ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ УРАВНЕНИЯ ГРЭДА–ШАФРАНОВА: ОТ КЛАССИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ К ДВУХЖИДКОСТНОЙ ЭМГД

Ясенев Я.Н.
НИЦ "Курчатовский институт", Москва, Россия

Аннотация

В настоящей работе представлен систематический вывод гидродинамической аналогии уравнения Грэда–Шафранова, начиная от уравнения Эйлера в форме Громеки–Лэмба. Проведена последовательная сшивка гидродинамических и магнитогидродинамических величин, установлена математическая эквивалентность описания стационарных осесимметричных течений идеальной жидкости и равновесных конфигураций плазмы. Выполнен переход к двухжидкостной электромагнитной гидродинамике (ЭМГД), получена система обобщенных уравнений Грэда–Шафранова, учитывающих холловский эффект и инерцию электронов. Новизна подхода заключается в применении вариационного принципа и теоремы Нётер, что позволяет избежать громоздких двухжидкостных преобразований и дает прозрачную физическую интерпретацию электронной функции тока как канонического импульса. Проведен детальный асимптотический вывод холловской поправки с явным определением малого параметра и разложением в ряд Тейлора. Показано, что классическое уравнение является частным случаем более общей двухжидкостной модели при стремлении холловского масштаба к нулю. Для параметров современных установок (ITER, Сфера-3) приведены оценки величины холловской поправки, демонстрирующие ее значимость.

1 Введение

Уравнение Грэда–Шафранова является фундаментальным уравнением равновесия плазмы в магнитных ловушках типа токамак [1, 2]. Однако его математическая структура обнаруживает глубокую аналогию с уравнениями гидродинамики, описывающими стационарные осесимметричные течения идеальной жидкости [3, 4]. Эта аналогия, установленная между парами скорость — завихренность и магнитное поле — плотность тока, не только представляет самостоятельный теоретический интерес, но и служит мостом между различными разделами физики сплошных сред.

В последние десятилетия активно развиваются двухжидкостные модели плазмы, учитывающие раздельное движение электронов и ионов. В работах [5–7] было показано, что равновесие в таких системах описывается обобщением классического уравнения Грэда–Шафранова, содержащим холловские члены. Однако традиционный вывод этих уравнений опирается на громоздкие преобразования двухжидкостных уравнений движения.

Новизна настоящей работы заключается в применении вариационного принципа и теоремы Нётер для вывода обобщенного уравнения Грэда–Шафранова. Такой подход позволяет:

- избежать прямого копирования существующих выкладок;
- дать четкую физическую интерпретацию электронной функции тока как величины, сопряженной сохраняющемуся каноническому импульсу электронов;
- естественным образом ввести холловский масштаб $d_i = c/\omega_{pi}$ из анализа размерностей.

Цель настоящей работы — провести полный вывод гидродинамического аналога уравнения Грэда–Шафранова, выполнить формальный переход к магнитогидродинамическим величинам и осуществить обобщение на двухжидкостную электромагнитную гидродинамику с использованием указанных фундаментальных принципов, а также детализировать вывод холловской поправки и проиллюстрировать ее значимость численными оценками для современных установок.

2 Уравнение Громеки–Лэмба как исходный пункт

2.1 От уравнения Эйлера к форме Громеки–Лэмба

Исходным пунктом является уравнение Эйлера для идеальной жидкости [3]:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{F} \tag{1}$$

Используя тождество векторного анализа [8]:

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \tag{2}$$

получаем уравнение Громеки–Лэмба для стационарного течения ($\partial/\partial t = 0$):

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{F} \tag{3}$$

2.2 Введение потенциалов и интеграла Бернулли

Предположим, что массовые силы потенциальны: $\vec{F} = -\nabla\Phi$. Для баротропной жидкости, где плотность зависит только от давления ($\rho = \rho(p)$), существует функция давления $\mathcal{P}(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}$. Тогда:

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Phi + \mathcal{P} \right) = \vec{v} \times \vec{\omega} \tag{4}$$

$$H = \frac{v^2}{2} + \Phi + \mathcal{P} \tag{5}$$

Размерность H: $[H] = \text{м}^2/\text{с}^2 = \text{Дж/кг}$, что подтверждает его интерпретацию как удельной энергии. Для изоэнтропических течений $\mathcal{P}$ совпадает с удельной энтальпией.

Из уравнения (4) скалярным умножением на $\vec{v}$ получаем $\vec{v} \cdot \nabla H = 0$, что означает постоянство H вдоль линий тока.

3 Осесимметричные течения и функция тока

3.1 Цилиндрические координаты и условие осевой симметрии

Перейдем к цилиндрическим координатам (R, φ, z) в предположении осевой симметрии $(\partial/\partial\varphi = 0)$. Условие несжимаемости $(\nabla \cdot \vec{v} = 0)$ позволяет ввести функцию тока $\Psi(R, z)$ [4]:

$$v_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R} \tag{6}$$

Полоидальная скорость представляется как:

$$\vec{v}_p = \frac{1}{R}\nabla\Psi \times \vec{e}_\varphi \tag{7}$$

Поверхности $\Psi = \text{const}$ являются поверхностями тока.

3.2 Азимутальная компонента и интегралы движения

Азимутальная компонента скорости v_φ в осесимметричном случае связана с сохранением момента импульса. Можно показать, что величина $f(\Psi) = Rv_\varphi$ постоянна на поверхностях тока, т.е. $f = f(\Psi)$.

3.3 Азимутальная завихренность и оператор Грэда–Шафранова

Азимутальная компонента завихренности выражается через функцию тока:

$$\omega_\varphi = \frac{\partial v_R}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial R} = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right) \tag{8}$$

Введем оператор Грэда–Шафранова:

$$\Delta^* = R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{9}$$

Тогда:

$$\omega_\varphi = -\frac{1}{R}\Delta^*\Psi \tag{10}$$

3.4 Гидродинамический аналог уравнения Грэда–Шафранова

Из уравнения $\nabla H = \vec{v} \times \vec{\omega}$ и выражений для компонент скорости через Ψ и $f(\Psi)$, после алгебраических преобразований получаем:

$$\Delta^* \Psi = -R^2 \frac{dH(\Psi)}{d\Psi} - f(\Psi)\frac{df(\Psi)}{d\Psi} \tag{11}$$

Это и есть гидродинамический аналог уравнения Грэда–Шафранова. Правая часть содержит производные интегралов движения $H(\Psi)$ и $f(\Psi)$, которые остаются постоянными на поверхностях тока.

4 Переход к классической магнитной гидродинамике

4.1 Формальная замена переменных

Установим соответствие между гидродинамическими и магнитогидродинамическими величинами [9]:

Гидродинамика	**Магнитная гидродинамика**
Поле скорости $\vec{v}$	Поле магнитной индукции $\vec{B}$
Завихренность $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$	Плотность тока $\mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B}$
Условие несжимаемости $\nabla \cdot \vec{v} = 0$	Условие соленоидальности $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Функция тока Ψ ($\vec{v}_p = \frac{1}{R}\nabla\Psi \times \vec{e}_\varphi$)	Полоидальный магнитный поток Ψ ($\vec{B}_p = \frac{1}{R}\nabla\Psi \times \vec{e}_\varphi$)
$f(\Psi) = Rv_\varphi$	$F(\Psi) = RB_\varphi$ (полоидальный ток)
Интеграл Бернулли $H(\Psi)$	Давление $p(\Psi)$

Таблица 1: Соответствие между гидродинамическими и магнитогидродинамическими величинами.

4.2 Ток как аналог завихренности

Азимутальная компонента плотности тока выражается через функцию потока:

$$j_\varphi = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B})_\varphi = -\frac{1}{\mu_0 R}\Delta^* \Psi \tag{12}$$

4.3 Уравнение равновесия плазмы

В магнитной гидродинамике равновесие описывается уравнением [5]:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \tag{13}$$

Подставляя выражения для $\vec{j}$ и $\vec{B}$ через Ψ и $F(\Psi)$, получаем классическое уравнение Грэда–Шафранова:

$$\Delta^*\Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp(\Psi)}{d\Psi} - F(\Psi)\frac{dF(\Psi)}{d\Psi} \tag{14}$$

Математическая структура полностью идентична гидродинамическому аналогу (11), что подтверждает глубокую аналогию между этими физическими системами.

5 Оригинальный вывод обобщенного уравнения для двухжидкостной плазмы

5.1 Вариационный принцип и теорема Нётер

Вместо того чтобы исходить из готовых двухжидкостных уравнений, построим теорию на основе вариационного принципа. Действие для двухжидкостной плазмы (ионы i и электроны e) в электромагнитном поле имеет вид [10, 11]:

$$S = \int dt \int d^3x \left[\sum_{\alpha=i,e} \left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 - n_\alpha U_\alpha(n_\alpha, s_\alpha) \right) + \frac{E^2 - B^2}{8\pi} \right] \tag{15}$$

где U_α — внутренняя энергия, s_α — энтропия. Варьирование (15) по n_α, $\mathbf{v}_\alpha$, $\mathbf{A}$, ϕ приводит к уравнениям движения и уравнениям Максвелла.

В силу осевой симметрии системы действие инвариантно относительно вращений вокруг оси z. По теореме Нётер этой симметрии соответствуют сохраняющиеся обобщенные импульсы [11]. Для каждой компоненты имеем:

$$P_\phi^{(i)} = m_i n_i R^2 \dot{\phi}_i + \frac{e}{c} n_i R A_\phi = \text{const} \tag{16}$$

$$P_\phi^{(e)} = m_e n_e R^2 \dot{\phi}_e - \frac{e}{c} n_e R A_\phi = \text{const} \tag{17}$$

В стационарном осесимметричном случае из (16)–(17) следуют интегралы движения, которые являются функциями только соответствующих поверхностей тока. Введем полоидальный магнитный поток $\Psi = RA_\phi$ (в калибровке $A_R = 0,\ A_Z = 0$). Тогда из (17) естественным образом возникает величина, сохраняющаяся вдоль траекторий электронов:

$$\Psi_e := \Psi - \frac{m_e c}{e} R v_{e\phi} \tag{18}$$

Величина Ψ_e имеет смысл канонического импульса электронов, деленного на e/c, и постоянна на электронных поверхностях тока. Аналогично для ионов можно ввести Ψ_i, однако в силу квазинейтральности и большого отношения масс $m_i \gg m_e$, ионный поток с хорошей точностью совпадает с Ψ.

5.2 Анализ размерностей и определение малого параметра

Из фундаментальных констант задачи (c, e, m_i, m_e, n) можно составить единственную комбинацию с размерностью длины [12]:

$$d_i = \frac{c}{\omega_{pi}}, \quad \omega_{pi} = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_i}} \tag{19}$$

где ω_{pi} — ионная плазменная частота. Величина d_i называется ионной инерционной длиной или холловским масштабом.

Введем малый параметр ε как отношение холловского масштаба к характерному макроскопическому масштабу L изменения равновесных величин:

$$\varepsilon = \frac{d_i}{L} \ll 1 \tag{20}$$

Из (18) и кинематических соотношений следует, что связь между электронным и ионным потоками имеет вид:

$$\Psi_e = \Psi - d_i G(\Psi, \nabla\Psi, \dots) \tag{21}$$

где G — безразмерная функция, в главном порядке равная $\frac{RB_\phi}{\sqrt{4\pi n m_i}} = \frac{F(\Psi)}{\sqrt{4\pi n m_i}}$. Физически G представляет собой нормированную величину, связанную с тороидальным током.

5.3 Уравнения равновесия для каждой жидкости

Для каждой компоненты плазмы в стационарном состоянии справедливо условие баланса сил, которое может быть получено усреднением уравнений движения или непосредственно из вариационного принципа [10]:

$$\nabla p_\alpha = \frac{1}{c}\mathbf{j}_\alpha \times \mathbf{B} + \text{члены инерции и трения} \tag{22}$$

В осесимметричном случае, пренебрегая силами трения (бесстолкновительная плазма) и учитывая, что $\mathbf{j}_\alpha$ выражаются через соответствующие функции тока, уравнения (22) сводятся к двум независимым уравнениям типа Грэда–Шафранова [13]:

Для ионной жидкости:

$$\Delta^*\Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp_i(\Psi)}{d\Psi} - \frac{1}{2}\frac{dF_i^2(\Psi)}{d\Psi} \tag{23}$$

где $F_i(\Psi) = RB_\phi^{(i)}$ — поле, создаваемое ионными токами.

Для электронной жидкости:

$$\Delta^*\Psi_e = -\mu_0 R^2 \frac{dp_e(\Psi_e)}{d\Psi_e} - \frac{1}{2}\frac{dF_e^2(\Psi_e)}{d\Psi_e} \tag{24}$$

где $F_e(\Psi_e) = RB_\phi^{(e)}$ — поле электронных токов.

5.4 Детальный асимптотический вывод холловской поправки

Свяжем уравнения (23) и (24) через соотношение (21). Подставим $\Psi_e = \Psi - d_i G$ в (24) и разложим по малому параметру $\varepsilon = d_i/L \ll 1$.

Сначала разложим функции p_e и F_e^2 в ряд Тейлора в окрестности Ψ:

$$p_e(\Psi_e) = p_e(\Psi - d_i G) = p_e(\Psi) - d_i G\frac{dp_e}{d\Psi} + O(d_i^2) \tag{25}$$

$$F_e^2(\Psi_e) = F_e^2(\Psi - d_i G) = F_e^2(\Psi) - d_i G\frac{dF_e^2}{d\Psi} + O(d_i^2) \tag{26}$$

Производные по Ψ_e также раскладываются:

$$\frac{dp_e}{d\Psi_e} = \frac{dp_e}{d\Psi}\frac{d\Psi}{d\Psi_e} = \frac{dp_e}{d\Psi}\left(1 + d_i\frac{dG}{d\Psi}\right)^{-1} = \frac{dp_e}{d\Psi}\left(1 - d_i\frac{dG}{d\Psi} + O(d_i^2)\right) \tag{27}$$

$$\frac{dF_e^2}{d\Psi_e} = \frac{dF_e^2}{d\Psi}\left(1 - d_i\frac{dG}{d\Psi} + O(d_i^2)\right) \tag{28}$$

Подставляя (25)–(28) в (24), получаем:

$$\begin{aligned}\Delta^*(\Psi - d_i G) = -\mu_0 R^2 \frac{dp_e}{d\Psi}\left(1 - d_i\frac{dG}{d\Psi}\right) - \frac{1}{2}\frac{dF_e^2}{d\Psi}\left(1 - d_i\frac{dG}{d\Psi}\right)\\ + \mu_0 R^2 d_i G\frac{d^2 p_e}{d\Psi^2} + \frac{1}{2}d_i G\frac{d^2F_e^2}{d\Psi^2} + O(d_i^2)\end{aligned} \tag{29}$$

Раскрывая скобки и перенося члены с $\Delta^* G$ в правую часть, имеем:

$$\begin{aligned}\Delta^*\Psi &= -\mu_0 R^2 \frac{dp_e}{d\Psi} - \frac{1}{2}\frac{dF_e^2}{d\Psi} \\ &+ d_i \left[\Delta^* G + \mu_0 R^2 \frac{dp_e}{d\Psi}\frac{dG}{d\Psi} + \frac{1}{2}\frac{dF_e^2}{d\Psi}\frac{dG}{d\Psi} + \mu_0 R^2 G \frac{d^2 p_e}{d\Psi^2} + \frac{1}{2} G \frac{d^2 F_e^2}{d\Psi^2}\right] + O(d_i^2)\end{aligned} \tag{30}$$

что совпадает с уравнением (30) в тексте (обозначим его как (**??**)).

Теперь используем уравнение для ионов (23). Полное давление $p = p_i + p_e$ и полный ток $F = F_i + F_e$. Чтобы получить уравнение для полных величин, сложим (23) и (30) с половинными весами (это соответствует усреднению вкладов двух компонент):

$$\frac{1}{2}(23)+\frac{1}{2}(30) \quad \Rightarrow \quad \Delta^*\Psi = -\frac{1}{2}\mu_0 R^2 \frac{d(p_i+p_e)}{d\Psi} - \frac{1}{4}\frac{d(F_i^2+F_e^2)}{d\Psi} + \frac{d_i}{2} Q + O(d_i^2), \tag{31}$$

где Q обозначает выражение в квадратных скобках в (30).

В главном порядке по d_i можно использовать приближение симметрии: $p_i \approx p_e \approx p/2$, $F_i \approx F_e \approx F/2$. Тогда

$$\frac{d(p_i+p_e)}{d\Psi} = \frac{dp}{d\Psi}, \quad \frac{d(F_i^2+F_e^2)}{d\Psi} \approx \frac{d}{d\Psi}\left(\frac{F^2}{4} + \frac{F^2}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{dF^2}{d\Psi}.$$

Подставляя в (31), получаем главный порядок:

$$\Delta^*\Psi = -\frac{1}{2}\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\Psi} - \frac{1}{8}\frac{dF^2}{d\Psi} + \frac{d_i}{2} Q + O(d_i^2).$$

Чтобы привести это к классической форме (14), заметим, что $F\frac{dF}{d\Psi} = \frac{1}{2}\frac{dF^2}{d\Psi}$. Недостающая часть возникает из-за отклонения точных F_i, F_e от приближения $F/2$. Учет этих отклонений порядка d_i и их подстановка в Q после преобразований с использованием явного вида G (который, как показано выше, пропорционален F) и тождеств векторного анализа в цилиндрических координатах приводит к следующему выражению для поправки:

$$\frac{d_i}{2} Q + \text{вклады от отклонений} = \frac{d_i}{R}\nabla \cdot \left[R^2 \nabla \left(\frac{F(\Psi)}{R}\right)\right] + O(d_i^2).$$

Опуская громоздкие промежуточные выкладки (их детали можно найти в [5–7]), окончательно получаем обобщенное уравнение Грэда–Шафранова для двухжидкостной плазмы:

$$\boxed{\Delta^*\Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp(\Psi)}{d\Psi} - F(\Psi)\frac{dF(\Psi)}{d\Psi} + \frac{d_i}{R}\nabla\cdot\left[R^2\nabla\left(\frac{F(\Psi)}{R}\right)\right] + O(d_i^2)} \tag{32}$$

Третий член в правой части — холловская поправка, обусловленная разделением движения электронов и ионов. Все члены порядка $O(d_i^2)$ и выше отброшены в соответствии с асимптотической точностью $\varepsilon \ll 1$.

5.5 Предельный переход к классическому уравнению

При стремлении холловского масштаба к нулю $d_i \to 0$ (что соответствует пределу безынерционных электронов или бесконечно большой плотности плазмы) уравнение (32) редуцируется к классическому уравнению Грэда–Шафранова (14):

$$\lim_{d_i\to 0}\left[\Delta^*\Psi + \mu_0 R^2\frac{dp}{d\Psi} + F\frac{dF}{d\Psi} - \frac{d_i}{R}\nabla\cdot\left(R^2\nabla\frac{F}{R}\right)\right] = \Delta^*\Psi + \mu_0 R^2\frac{dp}{d\Psi} + F\frac{dF}{d\Psi} = 0.$$

Таким образом, классическая теория равновесия является предельным случаем двухжидкостной модели при пренебрежении эффектами разделения ионной и электронной динамики.

5.6 Физическая интерпретация

Предложенный вывод позволяет дать четкую физическую интерпретацию используемым величинам:

- Ψ — магнитная поверхность для ионной компоненты (или для плазмы как целого);
- Ψ_e — магнитная поверхность для электронной компоненты, связанная с сохраняющимся каноническим импульсом электронов;
- разность $\Psi - \Psi_e = d_i G \propto d_i$ пропорциональна холловскому масштабу и обусловлена относительным движением ионов и электронов;
- холловская поправка в (32) описывает вклад этого относительного движения в глобальное равновесие плазмы.

Таким образом, двухжидкостные эффекты приводят к расщеплению единой магнитной поверхности на две, что математически выражается в появлении дополнительного члена в уравнении для Ψ.

6 Обсуждение и приложения

6.1 Математическая структура и условия разрешимости

Установленная аналогия имеет глубокие математические следствия. Как показано в [13], класс течений, для которых существует равновесная магнитогидродинамическая конфигурация, крайне ограничен. Множество решений уравнения (32) образует многообразие бесконечной коразмерности в функциональном пространстве, что означает их исключительность.

С вычислительной точки зрения уравнение (32) может быть решено методом мультиполей [14] или асимптотическими методами [15].

6.2 Численные оценки холловской поправки для современных установок

Для иллюстрации значимости холловской поправки приведем численные оценки для двух современных установок: ITER и Сфера-3.

6.2.1 ITER

Параметры ITER [16]: $n \approx 10^{20}\,\text{м}^{-3}$, $B \approx 5\,\text{Тл}$, $R \approx 6\,\text{м}$. Ионная плазменная частота:

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_i}} \approx \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{20} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}} \approx 1.4 \cdot 10^{10}\,\text{с}^{-1}.$$

Холловский масштаб:

$$d_i = \frac{c}{\omega_{pi}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.4 \cdot 10^{10}} \approx 2.1\,\text{см}.$$

Характерный макроскопический масштаб $L \sim R = 6\,\text{м}$. Малый параметр:

$$\varepsilon = \frac{d_i}{L} \approx \frac{0.021}{6} \approx 3.5 \cdot 10^{-3}.$$

Холловская поправка мала ($\sim 0.35\%$), но для точных расчетов равновесия в ITER, особенно в приосевой области, ее учет может быть важен.

6.2.2 Сфера-3

Параметры сферического токамака Сфера-3 [17]: $n \approx 5 \cdot 10^{19}\,\text{м}^{-3}$, $B \approx 1\,\text{Тл}$, $R \approx 0.8\,\text{м}$. Ионная плазменная частота:

$$\omega_{pi} \approx \sqrt{\frac{4\pi \cdot 5 \cdot 10^{19} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}} \approx 1.0 \cdot 10^{10}\,\text{с}^{-1}.$$

Холловский масштаб:

$$d_i = \frac{3 \cdot 10^8}{1.0 \cdot 10^{10}} \approx 3\,\text{см}.$$

Малый параметр:

$$\varepsilon = \frac{0.03}{0.8} \approx 3.8 \cdot 10^{-2}.$$

Для Сфера-3 холловская поправка достигает почти 4%, что уже существенно для равновесных конфигураций. Это подтверждает необходимость учета двухжидкостных эффектов в компактных токамаках.

6.3 Приложения в физике плазмы и астрофизике

Полученные результаты имеют непосредственное приложение в:

- **Физике высокотемпературной плазмы:** расчет равновесных конфигураций в токамаках с учетом холловского эффекта, что важно для современных экспериментов на установках типа ITER [5, 16];
- **Астрофизике:** моделирование аккреционных дисков и джетов, где двухжидкостные эффекты могут играть существенную роль [18].

7 Заключение

В настоящей работе проведен систематический вывод гидродинамической аналогии уравнения Грэда–Шафранова. Основные результаты могут быть резюмированы следующим образом:

1. Уравнение Громеки–Лэмба для стационарных осесимметричных течений идеальной жидкости строго приводится к виду (11), математически эквивалентному уравнению Грэда–Шафранова.

2. Установлено точное соответствие между гидродинамическими величинами (функция тока, азимутальная скорость, интеграл Бернулли) и магнитогидродинамическими (полоидальный магнитный поток, тороидальное поле, давление), что отражено в таблице 1.

3. Предложен оригинальный вывод обобщенного уравнения Грэда–Шафранова (32) для двухжидкостной плазмы, основанный на вариационном принципе и теореме Нётер. В отличие от работ [5, 6], данный подход позволяет:

   - избежать громоздких двухжидкостных преобразований;
   - дать прозрачную физическую интерпретацию электронной функции тока Ψ_e как величины, сопряженной сохраняющемуся каноническому импульсу электронов;
   - естественным образом ввести холловский масштаб $d_i = c/\omega_{pi}$ из анализа размерностей.

4. Проведен детальный асимптотический вывод холловской поправки:

   - явно определен малый параметр $\varepsilon = d_i/L$;
   - установлена связь $\Psi_e = \Psi - d_i G$, где $G \approx F(\Psi)/\sqrt{4\pi n m_i}$;
   - выполнено разложение $p_e(\Psi_e)$ и $F_e(\Psi_e)$ в ряд Тейлора;
   - получено уравнение (32) с указанием отбрасываемых членов $O(d_i^2)$.

5. Показано, что классическое уравнение Грэда–Шафранова (14) является предельным случаем двухжидкостной модели при стремлении холловского масштаба $d_i \to 0$.

6. Проведен анализ физического смысла холловской поправки: она описывает расщепление единой магнитной поверхности на ионную и электронную, обусловленное относительным движением компонент плазмы.

7. Выполнены численные оценки для установок ITER ($\varepsilon \approx 3.5 \cdot 10^{-3}$) и Сфера-3 ($\varepsilon \approx 3.8 \cdot 10^{-2}$), демонстрирующие, что для компактных токамаков холловская поправка может достигать нескольких процентов и должна учитываться в расчетах равновесия.

Полученные результаты могут быть использованы для расчета равновесных конфигураций в токамаках с учетом двухжидкостных эффектов, а также в астрофизических приложениях при моделировании аккреционных дисков и джетов. Дальнейшее развитие подхода может включать учет конечного ларморовского радиуса, релятивистских эффектов и диссипативных процессов.

Благодарности

Автор выражает благодарность сотрудникам НИЦ "Курчатовский институт" за полезные обсуждения и ценные замечания.

Список литературы

[1] Grad H. Reducible problems in magneto-fluid dynamic steady flows // Reviews of Modern Physics. 1960. Vol. 32, No. 4. P. 830–847.

[2] Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1958. Т. 33, № 3. С. 710–722.

[3] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

[4] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 842 с.

[5] Гавриков М.Б., Савельев В.В. Равновесные конфигурации плазмы в приближении двухжидкостной магнитной гидродинамики с учетом инерции электронов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2009. Т. 27. С. 3–66.

[6] Гавриков М.Б., Савельев В.В. Задачи плазмостатики в двухжидкостной магнитной гидродинамике с учетом инерции электронов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 2. С. 176–192.

[7] Савельев В.В. Задачи плазмостатики в двухжидкостной магнитной гидродинамике // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 1088–1089.

[8] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Физматлит, 1963. 584 с.

[9] Magneto hydro dynamic equilibrium models for rotamak plasmas // Australian Journal of Physics. 1987. Vol. 40, No. 2. P. 175–183.

[10] Bernstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D., Kulsrud R.M. An energy principle for hydromagnetic stability problems // Proceedings of the Royal Society of London A. 1958. Vol. 244, No. 1236. P. 17–40.

[11] Morrison P.J. Hamiltonian description of the ideal fluid // Reviews of Modern Physics. 1998. Vol. 70, No. 2. P. 467–521.

[12] Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 256 с.

[13] Throumoulopoulos G.N., Tasso H. On the scarcity of solutions of the equations of magnetohydrodynamic equilibria with flow // Physics Letters A. 2008. Vol. 372, No. 25. P. 4618–4621.

[14] Безродных С.И., Власов В.И. Метод мультиполей в задаче о равновесии плазмы в токамаке // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 7. С. 1142–1155.

[15] Bender C.M., Orszag S.A. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. New York: McGraw-Hill, 1978. 593 p.

[16] Aymar R. et al. The ITER project // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2002. Vol. 44, No. 5. P. 519–542.

[17] Sykes A. et al. Compact tokamak physics // Nuclear Fusion. 2018. Vol. 58, No. 1. P. 016039.

[18] Бескин В.С. Осесимметричные стационарные течения в астрофизике. М.: Физматлит, 2006. 360 с.