

**Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение Сукпакская
средняя общеобразовательная школа им. Б. И. Араптана муниципального
района «Кызыльский кожуун» Республики Тыва**

Исследовательский проект

**«Показательные уравнения и методы их
решения в заданиях профильного ЕГЭ по
математике»**

Направление: математика, профильный уровень ЕГЭ.

Область исследования: показательные уравнения.

Выполнила: Оюн Даяна Болатовна,

Класс: 11 «Б»

Научный руководитель: Саая А.Д.

Сукпак, 2026 г.

Содержание

Введение	4
Глава 1. Теоретические основы решения показательных уравнений	5
1.1. Показательная функция и её свойства	5
1.2. Показательные уравнения и их классификация	5
1.3. Область допустимых значений в показательных уравнениях	6
1.4. Связь показательных и логарифмических выражений	6
1.5. Монотонность и анализ функций при решении уравнений	6
1.6. Равносильные преобразования и проверка корней	7
	8
Глава 2. Методы решения показательных уравнений	
2.1. Приведение к одному основанию как основной метод	8
2.2. Разложение на множители и анализ знаков	9
2.3. Метод замены переменной как способ понижения степени уравнения	11
2.4. Логарифмирование как универсальный метод	12
2.5. Графический метод и качественный анализ функций	13
2.6. Использование монотонности функций при доказательстве числа корней	15
2.7. Выбор рационального метода и комбинированные решения	16
2.8. Критерии оценивания задания 13 профильного ЕГЭ по математике (тригонометрическое, логарифмическое или показательное уравнение)	17
Глава 3. Анализ задач показательных уравнений	18
в сборнике типовых экзаменационных вариантов ЕГЭ	
(И. В. Яшенко, 2026)	
3.1. Характеристика сборника и место показательных уравнений в структуре ЕГЭ	18
3.2. Классификация показательных уравнений, представленных в сборнике	18
3.3. Распределение заданий по уровням сложности	19
3.4. Анализ типичных ошибок при решении заданий	19
3.5. Примеры типовых заданий и анализ применяемых методов	20
3.6. Значение анализа сборника для подготовки к ЕГЭ	20
Глава 4. Практическая часть. Систематизация методов решения показательных уравнений	21
4.1. Цели и задачи практической части	21

4.2. Принципы отбора и классификации задач	21
4.3. Таблица алгоритмов решения показательных уравнений	21
4.4. Практическое применение таблицы алгоритмов	22
4.5. Методические рекомендации по решению заданий №13	23
4.6. Создание буклета — опорного конспекта по методам решения показательных уравнений	23
4.7. Апробация таблицы алгоритмов при решении показательных уравнений	24
Заключение	27
Литература	28

Введение

Актуальность:

В курсе алгебры 11 класса показательные уравнения важны: они связаны с изучением показательной функции и её свойств. Учащиеся часто ошибаются при выборе метода решения, что ведёт к потере баллов. Поэтому актуально систематизировать типы таких уравнений из ЕГЭ и разработать наглядные алгоритмы для быстрого определения способа решения. Это повысит качество подготовки и осознанность знаний.

Цель проекта: Целью данного проекта является изучение показательных уравнений, встречающихся в заданиях профильного ЕГЭ по математике, анализ методов их решения и разработка таблицы алгоритмов, упрощающей выбор способа решения.

Задачи проекта:

- рассмотреть теоретические основы показательных уравнений;
- изучить свойства показательной функции, используемые при решении уравнений;
- систематизировать основные методы решения показательных уравнений;
- проанализировать задания с показательными уравнениями из сборника типовых экзаменационных вариантов ЕГЭ (Ященко, 2026);
- разработать таблицу и буклет алгоритмов решения показательных уравнений профильного ЕГЭ и использовать их для решения задач.

Гипотеза: наглядное представление методов решения показательных уравнений облегчает подготовку к профильному ЕГЭ по математике.

Объект: показательные уравнения как часть курса профильной математики.

Предметом исследования: методы решения показательных уравнений, применяемые в заданиях профильного ЕГЭ.

Методы исследования:

- анализ учебной и экзаменационной литературы;
- классификация и систематизация математических задач;
- решение и сравнительный анализ показательных уравнений;
- обобщение и формулирование выводов.

Глава 1. Теоретические основы решения показательных уравнений

1.1. Показательная функция и её свойства

Показательной функцией называется функция вида

$$y = a^x,$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Показательная функция широко применяется при описании процессов роста и убывания и занимает важное место в школьном курсе алгебры и начал математического анализа. При решении показательных уравнений именно свойства данной функции позволяют делать выводы о количестве решений и характере поведения выражений.

К основным свойствам показательной функции относятся:

- область определения — все действительные числа;
- область значений — положительные числа;
- при $a > 0$ функция строго возрастает;
- при $0 < a < 1$ функция строго убывает;
- график функции не пересекает ось абсцисс и проходит через точку $(0;1)$.

Особое значение имеет свойство **монотонности**, которое используется при решении уравнений вида $a^x = f(x)$. В заданиях профильного уровня ЕГЭ это свойство позволяет обосновать существование и количество корней без их явного нахождения. [1]

1.2. Показательные уравнения и их классификация

Показательным уравнением называется уравнение, в котором переменная входит в показатель степени хотя бы одного выражения. Примерами таких уравнений являются:

$$2^x = 8, 3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0.$$

Показательные уравнения можно классифицировать по их структуре:

- уравнения, приводимые к одному основанию;
- уравнения, содержащие сумму или разность показательных выражений;
- уравнения, решаемые заменой переменной;
- уравнения, представимые в виде произведения;
- уравнения вида $a^x = f(x)$.

Такая классификация позволяет осознанно выбирать метод решения и является важным этапом подготовки к заданиям повышенного уровня сложности. [1]

1.3. Область допустимых значений в показательных уравнениях

Несмотря на то что сама показательная функция определена при всех значениях переменной, в реальных экзаменационных заданиях часто присутствуют дополнительные ограничения. Необходимость нахождения области допустимых значений возникает при наличии:

- логарифмов;
- корней чётной степени;
- дробей с переменной в знаменателе.

Нахождение области допустимых значений должно выполняться **до начала решения уравнения**, поскольку некоторые преобразования могут привести к появлению посторонних корней. Проверка найденных решений на соответствие ОДЗ является обязательным этапом при оформлении ответа.

В заданиях профильного ЕГЭ отсутствие явного указания на ОДЗ нередко приводит к потере баллов, даже при наличии верного ответа.

1.4. Связь показательных и логарифмических выражений

Между показательными и логарифмическими выражениями существует взаимно обратная связь:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

Логарифмирование используется при решении показательных уравнений в тех случаях, когда невозможно или нецелесообразно приводить все выражения к одному основанию. При этом важно строго соблюдать условия существования логарифмов, так как нарушение этих условий приводит к неверным решениям. [1]

1.5. Монотонность и анализ функций при решении уравнений

В заданиях повышенного уровня сложности часто встречаются уравнения вида

$$a^x = f(x),$$

где левая часть является показательной функцией, а правая — алгебраической или логарифмической.

Так как показательная функция является монотонной, анализ поведения обеих функций позволяет:

- определить количество корней уравнения;
- доказать существование решений;
- обосновать ответ без нахождения точных значений корней.

Метод анализа функций широко используется при решении задания №13 ЕГЭ и требует аккуратного логического оформления рассуждений.

1.6. Равносильные преобразования и проверка корней

При решении показательных уравнений допускается использование только равносильных преобразований, не изменяющих множество решений исходного уравнения. После получения корней необходимо выполнить их проверку с учётом области допустимых значений.

В заданиях второй части ЕГЭ проверяется не только правильность ответа, но и логика рассуждений, поэтому каждое преобразование должно быть обосновано.

Вывод по главе 1

Расширенное изучение теоретических основ показательных уравнений позволяет учащимся уверенно ориентироваться в выборе методов решения и успешно справляться с заданиями профильного уровня ЕГЭ, включая задания повышенной сложности.

Рассмотренные теоретические положения являются основой для выбора и обоснования методов решения показательных уравнений, представленных в следующей главе.

Глава 2. Методы решения показательных уравнений

(ориентировано на задание №13 профильного ЕГЭ)

Показательные уравнения, встречающиеся в задании №13 профильного ЕГЭ по математике, отличаются большим разнообразием форм и требуют осознанного выбора метода решения. Универсального способа, подходящего для всех уравнений, не существует, поэтому ключевым умением учащегося является анализ структуры уравнения и выбор рационального метода.

В данной главе рассмотрены основные методы решения показательных уравнений, применяемые в заданиях профильного уровня ЕГЭ. Каждый метод сопровождается указанием условий его применения, алгоритмом решения и примерами заданий базового и повышенного уровней. Особое внимание уделено комбинированным решениям, когда для получения ответа требуется последовательное использование нескольких методов.

2.1. Приведение к одному основанию как основной метод

Метод приведения к одному основанию является одним из наиболее часто используемых при решении показательных уравнений в задании №13. Его применение основано на свойствах степеней и позволяет свести исходное уравнение к равенству показателей степеней.

Данный метод является приоритетным, если основания степеней являются степенями одного и того же числа, так как он позволяет избежать логарифмирования и сохранить алгебраическую наглядность решения.

Условия применения метода:

- все основания степеней могут быть представлены в виде степеней одного и того же числа;
- основание степени положительно и не равно единице.

Алгоритм решения:

1. Представить все степенные выражения в уравнении через одно основание.
2. Преобразовать уравнение к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$
3. Приравнять показатели степеней, обосновав данный переход.
4. Решить полученное алгебраическое уравнение.
5. Выполнить проверку найденных корней.

Экзаменационные особенности: В задании №13 часто встречаются показатели, являющиеся квадратичными или дробно-рациональными выражениями. В таких случаях необходимо аккуратно решать полученное уравнение и проверять корни на допустимость. [4]

Пример 1: Базовый уровень

Уравнение:

$$2^{x^2+1} = 8$$

Решение:

Представим число 8 в виде степени двойки:

$$8 = 2^3$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$2^{x+1} = 2^3$$

Так как основания степеней равны и не равны 1, приравниваем показатели:

$$x + 1 = 3$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$

Пример 2: Повышенный уровень (№13)

Уравнение:

$$9^{x^2-3x} = 3^{3x}$$

Решение:

Приведём обе части уравнения к основанию 3:

$$9 = 3^2$$

Тогда:

$$(3^2)^{x^2-3x} = 3^{3x}$$

$$3^{2x^2-6x} = 3^{3x}$$

Приравниваем показатели степеней:

$$2x^2 - 6x = 3x$$

Перенесём всё в одну сторону:

$$2x^2 - 9x = 0$$

Вынесем общий множитель:

$$2x(x - 4) = 0$$

Отсюда:

$$x_1 = 0 \text{ или } x_2 = 4$$

Ответ: $x = 0$; $x = 4$

2.2. Разложение на множители и анализ знаков

Метод разложения на множители применяется в тех случаях, когда показательное уравнение может быть представлено в виде произведения выражений. В отличие от метода замены переменной, он позволяет сразу получить решения без понижения степени уравнения.

Если показательное уравнение содержит сумму или разность степенных выражений с одинаковыми основаниями, целесообразно применять метод разложения на множители.

Типовой вид уравнения:

$$a^{f(x)}(a^{g(x)} - 1) = 0$$

Так как показательная функция принимает только положительные значения, выражение $a^{f(x)}$ не может обращаться в нуль, что существенно упрощает анализ.

Алгоритм решения:

1. Вынести общий множитель.
2. Приравнять каждый множитель к нулю.
3. Решить полученные уравнения.
4. Проверить найденные значения переменной.

Экзаменационные особенности:

В развёрнутом решении необходимо указать, почему первый множитель не может быть равен нулю, что является важным элементом обоснования. [4]

Пример 1: Базовый уровень

Уравнение:

$$2^x(2^x - 4) = 0$$

Решение:

Произведение равно нулю, если хотя бы один множитель равен нулю:

$$2^x = 0 \text{ или } 2^x - 4 = 0$$

Так как при любом x , первое уравнение не имеет решений.

Решим второе:

$$2^x = 4$$

$$4 = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

Ответ: $x = 2$

Пример 2: Повышенный уровень (№13)

Уравнение:

$$3^{2x} - 3^{x+1} = 0$$

Решение:

Вынесем общий множитель 3^x :

$$3^x(3^x - 3) = 0$$

Рассмотрим каждый множитель:

$$3^x = 0 \text{ (не имеет решений)}$$

$$3^x - 3 = 0 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

Ответ: $x = 1$

2.3. Метод замены переменной как способ понижения степени уравнения

Метод замены переменной применяется в случаях, когда уравнение содержит несколько степеней с одинаковым основанием, показатели которых связаны между собой.

Ключевым признаком применения данного метода является наличие нескольких степеней с одинаковым основанием и показателями, связанными линейно или кратно. Метод позволяет понизить степень уравнения и свести его к квадратному или линейному.

Идея метода:

Вводится новая переменная, позволяющая свести показательное уравнение к алгебраическому.

Алгоритм решения:

1. Ввести замену вида $a^x = t$, указав условие $t > 0$.
2. Переписать исходное уравнение через новую переменную.
3. Решить полученное алгебраическое уравнение.
4. Выполнить обратную замену.
5. Отобрать допустимые корни.

Экзаменационные особенности:

Ошибки чаще всего возникают при обратной замене, поэтому в решении важно явно указать условие $t > 0$ и выполнить проверку. [4]

Пример 1: Базовый уровень

Уравнение:

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Решение:

Приведём все степени к основанию 2:

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$$

Получаем:

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Введём замену:

$$2^{2x} = t, t > 0$$

Тогда:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

Решим квадратное уравнение:

$$(t - 1)(t - 4) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ или } t = 4$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Ответ: $x = 0$; $x = 2$

Пример 2: Повышенный уровень (№13)

Уравнение:

$$3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 10 = 0$$

Решение:

Введём замену:

$$3^x = t, t > 0$$

Получаем:

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

Разложим на множители:

$$(t - 5)(t - 2) = 0$$

$$t = 5 \text{ или } t = 2$$

Вернёмся к x :

$$3^x = 5 \Rightarrow x = \log_3 5$$

$$3^x = 2 \Rightarrow x = \log_3 2$$

Ответ: $x = \log_3 2$; $\log_3 5$

2.4. Логарифмирование как универсальный метод

Логарифмирование применяется при решении показательных уравнений в тех случаях, когда приведение выражений к одному основанию или замена переменной не приводят к упрощению уравнения. Данный метод позволяет перейти от показательного уравнения к алгебраическому за счёт применения логарифмов.

Перед применением логарифмирования необходимо убедиться, что обе части уравнения положительны, так как логарифм определён только для положительных аргументов.

Алгоритм решения:

1. Убедиться, что обе части уравнения положительны.
2. Прологарифмировать обе части уравнения.
3. Использовать свойства логарифмов для упрощения выражений.
4. Решить полученное уравнение.
5. Проверить корни.

Экзаменационные особенности:

В задании №13 логарифмирование требует аккуратного оформления и обязательного учёта области допустимых значений. [4]

Пример 1: Базовый уровень

Уравнение:

$$5^x = 20$$

Решение:

Прологарифмируем обе части:

$$x = \log_5 20$$

Ответ: $x = \log_5 20$

Пример 2: Повышенный уровень (№13)

Уравнение:

$$5^x = 2^{x+1}$$

Решение:

$$\ln 5^x = \ln 2^{x+1}$$

$$x \ln 5 = (x + 1) \ln 2$$

$$x(\ln 5 - \ln 2) = \ln 2$$

$$x = \ln 2 / (\ln 5 - \ln 2)$$

Ответ: $x = \ln 2 / (\ln 5 - \ln 2)$

2.5. Графический метод и качественный анализ функций

Графический метод заключается в рассмотрении показательного уравнения как равенства двух функций и анализе их графиков. Данный метод позволяет наглядно определить количество решений и их примерное расположение, однако в заданиях профильного уровня используется преимущественно как вспомогательный.

Идея метода:

Количество решений уравнения равно количеству точек пересечения графиков соответствующих функций.

Когда применяется:

- для предварительного анализа уравнения;
- для иллюстрации рассуждений;
- для проверки результатов, полученных аналитически.

Важно:

В заданиях №13 графический метод **не является самостоятельным доказательством**, а служит наглядным дополнением к аналитическим рассуждениям.

Алгоритм:

1. Записать уравнение в виде $f(x) = g(x)$.
2. Исследовать свойства функций (монотонность, область значений).
3. Выполнить качественное построение графиков.
4. Определить количество и значения корней.

Экзаменационные особенности:

Часто достаточно качественного анализа без точного построения графиков, но выводы должны быть строго обоснованы. [4]

Пример 1: Базовый уровень

Уравнение:

$$2^x = x + 2$$

Решение:

Рассмотрим графики функций:

$$y = 2^x \text{ и } y = x + 2$$

Графики пересекаются в точках:

$$x = 0 \Rightarrow 2^0 = 1, 0 + 2 = 2$$

$$x = 1 \Rightarrow 2^1 = 2, 1 + 2 = 3$$

$$x = 2 \Rightarrow 2^2 = 4, 2 + 2 = 4$$

Ответ: $x = 2$

Пример 2: Повышенный уровень (№13)

Уравнение:

$$3^x = 5 - x$$

Решение:

Функция $y = 3^x$ возрастает, функция $y = 5 - x$ убывает. Следовательно, уравнение имеет **не более одного решения**.

Подбором:

$$x = 1 \Rightarrow 3 = 4$$

$$x = 2 \Rightarrow 9 = 3 \text{ пересечение между 1 и 2}$$

Ответ: уравнение имеет единственный корень.

2.6. Использование монотонности функций при доказательстве числа корней

Метод исследования монотонности функций применяется при решении показательных уравнений вида $a^x = f(x)$, где левая часть — показательная функция, а правая — алгебраическая или логарифмическая.

Так как показательная функция при $a > 1$ является строго возрастающей, анализ монотонности обеих функций позволяет строго обосновать количество решений уравнения без их явного нахождения.

Идея метода:

Если одна функция возрастает, а другая убывает, то уравнение имеет не более одного решения.

Алгоритм:

1. Исследовать монотонность каждой функции.
2. Сравнить их области значений.
3. Сделать вывод о числе решений.
4. При необходимости найти корень подбором.

Экзаменационные особенности:

Метод часто используется для строгого обоснования единственности корня, что особенно важно в задании №13. [4]

Пример 1: Базовый уровень

Уравнение:

$$2^x = 7 - x$$

Левая часть возрастает, правая — убывает \Rightarrow **не более одного корня**.

Подбором находим:

$$x = 2 \Rightarrow 4 = 5$$

$$x = 3 \Rightarrow 8 = 4$$

Ответ: единственный корень.

Пример 2: Повышенный уровень (№13)

Уравнение:

$$4^x = x^2 + 1$$

Функция 4^x возрастает, $x^2 + 1$ сначала убывает, затем возрастает. Анализ графиков показывает **два решения**.

Ответ: уравнение имеет два корня.

2.7. Выбор рационального метода и комбинированные решения

В заданиях повышенного уровня сложности часто требуется сочетание нескольких методов. Рациональный выбор способа решения позволяет сократить вычисления и избежать ошибок.

Ключевой принцип:

Перед началом решения необходимо проанализировать структуру уравнения и выбрать метод, который приводит к наименьшему количеству преобразований.

Большинство заданий повышенного уровня сложности требуют не механического применения одного метода, а гибкого сочетания нескольких приёмов. Умение переходить от одного метода к другому является признаком высокого уровня математической подготовки. [4]

Пример 1: Базовый уровень

Уравнение:

$$2^{x+2} = 4^{x-1}$$

Приведём к основанию 2:

$$2^{x+2} = (2^2)^{x-1} = 2^{2x-2}$$

Приравниваем показатели:

$$x + 2 = 2x - 2 \Rightarrow x = 4$$

Ответ: $x = 4$

Пример 2: Повышенный уровень (№13)

Уравнение:

$$2^{x^2} = 8^x$$

Приведём к основанию 2:

$$2^{x^2} = (2^3)^x = 2^{3x}$$

Приравниваем показатели:

$$x^2 = 3x \Rightarrow x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = 3$$

Ответ: $x = 0$; $x = 3$

Особенности оформления решений заданий с развёрнутым ответом и требования к логическому обоснованию подробно рассматриваются в пособиях по подготовке к профильному ЕГЭ [7].

2.8. Критерии оценивания задания 13 профильного ЕГЭ по математике (тригонометрическое, логарифмическое или показательное уравнение)

1.2 балла — обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

2.1 балл — обоснованно получен верный ответ в пункте а или получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б.

3.0 баллов — решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Максимальный балл за задание — 2.

При оценивании не учитывается способ решения задания и форма записи. Оценивается математическая грамотность, обоснованность и полнота приведённого решения и ответа, а также отсутствие или наличие вычислительных ошибок. [6]

Вывод по главе 2

Таким образом, решение показательных уравнений в задании №13 профильного ЕГЭ требует глубокого понимания свойств показательной функции, владения различными методами решения и умения обосновывать каждый этап рассуждений. Осознанный выбор метода и корректное оформление решения являются ключевыми факторами успешного выполнения данного задания.

Глава 3. Анализ задач показательных уравнений в сборнике типовых экзаменационных вариантов ЕГЭ (И. В. Яшенко, 2026)

3.1. Характеристика сборника и место показательных уравнений в структуре ЕГЭ

Сборник типовых экзаменационных вариантов под редакцией И. В. Яшенко (ЕГЭ-2026, профильный уровень) разработан в полном соответствии с действующей спецификацией и кодификатором ФИПИ. Он включает **36 полноценных экзаменационных вариантов**, каждый из которых отражает структуру реального экзамена по профильной математике.

Показательные уравнения в сборнике представлены **не как изолированная тема**, а как часть системы заданий, проверяющих:

- знание свойств показательной функции;
- умение выполнять алгебраические преобразования;
- способность анализировать функции и обосновывать решения.

Особое внимание уделяется заданиям **повышенного уровня сложности**, соответствующим формату задания №13, где требуется не только найти корни, но и привести развёрнутое, логически выстроенное решение. [5]

3.2. Классификация показательных уравнений, представленных в сборнике

На основе анализа содержания сборника можно выделить следующие **основные типы показательных уравнений**, встречающихся в экзаменационных вариантах:

1. Уравнения с одинаковыми основаниями

Характеризуются возможностью прямого применения свойств степеней и приравнивания показателей.

Используются для проверки базовых знаний и навыков.

2. Уравнения, решаемые с помощью замены переменной

Содержат степени с одинаковыми основаниями и кратными показателями. После замены переменной уравнение сводится к алгебраическому (чаще всего квадратному).

3. Уравнения с различными основаниями

Требуют приведения к одному основанию или применения логарифмирования. Проверяют умение гибко использовать свойства степеней и логарифмов.

4. Комбинированные показательные уравнения

Содержат дополнительные элементы: линейные или квадратные выражения, суммы степеней, произведения.

Часто встречаются в заданиях повышенной сложности.

5. Уравнения, решаемые с помощью анализа функций

Предполагают использование графического метода или исследования монотонности. Особенно характерны для заданий №13.

Такая классификация позволяет систематизировать задания и выбрать рациональный метод решения в зависимости от структуры уравнения.

Представленные типы уравнений полностью охватывают основные формы показательных уравнений, встречающиеся в экзаменационных вариантах профильного ЕГЭ.

3.3. Распределение заданий по уровням сложности

Анализ сборника показывает следующую закономерность:

- **В первой части** экзаменационных вариантов чаще встречаются простые показательные уравнения, направленные на проверку базовых умений.
- **Во второй части** (задания с развёрнутым ответом) показательные уравнения встречаются реже, но отличаются высокой методической насыщенностью.
- Задания формата №13 требуют:
 - самостоятельного выбора метода решения;
 - строгого обоснования каждого шага;
 - корректного оформления ответа.

Таким образом, показательные уравнения играют важную роль в оценке уровня математической подготовки выпускника.

3.4. Анализ типичных ошибок при решении заданий

При работе с заданиями сборника Яшенко 2026 учащиеся наиболее часто допускают следующие ошибки:

1. **Некорректное приведение к одному основанию**, приводящее к неверному приравниванию показателей.
2. **Игнорирование области допустимых значений**, особенно при замене переменной или логарифмировании.
3. **Потеря корней** при обратной замене или разложении на множители.
4. **Недостаточное обоснование решения**, что критично для заданий №13 и ведёт к снижению баллов.

Выявление этих ошибок позволяет целенаправленно корректировать процесс подготовки к экзамену.

3.5. Примеры типовых заданий и анализ применяемых методов

Пример 1. Уравнение базового уровня

$$16^{2x} = 2^{6x-12} \text{ (Вариант 5, задание 6)}$$

Метод: приведение к одному основанию.

Комментарий: проверяется знание свойств степеней и умение применять их в стандартной ситуации.

Пример 2. Уравнение с заменой переменной.

$$\log_{25}^2(x^4) + \log_{0,2}(x^8) + 3 = 0 \text{ (Вариант 16, задание 13)}$$

Метод: замена переменной с последующим решением квадратного уравнения.

Комментарий: При решении уравнения важно привести все логарифмы к одному основанию и обязательно учесть область допустимых значений, так как аргументы логарифмов должны быть положительными.

Пример 3. Уравнение с функциональным анализом

$$\sqrt{4x^2 - 1} \cdot (4^{(3x+1)} - 26 \cdot 8^x + 12) = 0 \text{ (Вариант 19, задание 13)}$$

Метод: исследование монотонности функций и графический анализ.

Комментарий: Несмотря на наличие показательных выражений, рациональнее использовать разложение на множители, так как данный метод позволяет получить все корни без исследования монотонности. [5]

3.6. Значение анализа сборника для подготовки к ЕГЭ

Проведённый анализ показывает, что задания на показательные уравнения в сборнике Яшенко 2026:

- охватывают все основные методы решения;
- соответствуют актуальным требованиям ФИПИ;
- формируют у учащихся навыки логического рассуждения и математического анализа.

Систематическое изучение данных заданий позволяет повысить уровень подготовки к экзамену и уверенно решать задачи повышенной сложности.

Выводы по главе 3

Таким образом, показательные уравнения в сборнике типовых экзаменационных вариантов ЕГЭ (Яшенко, 2026) представлены в разнообразных формах и уровнях сложности. Их анализ позволяет выявить ключевые методы решения, типичные ошибки учащихся и требования к оформлению решений, что делает данный раздел важным элементом подготовки к профильному экзамену по математике.

Глава 4. Практическая часть. Систематизация методов решения показательных уравнений

4.1. Цели и задачи практической части

Практическая часть проекта направлена на закрепление теоретических знаний о показательных уравнениях и формирование устойчивых навыков их решения в формате профильного ЕГЭ.

В рамках практической части были поставлены следующие задачи:

- систематизировать основные методы решения показательных уравнений;
- выделить ключевые признаки, по которым выбирается метод;
- сформировать таблицу алгоритмов, ориентированную на задания повышенного уровня сложности (№13);
- обозначить типичные ошибки и способы их предотвращения;
- создать буклет — опорного конспекта .

4.2. Принципы отбора и классификации задач

При создании практического материала были использованы задания, характерные для профильного уровня ЕГЭ, в том числе аналогичные задачам из сборника И. В. Яшенко (2026). Основными критериями отбора являлись:

- соответствие кодификатору ЕГЭ;
- наличие показательной функции или выражений с переменной в показателе;
- возможность применения различных методов решения;
- потенциальная сложность оформления решения. [5]

Задачи были сгруппированы не по уровню сложности, а по **методу решения**, что позволяет использовать таблицу как справочный и обучающий инструмент.

4.3. Таблица алгоритмов решения показательных уравнений

Тип уравнения	Как распознать	Основной метод	Алгоритм действий	Пример	Что важно помнить
1. Одинаковые основания	Все степени можно представить через одно и то же основание	Приведение к одному основанию	1) Представить все степени через одно основание 2) Приравнять показатели 3) Решить полученное уравнение	$2^{x+1} = 8$	Основание должно быть >0 и $\neq 1$
2. Степени кратны друг другу	Есть выражения вида 4^x , 2^x или 9^x , 3^x	Замена переменной	1) Привести степени к одному основанию 2) Ввести замену $a^x t$, $t > 0$ 3) Решить алгебраическое уравнение 4) Сделать обратную замену 5) Проверить	$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$	Обязательно указать $t > 0$

Тип уравнения	Как распознать	Основной метод	Алгоритм действий	Пример	Что важно помнить
3. Произведение выражений	Уравнение можно разложить на множители	Разложение на множители	1) Вынести общий множитель 2) Приравнять каждый множитель к нулю 3) Отбросить невозможные корни	$2^x(2^x - 8) = 0$	A^x никогда
4. Разные основания (можно привести)	Основания являются степенями одного числа	Приведение к одному основанию	1) Представить основания как степени одного числа 2) Упростить 3) Приравнять показатели	$8^{x-1} = 2^{2x+1}$	Проверять корректность преобразований
5. Невозможно привести к одному основанию	Основания разные и не связаны	Логарифмирование	1) Проверить, что обе части >0 2) Прологарифмировать 3) Использовать свойства логарифмов 4) Решить	$5^x = 12$	Не забывать про ОДЗ
6. Вид $a^x=f(x)$	Показательная и алгебраическая функции	Анализ функций (№13)	1) Рассмотреть функции отдельно 2) Исследовать монотонность 3) Определить число корней 4) Найти их	$2^x = 4 - x$	Если одна функция \uparrow , другая $\downarrow \rightarrow$ не более 1 корня
7. Квадрат в показателе	В показателе квадратное выражение	Приведение к одному основанию + алгебра	1) Привести к одному основанию 2) Приравнять показатели 3) Решить квадратное уравнение 4) Проверить	$2^{x^2} = 9^x$	Часто получается квадратное уравнение

Таблица 1. Алгоритмы решения показательных уравнений профильного ЕГЭ

Представленная таблица алгоритмов позволяет систематизировать основные методы решения показательных уравнений профильного уровня ЕГЭ. Для каждого типа уравнений указаны характерные признаки, оптимальный метод решения, пример задания и краткая методическая пометка. Использование данной таблицы способствует осознанному выбору способа решения и снижает вероятность типичных ошибок при выполнении заданий №13.

4.4. Практическое применение таблицы алгоритмов

Использование таблицы алгоритмов позволяет:

- быстрее определить оптимальный способ решения;
- избежать необоснованных преобразований;
- сократить количество типичных ошибок;
- повысить уверенность при решении заданий №13.

Особенно полезной таблица является при повторении темы и при анализе ошибок, так как она показывает, **какой метод и в какой ситуации является наиболее рациональным.**

4.5. Методические рекомендации по решению заданий №13

На основе практического анализа можно сформулировать следующие рекомендации для учащихся:

1. Перед началом решения всегда определять **область допустимых значений**;
2. Не применять метод монотонности ко всему уравнению, если оно является произведением или суммой;
3. Использовать замену переменной только после приведения уравнения к удобному виду;
4. Каждое преобразование сопровождать кратким обоснованием.
5. Обязательно выполнять проверку корней, полученных после преобразований;
6. При использовании метода монотонности обязательно формулировать вывод о количестве решений словами («следовательно, уравнение имеет...»).

Следование данным рекомендациям позволяет существенно повысить качество решений и соответствовать критериям оценивания ЕГЭ.

Методические рекомендации по оформлению решений заданий повышенного уровня сложности были сформированы с учётом материалов пособий по подготовке к ЕГЭ с развёрнутым ответом [7].

4.6. Создание буклета – опорного конспекта, по методам решения показательных уравнений

Практическая значимость и продукт проекта.

В рамках данной работы был разработан практический продукт – буклет – опорный конспект по методам решения показательных уравнений, ориентированный на обучающихся 11 класса, готовящихся к сдаче профильного ЕГЭ по математике.

Конспект представляет собой структурированную таблицу методов решения показательных уравнений, включающую:

- классификацию основных методов решения;
- краткие алгоритмы действий для каждого метода;
- примеры типовых экзаменационных заданий;
- предупреждения о наиболее распространённых ошибках учащихся;
- рекомендации по оформлению решений заданий повышенного уровня сложности (№13 ЕГЭ).

Материал в конспекте изложен в сжатой и наглядной форме, что позволяет использовать её как инструмент повторения, систематизации знаний и самоконтроля при подготовке к экзамену. Визуальные элементы (схемы, формулы, графики) способствуют лучшему восприятию информации и снижению вероятности ошибок при выборе метода решения.

Разработанный буклет может быть использован:

- учащимися 11 класса при самостоятельной подготовке к ЕГЭ;
- учителями математики в качестве раздаточного материала;
- при повторении темы «Показательные уравнения» на уроках и факультативных занятиях.

4.7. Апробация таблицы алгоритмов при решении показательных уравнений

Цель апробации:

Целью апробации являлась проверка эффективности разработанной таблицы алгоритмов и буклета — опорного конспекта при решении показательных уравнений профильного уровня ЕГЭ, а также оценка их влияния на осознанность выбора метода решения и качество оформления заданий формата №13.

Участники и условия проведения. Апробация проводилась среди обучающихся 11 класса, готовящихся к сдаче профильного ЕГЭ по математике, в рамках повторения темы «Показательные уравнения» на уроке и дополнительных занятиях.

Организация работы. Работа проводилась в два этапа. На первом этапе учащимся было предложено решить ряд показательных уравнений без использования таблицы алгоритмов. На втором этапе аналогичные задания решались с опорой на разработанную таблицу и буклет-шпаргалку. Особое внимание уделялось выбору рационального метода решения, учёту области допустимых значений и логическому обоснованию каждого шага.

Подбор заданий. Задания для апробации были отобраны из типовых экзаменационных материалов профильного ЕГЭ и включали уравнения, решаемые:

- приведением к одному основанию;
- методом замены переменной;
- разложением на множители;
- логарифмированием;
- анализом функций и монотонности (формат №13).

При подборе тренировочных заданий и анализе типичных ошибок использовались материалы открытых образовательных ресурсов по подготовке к ЕГЭ [8].

Анализ результатов. В ходе апробации было отмечено, что при использовании таблицы алгоритмов учащиеся быстрее определяли тип уравнения и выбирали рациональный метод решения. Снизилось количество ошибок, связанных с некорректным приравнением показателей и отсутствием проверки решений. Решения стали более структурированными и логически обоснованными, особенно в заданиях повышенного уровня сложности.

Также при анализе полученных результатов использовались консультации научного руководителя проекта, имеющего опыт проверки работ профильного ЕГЭ по математике в роли эксперта.

№	Вариант сборника	Использовал таблицу алгоритмов (Да/Нет)	Время выполнения (мин)	Кол-во правильных ответов	Кол-во неправильных ответов	Комментарии
1.	1	Нет	40	5	4	Ошибки в задачах по монотонности и логарифмам
2.	1	Нет	42	4	5	Ошибки в задачах по монотонности и логарифмам
3.	1	Нет	38	6	3	Ошибки в задачах по монотонности и логарифмам
4.	2	Да	33	7	2	Ошибки в логарифмировании обеих частей показательного уравнения
5.	2	Да	29	8	1	Ошибки в логарифмировании обеих частей показательного уравнения
6.	2	Да	31	8	1	Ошибки в логарифмировании обеих частей показательного уравнения
7.	2	Да	29	9	0	Оформление

Таблица 2. Сравнительная таблица эффективности метода с таблицей алгоритмов

Выводы по главе 4

В ходе практической части работы были разработаны таблица алгоритмов решения показательных уравнений и практико-ориентированный продукт – буклет – опорный конспект по методам решения показательных уравнений, предназначенный для обучающихся 11 класса, готовящихся к сдаче профильного ЕГЭ по математике.

Созданный конспект и таблица систематизируют основные методы решения показательных уравнений, содержат краткие алгоритмы действий, типовые примеры экзаменационных заданий, а также предупреждения о наиболее распространенных ошибках учащихся. Наглядное и структурированное представление материала способствует осознанному выбору метода решения и повышает качество выполнения заданий повышенного уровня сложности, в том числе задания №13 ЕГЭ.

Разработанные продукты могут быть эффективно использованы в процессе повторения и закрепления темы, при самостоятельной подготовке к экзамену, а также в учебной практике учителя математики в качестве вспомогательного дидактического материала.

Полученные результаты подтверждают выдвинутую гипотезу о том, что наглядная систематизация методов решения облегчает усвоение темы и снижает количество типичных ошибок.

Заключение

В ходе выполнения исследовательского проекта была рассмотрена тема показательных уравнений, являющаяся одной из ключевых тем профильного уровня ЕГЭ по математике. Актуальность работы обусловлена тем, что задания данного типа регулярно встречаются в экзаменационных вариантах и требуют от учащихся осознанного выбора метода решения и строгого обоснования рассуждений.

В работе были систематизированы теоретические основы показательных уравнений и рассмотрены основные методы их решения, применяемые в заданиях профильного ЕГЭ, включая задания повышенного уровня сложности формата №13. Проведённый анализ экзаменационных материалов показал разнообразие типов показательных уравнений и необходимость гибкого выбора рационального способа решения.

Практическая часть проекта была посвящена разработке таблицы алгоритмов и буклета-шпаргалки по методам решения показательных уравнений. Апробация данных материалов показала, что их использование способствует более осознанному выбору метода решения и снижению количества типичных ошибок при выполнении заданий.

Таким образом, цель и задачи проекта были достигнуты, а выдвинутая гипотеза о том, что наглядная систематизация методов решения облегчает подготовку к профильному ЕГЭ по математике, получила подтверждение. Результаты работы могут быть использованы при подготовке обучающихся 11 классов к экзамену и в практике преподавания математики.

Список литературы

1. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы : учебник для общеобразовательных организаций / под ред. А. Г. Мордковича. — М. : Мнемозина, 2019.
2. Колмогоров А. Н., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. — М. : Просвещение, 2020.
3. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н., Шевкин А. В. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. — М. : Просвещение, 2021.
4. Иванов С. А. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства. — М. : Легион, 2018.
5. Ященко И. В. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты ЕГЭ. — М. : Национальное образование, 2024.
6. Федеральный институт педагогических измерений (ФИПИ). Демонстрационные варианты, спецификации и кодификаторы ЕГЭ по математике. — URL: <https://fipi.ru> (дата обращения: 20.02.2026).
7. Поляков К. Ю., Емельянова Е. А. Подготовка к ЕГЭ по математике. Задания с развернутым ответом. — М. : Экзамен, 2022.
8. Образовательный сайт Math-EGE. Подготовка к ЕГЭ по математике. Показательные и логарифмические уравнения. — URL: <https://math-ege.sdangia.ru> (дата обращения: 20.02.2026).