие интерконнекта с предельно допускаемым расстоянием между вершинами графа ВС, в работах [7, 8] предложена разделенная на две составляющие модель параллельных вычислений: первая из них отнесена к параллельным приложениям и приписывает им свойства неограниченной распараллеливаемости, вторая — к вычислительной системе, в которой ограничения параллелизма обусловлены предельно допускаемым, зависящим от быстродействия интерконнекта и от объемов вычислительных и обменных операций, расстоянием между информационно смежными (в образуемой подсистеме) вершинами графа ВС.

Исследования системных и сетевых топологий основаны на графовом их представлении, когда между модулями системы и вершинами, а также между линиями связи и ребрами графа установлены биективные соответствия. Основной недостаток традиционно используемых при этом матрично-списковых описаний заключается в том, что задаваемые этими описаниями отношения смежности/инцидентности вершин/ребер графов бинарны, тогда как обычно используемые для оценки качества структур маршруты и циклы представляют собой многоместные отношения на множестве вершин. В работах [9-13] предложено описывать граф проекциями, в явном виде содержащими основные используемые в анализе топологий характеристики, что позволяет создавать и использовать нетрудоемкие (в сравнении с комбинаторными) формальные методы анализа [14-19] и синтеза обладающих заданными свойствами топологий ВС [20-26], в том числе обладающих устойчивостью к отказам заданной кратности [27-30]. В [31-33] даны обзоры публикаций, посвященных изложенному выше подходу к топологическому моделированию параллельных систем и задач.

В данной работе проблема совместимости рассматривается на примере задач с кольцевой и звездной топологиями, размещаемых в гиперкубической системе.

1. Основные положения и понятие о совместимости.

В [7] показано, что в зависимости от присущих задаче объемов вычислительных операций W и обмениваемых данных Q ускорение S ее решения, предельно-допускаемое расстояние ∂

между информационно-смежными процессорами и минимальное число p используемых при этом процессоров коррелированы используемой в системе *сетевой технологией*, далее — NT (*Network Technology*). Совместность же этих, определяемых с учетом NT, параметров зависит уже от топологии ВС: если при решении (W,Q)-задачи требуемое ускорение S может быть обеспечено ее разбиением не менее чем на p параллельных ветвей с расстояниями между соответствующими этим ветвям информационно смежными процессорами, не превышающими расстояния $\partial(p)$, то соответствующий такому расстоянию граф ВС должен содержать подграф, изоморфный информационному графу задачи порядка p [34]. Далее считаем, что значения p и $\partial(p)$ получены из базового для рассматриваемой топологической модели уравнения [7]

(1) $$\partial(p) = \left\lfloor \frac{W}{S \cdot t_{NT}(Q/p)} \right\rfloor,$$

учитывающего параметры задачи W и Q, а также директивное ускорение S; здесь $t_{NT}(Q/p)$ – присущая используемой в системе NT функция элементарной (на единичном расстоянии) задержки для удельной $q = Q/p$ порции обмениваемых данных, $\lfloor x \rfloor$ – целая часть числа x.

Представим задачу графом $W(p)$, в котором множество вершин биективно множеству ее параллельных ветвей, а множество ребер — множеству информационных связей между ветвями, p – – мощность множества параллельных ветвей. Пусть $G(V,E)$ — граф системы, в котором множество V вершин биективно множеству составляющих систему процессоров, а множество E ребер – – множеству линий неопосредованной связи между процессорами; n — мощность множества процессоров системы, $n = |V|$.

Тогда, под топологической совместимостью (W,Q)-задачи и заданной графом $G(V,E)$ вычислительной системы следует понимать возможность изоморфного вложения графа задачи $W(p)$ в граф $\partial(p)$-достижимости системы $G_{\partial(p)}(V, E_\partial), E_\partial \supset E$. Иначе говоря, наличие в графе $G_{\partial(p)}(V, E_\partial)$ подграфа $G'_{\partial(p)}$ порядка p, изоморфного графу задачи $W(p)$ того же порядка, указывает на топологическую совместимость этой задачи *с системой, обладающей* *вполне конкретными техническими характеристиками*: напомним, что значения достижимости ∂ и числа процессоров p определяются формулой (1), увязывающей их с параметрами задачи W и Q, с директивным ее ускорением S и с быстродействием интерконнекта, заданным задержкой $t_{NT}(Q/p)$.

Однако, подобная конкретизация носит эксклюзивный характер: нас же интересуют обобщенная, абстрагированная от иных, кроме топологий, параметров, — характеристика совместимости *топологически* отличающихся задач и систем. В качестве такой характеристики выбран порядок $p_W(\partial)$, обладающего характерным для графа задачи ключевым свойством W максимального подграфа G_W графа $G_\partial(V,E_\partial)$, при этом подграф G_W не является собственным подграфом никакого другого обладающего свойством W подграфа графа $G_\partial(V,E_\partial)$. Здесь $G_\partial(V,E_\partial)$ – полученный из графа системы $G(V,E)$ граф ∂-достижимости, в котором вершины u и v соединены ребром, если расстояние $d(u,v)$ между ними в графе $G(V,E)$ не превышает достижимости ∂. Таким образом, абсолютные значения $p_W(\partial)$ для $0 < \partial \leq d(G)$ указывают на потенциал распараллеливания задач с топологией W на исследуемой системе с отличной от W топологией (очевидно, что топологически однотипные задачи и системы полностью совместимы даже при единичной достижимости, и для них $p_W(\partial = 1) = n$. Понятно, что отнесенное к порядку n графа системы значение потенциала $p_W(\partial)$ указывает на то, какая часть от n процессоров системы может быть задействована для параллельной реализации W-задачи, если предельно допускаемое значение достижимости равно ∂. Показатель совместимости (*compatibility*) топологий — $C_W(\partial)$ есть совместимость W-задачи с исследуемой системой при обеспечиваемой ею достижимости ∂; ясно, что $C_W(\partial) \leq 1$. Отметим, что в [33] отношение $p_W(\partial)/n$ определялось как показатель масштабируемости ВС с заданной топологией на задачах определенного топологического типа, но, как видим, этот же показатель вполне применим и для характеристики совместимости сопоставляемых топологий.

Ниже изложена процедура получения графа $G_\partial(V,E_\partial)$, $\partial > 1$ из графа $G(V,E)$ с единичной достижимостью.

2. Получение графа с заданной достижимостью.

Граф $G_\partial(V,E_\partial)$, $\partial > 1$ достаточно просто получить из графа $G(V,E)$ с единичной ($\partial = 1$) достижимостью, используя введенные в [9] и достаточно подробно описанные в [10-13], [20, 21] проективные описания графов. Такие описания используются не только авторами данной работы, но уже активно применяются и другими специалистами [35-39], поэтому изложение сути этого метода представления графов здесь не приводим.

Полные, построенные из ракурсной вершины x, проекции $P_x(G_\partial)$ графа ∂-достижимости $G_\partial(V,E_\partial)$ при $1 < \partial \leq d(G)$ получим «сжатием» в ∂ раз полной проекции $P_x(G)$ исходного графа $G(V,E)$. Первый уровень выстраиваемой проекции $P_x(G_\partial)$ при этом составят вершины, входящие в ∂-окружение ракурсной вершины x. В состав ∂-окружения $N_\partial(y)$ любой другой вершины $y \neq x$ ненулевого уровня $P_x(G)$ входят все вершины, расстояния которых от x в графе $G(V,E)$ не превышают ∂, исключая порождающую y вершину предшествующего ей уровня проекции $P_x(G)$. Таким образом, каждая вершина i-го ($i > 0$) уровня проекции $P_x(G_\partial)$ порождает на ($i + 1$)-м уровне этой проекции подмножество ∂-смежных ей вершин и составляющих ее ∂-окружение [40].

Покажем это на примере 3-мерного гиперкуба H_3.

$$P_0(H_3)_1 = 0^{(1^{(3^{(2,7)},5^{(4,7)})},2^{(3^{(1,7)},6^{(4,7)})},4^{(5^{(1,7)},6^{(2,7)})})}.$$

$$P_0(H_3)_2 = \left\{ \begin{array}{l} 0^{(1^{(2^{(0,3,4,6,7)},3^{(0,2,5,6,7)},4^{(0,3,4,6,7)},5^{(0,3,4,6,7)},7^{(2,3,4,5,6)})})} \\ 0^{(2^{(1^{(0,3,4,6,7)},3^{(0,1,4,5,6)},4^{(0,1,5,6,7)},6^{(0,3,4,5,7)},7^{(1,3,4,5,6)})})}, \\ 0^{(3^{(1^{(0,2,5,6,7)},2^{(0,1,4,6,7)},5^{(0,1,4,6,7)},6^{(0,1,4,5,7)},7^{(1,2,4,5,6)})})}, \\ 0^{(4^{(1^{(0,2,3,5,7)},2^{(0,1,3,6,7)},5^{(0,1,3,6,7)},6^{(0,2,3,5,7)},7^{(1.2,3,5,6)})})}, \\ 0^{(5^{(1^{(0,3,4,6,7)},3^{(0,1,2,6,7)},4^{(0,1,2,6,7)},6^{(0,2,3,4,7)},7^{(1,2,3,4,6)})})}, \\ 0^{(6^{(2^{(0,1,3,4,7)},3^{(0,1,2,5,7)},4^{(0,1,2,5,7)},5^{(0,1,3,4,7)},7^{(1,2,3,4,5)})})}. \end{array} \right\}.$$

Понятно, что при $\partial = d(G)$ граф $G_\partial(V,E_\partial)$ является полным K_n-графом: $\partial = d(G) \Rightarrow G_\partial(V,E_\partial) = K_n$, где $n = |V|$, поэтому в рассматриваемом 3-кубе $G_3(V, E_3) = K_8$, его диаметр $d(G_3) = 1$, и строить проекцию $P_0(G_3)$ для достижимости полного при $\partial = 3$ графа не имеет смысла.

3. Пример исследования совместимости.

Существенные свойства рассматриваемых здесь в качестве примера топологий задач — кольцевой (W_R) и звездной (W_Z), не требуют дополняющих их названия пояснений. Выбор задач с такими информационными топологиями, как и выбор в качестве топологии ВС гиперкуба, обусловлен прежде всего простотой и наглядностью демонстрации предлагаемого в данной работе способа оценки совместимости топологически разнотипных параллельных задач и систем.

Любой гиперкуб H_s имеет гамильтонов цикл, проходящий через каждую вершину ровно один раз [41], и хотя он (гиперкуб) является бипанциклическим графом (содержит циклы только четной длины при $n > 3$) [42], проблем с организацией цикла на единицу меньшего или большего полученного из (1) нечетного значения p, по-видимому, не должно возникать. Поэтому, независимо от размерности s гиперкубической ВС, вложение в нее задачи с кольцевой топологией может быть абсолютным даже при $\partial = 1$, а при $\partial > d(H_s)$ число вариантов вложения еще более возрастает: $C_R(H_s|s > 1) = 1$. Это означает, что использование гиперкубических ВС не вносит никаких ограничений в распараллеливание задач с кольцевой топологией, и если таковые все же имеют место, то они обусловлены только недостаточным быстродействием используемой в ВС сетевой технологии [34].

Рассмотрим теперь возможность вложения в вычислительную систему с гиперкубической топологией информационного графа задачи типа «звезда» Z_k, в котором (p-1) вершин смежны вершине, называемой центральной. Построенная из центральной вершины проекция такого графа содержит всего один уровень над этой вершиной, состоящий из (p-1) вершин. Соответственно, для выявления потенциала совместимости $p_Z(H_s)_\partial$ задачи со «звездной» топологией с топологией ВС, заданной гиперкубом H_s порядка 2^s, при достижимости ∂, достаточно рассмотреть всего лишь одноуровневую (состоящую из нулевого и первого уровней) проекцию графа $(H_s)_\partial$ и подсчитать число вершин в ней. Для рассмотренного выше 3-мерного гиперкуба H_3 получим: $p_Z(H_3)_1 = 4, p_Z(H_3)_2 = 7, p_Z(H_3)_3 = 8$.

В [34] получена обобщенная на любые размерности s и достижимости $\partial \leq s$ гиперкуба $(H_s)_\partial$ формула потенциала $p_Z(H_s)_\partial$:

$$p_Z(H_s)_\partial = \sum_{i=0}^{\partial} \binom{s}{i}.$$

Используя эту формулу, построим таблицу ∂-совместимости ($0 < \partial < 4$) «звездной» задачи с s-мерной ($1 < s < 9$) гиперкубической ВС:

$\boldsymbol{s}$	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$\boldsymbol{n = 2^s}$	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**
$p_Z(H_s)_1$, $C_Z(H_s)_1$	3, 0,75	4, 0,5	5, 0,3125	6, 0,1875	7, 0,1094	8, 0,0625	9, 0,0352
$p_Z(H_s)_2$, $C_Z(H_s)_2$	4, 1	7, 0,875	11, 0,6875	16, 0,5	22, 0,3438	29, 0,2266	37, 0,1445
$p_Z(H_s)_3$, $C_Z(H_s)_3$	4, 1	8, 1	15, 0,9375	26, 0,8125	42, 0,6563	64, 0,5	93, 0,3633

Из приведенной таблицы нетрудно убедиться в том, что для задач со звездной топологией:

1. Увеличение быстродействие интерконнекта (и соответствующее этому увеличение предельной длины ∂ допускаемых соединений) приводит к существенному увеличению потенциала параллелизма, например, для $s = 6$ имеем: $p_Z(H_6)_1 = 7, C_Z(H_6)_1 = 0{,}1094$; $p_Z(H_6)_2 = 22, C_Z(H_6)_2 = 0{,}3438$; $p_Z(H_6)_3 = 42, C_Z(H_6)_3 = 0{,}6563$.
2. При увеличении размерности гиперкуба совместимость значительно падает, что вызвано весьма незначительным (в сравнении с увеличением числа n процессоров) повышением потенциала параллелизма — например, при увеличении размерности от $s = 6$ до $s = 7$ (увеличение n вдвое, от $n = 64$ до $n = 128$) получим: $p_Z(H_6)_1 = 7, p_Z(H_7)_1 = 8$; $p_Z(H_6)_2 = 22, p_Z(H_7)_2 = 29$; $p_Z(H_6)_3 = 42, P_Z(H_7)_3 = 64$; $C_Z(H_6)_1 = 0{,}1094, C_Z(H_7)_1 = 0{,}0625$; $C_Z(H_6)_3 = 0{,}6563, C_Z(H_7)_3 = 0{,}5$.

Сравнивая полученные выше показатели абсолютной и относительной топологической совместимости гиперкубических ВС с «кольцевыми» и «звездными» задачами, легко убедиться в том, что вне зависимости от размерности такие ВС очень хорошо топологически «приспособлены» к решению первых, тогда как решение вторых топологически эффективно лишь на ВС малой размерности.

Таким образом, выбранные в данной работе в качестве примеров топологии ВС и задач достаточно наглядно демонстрируют возможности использования предложенных показателей в сопоставительном анализе совместимости иных, отличных от продемонстрированных, топологий систем и задач.

Заключение.

Предложен показатель топологической совместимости вычислительных систем и решаемых на них параллельных задач. Показатель абстрагирован от технических характеристик используемого в ВС интерконнекта и позволяет оценить потенциальные возможности распараллеливания той или иной задачи, обусловленные только топологически: топологией интерконнекта и информационной топологией задачи.

Теоретической базой предлагаемого подхода к оценке топологической совместимости послужил новый подход к топологическому моделированию параллельных систем [31-33], основанный на оригинальной модели параллельных вычислений [7, 8] и оригинальном методе проективного описания графов [9-13]. Краткое описание используемых в данной работе базовых основ и понятие о топологической совместимости приведены во введении и разделе 1. В разделе 2 описано построение графа ВС с лимитированной длиной соединений информационно связанных процессоров (с предельно допускаемой достижимостью), рассматриваемого в качестве субъекта изоморфного вложения в него информационного графа задачи.

В разделе 3 на примере гиперкубических вычислительных систем исследованы топологические аспекты совместимости параллельных ВС и решаемых на них задач., на примере гиперкубических ВС продемонстрировано его определение для задач с кольцевой и звездной топологиями. С решением проблемы поиска предельных циклов в графе можно ознакомиться в [43], с решением проблемы поиска клик графа для анализа его совместимости с полносвязными задачами — в [44].

Результаты данной работы будут полезны как в сопоставлении параллельных систем и оптимизированного выбора их топологий, соответствующего заданному набору решаемых задач, так и в анализе потенциальных возможностей конкретных систем при решении тех или иных параллельных задач.

Литература.

1. Amdahl G.M., Validity of the single-processor approach to achieving large-scale computing capabilities. In: AFIPS Conference Proceedings, vol. 30 (Atlantic City, N.J., Apr. 18-20). AFIPS Press, Reston, Va., 1967, pp. 483-485. URL: http://www-inst.eecs.berkeley.edu/~n252/paper/Amdahl.pdf (дата обращения: 22.01.2020)
2. Deng Yuefan, Graph Theory Guided Designs of Interconnection Network Topologies (Stony Brook University, New York, USA, National University of Singapore and National Supercomputer Center in Jinan, China) URL: https://manualzz.com/doc/9164700/design-of-optimal-interconnection-network-topologies-for-... (дата обращения: 09.04.2020)
3. Dégila J. R., Sanso B. A survey of topologies and performance measures for large-scale networks //IEEE Communications Surveys & Tutorials. – 2004. – Т. 6. – №. 4. – С. 18-31. URL: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/5342296/ (дата обращения: 09.04.2020)
4. V.A. Melent'ev, “Embedding of subsystems limiting length and number of paths between vertexes of computing system graph”, UBS, 47 (2014), 212–246. URL: http://mi.mathnet.ru/eng/ubs749 (дата обращения: 09.04.2020)
5. V.A. Melentiev, "Limit configuring of subsystems in hypercubic computing systems", Journal of Information Technologies and Computing Systems, 2 (2015), 20-30. URL: http://www.jitcs.ru/images/documents/2015-02/20_30.pdf (дата обращения: 09.04.2020)

6. V.A. Melentiev, “The limiting paralleling in the computing system with a hypercube topology under length restriction of interprocess connections. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=23316608 (дата обращения: 09.04.2020)
7. V.A. Melent'ev, “On topological scalability of computing systems”, UBS, 58 (2015), 115–143. http://mi.mathnet.ru/eng/ubs844
8. V.A. Melent'ev, “On topological fault-tolerance of scalable computing systems”, UBS, 70 (2017), 58–86. https://doi.org/10.25728/ubs.2017.70.3
9. Мелентьев В. А. Скобочная форма описания графов и ее использование в структурных исследованиях живучих вычислительных систем // Автометрия. 2000. Т. 38. № 4. С. 36–52.
10. Melent'ev V. A. The bracket Pattern of a Graph //The 6th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies, PRIA-6-2002. – 2002. – С. 57-61.
11. Мелентьев В. А. Формальные основы скобочных образов в теории графов //Труды Второй Междунар. конф. Параллельные вычисления и задачи управления PACO – 2004. – С. 694-706.
12. Мелентьев В. А. Проективное описание графа вычислительной системы и его минимизация //Материалы XIII Международной научно-технической конференции "ИТ-технологии: развитие и приложения". – 2012. – С. 14-15.
13. Мелентьев В. А. Операции над проекциями графов и актуализация описаний отказоустойчивых систем //Вестник ТГУ. Приложение. – 2006. – №. 17. – С. 208-213.
14. Мелентьев В. А. Формальный подход к исследованию структур вычислительных систем //Вестник Томского госуниверситета. Приложение. – 2005. – №. 14. – С. 167-172.
15. Мелентьев В. А. Проблемы изоморфизма и толерантности графов в теории отказоустойчивости систем // Труды IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO’05. – 2005. – С. 532-549.

16. Мелентьев В. А. Изоморфизм графов и их образов в исследованиях отказоустойчивости систем // Вестник Томского госуниверситета. Приложение. – 2005. – №. 14. – С. 182-190.
17. Мелентьев В. А. Поиск вершинных (s, t)-сечений графа вычислительной системы с ограничением по диаметру компонент связности // ПДМ. 2008. №2 (2). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/poisk-vershinnyh-s-t-secheniy-grafa-vychislitelnoy-sistemy-s-ogranicheniem-po-diametru-komponent-svyaznosti (дата обращения: 29.03.2020).
18. Мелентьев В. А. Детерминированность структурной отказоустойчивости вычислительной системы размером и диаметром компонент связности ее графа //Труды IV Международной конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» PACO‘08. – 2008. – С. 250-264.
19. Мелентьев В. А. Метрические характеристики и цикломатика графов вычислительных систем // Материалы XIII Международной научно-технической конференции "ИТ-технологии: развитие и приложения", Владикавказ, 2012. – С. 115-130.
20. Мелентьев Виктор Александрович Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата // ПДМ. 2010. №2 (8). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/analiticheskiy-podhod-k-sintezu-regulyarnyh-grafov-s-zadannymi-znacheniyami-poryadka-stepeni-i-obhvata (дата обращения: 29.03.2020).
21. Volkova A. A Technical Translation of Melentiev's Graph Representation Method with Commentary. – 2018. University Honors Theses. Paper 503. URL: https://pdxscholar.library.pdx.edu/honorstheses/503 (дата обращения: 29.03.2020).
22. Мелентьев Виктор Александрович Компактные структуры вычислительных систем и их синтез // УБС. 2011. №32. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/kompaktnye-struktury-vychislitelnyh-sistem-i-ih-sintez (дата обращения: 29.03.2020).
23. Мелентьев Виктор Александрович Ограничения на обхваты в компактных графах // ПДМ. Приложение. 2011. №4. URL:

https://cyberleninka.ru/article/n/ogranicheniya-na-obhvaty-v-kompaktnyh-grafah (дата обращения: 29.03.2020).
24. Мелентьев Виктор Александрович Компактные графы и детермини-рованный алгоритм их синтеза // ПДМ. Приложение. 2011. №4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/kompaktnye-grafy-i-determinirovannyy-algoritm-ih-sinteza (дата обращения: 29.03.2020).
25. Мелентьев В. А. Метрика, цикломатика и синтез топологии систем и сетей связи // Труды шестой Международной коферен-ции «ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ЗАДАЧИ УПРАВ-ЛЕНИЯ PACO'2012», – 2012. – С. 10-25.
26. Melent'ev V. A. About topological compactness of computing systems //ISJ Theoretical & Applied Science. – 2014. – V. 11. – №. 19. – С. 59-65. doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2014.11.19.12
27. Мелентьев В. А. Обобщенная модель отказоустойчивой системы // Вестник Томского госуниверситета. – 2007. – №. 23. – С. 242-246.
28. Мелентьев Виктор Александрович Аналитический подход к синтезу регулярных структур отказоустойчивых систем // ПДМ. Приложение. 2010. №3. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/analiticheskiy-podhod-k-sintezu-regulyarnyh-struktur-otkazoustoychivyh-sistem (дата обращения: 29.03.2020).
29. Мелентьев В. А. Моделирование систем, устойчивых к отказам заданной кратности //Труды VII Международной конферен-ции «Иденти-фикация систем и задачи управления» SICPRO. – 2008. – Т. 8. – С. 1210-1223.
30. Melent'ev V. A. FAULT-TOLERANCE OF HYPERCUBIC AND COMPACT TO-POLOGY OF COMPUTING SYSTEMS //ISJ Theoretical & Applied Science. – 2016. – V. 12. – №. 44. – С. 98-105.
31. Melent'ev V. A. Author's approach to the topological modeling of parallel computing systems //arXiv preprint arXiv:2003.10092. – 2020.

32. Мелентьев В. А. Авторский подход к топологическому моделированию параллельных вычислительных систем // PREPRINTS.RU. http://dx.doi.org/10.24108/preprints-3112009.
33. Melent'ev V. A. About topological modeling of parallel systems and tasks // Scientific research of the SCO countries: synergy and integration. – 2019. Part 2: Participants' reports in English. P. 184-192.
34. Melent'ev V. A., Shubin V. I. , Zadorozhny A. F. Topological scalability of hypercubic parallel systems and tasks. //ISJ Theoretical & Applied Science. –2015. –V. 11 – №. 31. P. 122-129. Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.11.31.19
35. Корнюшко В.Ф., Богунова И.В., Флид А.А., Николаева О.М., Гребенщиков А.А. ИНФОРМАЦИОННО-АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОДДЕРЖКА РАЗРА-БОТКИ ТВЕРДЫХ ЛЕКАРСТВЕННЫХ ФОРМ. Тонкие химические технологии. 2018;13(5):73-81. https://doi.org/10.32362/2410-6593-2018-13-5-73-81
36. Sumin V. I. et al. Determining the reliability of network information systems //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – Т. 1203. – №. 1. – С. 012083.
37. Громов Ю. Ю. и др. АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ В СЕТЕВЫХ ИНФОРМАЦИ-ОННЫХ СИСТЕМАХ //Вестник Воронежского института ФСИН России. – 2018. – №. 1. – С. 33-41.
38. Елисеев А. И. и др. Оценка надёжности сетецентрических структур //Механизация строительства. – 2017. – Т. 78. – №. 2. – С. 59-62.
39. Елисеев А. И. и др. Контроль состояния надёжности и безопасности сетевой информационной структуры на основе алгоритма разрезания скобочной проекции графа //Информация и безопасность. – 2015. – Т. 18. – №. 3. – С. 424-427.
40. Мелентьев Виктор Александрович О топологической отказоустойчивости масштабируемых вычислительных систем // УБС. 2017. №70. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/o-topologicheskoy-otkazoustoychivosti-masshtabiruemyh-vychislitelnyh-sistem (дата обращения: 03.04.2020).

41. Mills W. H. Some complete cycles on the n-cube //Proceedings of the American Mathematical Society. – 1963. – Т. 14. – №. 4. – С. 640-643. https://dx.doi.org/10.2307%2F2034292
42. Schmeichel E., Mitchem J. Bipartite graphs with cycles of all even lengths //Journal of Graph Theory. – 1982. – Т. 6. – №. 4. – С. 429-439. https://doi.org/10.1002/jgt.3190060407.
43. V.A. Melent'ev Use of Melentiev's graph representation method for identification and enumeration of circuits of the given length //ISJ Theoretical & Applied Science. –2018. –V. 11 – №. 67. P. 85-91. DOI: https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.11.67.16.
44. V.A. Melent'ev Use of Melentiev's graph representation method for detection of cliques and the analysis of topologies of computing systems //ISJ Theoretical & Applied Science. –2018. –V. 12 – №. 68. P. 201-211. DOI: https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.12.68.28.