Численная модель воздействия рыбного промысла на ограниченный объем природного ресурса

Тетерин А.Н.

11 августа 2019

Аннотация

При постоянном числе участников рыбного промысла остаточное количество природного ресурса может быть оценено по формуле Эйлера для числа e (основание натуральных логарифмов). Практический интерес представляет оценка остаточного ресурса при изменяющемся со временем количестве участников рыбного промысла.

В работе показана теоретическая возможность расчета остаточного природного ресурса с использованием мультипликального счисления для задач, в которых интенсивность промысла зависит от времени.

Построена численная модель промысла и вычислена функция изменения численности лососевой популяции под воздействием промысла пресноводного лосося в акватории Онежского озера (Россия).

1. Введение и постановка задачи

Представим, что в озере (закрытом водоеме) плавает десять тысяч рыб. Рыбы имеют одинаковые размеры и равномерно распределены по объему водоема. Сто рыбаков (участников рыбного промысла) ловят рыбу сетями в этом озере. Каждый рыбак имеет одинаковую сеть. Выйдя на промысел, рыбак закидывает сеть один раз и вылавливает при этом тысячную часть (одну десятую процента) имеющейся в озере рыбы. Количество выловленной рыбы пропорционально рабочему объему рыбацкой сети и объемной плотности распределения рыбы в озере.

Промысел ведется 8 месяцев в году, и, при отсутствии рыбаков, на протяжении этих восьми месяцев количество рыбы в озере (в штуках) остается постоянным.

Тогда, если все рыбаки выйдут на промысел одновременно и только один раз за промысловый сезон, они поймают десять процентов от всей имеющейся в озере рыбы. Количество оставшихся в озере рыб R_1, будет равно:

$$R_1 = R_0\ (1 + c\,N) = 9000\,, \tag{1}$$

где R_0 – начальное количество рыбы ($R_0 = 10000$); c – коэффициент вылова – в нашем случае, коэффициент отрицательный ($c = -0.001$); N – количество рыбаков ($N = 100$). После того, как сто рыбаков выловят 1000 рыб (10 процентов от общего количества рыб в озере), в озере останется 9000 рыб.

Теперь предположим, что рыбаки выйдут на промысел два раза за сезон, двумя равными группами по 50 человек. Тогда количество пойманной рыбы уменьшится – после улова первой группы, уменьшится удельная плотность рыбы в озере (количество рыб на единицу объема).

После двух рыбалок количество рыб в озере будет равно R_2:

$$R_2 = R_0 \left(1 + c\,\frac{N}{2}\right)\left(1 + c\,\frac{N}{2}\right) = \left(1 + c\,\frac{N}{2}\right)^2 = 9025\,, \tag{2}$$

Если каждый рыбак будет выходить на промысел в свой персонально выделенный день (когда другие рыбаки не участвуют в рыбалке) и все сто рыбаков выйдут на промысел по одному разу каждый, то количество оставшейся в озере рыбы будет равно:

$$R_{100} = R_0 \left(1 + c\,\frac{N}{100}\right)^{100} = 9048\,, \tag{3}$$

Если предположить, что (при достаточно большом количестве рыбаков) численность одной группы рыбаков достаточно мала, а общее количество групповых рыбалок достаточно велико, получим общую формулу для величины остаточного ресурса:

$$R_n = R_0 \lim_{n\to\infty}\left(1 + c\,N\frac{1}{n}\right)^n = R_0\, e^{cN} \tag{4}$$

Здесь е есть основание натуральных логарифмов. Впервые подобную формулу:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \tag{5}$$

описывал Якоб Бернулли в работе [1], посвященной вычислению сложного банковского процента. Леонард Эйлер использовал такой предел как основание (натуральных) логарифмов [2], и обозначал это число отдельной буквой, в качестве которой впоследствии стала использоваться латинская буква e.

Если рыбаки равномерно распределяются по некоторому временному промежутку (каждый день на промысел выходит одинаковое количество рыбаков), мы можем использовать формулу (4) для вычисления остаточного природного ресурса (количества рыбы, оставшегося в озере) после некоторого количества рыболовных дней – то есть, по прошествии определенного временного интервала.

Правда, формула может работать только в том случае, когда рыбаки ведут промысел с одинаковой интенсивностью на всем рассматриваемом временном промежутке.

В практических задачах потребители природного ресурса (рыбаки) могут вести промысел с разной интенсивностью в течение рассматриваемого временного промежутка (каждый день на промысел выходит разное количество рыбаков). То есть, перед исследователем ставится задача найти значение R_n, когда параметр N изменяется со временем – меняется число рыбаков N_n, участвующих в промысле в каждый момент времени t_n: $N_n = N(t_n)$.

Тогда формулу для остаточного природного ресурса R_n следует переписать в виде произведения, поскольку все члены данного произведения имеют разную величину:

$$R_n = R_0 \prod_{k=1}^{n} \left[1 + c\, N_n \frac{1}{n} \right] \tag{6}$$

В большинстве практических случаев, значение каждого N_n может быть нам известно – мы не всегда можем контролировать объемы выловленной рыбы, но легко определяем количество рыбаков (рыбацких судов), ведущих промысел в данный момент времени.

2. Математическое описание промысловой модели

Пусть t переменная времени, длину рассматриваемого временного промежутка $[a, b]$ обозначим как $T = |b - a|$. На промежутке $[a, b]$ искомая функция величины остаточного природного ресурса $R(t)$ меняется со временем. Также меняется со временем и число участников промысла $N(t)$.

Разделим временной интервал T на n равных частей длиной Δt. Тогда:

$$n = \frac{T}{\Delta t}$$

$$t_i = a + i\,\Delta t$$

$$i = 1, 2, \dots n$$

и формулу (6) можно переписать в виде:

$$R(t_i) = R_0 \prod_{k=1}^{i} \left[1 + \frac{cN(a + i\,\Delta t)}{T} \Delta t \right] \tag{7}$$

Используя обозначение:

$$f(a + i\,\Delta t) = \frac{cN(a + i\,\Delta t)}{T}, \tag{8}$$

и, устремив n к бесконечности (делим временной промежуток T на бесконечное число бесконечно малых отрезков Δt), получим:

$$R(t_i) = R_0 \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{i} \left[1 + f\left(a + i\,\frac{T}{n} \right) \frac{T}{n} \right] \tag{9}$$

Это предел произведения с бесконечным числом множителей, где функция $f(t)$ нам известна.

По всем остальным параметрам данной задачи мы будем руководствоваться описанием промысла, приведенном в разделе «Введение»: все рыбаки обладают одинаковыми возможностями промысла (вылавливают за день одинаковое количество рыбы); рыба равномерно распределена по объему водоема.

3. Алгоритм вычислений

Введем обозначение для предела бесконечного произведения:

$$\mathop{/\!\!\!/}\nolimits_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[1 + f\left(a + k\,\frac{(b-a)}{n} \right) \frac{b-a}{n} \right] \tag{10}$$

Такой предел мы будем называть «определенный мультипликал» и будем обозначать его длинной латинской буквой P (от английского слова «product» – произведение). Величины a и b, соответственно, назовем верхний и нижний предел мультиплицирования (верхний и нижний пределы мультипликала). Функцию $f(t)$, стоящую под знаком мультипликала, будем называть мультипликальной функцией.

Определение мультипликала дается по аналогии с определением (и символическим обозначением) определенного интеграла. Сравните формулы (10) и (11):

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[f\left(a + k\,\frac{(b-a)}{n} \right) \frac{b-a}{n} \right] \tag{11}$$

В отличие от интеграла (11), под знак бесконечного произведения (10) добавлено дополнительное единичное слагаемое. Смысл такой добавки в том, что без этого слагаемого бесконечное произведение бесконечно малых величин будет всегда равно нулю.

Определенный мультипликал обладает некоторыми (вытекающими из определения мультипликала) свойствами.

Когда верхний и нижний пределы мультипликала равны, определенный мультипликал равен единице:

$$\prod_a^a f(t)dt = 1 \tag{12}$$

Для произвольной точки c из промежутка $[a, b]$ справедливо равенство:

$$c \in [a; b]$$

$$\prod_a^b f(t)dt = \prod_a^c f(t)dt \cdot \prod_c^b f(t)dt \tag{13}$$

То есть, определенный мультипликал $\prod_a^b$ равен произведению мультипликалов $\prod_a^c$ и $\prod_c^b$.

Теорема

Определенный мультипликал от функции $f(t)$, интегрируемой на отрезке $[a, b]$, равен экспоненте от разницы значений первообразной функции $F(t)$ на концах интерваала $[a, b]$:

$$\prod_a^b f(t)\,dt = exp\Big(F(b) - F(a) \Big)$$
$$F(t) = \int f(t)\,dt \tag{14}$$

Доказательство

Рассмотрим мультипликал с фиксированным нижним пределом a и изменяющимся верхним пределом t_0. Таким мультипликалом мы будем оперировать как функцией $P(t_0)$:

$$P(t_0) = \prod_a^{t_0} f(t)dt \tag{15}$$

Здесь переменная t_0 есть всего лишь иное обозначение переменной t. Такое обозначение нужно, чтобы при вычислении мультипликала (как предела бесконечного произведения) зафиксировать длину промежутка, заданного верхним и нижним пределами мультипликала.

Найдем изменение функции $P(t_0)$ за бесконечно малый промежуток времени dt:

$$dP(t_0) = P(t_0 + dt_0) - P(t_0) \tag{16}$$

$$dP(t_0) = \prod_a^{t_0+dt_0} f(t)\,dt - \prod_a^{t_0} f(t)\,dt \tag{17}$$

По свойству мультипликала:

$$\prod_a^{t_0+dt_0} f(t)\,dt \;=\; (1 + f(t_0 + dt)\,dt) \prod_a^{t_0} f(t)\,dt \tag{18}$$

При бесконечно малом промежутке dt, значение функции в точке $t_0 + dt$ стремится к значению функции в точке t_0:

$$\lim_{dt \to 0} f(t_0 + dt) = f(t_0)$$

Тогда формулу для $dP(t_0)$ можно переписать следующим образом:

$$dP(t_0) = (1 + f(t_0)\,dt - 1) \prod_a^{t_0} f(t)\,dt \tag{19}$$

Или:

$$\frac{dP(t_0)}{P(t_0)} = f(t_0)\,dt$$

Помним, что t и t_0 – это одна и та же переменная. Проинтегрировав правую и левую части полученного выражения, получим:

$$ln\,P(t_0) = F(t) + c_1\,,$$

где $F(t)$ есть первообразная функции $f(t)$, а c_1 – некоторая константа. Чтобы найти константу, подставим в эту формулу значение $t = a$. По свойству мультипликала:

$$P(a) = \iint_a^a f(t)\,dt = 1$$

Следовательно:

$$F(a) + c_1 = ln\,P(a) = 0$$

Отсюда находим:

$$c_1 = -F(a)$$

В окончательном виде формула для $P(t_0)$ выглядит следующим образом:

$$P(t_0) = e^{F(t_0) - F(a)}$$

Заменив t_0 на b получим более наглядную формулу:

$$\iint_a^b f(t)\,dt = e^{F(b) - F(a)} \qquad (20)$$

Это есть основная формула мультипликального исчисления. Значение определенного мультипликала с пределами a и b можно выразить через значение первообразной $F(t)$ от мультипликальной функции $f(t)$ на концах промежутка $[a, b]$. Формула аналогична формуле Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

В некоторых случаях (к примеру, когда первообразную функцию $F(t)$ невозможно найти аналитически), бывает удобней использовать интегральную запись формулы (20):

$$\iint_a^b f(t)\,dt = exp\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) \qquad (21)$$

Здесь определенный мультипликал может быть найден путем вычисления интеграла, стоящего в степени экспоненты, известными численными методами.

4. Результаты расчета остаточного ресурса при заданном распределении интенсивности промысла

Неучтенный нелицензируемый вылов нагульного лосося в Онежском озере может составлять до 100 тонн ежегодно (оценка, приведенная в работе [3]). Биомасса нагульного озерного лосося оценивается в 184-273 тонны (недавние оценки разных лет, приведенные в работе [4]). Средняя масса вылавливаемой особи в настоящее время не превышает 3.5 кг, что дает нижнюю оценку численности озерной популяции в 52 600 особей. В дальнейшем, для наглядности, при проведении численных расчетов, мы будем использовать единицы массы (тонны), а не численность популяции.

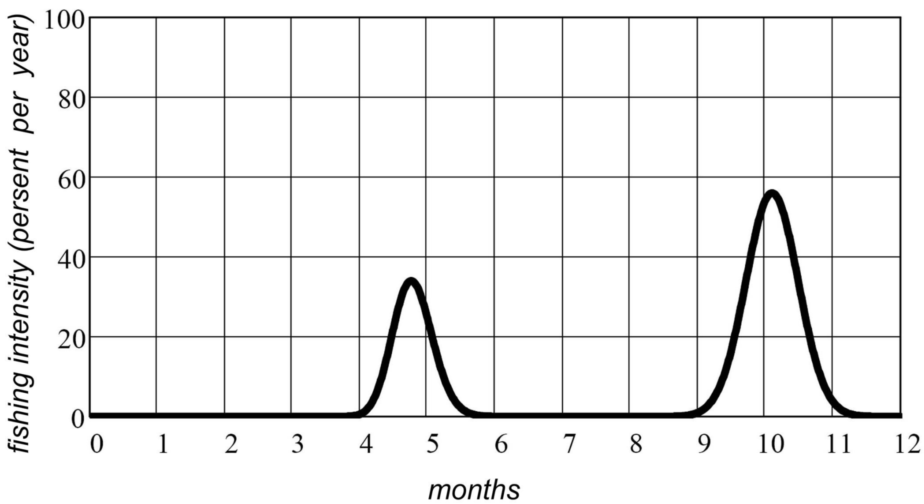

Рис. 1. Модель годового изменения интенсивности промысла.

Интенсивность вылова онежского лосося задана в виде функции $f(t) = cN(t)/T$, где $N(t)$ есть количество рыболовецких судов, имеющееся в акватории в момент времени t; c – коэффициент вылова; $T = 12$ – длина рассматриваемого временного промежутка (12 месяцев). Функция интенсивности промысла $f(t)$ имеет на протяжении года два сезонных пика – в мае - июне и с в октябре - ноябре. Первый пик моделируется логнормальным распределением интенсивности промысла:

$$f_1(t) = \frac{c_1 N_1}{T} e^{b1\left(ln(t)-s_1\right)^2} \tag{22}$$

со следующими параметрами: $c1 = -0.002$; $N1 = 2040$; $T = 12$; $b_1 = -133.33$; $s_1 = 1.56$.

Второй промысловый пик моделируется нормальным распределением интенсивности промысла:

$$f_2(t) = \frac{c_2 N_2}{T} e^{b1(t-s_2)^2} \tag{23}$$

с параметрами: $c2 = -0.002$; $N2 = 3360$; $T = 12$; $b_2 = -3.333$; $s_2 = 10.1$.

На рисунке 1 показана суммарная функция $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ интенсивности промысла по месяцам года. Единица измерения – приведенный процент (процент общей численности популяции, отнесенный к величине временного промежутка T).

Начальный уровень промыслового ресурса $R0$ (биомасса популяции лосося, принятая при численном моделировании) составляет 184 тонны.

Используя формулу предыдущего раздела, при известной функции интенсивности промысла $f(t)$, можно найти функцию величины остаточного природного ресурса $R(t)$ в произвольный момент времени t_0:

$$R(t_0) = \int_0^{t_0} f(t)\,dt = exp\left(\int_0^{t_0} f(t)\,dt\right) \tag{24}$$

Значение функции $f(t)$ пропорционально количеству участников промысла в момент времени t. В начальный момент времени $t = 0$. Результаты расчета представлены на рисунке 2.

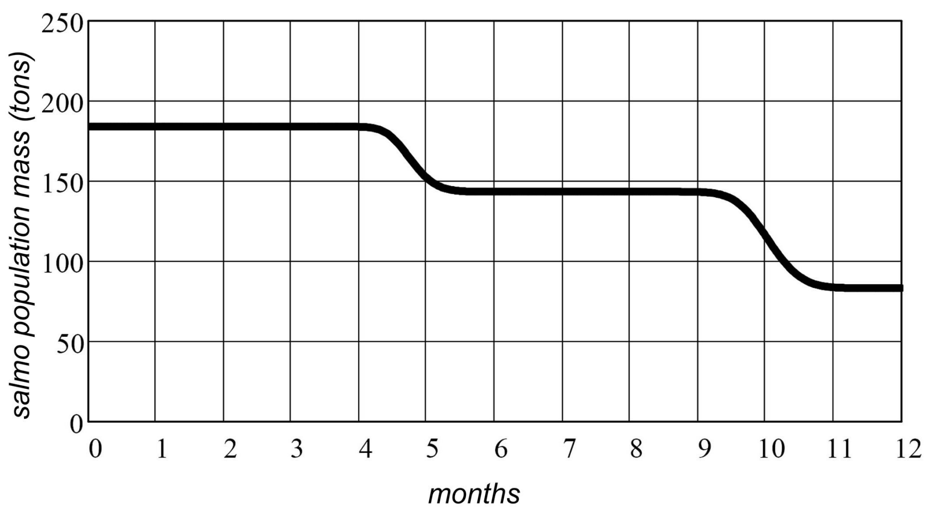

Рис. 2. Результаты моделирования годового изменения массы популяции онежского лосося.

Как следует из данных, полученных при использовании расчетной модели, остаточная масса популяции лосося на конец промыслового года составила 81.9 тонны. При этом в результате промысла было изъято 102.1 тонны рыбы.

5. Обсуждение

График рисунка 2 демонстрирует ожидаемый ступенчатый спад численности популяции лосося после завершения весеннего и осеннего сезонов. Спад численности в результате воздействия первого сезонного пика увеличения интенсивности промысла происходит более плавно (относительно спада численности, вызванного вторым пиком сезонного промысла), и численность популяции уменьшается на меньшую величину.

Представленная численная модель промысла примечательна тем, что расчет производится по простой формуле (24), и для численного расчета не требуется решения дифференциальных уравнений (при вычислениях интеграла используется обычно простое суммирование). Таким образом, расчет остаточной численности популяции озерного лосося может производится ежедневно на простейших вычислительных устройствах (планшет или смартфон). При этом вполне достаточно производить мониторинг интенсивности промысла (контроль количества рыболовецких судов) 4-8 раз в месяц.

Данная модель разработана в целях оценки неучтенных объемов вылова лосося и должна применяться совместно с мониторингом рыбного промысла (выявляющим количество рыболовецких судов, присутствующих на озере в различные дни года).

Для практической калибровки модельных коэффициентов необходимо годичная аппробация модели, в целях определения коэффициентов вылова и подтверждения (корректировки) функций, задающих интенсивность промысла. Коэффициенты вылова могут быть определены путем измерения (известными методами контрольного вылова) численности популяции лосося в начале и в конце календарного года.

В представленном варианте применения модели, коэффициенты вылова имеют одинаковое значение для весеннего и осеннего сезонов. При необходимости (при выявлении такого различия) могут быть заданы разные коэффициенты.

Кроме того, рыболовные суда могут быть статистически разделены на несколько категорий с различными коэффициентами вылова, что также позволит в будущем более корректно адаптировать данную модель к практическому использованию.

Список литературы

[1] **Bernoulli J.**
Quaestiones nonnullae de usuris, cum solutione problematis de sorte alearum, propositi in Ephem. Gall. A. 1685. – 1690.

[2] **Euler L.**
Introduction to Analysis of the Infinite. Book 1, Springer. 1988

[3] **Gaida R.V., Shurov V.A., Shirokov V.A.**
Description, surviving abilities and forecasting of the landlocked salmon in the shuya river (Onego lake basin). Atlantic salmon: biology, conservation and restoration, Petrozavodsk. 2003

[4] **Ivanov S.I.**
Reproduction features of Atlantic salmon (Salmo salar L.) in the Shuya river and Onego lake system (Karelia): Cand. biol. sci. diss.: 29.04.2015 - Petrozavodsk St.University, 2015. (In Russiian)