О ЗАДАЧЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО ПОИСКА КОНЕЧНЫХ ПОЛИГОНОВ НАД ПОЛУРЕШЁТКАМИ

А. В. Решетников

Определение полигона над полугруппой см. в монографии [1]. Напомним, что *нижней полурешёткой* называется частично упорядоченное множество, у которого любая пара элементов имеет точную нижнюю грань. Для произвольной полугруппы S положим $S^1 = S$, если S содержит единичный элемент, и $S^1 = S \cup \{1\}$ – полугруппа S с внешней присоеднённой единицей, если S не имеет единичного элемента.

Пусть X_S – полигон над полугруппой S. Известно, что если S – нижняя полурешётка, то X является [2, предложение 1] частично упорядоченным множеством относительно отношения

$$x \preceq y \;\Leftrightarrow\; x \in yS^1. \tag{1}$$

В работе [3] был поставлен следующий вопрос. Пусть $(X, \leq)$ – частично упорядоченное множество. *В каком случае найдутся полурешётка S и полигон X_S такие, что для них отношение* (1) *совпадает с отношением $\leq$?*

Было введено обозначение $\Phi(X)$ – это множество, состоящее из всех преобразований φ множества X, удовлетворяющих четырём условиям:

A1. *Изотонность*: т. е. для любых $x, y \in X$:

$$x \leq y \;\Rightarrow\; x\varphi \leq y\varphi.$$

A2. Для всех $x \in X$:

$$x\varphi \leq x.$$

A3. $\varphi^2 = \varphi$.

A4. Для любых $x, y \in X$:

$$\text{если } x \leq y \text{ и } y\varphi = y, \text{ то } x\varphi = x.$$

Следующая теорема отвечает на поставленный вопрос, предлагая необходимые и достаточные условия, налагаемые на $(X, \leq)$:

Теорема 1 (**[3]**, переформулированная теорема 4)**.** *Пусть* $(X, \leq)$ *– частично упорядоченное множество. Следующие условия равносильны:*

(i) существуют полурешётка S *и полигон* X_S *такие, что* $(x \preceq y \Leftrightarrow x \leq y)$ *для всех* $x, y \in X$*;*

(ii) для любых $a, x \in X$*:*

$$\text{если } a \leq x, \text{ то существует } \varphi \in \Phi(X) \text{ такое, что } a = x\varphi.$$

Данная теорема в принципе позволяет определить, является ли отношение частичного порядка, заданное на каком-либо множестве X, отношением (1) для какого-либо полигона над полурешёткой: ответ зависит от того, удовлетворяет ли X сформулированному в теореме 1 условию (ii). Однако, *алгоритмическая* проверка условия (ii) – разумеется, в том в случае, если она реализована непосредственным образом – представляется нецелесообразной с вычислительной точки зрения: прямая проверка данного условия методом полного перебора вариантов может быть осуществлена лишь для весьма небольших множеств X.

В связи с этим появляется вопрос о получении условия, эквивалентного (ii), но допускающего более эффективную алгоритмическую проверку.

Для получения такого условия прежде всего усовершенствуем определение множества $\Phi(X)$. Рассматривая частично упорядоченное множество $(X, \leq)$ и какое-либо его подмножество $A \subseteq X$, назовём множество A *конусом*, если оно удовлетворяет двум пунктам:

1) имеет не более одного минимального элемента;
2) является *выпуклым*, то есть для любых $x \in X$, $y_1, y_2 \in A$:

$$y_1 \leq x \leq y_2 \;\Rightarrow\; x \in A. \tag{2}$$

При этом, если конус A имеет наименьший элемент $\min A$, то будем говорить, что $\min A$ – *вершина* данного конуса.

Основанием конуса A будем называть множество $\operatorname{Max} A$, состоящее из всех максимальных элементов множества $(A, \leq)$ (если таких элементов нет, то основанием конуса A считаем пустое множество).

Пусть A – конус в частично упорядоченном множестве $(X, \leq)$. Если он удовлетворяет следующему более сильному условию, чем (2):

$$x \leq y \;\Rightarrow\; x \in A \quad \text{для всех } x \in X, y \in A, \tag{3}$$

то назовём A *полным конусом.* Ясно, что если полный конус A имеет вершину a, то a – один из минимальных элементов множества $(X, \leq)$.

Если φ – преобразование множества X, то полный прообраз элемента $a \in X$ (по отношению к данному преобразованию) будем обозначать через $a\varphi^{-1} = \{x \mid x\varphi = a\}$. Образ всего множества X обозначим через $\operatorname{im}\varphi = X\varphi$.

Предложение 2. *Пусть частично упорядоченное множество $(X, \leq)$ содержит не более одного минимального элемента. Произвольное отображение $\varphi : X \to X$ принадлежит множеству $\Phi(X)$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:*

B1: *множество $\operatorname{im}\varphi$ является полным конусом;*

B2: *каким бы ни был элемент $a \in \operatorname{im}\varphi$, его полный прообраз $a\varphi^{-1}$ является конусом с вершиной a;*

B3: *для любых $a, b \in \operatorname{im}\varphi$: если $x \in a\varphi^{-1}$, $y \in b\varphi^{-1}$ и $x \leq y$, то $a \leq b$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi \in \Phi(X)$. Прежде всего, заметим, что условие A1 равносильно условию B3.

Далее, предположим, что выполнены условия A1 – A3. Покажем, что в этом случае выполнено B2. Выберем произвольным образом элементы $a \in \operatorname{im}\varphi$, $x \in X$ и $y \in a\varphi^{-1}$. Если $a \leq x \leq y$, то из A1 и A3 следует

$$a = a\varphi \leq x\varphi \leq y\varphi = a,$$

а значит, $x \in a\varphi^{-1}$. Кроме того, из A2 следует $a = y\varphi \leq y$, поэтому a – наименьший элемент множества $a\varphi^{-1}$ в силу произвольности y. Следовательно, $a\varphi^{-1}$ – конус с вершиной a, и имеет место условие B2.

Пусть выполняются A2 – A4. Тогда для любых $x, y \in X$ верно

$$\text{если } (y \in \operatorname{im}\varphi) \text{ и } (x \leq y), \text{ то } (x \in \operatorname{im}\varphi). \tag{4}$$

Значит, множество $A = \operatorname{im}\varphi$ удовлетворяет условию (3). Кроме того, из (4) мы получаем, что любой минимальный элемент множества $\operatorname{im}\varphi$ является минимальным элементом множества X. По условию X имеет не более одного минимального элемента. Следовательно, $\operatorname{im}\varphi$ – полный конус. То есть, из A2 – A4 следует условие B1.

Достаточность. Допустим, что выполнены B1 – B3. Условие A1 следует из B3; A2 и A3 следуют из B2. Докажем выполнение условия A4. Выберем произвольным образом $x, y \in X$ и предположим, что $x \leq y$ и $y\varphi = y$. Имеем $y \in \operatorname{im}\varphi$. Так как $\operatorname{im}\varphi$ – полный конус (согласно B1), то $x \in \operatorname{im}\varphi$. В таком случае из B2 следует $x \in x\varphi^{-1}$. То есть, $x\varphi = x$. $\square$

Итак, в случае частично упорядоченного множества X, имеющего не более одного минимального элемента (т. е. в случае, когда X – полный конус), налагаемые на него условия A1 – A4 могут быть заменены более простыми (с вычислительной точки зрения) условиями B1 – B3. Покажем, каким образом предложение 2 может быть использовано для проверки произвольного X на соответствие условию (ii) из теоремы 1. Перед этим сделаем несколько замечаний.

Пусть $(X, \leq)$ – любое частично упорядоченное множество. Введём следующие обозначения для всех $x \in X$:

$$x^{\triangle} = \{y \in X \mid x \leq y\}; \quad x^{\triangledown} = \{y \in X \mid y \leq x\}.$$

Обратим внимание, что $x^{\triangle}$ всегда является конусом. $x^{\triangledown}$ может не быть конусом, но если $x^{\triangledown}$ – конус, то он полный[1]. Например, если компонента связности, в которой лежит элемент x, имеет не более одного минимального элемента, то ясно, что $x^{\triangledown}$ – полный конус.

М. Ю. Максимовским было доказано:

Предложение 3 (**[2]**, предложение 2). *Если частично упорядоченное множество $(X, \leq)$ удовлетворяет условию (i) теоремы 1, то для любого элемента $x \in X$ множество $x^{\triangledown}$ является нижней полурешёткой.*

Другое утверждение легко доказывается методом от противного:

Предложение 4. *Пусть частично упорядоченное множество X связно. Если для любого элемента $x \in X$ множество $x^{\triangledown}$ является нижней полурешёткой, то X имеет не более одного минимального элемента.*

Из предложений 3 и 4 следует, что *если X удовлетворяет условию (i) теоремы 1, то каждая его компонента связности имеет не более одного минимального элемента.*

Мы приходим к следующему выводу. Введём обозначение $\Psi(X)$:

Определение множества $\Psi(X)$. Пусть $(X, \leq)$ – частично упорядоченное множество. Тогда $\Psi(X)$ есть множество всех отображений $\varphi : X \to X$, удовлетворяющих условиям B1, B2 и B3 из предложения 2.

---

[1] Как правило, множества $x^{\triangle}$ и $x^{\triangledown}$ называют, соответственно, *верхним конусом* и *нижним конусом* элемента x. Чтобы согласовать наше определение конуса с общепринятыми определениями, можно было бы вместо просто *конуса* говорить о *неполном верхнем конусе*, двойственным образом определяя *неполный нижний конус*. В рамках данной работы такое переусложнение терминологии представляется неоправданным. Во избежание недоразумений мы далее не используем понятие нижнего конуса.

Теорема 5. *Пусть $(X, \leq)$ – частично упорядоченное множество. Условие (j) выполняется тогда и только тогда, когда каждая компонента связности X' множества X одновременно удовлетворяет условиям (jj) и (jjj), где:*

(j) существуют полурешётка S и полигон X_S такие, что $(x \preceq y \Leftrightarrow x \leq y)$ для всех $x, y \in X$;

(jj) X' имеет не более одного минимального элемента;

(jjj) для любых $a, x \in X'$:

$$\text{если } a \leq x, \text{ то существует } \psi \in \Psi(X') \text{ такое, что } a = x\psi.$$

Кроме того, если компонента X' такова, что каждый её элемент $x \in X'$ ограничен сверху некоторым максимальным элементом множества $(X', \leq)$, то условие (jjj) для X' равносильно следующему условию:

(jv) для любого элемента $a \in X'$ и любого максимального элемента $m \in X'$:

$$\text{если } a \leq m, \text{ то существует } \psi \in \Psi(X') \text{ такое, что } a = m\psi.$$

Доказательство. 1. Пусть множество X удовлетворяет условию (j) (данное условие в точности повторяет условие (i) из теоремы 1). Как было замечено выше, в этом случае каждая компонента связности $X' \subseteq X$ удовлетворяет (jj). Выберем произвольным образом компоненту X' и элементы $x \in X'$ и $a \leq x$. Согласно теореме 1 найдётся отображение $\varphi \in \Phi(X)$ такое, что $x\varphi = a$. Введём новое отображение $\psi : X' \to X$ следующим образом: положим $y\psi = y\varphi$ для всех $y \in X'$; в частности, $x\psi = a$. Поскольку для φ выполняется A2, то для любого $y \in X'$ имеет место $y\psi \leq y$; следовательно, ψ является преобразованием множества X'. Ясно, что все утверждения A1 – A4, справедливые для φ, переносятся на отображение ψ путём замены символа X на символ X'. Таким образом, $\psi \in \Phi(X')$. Так как X' содержит не более одного минимального элемента (ввиду (jj)), то $\psi \in \Psi(X')$, согласно предложению 2. Тем самым доказано утверждение (jjj), а вместе с ним и импликация $(j) \Rightarrow (\forall X' : (jj) \ \& \ (jjj))$.

2. Пусть каждая компонента связности множества $(X, \leq)$ удовлетворяет условиям (jj) и (jjj). Покажем, что множество X удовлетворяет (j).

Согласно теореме 1 для этого достаточно доказать выполнение условия (ii). Выберем произвольным образом $x \in X$ и обозначим через X' ту компоненту связности, в которой находится элемент x. Возьмём любой элемент $a \leq x$. Поскольку $a \in X'$, то согласно (jjj) существует отображение $\psi \in \Psi(X')$ такое, что $a = x\psi$. Из утверждения (jj) и предложения 2 следует $\psi \in \Phi(X')$. Введём новое отображение $\varphi : X \to X$, полагая

$$y\varphi = y\psi \text{ для всех } y \in X'; \quad y\varphi = y \text{ для остальных } y.$$

Поскольку ψ удовлетворяет условиям, аналогичным A1 – A4 (а именно: условиям, которые получаются из A1 – A4 путём замены символа X на символ X'), то ясно, что φ также удовлетворят условиям A1 – A4; то есть $\varphi \in \Phi(X)$. При этом $x\varphi = x\psi = a$. Мы получаем, ввиду произвольности выбора x и a, что условие (ii) из теоремы 1 выполняется. Тем самым установлена справедливость импликации $(\forall X' : (jj) \ \& \ (jjj)) \Rightarrow (j)$.

3. Предположим теперь, что в компоненте связности X' каждый элемент $x \in X'$ ограничен сверху некоторым максимальным элементом. Очевидно, что $(jjj) \Rightarrow (jv)$. Докажем импликацию $(jv) \Rightarrow (jjj)$. Допустим, что компонента X' удовлетворяет условию (jv). Возьмём какой-либо элемент $x \in X'$; выберем произвольным образом $a \leq x$; найдём максимальный элемент m, ограничивающий x сверху; построим отображение $\psi \in \Psi(X')$, для которого $a = m\psi$ – такое отображение существует согласно сделанному предположению. Из B2 следует $a = a\psi$. Поскольку условия B3 и A1 равносильны, то ψ изотонно. Следовательно, из неравенства $a \leq x \leq m$ мы получаем

$$a = a\psi \leq x\psi \leq m\psi = a.$$

Таким образом, $a = x\psi$. Ввиду произвольности выбора элементов a и x мы приходим к выводу, что для X' выполняется условие (jjj). $\square$

Следствие. *Пусть частично упорядоченное множество $(X, \leq)$ является конечным. Условие (k) выполняется тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия (kk) и (kkk), где:*

(k) существуют полурешётка S и полигон X_S такие, что $(x \preceq y \Leftrightarrow x \leq y)$ для всех $x, y \in X$;

(kk) каждая компонента связности X' множества X содержит наименьший элемент;

(kkk) *для любой компоненты связности X' множества X, любого элемента $a \in X'$ и любого максимального элемента $m \in X'$:*

$$\text{если } a \leq m, \text{ то существует } \psi \in \Psi(X') \text{ такое, что } a = m\psi.$$

Ясно, что *проверка условий (kk) и (kkk) с вычислительной точки зрения существенно более эффективна, чем проверка условия (ii) из теоремы 1*: условия B1 и B2 позволяют существенно сократить число возможных вариантов при переборе различных ψ; поэтому алгоритм, выполняющий прямую проверку (kk) и (kkk), имеет гораздо меньшую сложность, чем алгоритм, прямо выполняющий проверку условия (ii).

Основной вывод. Пусть $(X, \leq)$ – частично упорядоченное множество. В каком случае для него существует такая полурешётка S, что некоторый полигон X_S имеет отношение $\{(x, y) \in X \times X \mid x \in yS^1\}$, совпадающее с отношением $\leq$?

Основываясь на следствии из теоремы 5, мы приходим к выводу, что ответ на данный вопрос зависит от того, выполняются ли для заданного множества X условия (kk) и (kkk): если выполняются, то ответ положительный, иначе ответ отрицательный.

Для заданной компоненты связности X' (предположим, она имеет наименьший элемент $\min X'$) и заданных элементов $m \in \operatorname{Max} X'$, $a \leq m$ проверка существования ψ может быть проведена следующим образом:

1) в цикле перебираются всевозможные полные конусы A, для которых $\min A = \min X'$ и $a \in \operatorname{Max} A$;
   1.1) для каждого из них в цикле всеми возможными способами выполняется разбиение множества $(X' \setminus A) \cup \operatorname{Max} A$ на конусы с вершинами из $\operatorname{Max} A$;
      1.1.1) для каждого из этих разбиений вводится отображение $\psi : X' \to X'$ следующим образом:
         – если $x \in A \setminus \operatorname{Max} A$, то $x\psi = x$;
         – в противном случае x принадлежит ровно одному конусу с вершиной $a \in \operatorname{Max} A$; принимается $x\psi = a$;
         $\{$*Таким образом, построенное отображение ψ удовлетворяет условиям, аналогичным B1 и B2. Наоборот: любое отображение $\psi \in \Psi(X')$ рано или поздно будет построено на данном шаге.*$\}$

1.1.2) выполняется проверка полученного отображения ψ на изотонность: поскольку имеется разбиение множества X' на конусы, для такой проверки можно использовать условие, аналогичное B3 (т.е. условие, получаемое из B3 путём замены символа X на символ X');

1.1.3) в случае успешного выполнения шага 1.1.2 проверка завершена: отображение ψ существует;

2) если до выполнения данного шага работа так и не была завершена, ψ не существует.

Предложенный алгоритм является далеко не оптимальным. Следующее важное замечания позволяет существенно ускорить его работу (здесь $\psi|_{a^\triangle}$ – ограничение отображения ψ на множество $a^\triangle$):

Предложение 6. *Пусть* $(X, \leq)$ *– частично упорядоченное множество,* X' *– какая-либо его компонента связности,* $\psi : X' \to X'$ *– произвольное отображение,* $a \in \operatorname{im} \psi$*. Если* $\psi \in \Psi(X')$*, то* $\psi|_{a^\triangle} \in \Psi(a^\triangle)$*.*

Доказательство. Пусть $\psi \in \Psi(X')$. Покажем, что $\psi|_{a^\triangle}$ является преобразованием множества $a^\triangle$. Для этого выберем произвольным образом $x \in a^\triangle$ и убедимся, что $x\psi \in a^\triangle$. Действительно: $a \leq x$; следовательно, $a = a\psi \leq x\psi$. Отсюда $x\psi \in a^\triangle$. Таким образом, $a^\triangle\psi \subseteq a^\triangle$. Дальнейшая проверка соотношения $\psi|_{a^\triangle} \in \Psi(a^\triangle)$ не вызывает затруднений. □

Нерешённый вопрос состоит в том, чтобы построить алгоритм, выполняющий проверку любого из совпадающих условий (i), (j) или (k), который использовал бы предложение 6 (а также следствие из теоремы 5, разумеется) в полной мере.

Список литературы

[1] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. *Monoids, Acts and Categories.* Berlin: Walter deGruyter, 2000. 529 p.

[2] Максимовский М. Ю. О полигонах над полурешетками // *Фунд. и прикл. мат.* **14:7** (2008), 151–156.

[3] Апраксина Т. В., Максимовский М. Ю. Полигоны и частичные полигоны над полурешетками. // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер.* Сер. Математика. Механика. Информатика **12:1** (2012), 3–7.