УДК 533.9 **Шифр научной специальности ВАК: 1.3.9 – Физика плазмы**

Обобщённая гидродинамическая аналогия для стеллараторной плазмы: от формы Громеки – Лэмба к двухжидкостной ЭМГД с кинетическими поправками

Ясенев Я.Н.
НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия

Аннотация

В работе построена формально точная аналогия между уравнением движения идеальной жидкости в форме Громеки – Лэмба и полной системой уравнений двухжидкостной электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) применительно к равновесию и вращению плазмы в стеллараторе. Учёт инерции электронов и эффекта Холла приводит к модификации вихревого члена, что позволяет ввести обобщённый вихрь $\boldsymbol{\Omega}_i = \nabla \times \boldsymbol{v}_i - (e/m_i)\boldsymbol{B}$, являющийся аналогом обычного вихря скорости. Для описания влияния популяции запертых ионов предложен тензор «запертой вязкости» $\hat{\tau}_{\text{trap}}$, обоснована его форма и приведена оценка коэффициента вязкости из неоклассической теории [3, 6, 8, 10]. Проведён анализ размерностей и введены безразмерные параметры, позволяющие оценить относительную важность различных членов. В предельных случаях модель сводится к известным результатам классической МГД, двухжидкостной ЭМГД и неоклассической теории переноса. Обсуждаются пути численной реализации (коды JOREK, M3D-C1, EMC3-EIRENE) и качественное согласие с экспериментальными наблюдениями на стеллараторах W7-X и LHD [5, 7, 9, 11]. Полученная система уравнений может служить основой для расчёта равновесия и устойчивости плазмы в стеллараторах нового поколения.

Ключевые слова: уравнение Громеки – Лэмба, стелларатор, двухжидкостная ЭМГД, эффект Холла, запертые частицы, тензор вязкости, удержание плазмы.

Список обозначений

$\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_e$	скорости ионов и электронов
$\boldsymbol{B}$	магнитное поле
$\boldsymbol{E}$	электрическое поле
$\boldsymbol{j}$	плотность тока
n_i, n_e	плотности ионов и электронов
p_i, p_e	давления ионов и электронов
$\boldsymbol{R}$	сила трения между компонентами
$\boldsymbol{\Omega}_i, \boldsymbol{\Omega}_e$	обобщённые вихри ионов и электронов
$\hat{\tau}_{\text{trap}}$	тензор «запертой вязкости»
η_{trap}	коэффициент «запертой вязкости»
ϵ_t	доля запертых частиц
ω_b	частота баунс-колебаний
$\tau_{\text{bounce}} = 2\pi/\omega_b$	период баунс-колебаний
$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{B}/B$	единичный вектор вдоль магнитного поля
ν	частота столкновений
α	параметр сравнения завихрённостей
Ha	число Холла
$\mathrm{Re}_{\text{trap}}$	число Рейнольдса для запертой вязкости

1 Введение

Классическая аналогия между уравнением Эйлера для идеальной жидкости и уравнением равновесия плазмы в магнитогидродинамике (МГД) известна давно и основана на формальной замене $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{B}$, $\nabla \times \boldsymbol{v} \to \mu_0 \boldsymbol{j}$ [1]. Однако эта аналогия имеет принципиальные ограничения:

1. **Односкоростное приближение** классической МГД не учитывает разделение движения электронов и ионов, что критически важно для эффекта Холла и генерации тороидального вращения.

2. **Отсутствие кинетических эффектов** — запертые частицы, составляющие в стеллараторе до 50% популяции [2], не описываются в рамках изотропной МГД.

3. **Диссипация** в реальной плазме анизотропна и не сводится к скалярной вязкости Навье–Стокса.

Сравнительные исследования транспорта в стеллараторах и токамаках [2, 3] показывают, что неоклассические эффекты становятся всё более важными при высоких температурах, особенно вклад запертых частиц в перенос тепла и частиц [3, 10]. Роль запертых частиц в удержании и устойчивости плазмы активно изучается в последние годы [5, 8, 11]. Современная численная оптимизация стеллараторных конфигураций направлена на минимизацию резонансного взаимодействия запертых частиц с возмущениями магнитного поля [5, 12].

Цель настоящей работы — построить обобщённую гидродинамическую аналогию, свободную от указанных недостатков. Новизна подхода заключается в совместном использовании формализма Громеки–Лэмба, двухжидкостной электромагнитной гидродинамики

(ЭМГД) и феноменологического тензора, описывающего влияние запертых ионов. Впервые вводится понятие обобщённого вихря для ионной компоненты, объединяющего гидродинамическое вращение и циклотронное вращение в магнитном поле, а также даётся оценка коэффициента «запертой вязкости» из неоклассической теории.

2 Двухжидкостная ЭМГД в форме Громеки–Лэмба

2.1 Исходные уравнения двухжидкостной модели

Запишем систему уравнений двухжидкостной ЭМГД для электронов и ионов с учётом инерции электронов [4]:

$$m_i n_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = e n_i(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}) - \nabla p_i + \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$m_e n_e \frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt} = -e n_e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B}) - \nabla p_e - \boldsymbol{R}. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{R}$ — сила трения между компонентами, связанная с сопротивлением.

2.2 Преобразование к форме Громеки–Лэмба

Применим к конвективной производной в каждом уравнении тождество Громеки–Лэмба:

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}).$$

Для электронной жидкости это даёт:

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v_e^2}{2}\right) - \boldsymbol{v}_e \times (\nabla \times \boldsymbol{v}_e)\right] = \\ = -e n_e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B}) - \nabla p_e - \boldsymbol{R}. \tag{3}$$

Аналогично для ионов.

Обобщённый вихрь. Член $\boldsymbol{v}_e \times (\nabla \times \boldsymbol{v}_e)$ имеет ту же математическую структуру, что и сила Лоренца $\boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B}$. Это позволяет ввести *обобщённый вихревой вектор* для электронов:

$$\boldsymbol{\Omega}_e = \nabla \times \boldsymbol{v}_e + \frac{e}{m_e}\boldsymbol{B}.$$

Тогда уравнение для электронов приобретает компактный вид:

$$m_e n_e \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v_e^2}{2}\right) - \boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{\Omega}_e\right) = -\nabla p_e - \boldsymbol{R} - e n_e \boldsymbol{E}.$$

Аналогично для ионов введём обобщённый вихрь ионной жидкости:

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega}_i = \nabla \times \boldsymbol{v}_i - \frac{e}{m_i}\boldsymbol{B}.} \tag{4}$$

Знак «минус» для ионов связан с противоположным знаком заряда. Именно такая комбинация возникает в уравнении движения естественным образом и позволяет переписать его в форме, полностью аналогичной гидродинамической. В пределе сильного магнитного поля ($|(e/m_i)\boldsymbol{B}| \gg |\nabla \times \boldsymbol{v}_i|$) обобщённый вихрь определяется в основном магнитным полем, что соответствует приближению сильно замагниченной плазмы.

3 Поправки на запертые частицы: тензор «запертой вязкости»

3.1 Обоснование формы тензора

В стеллараторах значительная часть ионов совершает финитные орбиты (баунс-движение), не обходя полностью тороидальный оборот [2, 7]. Эти частицы не участвуют в переносе импульса вдоль тора, но вносят вклад в диссипацию поперечного движения. На макроскопическом уровне их влияние должно быть описано через эффективную вязкость, обладающую следующими свойствами:

- *Анизотропия:* вязкость должна действовать только в направлении, перпендикулярном магнитному полю, так как вдоль поля движение свободное (в пренебрежении столкновениями).
- *Линейность по градиенту скорости:* вязкие напряжения пропорциональны первой пространственной производной скорости.
- *Симметрия:* тензор должен быть симметричным (отсутствие вращательных моментов) и удовлетворять условию $\nabla \cdot \hat{\tau}$ как дивергенция тензора напряжений.

Простейшая форма, удовлетворяющая этим требованиям, — это тензор, построенный из проектора на направление $\boldsymbol{h}$ и девиатора:

$$\hat{\tau}_{\text{trap}} = \eta_{\text{trap}} \left(\boldsymbol{h} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{h}\right) \left(\boldsymbol{hh} - \hat{I}/3\right). \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol{hh} - \hat{I}/3$ — девиаторная часть проектора, обеспечивающая бесследность тензора (что соответствует несжимаемости, если таковая предполагается). Множитель $(\boldsymbol{h} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{h})$ выделяет проекцию градиента скорости на направление поля, что соответствует вкладу запертых частиц, «чувствующих» только изменения скорости вдоль силовой линии. Аналогичные конструкции используются в реологии анизотропных жидкостей (например, жидких кристаллов) [13].

3.2 Оценка коэффициента «запертой вязкости»

Для оценки η_{trap} обратимся к неоклассической теории переноса в стеллараторах [3, 6, 8, 10]. В банановом режиме (когда частота столкновений ν мала по сравнению с частотой баунс-колебаний ω_b) эффективная частота столкновений для запертых частиц повышается: $\nu_{eff} \sim \nu/\epsilon_t$, где ϵ_t — доля запертых частиц. Коэффициент поперечной вязкости в неоклассической теории пропорционален nT/ν_{eff} [6]. Подставляя ν_{eff}, получаем:

$$\eta_{\text{trap}} \sim \frac{n_i T_i}{\nu_{eff}} \sim \frac{n_i T_i}{\nu/\epsilon_t} = \epsilon_t \, n_i T_i \, \frac{1}{\nu}.$$

Время корреляции для запертых частиц определяется обратной эффективной частотой столкновений: $\tau_{corr} \sim 1/\nu_{eff} \sim \epsilon_t/\nu$. Однако в бесстолкновительном пределе основной вклад даёт баунс-период $\tau_{\text{bounce}} = 2\pi/\omega_b$. С учётом этого, а также того, что вязкость должна стремиться к нулю при отсутствии запертых частиц, естественной оценкой является:

$$\boxed{\eta_{\text{trap}} = \epsilon_t \, n_i T_i \, \tau_{\text{bounce}}.} \tag{6}$$

Эта оценка согласуется с результатами детальных неоклассических расчётов для стеллараторов [8, 10]. В режиме плато или Пфирша–Шлютера эта оценка может модифицироваться, но для качественного анализа она приемлема. В пределе $\epsilon_t \to 0$ вязкость исчезает, восстанавливая стандартную двухжидкостную модель. Вклад запертых электронов может быть учтён аналогичным введением тензора $\hat{\tau}^{(e)}_{trap}$ с соответствующими параметрами. Однако, поскольку ионная вязкость обычно доминирует в динамике вращения (из-за большей массы и, соответственно, инерции), в данной работе мы ограничимся ионной компонентой.

3.3 Обобщённое уравнение движения ионов

С учётом $\hat{\tau}_{\text{trap}}$ уравнение для ионной компоненты принимает окончательный вид:

$$m_i n_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v_i^2}{2} \right) - \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{\Omega}_i \right) = -\nabla p_i + e n_i \boldsymbol{E} + \nabla \cdot \hat{\tau}_{\text{trap}} + \boldsymbol{R}. \tag{7}$$

Здесь использовано, что $-\boldsymbol{v}_i \times (\nabla \times \boldsymbol{v}_i) + \frac{e}{m_i} \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{\Omega}_i$.

4 Полная аналогия: от струи к стелларатору

Теперь мы можем построить расширенную таблицу соответствия, включающую физическую интерпретацию.

Гидродинамическая величина (закрученная струя)	**Аналог в двухжидкостной ЭМГД (стелларатор)**	**Физический смысл аналогии**
Поле скорости $\boldsymbol{v}$	Ионная скорость $\boldsymbol{v}_i$	Ионы образуют «жидкую» компоненту, переносящую массу.
Вихрь скорости $\nabla \times \boldsymbol{v}$	Обобщённый вихрь $\boldsymbol{\Omega}_i = \nabla \times \boldsymbol{v}_i - \frac{e}{m_i} \boldsymbol{B}$	Комбинация гидродинамического вращения и циклотронного вращения в магнитном поле.
Центробежная сила $-\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})$	Сила $-\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{\Omega}_i$	Та же математическая структура; в плазме это часть инерциального ускорения.
Вязкость Навье–Стокса	Тензор $\hat{\tau}_{\text{trap}}$	Анизотропная диссипация, вызванная запертыми частицами.
Градиент давления $-\nabla p$	$-\nabla p_i + e n_i \boldsymbol{E} + \boldsymbol{R}$	В плазме к градиенту давления добавляются электромагнитная сила и трение.
Несжимаемость $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$	Квазинейтральность $\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$	Условие замкнутости системы.

Таблица 1: Соответствие между гидродинамическими величинами и величинами двухжидкостной ЭМГД.

Ключевой результат: В уравнении для ионов (7) комбинированный вихревой член в точности соответствует по форме центробежной силе в уравнении Громеки–Лэмба, если заменить обычный вихрь на обобщённый $\boldsymbol{\Omega}_i$.

5 Сравнение с известными подходами и обсуждение новизны

5.1 Что уже известно

Влияние эффекта Холла на равновесие и вращение плазмы в тороидальных ловушках изучалось в [2, 9]. Неоклассическая теория переноса для стеллараторов, учитывающая запертые частицы, развита в [3, 6, 8, 10]. Недавние экспериментальные результаты на W7-X и LHD подтверждают важность эффектов запертых частиц для удержания и устойчивости [5, 7, 11]. Однако ни в одной из этих работ не проводилось прямой аналогии с уравнением Громеки–Лэмба и не вводился тензор «запертой вязкости» в такой форме.

5.2 Элементы научной новизны данной работы

1. **Впервые получено уравнение движения ионов в стеллараторе, полностью аналогичное уравнению Громеки–Лэмба**, с заменой обычного вихря на обобщённый вихрь $\boldsymbol{\Omega}_i$.

2. **Предложен оригинальный тензор** $\hat{\tau}_{\text{trap}}$, параметризующий влияние запертых ионов, с обоснованием его формы из соображений анизотропии и симметрии.

3. **Дана оценка коэффициента вязкости** $\eta_{\text{trap}} = \epsilon_t n_i T_i \tau_{\text{bounce}}$, вытекающая из неоклассической теории [3, 6, 8, 10].

4. **Установлено, что эффект Холла в двухжидкостной модели приводит к появлению дополнительной «магнитной» части в вихре**, что математически эквивалентно изменению эффективной «закрутки» потока.

5. **Введены безразмерные параметры** (число Холла, число Рейнольдса для запертой вязкости), позволяющие оценить относительную важность различных членов.

6 Анализ модели

6.1 Предельные случаи

1. *Предел малой доли запертых частиц ($\epsilon_t \to 0$):* Тензор $\hat{\tau}_{\text{trap}}$ обращается в ноль, и уравнения сводятся к стандартной двухжидкостной ЭМГД с эффектом Холла [4].

2. *Предел холодной плазмы ($T_i \to 0$):* Вязкость $\eta_{\text{trap}} \to 0$, исчезает градиент давления, остаётся только сила Лоренца — уравнение движения холодной плазмы.

3. *Предел сильного магнитного поля ($B \to \infty$):* При фиксированной скорости обобщённый вихрь $\boldsymbol{\Omega}_i \approx -(e/m_i)\boldsymbol{B}$ доминирует, и уравнение принимает вид баланса между силой Лоренца, градиентом давления и вязкостью.

4. *Стационарное равновесие ($\partial/\partial t = 0$, $\boldsymbol{v}_i = 0$):* Уравнение (7) сводится к $\nabla p_i = e n_i \boldsymbol{E} + \nabla \cdot \hat{\tau}_{\text{trap}} + \boldsymbol{R}$, что при пренебрежении трением и вязкостью даёт классическое равновесие $\nabla p_i = e n_i \boldsymbol{E}$.

6.2 Анализ масштабов и безразмерные параметры

Введём следующие безразмерные параметры для оценки относительной важности членов:

- **Число Холла** $\mathrm{Ha} = \dfrac{eB}{m_i}\dfrac{L}{V}$, где L — характерный масштаб длины, V — характерная скорость. Оно показывает отношение магнитной части обобщённого вихря к гидродинамической: $\mathrm{Ha} \sim \dfrac{|(e/m_i)B|}{|\nabla \times \boldsymbol{v}_i|}$.
- **Число Рейнольдса для запертой вязкости** $\mathrm{Re}_{\mathrm{trap}} = \dfrac{m_i n_i V L}{\eta_{\mathrm{trap}}}$. Оно определяет, когда инерционные члены преобладают над вязкостью.
- **Параметр** α $\alpha = \dfrac{|\nabla \times \boldsymbol{v}_i|}{|(e/m_i)\boldsymbol{B}|}$. При $\alpha \ll 1$ доминирует магнитная часть, при $\alpha \gg 1$ — гидродинамическая завихрённость.

Эти параметры позволяют выделять различные режимы течения и упрощать модель в соответствующих пределах.

6.3 Замкнутость модели

Представленная система уравнений не является замкнутой, так как содержит неизвестные $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{R}$. Для замыкания необходимо использовать:

- **Обобщённый закон Ома** (например, из двухжидкостной модели):

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}}{en_e} - \frac{\nabla p_e}{en_e} + \frac{m_e}{e}\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt} + \eta \boldsymbol{j},$$

  где η — удельное сопротивление.
- **Выражение для силы трения**: $\boldsymbol{R} = -m_e n_e \nu(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_i)$, где ν — частота столкновений.
- **Уравнения Максвелла**: $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$, $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ (в нестационарном случае).

В стационарном равновесии часто полагают $\boldsymbol{v}_i \approx 0$, что существенно упрощает задачу.

7 Перспективы численной реализации и экспериментальной проверки

Предложенная модель может быть реализована численно с использованием методов вычислительной гидродинамики (CFD), адаптированных для двухжидкостных течений:

- **Дискретизация:** Метод конечных объёмов или конечных элементов на трёхмерной сетке, адаптированной к магнитной конфигурации стелларатора. Существующие коды, такие как `JOREK`, `M3D-C1` (для МГД и двухжидкостных расширений) и `EMC3-EIRENE` (для краевой плазмы), могут быть модифицированы путём включения предложенного тензора «запертой вязкости» в качестве дополнительного источника в уравнении импульса [14].

- **Учёт тензора вязкости:** Тензор $\hat{\tau}_{\text{trap}}$ требует вычисления проекций градиента скорости, что удобно делать в локальной системе координат, связанной с $\boldsymbol{h}$.
- **Верификация:** На первом этапе — тесты в упрощённой геометрии (цилиндр с винтовым полем) и сравнение с аналитическими решениями для предельных случаев (отсутствие запертых частиц, холодная плазма). Затем — реалистичная геометрия W7-X или LHD.

Экспериментальная проверка: Предложенная зависимость $\eta_{\text{trap}} \sim \epsilon_t T_i \tau_{\text{bounce}}$ качественно согласуется с наблюдениями уменьшения вращения плазмы к краю шнура в стеллараторах [5, 7, 11], где доля запертых частиц ϵ_t возрастает, а вязкость увеличивается. Количественное сравнение потребует совместного измерения профилей скорости, температуры и доли запертых частиц, что является задачей будущих исследований. Недавние работы по созданию международной базы данных по удержанию плазмы в различных установках [9] создают основу для таких сравнений.

8 Заключение

Построена обобщённая гидродинамическая аналогия, связывающая двухжидкостную ЭМГД-модель стеллараторной плазмы с классическим уравнением Громеки–Лэмба. Введены два новых элемента:

1. **Обобщённый вихрь для ионов $\boldsymbol{\Omega}_i = \nabla \times \boldsymbol{v}_i - (e/m_i)\boldsymbol{B}$**, учитывающий эффект Холла. Показано, что эта комбинация возникает естественным образом и упрощает форму уравнения.
2. **Тензор «запертой вязкости»** $\hat{\tau}_{\text{trap}}$ с коэффициентом $\eta_{\text{trap}} = \epsilon_t n_i T_i \tau_{\text{bounce}}$, параметризующий влияние запертых ионов. Форма тензора обоснована требованиями анизотропии и симметрии, а оценка коэффициента следует из неоклассической теории [3, 6, 8, 10].

Проведён анализ размерностей, введены безразмерные параметры, позволяющие оценить относительную важность различных членов. В предельных случаях модель воспроизводит известные результаты классической МГД, двухжидкостной ЭМГД и неоклассической теории. Обсуждены пути численной реализации в существующих кодах (`JOREK`, `M3D-C1`, `EMC3-EIRENE`) и качественное согласие с экспериментальными наблюдениями на стеллараторах W7-X и LHD [5, 7, 9, 11].

Полученная система уравнений открывает возможность применения гидродинамических критериев устойчивости (например, критерия Релея для вращающихся течений) к анализу плазмы в стеллараторах, что будет предметом дальнейших исследований.

Примечание: К статье прилагается экспертное заключение НИЦ «Курчатовский институт» о возможности открытого опубликования № ______ от ___________ 2026 г.

Список литературы

1. Шафранов В.Д. О равновесии плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы. – 1963. – Вып. 2. – С. 92–131.
2. Wagner F., Stroth U. Transport in toroidal devices // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 1993. – Vol. 35, No. 10. – P. 1321–1371. DOI: 10.1088/0741-3335/35/10/002.

3. Maassberg H., Brakel R., Burhenn R. et al. Transport in stellarators // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 1993. – Vol. 35, Suppl. B. – P. B319–B332. DOI: 10.1088/0741-3335/35/SB/026.

4. Гавриков М.Б. Электромагнитная гидродинамика. – М.: Наука, 2018. – 320 с.

5. Dinklage A., Beidler C.D., Helander P. et al. Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator // Nature Physics. – 2018. – Vol. 14. – P. 855–860. DOI: 10.1038/s41567-018-0141-9.

6. Hinton F.L., Hazeltine R.D. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems // Reviews of Modern Physics. – 1976. – Vol. 48, No. 2. – P. 239–308. DOI: 10.1103/RevModPhys.48.2

7. Yamada H., Ohdachi S., Miyazawa J. et al. Recent results from the Large Helical Device // Nuclear Fusion. – 2011. – Vol. 51, No. 9. – P. 094021. DOI: 10.1088/0029-5515/51/9/094021.

8. Beidler C.D., Allmaier K., Isaev M.Yu. et al. Benchmarking of the mono-energetic transport coefficients—results from the International Collaboration on Neoclassical Transport in Stellarators (ICNTS) // Nuclear Fusion. – 2011. – Vol. 51, No. 7. – P. 076001. DOI: 10.1088/0029-5515/51/7/076001.

9. Litaudon X., Bucalossi J., Ekedahl A. et al. Long plasma duration operation analyses with an international multi-machine (tokamaks and stellarators) database // Nuclear Fusion. – 2024. – Vol. 64, No. 1. – P. 015001. DOI: 10.1088/1741-4326/ad0606.

10. Nemov V.V., Kasilov S.V., Kernbichler W., Heyn M.F. Evaluation of $1/\nu$ neoclassical transport in stellarators // Physics of Plasmas. – 1999. – Vol. 6, No. 12. – P. 4622–4632. DOI: 10.1063/1.873267.

11. Proll J.H.E., Helander P., Connor J.W., Plunk G.G. Resilience of quasi-isodynamic stellarators against trapped-particle instabilities // Physical Review Letters. – 2012. – Vol. 108, No. 24. – P. 245002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.245002.

12. Labbate J.A., Paul E., Chambliss A. Minimizing trapped energetic particle resonances in stellarators via equilibrium optimization // Bulletin of the American Physical Society. – 2025. – Vol. 70, No. 1. – Abstract TP13.120.

13. de Gennes P.G., Prost J. The Physics of Liquid Crystals. – Oxford University Press, 1993. – 616 p.

14. Moiseenko V.E., Kovtun Yu.V., Garkusha I.E. Status and prospects in stellarator research at IPP KIPT // Problems of Atomic Science and Technology. Series "Plasma Physics". – 2021. – No. 6. – P. 3–8.

15. Helander P. Theory of plasma confinement in non-quasisymmetric magnetic fields // Reports on Progress in Physics. – 2014. – Vol. 77, No. 8. – P. 087001. DOI: 10.1088/0034-4885/77/8/087001.

Приложение. Эволюционное уравнение для обобщённого вихря

Рассмотрим идеальный случай ($\hat{\tau}_{\text{trap}} = 0$, $\boldsymbol{R} = 0$) и пренебрежём нестационарностью $\boldsymbol{E}$ (электростатическое приближение). Из уравнения движения ионов (1):

$$m_i n_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = e n_i(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}) - \nabla p_i.$$

Возьмём ротор от обеих частей, используя

$$\nabla \times (\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_i - (\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{v}_i(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i).$$

С учётом $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ и, для простоты, несжимаемости ($\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i = 0$), после преобразований получим:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega}_i = (\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_i + \\ + \frac{1}{m_i n_i}\nabla n_i \times \nabla p_i + \frac{e}{m_i}(\nabla \times \boldsymbol{E}). \quad (8)$$

Второй член справа — баротропный источник, третий связан с вихрем электрического поля. В идеальной МГД ($\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$) и при баротропности ($\nabla n_i \times \nabla p_i = 0$) уравнение упрощается до

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}_i}{dt} = (\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_i,$$

что полностью аналогично уравнению Гельмгольца для обычного вихря в гидродинамике. Таким образом, в идеальном случае обобщённый вихрь $\boldsymbol{\Omega}_i$ «вморожен» в ионную жидкость и сохраняет свою интенсивность вдоль траекторий. Это подтверждает, что $\boldsymbol{\Omega}_i$ является естественным обобщением завихрённости для двухжидкостной плазмы.