

# Размерная интерпретация правила 20/80 в задачах распределения ресурсов

Г.А. Грачёв

## Аннотация

Предлагается размерная интерпретация эмпирического правила 20/80 в задачах концентрации ресурсов. Вводится функция концентрации — доля ресурса, приходящаяся на наибольшую  $r$ -фракцию ранжированных элементов. С помощью геометрической модели конической кучи песка выводятся аналитические выражения для накопления массы, площади поверхности и энергии. Результаты показывают, что пропорция 20/80 возникает из-за эффектов размерности, а не из-за универсальных констант.

**Ключевые слова:** принцип Парето, правило концентрации, размерный анализ, распределение ресурсов, песчаный конус, эквивалентный радиус

## 1. Введение

Неравенство доходов и богатства наблюдалось во все исторические эпохи. Однако ключевой научный вопрос состоит не в самом факте асимметрии доступа к ресурсам, а в её норме, то есть в воспроизводимых пропорциях концентрации ресурса в системах.

К концу XIX века в социально-статистической литературе закрепилась наглядная метафора «социальной пирамиды»: бедные образуют основание, а богатые — вершину. Эта метафора интуитивно передаёт иерархичность распределения, но сама по себе не объясняет, почему в разных системах возникают близкие или, напротив, различающиеся нормы концентрации.

Поворот к количественному описанию связан с работами Вильфредо Парето [1]. Анализируя статистику доходов и богатства населения в разных странах и в разные исторические периоды, Парето показал, что для верхних хвостов распределения устойчива степенная аппроксимация, а сама проблема неравенства допускает аналитическое описание через ранговую структуру и кумулятивные доли ресурса.

$$S(p) \propto p^{1-1/\alpha}, \quad 0 \leq p \ll 1, \quad (1)$$

Далее кривую кумулятивной концентрации  $S(p)$ , по аналогии со стандартной кривой Лоренца ( $L$ ), будем называть кривой Парето (PC).

Парето также обнаружил, что во многих странах и в разные периоды наблюдаемая форма концентрации близка к одной и той же эмпирической норме  $\alpha = 3/2$ . Подстановка соответствующего значения параметра в (1) приводит к приближению (2), которое в дальнейшем служит удобной точкой отсчёта для сравнения различных моделей концентрации.

$$S(p) \propto p^{1/3}, \quad 0 \leq p \ll 1, \quad (2)$$

Далее будет показано, что приближение (2) естественным образом приводит к правилу 20/80: около 20 % элементов системы аккумулируют приблизительно 80 % совокупного ресурса, тогда как на оставшиеся 80 % элементов приходится около 20 % ресурса.

Правило 20/80 более ста лет используется как эвристика в самых разных областях — от управления качеством [2]–[4], экономическими [5], [6] и географическими [7] системами, до анализа концентрации ресурса в социологии [8] и естественных науках [9]–[11]. Вместе с тем сама устойчивость этой пропорции обычно констатируется эмпирически, тогда как её геометрическая и размерная интерпретация остаётся недостаточно прояснённой.

Объектом исследования работы является концентрация ресурса в системах. Предметом исследования — выбор и обоснование нормативной модели для управления распределением ресурса.

Цель работы — показать, что концентрация ресурса в системе определяется размерностью носителя, и природой рассматриваемого эффекта. Правило 20/80 является частным случаем более общего класса концентрационных закономерностей.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 вводится формальная постановка задачи и фиксируются используемые обозначения. В разделе 3 песчаный конус рассматривается как простая модель, в которой при одном и том же носителе масса, площадь поверхности и потенциальная энергия порождают разные кривые концентрации. В разделе 4 обсуждаются размерностные отображения и их геометрическая интерпретация. Раздел 5 посвящён двухпараметрической модели, раздел 6 — интерпретации нормы упорядоченности, а в разделе 7 обсуждается размерностный смысл правила 20/80. В Разделе 8 приводятся примеры, иллюстрирующие определение параметра нормативной модели по коэффициенту Джини.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим  $n$  элементов системы, упорядоченных по убыванию доли их вклада в суммарный ресурс системы  $(w_r)$ , где  $r$  — ранг элемента. Кривая Парето, по определению, функция, интерполирующая кумулятивную сумму долей ресурса элементов

$$S(p_i) = \sum_{r=1}^i w_i, 0 \leq p_r \leq 1, \quad (3)$$

где  $p_r = \frac{r}{n} \in [0,1]$  — доля ранга, то есть доля элементов, отсчитанная от наиболее обеспеченных к наименее обеспеченным.

Для сопоставления РС с кривой Лоренца  $(L(p))$ , определяемой по возрастанию ресурса (наименьшие значения располагаются первыми), удобно использовать тождество:  $L(p) = 1 - S(1 - p)$ , позволяющее перейти от ранжирования «сверху вниз» к ранжированию «снизу вверх». Соответственно аксиомы, которым должна удовлетворять РС можно записать в виде:

$$S(0) = 0, \quad S(1) = 1, \quad S'_+(p) \geq 0, \quad S''_+(p) \leq 0, \quad in (0,1). \quad (4)$$

Из аксиом (4) следует, что РС является неубывающей вогнутой  $(S''_+(p) \leq 0)$  кривой концентрации.

Обозначим  $PR = S(0.2)$ . Далее PR будем называть коэффициентом Парето. Данный коэффициент широко используется в прикладных задачах для сравнения концентрации ресурса в системах.

Для достижения цели решаются следующие задачи:

1. выявление зависимости коэффициента Парето от числа степеней свободы параметров, характеризующих состояние системы;
2. анализ условий устойчивого функционирования системы;
3. определение нормы упорядоченности;
4. переход от наблюдаемого неравенства  $\rightarrow$  к параметру модели  $\rightarrow$  к нормативному распределению ресурса;
5. эмпирическая иллюстрация определения параметра нормативной модели по коэффициенту Джини.

### 3. Песчаный конус как модель разных концентраций ресурса

Классической моделью самоорганизующихся систем служит куча однородного песка [12], [13]. В стационарном состоянии она имеет форму прямого кругового конуса высоты  $H$ . Пусть  $p = z/H$  — доля высоты, отсчитываемая от вершины или, эквивалентно, доля ранга в геометрически упорядоченной модели носителя. Обозначим через  $S_M(p)$  накопление массы,  $S_A(p)$  — накопление боковой поверхности усечённого конуса.

Из подобия сечений следует, что радиус на высоте  $z$  пропорционален  $(1 - p)$ , а объём верхнего малого конуса над уровнем  $z$  составляет  $(1 - p)^3$  долю полного объёма. Следовательно, доля объёма, заключённая в нижней доле высоты  $p$ , равна:

$$S_M(p) = V(p)/V_{tot} = 1 - (1 - p)^3. \quad (5)$$

Коэффициент Парето у модели (5)  $PR \approx 0.49$ .

Доля площади боковой поверхности усечённого конуса, заключённого в нижней доле высоты  $p$ , равна:

$$S_A(p) = A(p)/A_{tot} = 1 - (1 - p)^2. \quad (6)$$

У модели (6)  $PR \approx 0.36$ , что заметно меньше, чем у объёмной модели; это отражает более слабую концентрацию ресурса при переходе от объёма к поверхности.

В общем случае соотношения (5) и (6) можно записать в унифицированном виде:

$$S(p; D) = 1 - (1 - p)^D, \quad (7)$$

где параметр  $D$  интерпретируется как размерность (число степеней свободы) величины, характеризующей состояние системы или тип наблюдаемого эффекта.

Известно, что в окрестности нуля степенная функция допускает стандартное асимптотическое приближение.

$$(1 - p)^\alpha = 1 - \alpha p + \frac{\alpha(\alpha - 1)p^2}{2} + O(p^3), \quad p \rightarrow 0. \quad (8)$$

Используя это приближение, получаем, что при  $p \rightarrow 0$  +:

$$S(p; D) \propto p, \quad 0 \leq p \ll 1. \quad (9)$$

Сравнение соотношений (2) и (9) показывает, что модель (7) вблизи нуля имеет существенно более мягкое нарастание, чем эмпирическая кривая концентрации доходов. Таким образом, одного лишь геометрического фактора недостаточно для воспроизведения высокой концентрации, характерной для социально-экономических распределений.

Если в качестве аккумулируемого ресурса рассматривать потенциальную энергию песчинок, то соответствующая кривая накопления становится более выпуклой, поскольку вклад каждого элемента массы дополнительно взвешивается его высотой. Тем самым один и тот же носитель порождает различные законы концентрации в зависимости от природы измеряемой величины.

Таким образом, песчаный конус задаёт аналитически прозрачный пример, в котором закон концентрации определяется не только геометрией носителя, но и природой рассматриваемого эффекта. Для массы, боковой поверхности и потенциальной энергии возникают различные функции накопления, что делает этот пример методологически важным для дальнейшей размерностной интерпретации.

## 4. Эквивалентный радиус: размерностные отображения

### 4.1 Размерность $D$

Размерность ( $D$ ) — это характеристика объекта, которая показывает, сколько параметров нужно, чтобы его описать (нулевая размерность — точка, одномерная — линия, двумерная — площадь, трёхмерная — пространство). Для измерения сложных и раздробленных объектов используют фрактальную размерность  $D \in (1,3)$  [14].

Пусть носитель эффекта обладает мерой  $M$  (площадь, объём, масса), которая масштабируется с характерным линейным размером  $S$  как

$$M \propto S^D. \quad (10)$$

Зная  $D$  линейный размер можно вычислить по формуле

$$S = M^{1/D}. \quad (11)$$

Величина  $S$  имеет прямой физический смысл: это доля линейного масштаба, которой обладал бы подобный объект, если бы он содержал долю меры  $M$ . Такой переход является стандартным для операций «объём  $\rightarrow$  эквивалентный радиус» и, в общем виде, «мера  $\rightarrow$  линейный масштаб».

### 4.2 Эквивалентные шар и круг

Эквивалентный радиус — это радиус воображаемой окружности или сферы, которая имеет ту же характеристику (площадь, объём, длину окружности или физическое свойство), что и рассматриваемый некруглый или несферический объект.

Сопоставим накопленному объёму  $V(p)$  эквивалентный шар, то есть шар того же объёма. Его радиус  $R_{eq}(p)$  (далее эквивалентный радиус шара) определяется равенством  $V(p) = 4\pi/3 R_{eq}^3(p)$ . Нормируя на значение при  $p = 1$ , получаем долю эквивалентного радиуса как функцию ранга:

$$R_{eq}(p)/R_{eq}(1) = [V(p)/V(1)]^{1/3}. \quad (12)$$

Подставляя (5) в (12), получаем явную формулу:

$$S(p; 3, 1/3) = \sqrt[3]{1 - (1 - p)^3}. \quad (13)$$

При  $p = 0.2$  имеем приближённую пропорцию «20/79», практически совпадающую с эвристикой «20/80». Тем самым стандартное правило оказывается естественным следствием трёхмерного объёмного масштабирования.

Аналогично накопленной площади  $A(p)$  можно сопоставить эквивалентный круг той же площади, что и боковая поверхность усечённого конуса. В итоге модель (13) обобщается на случай эквивалентного радиуса круга, а переход от объёма к площади интерпретируется как переход между различными размерностями наблюдаемой величины.

$$S(p; D, 1/D) = \sqrt[D]{1 - (1 - p)^D}. \quad (14)$$

Для  $D = 2$  имеем  $PR = 0.60$ .

Отметим, что модель РС (14) соответствует однопараметрической симметричной модели Burr III [15], что связывает предложенную геометрическую интерпретацию с хорошо известным классом распределений неравенства.

Используя приближение (8), получаем, что при  $p \rightarrow 0+$ :

$$S(p; D) \propto p^{1/D}, \quad 0 \leq p \ll 1, \quad (15)$$

Сравнение с (2) показывает, что при соответствующем выборе параметра обе зависимости совпадают по ведущему члену асимптотики.

Следовательно, различие между моделями состоит не в ранговой структуре как таковой, а в том, как одна и та же ранговая организация отображается в наблюдаемую величину различной размерности. В этом и состоит ключевая идея размерностной интерпретации концентрации.

Отметим, что модель симметричной кривой Лоренца (14) давно известна. Разными способами её получали многие авторы, включая Kakwani [16], Матохин [17], Крянев и соавт. [18], Antoniou et al. [19], Antoniou et al. [20], Henle et al. [21], Грачёв [5] и Sarabia et al. [22].

### 4.3 Тела вращения вместо «социальной пирамиды»

В т. II [1, с. 312–318] Парето критикует образ пирамиды как слишком грубую схему и предлагает заменить её телом вращения, позволяющим геометрически представить непрерывный профиль распределения. Такое представление особенно полезно тогда, когда необходимо связать форму концентрационной кривой с размерностью носителя и типом наблюдаемой величины.

Твёрдые тела вращения радиального профиля РС показаны на рис. 1  $r(p) = 1 - S(p)$ . Их общее прочтение таково: широкое основание соответствует большинству элементов с малыми значениями ресурса, а сужающаяся верхняя часть — сравнительно малому числу элементов, аккумулирующих значительную долю совокупного эффекта.

(а) — базовая «объёмная» концентрация для 3D-носителя ресурса; эта фигура задаёт эталонный профиль для трёхмерного случая.

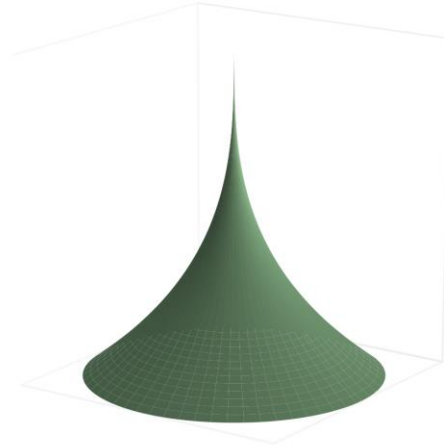
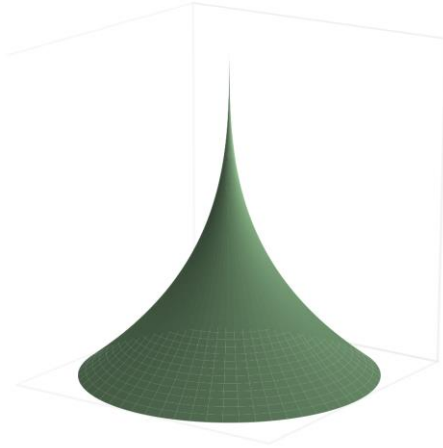
(б) — симметричная двухпараметрическая форма при  $a = b = 3$ ; в этом частном случае профиль совпадает с объёмной кривой, но записан в общей параметрической форме.

(с) — базовая концентрация для 2D-носителя ресурса; эта фигура задаёт эталонный профиль для двумерного случая.

(d) — иллюстрация двухпараметрической формы, в которой параметры управляют кривизной профиля и, следовательно, остротой верхнего хвоста.

$$(a) S_V(p) = 1 - (1 - p)^3$$

$$(b) S(p; a, b) = [1 - (1 - p)^a]^{1/b}, \quad a = b = 3$$



$$(c) S_A(p) = 1 - (1 - p)^2$$

$$(d) S(p; a, b) = [1 - (1 - p)^a]^{1/b}, \quad a = b = 2$$

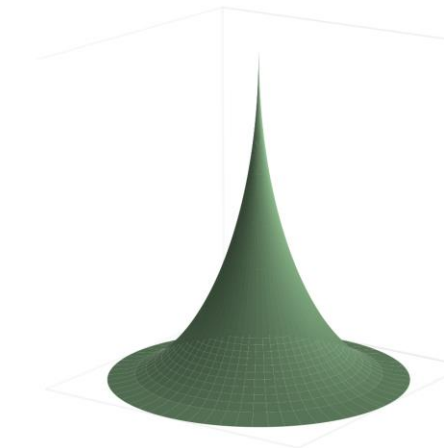
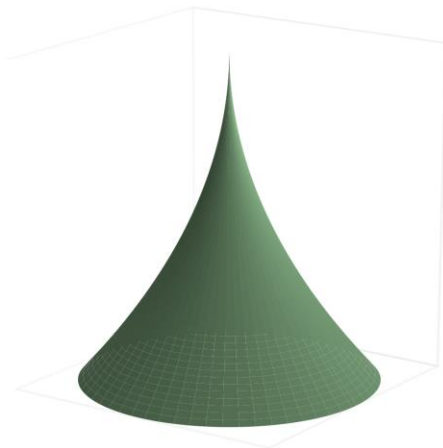


Рисунок 1 — Тела вращения для кривых Парето (вертикальная ось:  $p$ , радиус:  $1 - S(p)$ )

Таким образом, геометрическая визуализация тел вращения согласуется с параметрическим описанием хвоста распределения и делает размерностную интерпретацию кривых концентрации более наглядной.

## 5. Двухпараметрическая РС

Формально однопараметрическая РС (14) является частным случаем двухпараметрической РС [23]:

$$S(p; a, b) = [1 - (1 - p)^a]^{1/b}, \quad 1 \leq a < \infty, \quad 1 \leq b < \infty, \quad (16)$$

где  $a, b$  — эмпирические константы.

Используя приближение (8), получаем, что при  $p \rightarrow 0+$ :

$$S(p; a, \beta) \approx (ap)^\beta, \quad 1 \leq a < \infty, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad (17)$$

где

$$\beta = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\ln S(p; a, b)}{\ln p} = \frac{1}{b}. \quad (18)$$

Далее показатель степени  $\beta$ , по аналогии с физикой фазовых переходов второго рода, будем называть критическим показателем степени.

РС (16) имеет явное выражение для коэффициента Джини

$$G(a, \beta) = 2 \int_0^1 S(p) dp - 1 = \frac{2 \Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \Gamma(\beta + 1)}{\alpha \Gamma\left(\frac{1}{a} + \beta + 1\right)} - 1. \quad (19)$$

Таким образом, поведение  $S(p; a, b)$  при  $p \rightarrow 0$  зависит в первую очередь от  $\beta$ . При  $\beta \rightarrow 1$  распределение ресурса вблизи нуля (критической точки) стремится к равномерному. При  $\beta \rightarrow 0$  — ресурс перемещается к первым по рангу элементам.

Расстояние от  $(p, S(p))$  до эгалитарной линии по вертикали:  $d(p) = S(p) - p$ . Производная  $d'(p) = S'(p) - 1$  равна нулю в точке  $S'(p) = 1$  — это точка  $p_\mu$ . В точке  $(p_\mu, S(p_\mu))$  РС максимально удалена от эгалитарной линии. В экономике эту точку используют для оценки неравенства доходов с помощью индекса Гувера [24]:  $HI = S(p_\mu) - p_\mu$ . Индекс Гувера удовлетворяет неравенству  $0 \leq HI < 1$ . Нижняя граница  $HI$  получается, когда имеет место полное равенство размеров, верхняя — когда система состоит из одного элемента.

Для дискретно ранжированного распределения, теоретическое значение доли ресурса элемента ранга  $w(p_r)$ , можно вычислить по формуле:

$$w(p_r) = S(p_r) - S(p_{r-1}), \quad r \in [1, n], \quad (20)$$

Вес элемента в окрестности  $p_\mu$  примерно равен среднему весу:

$$w(p_\mu) \approx S'(p_\mu) \Delta p = \frac{1}{n} \text{ так как } S'(p_\mu) = 1. \quad (21)$$

Таким образом, абсцисса  $p_\mu$  определяет ранг среднего элемента рангового распределения.

Отличительными особенностями точки  $(p_\mu, S(p_\mu))$  являются:  $S(p_\mu) + p_\mu = 1$ ,  $S'(p_\mu) = 1$ ,  $w(p_\mu) = \frac{1}{n}$ . Элементы, имеющие ресурс больше среднего ( $p \leq p_\mu$ ) называют значимыми элементами системы.

Для численной оценки асимметрии РС, как правило, используют коэффициент асимметрии (РАС) [16]:

$$\text{РАС} = 1 - p_\mu - S(p_\mu), \quad -1 \leq \text{РАС} \leq 1. \quad (22)$$

РАС = 0, когда  $S(p_\mu) + p_\mu = 1$ .

Отметим, что симметричные РС имеют явные выражения для  $p_\mu$ ,  $S_\mu$  и коэффициента Джини:

$$p_\mu(a) = 1 - 0.5^{\frac{1}{a}}, \quad S_\mu(p_\mu; a) = 0.5^{\frac{1}{a}}, \quad G(a) = \frac{\Gamma(1/a)^2}{a \Gamma(2/a)} - 1. \quad (23)$$

Зависимость концентрации ресурса и асимметрии РС от размерности наблюдаемой величины представлена в табл. 1; графическая иллюстрация приведена на рис. 2.

**Таблица 1**

Зависимость PR и PC от размерности наблюдаемой величины

Модель	$\beta$	$p_\mu$	$S_\mu$	PAC	$S(0.2)$	$G$
$S(p; 3) = 1 - (1 - p)^3$	1	0.42	0.81	-0.23	0.49	0.50
$S(p; 2) = 1 - (1 - p)^2$	1	0.50	0.75	-0.25	0.36	0.33
$S(p; 3, 1/3) = \sqrt[3]{1 - (1 - p)^3}$	0.33	0.21	0.79	0.00	0.79	0.77
$S(p; 2, 1/2) = \sqrt{1 - (1 - p)^2}$	0.50	0.29	0.71	0.00	0.60	0.57

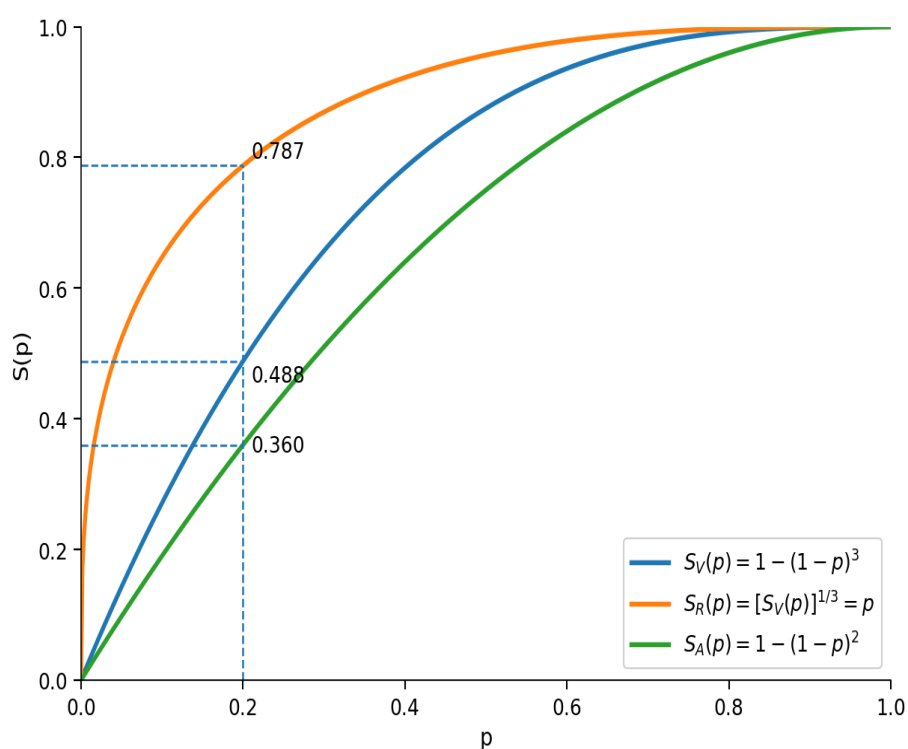


Рисунок 2 — Функции концентрации для объема конуса и размерностных отображений

Из представленных в Табл. 1 данных видно, что многообразие правил концентрации ресурса не случайно: оно отражает одно и то же ранжирование, но разные размерности наблюдаемой величины.

Следует также отметить, что во всех рассмотренных случаях выполняется соотношение, связывающее положение среднего элемента с формой РС. При одинаковой размерности систем концентрация у систем с симметричными РС, как правило, выше, чем у систем с асимметричными РС.

У двух систем в Табл. 1  $\beta = 1$ . В [11] такие системы названы суммативными, поскольку внутренняя связь между элементами у них слабее внешних воздействий. Как следствие, РС этих систем описывает преимущественно аддитивное сложение частных вкладов.

Альтернативой суммативным системам являются интегративные системы, у которых сила взаимодействия элементов внутри системы превосходит внешние воздействия. РС таких систем описывает уже не простое суммирование вкладов, а их кооперативное усиление, что отражается в большей концентрации и иной асимметрии кривой. Именно такие системы могут самоорганизовываться.

## 6. Норма упорядоченности систем

### 6.1 Координата центра масс и коэффициент Джини

Под нормой упорядоченности будем понимать такое распределение ресурса, при котором система способна длительно сохранять функциональную целостность. В рамках предлагаемой модели это соответствует минимуму общей потенциальной энергии, то есть минимуму высоты центра масс распределения вклада элементов в общий эффект. Используя (20), нормированную координату центра масс запишем в виде

$$p_c = \frac{1}{n} \frac{\sum_{r=1}^n r w_r}{\sum_{r=1}^n w_r} = \sum_{r=1}^n p_r [S(p_r) - S(p_{r-1})] \approx \int_0^1 p dS(p) = \int_0^1 p S'(p) dp. \quad (24)$$

Так как  $S(0) = 0$  и  $S(1) = 1$ , интегрирование по частям даёт

$$p_c = 1 - \int_0^1 S(p) dp = \frac{1 - G}{2}. \quad (25)$$

С другой стороны, коэффициент Джини для кривой концентрации  $S(p)$  равен

$$G = 2 \int_0^1 (S(p) - p) dp = 2 \int_0^1 S(p) dp - 1. \quad (26)$$

Следовательно,

$$p_c = \frac{1 - G}{2}. \quad (27)$$

Тем самым коэффициент Джини получает физико-геометрический смысл высоты центра масс распределения вклада элементов. Чем меньше  $p_c$ , тем ниже нормированная потенциальная энергия системы и тем выше её энергетическая устойчивость.

Обозначим через  $p_k$  абсциссу точки пересечения кривой  $S(p)$  с альтернативной диагональю:

$$S(p_k) = 1 - p_k. \quad (28)$$

Для любой вогнутой кривой концентрации выполняется неравенство

$$p_c \leq p_k. \quad (29)$$

Причём равенство  $p_c = p_k$  достигается тогда и только тогда, когда  $S(p)$  совпадает с эталонной ломаной, соединяющей точки  $(0,0)$ ,  $(p_k, 1 - p_k)$  и  $(1,1)$ .

### 6.2 Правило рычага и коэффициент асимметрии

Поставим в соответствие кривой Парето рычаг, точка опоры которого имеет абсциссу  $p_\mu$ , где  $p_\mu$  — координата среднего элемента системы, а  $S_\mu = S(p_\mu)$  — соответствующая доля накопленного эффекта,  $S'(p_\mu) = 1$ . Предположим, что равновесие задаётся правилом рычага:

$$\frac{S_\mu}{1 - S_\mu} = \frac{1 - p_\mu}{p_\mu}. \quad (30)$$

Тогда

$$p_\mu S_\mu = (1 - p_\mu)(1 - S_\mu), \quad (31)$$

откуда следует

$$p_\mu + S_\mu = 1. \quad (32)$$

Следовательно, равновесие в данной интерпретации достигается тогда, когда точка  $(p_\mu, S_\mu)$  лежит на альтернативной диагонали единичного квадрата, то есть

$$PAC = 1 - p_\mu - S_\mu = 0. \quad (33)$$

Поэтому величина  $|PAC|$  может рассматриваться как мера отклонения системы от равновесного состояния: чем больше  $|PAC|$ , тем сильнее нарушен баланс между координатой среднего и соответствующей ей долей накопленного эффекта. В этом смысле правило 20/80 является частным случаем равновесного соотношения.

Следует подчеркнуть, что условие  $PAC = 0$  относится не к симметрии всей кривой Парето, а к положению точки  $(p_\mu, S_\mu)$  относительно альтернативной диагонали. Тем не менее для широкого класса практически значимых кривых малые значения  $|PAC|$  соответствуют более сбалансированным и структурно устойчивым распределениям ресурса.

### 6.3 Вывод о норме упорядоченности

Таким образом, норма упорядоченности системы определяется совместным выполнением двух условий:

$$|PAC| \rightarrow \min, \quad p_c = \frac{1 - G}{2} \rightarrow \min \text{ (или } G \rightarrow \max \text{)}. \quad (34)$$

Первое условие выражает структурное равновесие системы, второе — минимум её потенциальной энергии. Следовательно, более устойчивой следует считать систему, которая одновременно более сбалансирована по показателю PAC и имеет меньшую высоту центра масс  $p_c$ . Иными словами, норма упорядоченности соответствует распределению ресурса, сочетающему структурное равновесие и максимальную концентрацию вклада в пределах рассматриваемого класса кривых.

## 7. Обсуждение: «20/80» как размерностный эффект

Полученные соотношения имеют простой смысл. При фиксированной геометрии и ранжировании распределение кумулятивного объёма задаётся формулой (5), отражающей кубическое масштабирование объёма по линейному размеру. Если же наблюдаемая величина связана с объёмом не напрямую, а через длину, площадь или энергию, то изменяется и соответствующая функция концентрации.

В более общем виде, если некоторая наблюдаемая величина  $Q$  связана с объёмом степенным законом, то нормированная доля  $Q$  в верхней доле рангов выражается степенным отображением от функции объёмной концентрации. Тем самым правило 20/80, как и другие близкие пропорции, оказывается следствием конкретного выбора метрики.

Это позволяет трактовать правило 20/80 не как универсальную константу, а как частный численный порог, возникающий при конкретном выборе метрики и размерностного отображения. В рамках единой структурной схемы естественным образом возникают и другие соотношения — например, 20/62 и 20/79.

Заметим, что ранги и доля ранга безразмерны, поэтому размерность системы проявляется не в ранжировании как таковом, а в том, как ресурс связан с линейным масштабом носителя. Эта идея согласуется с общими соображениями размерностного анализа и с геометрической интерпретацией тела вращения у Парето.

В последние годы *Physica A* опубликовала несколько альтернативных объяснений эмпирического правила 20/80. Tanabe [25] показал, что классическая пропорция естественным образом возникает из гауссовского распределения со стандартным отклонением, вдвое превышающим среднее, с возможностью обобщения на другие соотношения. Rawlings et al. [26] вывели закон Парето из энтропийных соображений, предполагая сохранение суммы логарифмов доходов. Banerjee et al. [27] показали, что индекс Kolkata ( $k$ ) даёт прямое обобщение правила 20/80. Современный контекст таких исследований отражён и в специальном выпуске *Physica A*, посвящённом неравенствам в социально-экономических, биомедицинских и физических системах [28]. В отличие от этих статистических, энтропийных и индексных интерпретаций, настоящая работа предлагает чисто размерное и геометрическое происхождение: пропорции 20/80 (а также связанные с ними 20/79 и 20/62) возникают непосредственно из масштабируемых свойств трёхмерной конической песчаной кучи без необходимости в универсальных константах или специфических предположениях распределения.

## 8. Калибровка симметричной модели по коэффициенту Джини

Поскольку у симметричной однопараметрической модели  $G(a)$  монотонно зависит от параметра концентрации  $a$ , наблюдаемое значение коэффициента Джини  $G_{\text{obs}}$  однозначно определяет параметр модели (14) из уравнения  $G(a) = G_{\text{obs}}$ . Тем самым эмпирическая оценка неравенства может быть непосредственно преобразована в параметр нормативной модели распределения ресурса. Это важно для задач управления системами: зная текущее значение коэффициента Джини, можно восстановить параметр симметричной модели и затем определить соответствующее ему нормативное распределение ресурса между элементами системы.

В качестве эмпирической иллюстрации рассмотрим США. Для доходов целесообразно использовать официальный исторический ряд коэффициента Джини для денежных доходов домохозяйств до уплаты налогов (*pretax household money income*) из публикаций U.S. Census Bureau.

Для богатства следует использовать не «wealth of individuals», а чистое богатство семей США (*family net worth*) в определении Survey of Consumer Finances. Федеральная резервная система прямо указывает, что SCF является обследованием *families*, а единицей анализа выступает *primary economic unit*, трактуемая как *family*. Для чистого богатства семей целесообразно использовать расчет Э. Вулфа по данным SCF.

Следует отметить, что сравниваемые ряды относятся к разным статистическим объектам: в одном случае рассматриваются денежные доходы домохозяйств до налогов, в другом — чистое богатство семей по данным SCF. Поэтому сравнение носит не бухгалтерски-идентификационный, а структурно-аналитический характер.

Исходные данные для вычисления параметра модели и полученные значения параметра модели (14) представлены в Таблице 2.

**Таблица 2**

Калибровка параметра симметричной модели по коэффициенту Джини

Год	Доходы				Богатство			
	$G$	$a$	$p_\mu$	PR	$G$	$a$	$p_\mu$	PR
1989	0.48	1.63	0.35	0.48	0.83	3.62	0.17	0.85
2007	0.46	1.70	0.34	0.51	0.83	3.70	0.17	0.86
2019	0.48	1.75	0.33	0.52	0.87	4.43	0.14	0.90
2024	0.49	1.76	0.33	0.53	0.85	3.89	0.16	0.87

Таблица 2 показывает, что траектория параметра симметричной модели для денежных доходов домохозяйств до налогов сравнительно стабильна и лежит в диапазоне  $a \approx 1.6$ – $1.8$  (коэффициент Парето  $PR \approx 0.48$  –  $0.53$ ) тогда, как для чистого богатства семей (накопленный ресурс) соответствующие значения заметно выше. Это означает, что с точки зрения предлагаемой модели распределение богатства находится в существенно более концентрированном состоянии, чем распределение доходов.

Таким образом, коэффициент Джини может рассматриваться как эмпирический вход в предлагаемую модель: статистически измеряемое неравенство задаёт параметр симметричной кривой Лоренца, а та, в свою очередь, задаёт нормативные доли ресурса для элементов системы. В этом состоит практическая ценность модели для задач анализа, сравнения и управления сложными социально-экономическими системами.

## Заключение

В работе предложена размерностная интерпретация правила 20/80 и родственных ему закономерностей концентрации. Показано, что вид функции концентрации определяется не только порядком ранжирования элементов, но и размерностью носителя, а также физической или экономической природой рассматриваемого эффекта. Песчаный конус служит простым аналитическим примером, в котором масса, площадь поверхности и потенциальная энергия порождают различные законы концентрации при одном и том же носителе. Тем самым правило 20/80 интерпретируется как частный случай более общего класса размерностно обусловленных концентрационных соотношений.

## Благодарности

Автор благодарен Daniel Grachov, чьи комментарии и обсуждения помогли улучшить рукопись.

## Финансирование

Это исследование не получило конкретных грантов от фондов в государственном, коммерческом или некоммерческом секторе.

## Заявление о доступности данных

В этом исследовании не было создано или проанализировано новые данные. Результаты выводятся аналитически, и вся необходимая информация для воспроизведения находок содержится в рукописи.

## Декларация конкурирующих интересов

Автор заявляет, что у него нет известных конкурирующих финансовых интересов или личных отношений, которые могли бы повлиять на работу, описанную в этой статье.

## Литература

- [1] V. Pareto, *Cours d'Économie Politique*, vols. 1 and 2, F. Rouge, Lausanne, 1896–1897.
- [2] J.M. Juran, The Non-Pareto Principle; mea culpa, *Qual. Prog.* 8 (5) (1975) 8–9.
- [3] J.M. Juran, *Juran's Quality Control*, McGraw-Hill, New York, 1951.
- [4] J.M. Juran, Universals in management planning and controlling, *Manage. Rev.* 43 (11) (1954) 748–761.
- [5] Г.А. Грачёв, Моделирование принципа Парето, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 2011, 223 p.
- [6] Г.А. Грачёв, Управление структурой денежных доходов населения на основе принципа Парето, *Terra Econ.* 11 (1) (2013) 57–63.
- [7] G.A. Grachev, Size distribution of states, counties, and cities in the USA: New inequality form information, *Physica A* 592 (2022) 126831. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.126831>.
- [8] G.K. Zipf, *Human Behavior and the Principle of Least Effort*, Addison-Wesley, Cambridge, MA, 1949.
- [9] M.E.J. Newman, Power laws, Pareto distributions and Zipf's law, *Contemp. Phys.* 46 (5) (2005) 323–351.
- [10] С.А. Крашаков, А.Б. Теслюк, Л.Н. Щур, Об универсальности рангового распределения популярности веб серверов, *Вестн. РФФИ* 35 (1) (2004) 46–66.
- [11] Г.А. Грачёв, Принцип Парето: предсказуемые концентрации ресурса в самоорганизующихся системах, Издательство Южного федерального университета, Ростов-на-Дону–Таганрог, 2024, 102 p.
- [12] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Self-organized criticality: An explanation of the  $1/f$  noise, *Phys. Rev. Lett.* 59 (4) (1987) 381–384.
- [13] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Self-organized criticality, *Phys. Rev. A* 38 (1) (1988) 364–374.
- [14] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [15] I.W. Burr, Cumulative frequency functions, *Ann. Math. Stat.* 13 (2) (1942) 215–232.
- [16] N. Kakwani, *Income Inequality and Poverty: Methods of Estimation and Policy Applications*, Oxford University Press, Oxford, 1980.
- [17] В.В. Матохин, *Алгебра управления*, Москва, 1994, 12 p.
- [18] А.В. Крянев, В.В. Матохин, С.Г. Климанов, *Статистические функции распределения ресурсов в экономике: 010–98*, Москва, 1998, 15 p.
- [19] I. Antoniou, V.V. Ivanov, Yu.L. Korolev, A.V. Kryanev, V.V. Matokhin, Z. Suchanecki, Analysis of resources distribution in economics based on entropy, *Physica A* 304 (3) (2002) 525–534. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00575-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00575-1).

- [20] I. Antoniou, V.V. Ivanov, A.V. Kryanev, V.V. Matokhin, M.V. Shapovalov, On the efficient resources distribution in economics based on entropy, *Physica A* 336 (3–4) (2004) 549–562. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.12.051>.
- [21] J.M. Henle, N.J. Horton, S.J. Jakus, Modelling inequality with a single parameter, in: D. Chotikapanich (Ed.), *Modeling Income Distributions and Lorenz Curves*, Springer, New York, 2008, pp. 255–269.
- [22] J.M. Sarabia, V. Jordá, C. Trueba, The Lamé class of Lorenz curves, *Commun. Stat. Theory Methods* 46 (11) (2017) 5311–5326. <https://doi.org/10.1080/03610926.2013.775306>.
- [23] B.C. Arnold, *Majorization and the Lorenz Order: A Brief Introduction*, Springer, New York, 1987.
- [24] E.M. Hoover, The measurement of industrial localization, *Rev. Econ. Stat.* 18 (1936) 162–171.
- [25] K. Tanabe, Pareto’s 80/20 rule and the Gaussian distribution, *Physica A* 510 (2018) 635–640. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.07.023>.
- [26] P.K. Rawlings, D. Reguera, H. Reiss, Entropic basis of the Pareto law, *Physica A* 343 (2004) 643–652. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.06.152>.
- [27] S. Banerjee, B.K. Chakrabarti, M. Mitra, S. Mutuswami, On the Kolkata index as a measure of income inequality, *Physica A* 545 (2020) 123178. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.123178>.
- [28] Special issue: Inequalities in Socio-Economic, Bio-Medical & Physical Systems: a statistical physics perspective, *Physica A*, 2025. <https://www.sciencedirect.com/journal/physica-a-statistical-mechanics-and-its-applications/special-issue/10SX0M4JQ5K> (accessed 11 March 2026).
- [29] Board of Governors of the Federal Reserve System, *Distributional Financial Accounts Overview*, Federal Reserve, 2026. <https://www.federalreserve.gov/releases/efa/efa-distributional-financial-accounts.htm> (accessed 11 March 2026).
- [30] M.M. Batty, J. Bricker, J.S. Briggs, E. Holmquist, S. McIntosh, K.B. Moore, E.R. Nielsen, S. Reber, M. Shatto, K. Sommer, T. Sweeney, A.H. Volz, *Introducing the Distributional Financial Accounts of the United States*, Finance and Economics Discussion Series 2019-017 (2019). <https://doi.org/10.17016/FEDS.2019.017>.
- [31] J. Bricker, S. Goodman, K.B. Moore, A.H. Volz, *Wealth and Income Concentration in the SCF: 1989–2019*, FEDS Notes (2020). <https://doi.org/10.17016/2380-7172.2795>.
- [32] M. Kollar, Z. Scherer, *Income in the United States: 2024*, Current Population Reports P60-286, U.S. Census Bureau, Washington, DC, 2025. <https://www.census.gov/library/publications/2025/demo/p60-286.html> (accessed 11 March 2026).