

Размерная интерпретация правила 20/80 в задачах распределения ресурсов

Г.А. Грачёв

Аннотация

В работе предлагается размерный подход к интерпретации эмпирических закономерностей концентрации ресурса в системах. В качестве основной характеристики используется функция концентрации, задающая долю ресурса, принадлежащую верхней доле элементов, упорядоченных по убыванию вклада. Для аналитического исследования привлекается простая геометрическая модель — коническая куча песка, в которой при одной и той же структуре носителя могут рассматриваться различные наблюдаемые величины: объём (масса), площадь поверхности, эквивалентный линейный масштаб и потенциальная энергия. Показано, что соответствующие функции концентрации не совпадают и определяются не только порядком ранжирования элементов, но и размерностью рассматриваемого эффекта. На этой основе правило 20/80 интерпретируется не как универсальная числовая константа, а как частный случай более общего класса концентрационных соотношений, возникающих при конкретном способе отображения ресурса на линейный масштаб носителя. Дополнительно обсуждается связь симметричных параметрических моделей с коэффициентом Джини и возможность их использования для нормативного описания распределений дохода и богатства.

Ключевые слова: принцип Парето, форма концентрации, кривая Парето/Лоренца, размерный анализ, песчаный конус, эквивалентный радиус

1. Введение

Неравномерное распределение ресурса наблюдается в системах самой различной природы — от доходов и богатства до потоков энергии, массы и интенсивности взаимодействий. Однако для анализа таких систем существенен не только сам факт неравенства, но и форма концентрации: какая доля совокупного ресурса приходится на верхнюю долю элементов после их ранжирования по убыванию вклада. Именно эта задача лежит в основе обсуждения правила 20/80 и родственных ему эмпирических соотношений.

Начиная с работ Вильфредо Парето [1], исследования концентрации ресурса обычно развивались в статистическом направлении: искали функции распределения, способные описывать тяжёлые хвосты, кривые Лоренца и связанные с ними индексы неравенства. Такой подход чрезвычайно продуктивен, однако он не отвечает напрямую на другой вопрос: почему при сходной ранговой организации системы наблюдаемые пропорции концентрации могут различаться? Иначе говоря, каков механизм перехода от одного и того же порядка элементов к различным долям аккумуляированного ресурса?

Для верхних хвостов распределения Парето показал устойчивость степенной аппроксимации, которую в терминах функции концентрации удобно записать как асимптотику кумулятивной доли ресурса, принадлежащей верхней доле рангов.

$$S(p) \propto p^{1-1/\alpha}, \quad 0 \leq p \ll 1. \quad (1)$$

Далее кривую кумулятивной концентрации $S(p)$, по аналогии со стандартной кривой Лоренца (L), будем называть кривой Парето (PC). Парето также отмечал, что во многих эмпирических рядах форма концентрации близка к норме с параметром $\alpha = 3/2$. Подстановка этого значения в асимптотику (1) приводит к приближению, которое удобно использовать как отправную точку для сравнения различных моделей концентрации.

$$S(p) \propto p^{1/3}, \quad 0 \leq p \ll 1. \quad (2)$$

Именно приближение (2) естественным образом приводит к правилу 20/80: около 20 % элементов системы аккумулируют приблизительно 80 % совокупного ресурса, тогда как на оставшиеся 80 % элементов приходится около 20 % ресурса.

Правило 20/80 более ста лет используется как практическая эвристика в управлении качеством [2]–[4], экономике [5], [6], географии [7], социологии [8] и естественных науках [9]–[11]. Вместе с тем сама устойчивость этой пропорции обычно констатируется эмпирически, тогда как её геометрическая и размерная интерпретация остаётся недостаточно прояснённой.

В настоящей работе рассматривается гипотеза о том, что существенную роль здесь играет размерность наблюдаемой величины. Один и тот же носитель может порождать разные законы концентрации в зависимости от того, что именно принимается за ресурс: линейный размер, площадь, объём, энергия или иная величина, степенным образом связанная с геометрическим масштабом. В этом случае различие между концентрационными правилами оказывается связанным не с произвольным выбором числовой константы, а со способом измерения эффекта.

Для прояснения этой идеи используется простая аналитическая модель — коническая куча песка. Она удобна тем, что допускает явное описание ранжированного накопления ресурса и позволяет в рамках одной геометрии сопоставить несколько различных величин. При неизменной форме носителя можно последовательно рассматривать накопление объёма, площади поверхности, эквивалентного линейного размера и потенциальной энергии, а затем сравнивать соответствующие функции концентрации.

Цель работы состоит в том, чтобы связать эмпирические правила концентрации с размерной структурой наблюдаемого эффекта. В предлагаемой трактовке ранжирование элементов само по себе остаётся безразмерной процедурой, тогда как конкретная пропорция вида 20/80, 20/79 или 20/62 определяется тем, как рассматриваемый ресурс масштабируется относительно линейного носителя. Это позволяет рассматривать известные концентрационные соотношения как элементы единой схемы, а не как набор разрозненных эмпирических правил.

Статья организована следующим образом. Сначала вводятся основные обозначения и формальная постановка задачи. Затем коническая куча песка рассматривается как модель, в которой различным физическим величинам соответствуют различные функции концентрации. После этого обсуждаются размерные отображения и их параметрические обобщения, а далее — интерпретация полученных результатов в терминах симметрии, коэффициента Джини и нормативных характеристик распределения. В заключительной части приводятся примеры калибровки модели на данных о доходе и богатстве.

2. Постановка задачи

Рассмотрим n элементов системы, упорядоченных по убыванию доли их вклада в суммарный ресурс системы (w_r), где r — ранг элемента. Кривая Парето, по определению, функция, интерполирующая кумулятивную сумму долей ресурса элементов

$$S(p_i) = \sum_{r=1}^i w_r, \quad 0 \leq p_i \leq 1. \quad (3)$$

where $p_r = \frac{r}{n} \in [0,1]$ is the rank share, that is, the share of elements counted from the most endowed to the least endowed.

Для сопоставления РС с кривой Лоренца ($L(p)$), определяемой по возрастанию ресурса (наименьшие значения располагаются первыми), удобно использовать тождество: $L(p) = 1 - S(1 - p)$, позволяющее перейти от ранжирования «сверху вниз» к ранжированию «снизу вверх». Соответственно основные аксиомы для РС можно записать так:

$$S(0) = 0, \quad S(1) = 1, \quad S'_+(p) \geq 0, \quad S''_+(p) \leq 0, \quad p \in (0,1). \quad (4)$$

Из условий (4) следует, что РС является неубывающей вогнутой кривой концентрации. Обозначим $PR = S(0.2)$. Далее PR будем называть коэффициентом Парето. Он представляет собой долю ресурса, аккумулированную верхними 20 % элементов, и широко используется в прикладных задачах для сравнения концентрации ресурсов в системах.

В рамках поставленной задачи необходимо: (i) выявить зависимость коэффициента Парето от размерности наблюдаемой величины; (ii) исследовать, как один и тот же носитель приводит к различным кривым концентрации при переходе от объёма к площади, эквивалентному радиусу и энергии; (iii) связать наблюдаемое неравенство с параметром модели и нормативным распределением ресурса; (iv) обсудить критерии структурной устойчивости; (v) проиллюстрировать восстановление параметра модели по коэффициенту Джини.

3. Песчаный конус как модель разных концентраций ресурса

Классической моделью самоорганизующихся систем служит куча однородного песка [12], [13]. В стационарном состоянии она имеет форму прямого кругового конуса высоты H . Пусть $p = z/H$ — доля высоты, отсчитываемая от вершины или, эквивалентно, доля ранга в геометрически упорядоченной модели носителя.

Обозначим через $S_M(p)$ накопление объёма (а при постоянной плотности — и массы), а через $S_A(p)$ — накопление боковой поверхности усечённого конуса. Из подобия сечений следует, что радиус на высоте z пропорционален $(1 - p)$, а объём верхнего малого конуса над уровнем z составляет $(1 - p)^3$ долю полного объёма. Следовательно, доля объёма, заключённая в нижней доле высоты p , равна:

$$S_V(p) = \frac{V(p)}{V_{tot}} = 1 - (1 - p)^3. \quad (5)$$

Для модели (5) коэффициент Парето равен $PR \approx 0.488$. Аналогично доля боковой поверхности усечённого конуса, заключённого в нижней доле высоты p , определяется формулой:

$$S_A(p) = \frac{A(p)}{A_{tot}} = 1 - (1 - p)^2. \quad (6)$$

У модели (6) коэффициент Парето равен $PR \approx 0.360$, что заметно меньше, чем у объёмной модели. Это отражает более слабую концентрацию ресурса при переходе от объёма к поверхности. В общем случае обе зависимости удобно записать в унифицированном виде:

$$S(p; D) = 1 - (1 - p)^D. \quad (7)$$

Здесь параметр D интерпретируется как размерность, или число степеней свободы величины, характеризующей состояние системы. Для дальнейших выводов полезно использовать стандартное разложение в окрестности нуля:

$$(1 - p)^\alpha = 1 - \alpha p + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} p^2 + O(p^3), \quad p \rightarrow 0. \quad (8)$$

Из (8) сразу следует, что при $p \rightarrow 0$ семейство (7) имеет линейную асимптотику:

$$S(p; D) \propto p, \quad 0 \leq p \ll 1. \quad (9)$$

Сравнение соотношений (2) и (9) показывает, что чисто геометрическая модель (7) вблизи нуля нарастает заметно мягче, чем эмпирическая кривая концентрации доходов. Следовательно, одного лишь геометрического фактора недостаточно для воспроизведения высокой концентрации, характерной для социально-экономических распределений.

Если же в качестве аккумулируемого ресурса рассматривать потенциальную энергию песчинок, то соответствующая кривая накопления становится более выпуклой, поскольку вклад каждой части массы дополнительно взвешивается её высотой. Тем самым один и тот же носитель порождает различные законы концентрации в зависимости от природы измеряемой величины.

4. Эквивалентный радиус: размерностные отображения

4.1. Размерность D

Размерность D показывает, сколько параметров требуется для описания объекта: нулевая размерность соответствует точке, одномерная — линии, двумерная — площади, трёхмерная — объёму. Для сложных и раздробленных объектов возможно использование дробных значений $D \in (1,3)$, как это делается во фрактальной геометрии. [14]

Пусть носитель эффекта обладает мерой M (например, площадью, объёмом или массой), которая масштабируется с характерным линейным размером S по степенному закону

$$M \propto S^D. \quad (10)$$

Тогда эквивалентный линейный масштаб вычисляется формулой

$$S = M^{1/D}. \quad (11)$$

Величина S имеет прямой физический смысл: это доля линейного масштаба, которой обладал бы подобный объект, если бы он содержал долю меры M . Такой переход является стандартным для операций «объём \rightarrow эквивалентный радиус» и, в общем виде, «мера \rightarrow линейный масштаб».

4.2. Эквивалентные шар и круг

Сопоставим накопленному объёму $V(p)$ эквивалентный шар, то есть шар того же объёма. Его радиус $R_{eq}(p)$ определяется равенством объёмов, а после нормировки на значение при $p = 1$ получаем долю эквивалентного радиуса как функцию ранга:

$$\frac{R_{eq}(p)}{R_{eq}(1)} = \left[\frac{V(p)}{V(1)} \right]^{1/3}. \quad (12)$$

Подставляя (5) в (12), приходим к явной формуле для трёхмерного размерностного отображения:

$$S(p; 3, 1/3) = \sqrt[3]{1 - (1 - p)^3}. \quad (13)$$

При $p = 0.2$ формула (13) даёт значение около 0.787, то есть пропорцию «20/79», практически совпадающую с эвристикой «20/80». Аналогично накопленной площади $A(p)$ можно сопоставить эквивалентный круг той же площади. В результате модель (13) естественно обобщается на случай произвольной размерности:

$$S(p; D, 1/D) = \sqrt[D]{1 - (1 - p)^D}. \quad (14)$$

Для $D = 2$ получаем $PR \approx 0.600$. Используя разложение (8), нетрудно видеть, что при $p \rightarrow 0+$ зависимости (14) обладают степенной асимптотикой [15]

$$S(p; D, 1/D) \propto p^{1/D}, \quad 0 \leq p \ll 1. \quad (15)$$

Сравнение с (2) показывает, что при соответствующем выборе параметра асимптотики совпадают по ведущему члену. Следовательно, различие между моделями состоит не в ранговой структуре как таковой, а в том, как одна и та же ранговая организация отображается в наблюдаемую величину различной размерности. Именно в этом состоит ключевая идея размерностной интерпретации концентрации. Отметим также, что модель (14) совпадает с однопараметрической симметричной кривой Лоренца распределения Burr III [15], которую разными способами получали в [16–22].

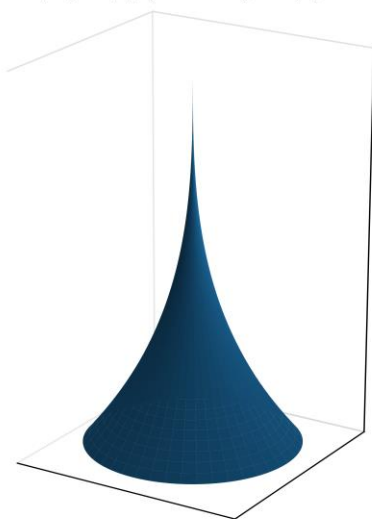
4.3. Тела вращения вместо «социальной пирамиды»

В т. II «Cours d'Économie Politique» на с. 312–318 Парето критиковал образ социальной пирамиды как слишком грубую схему и предлагал заменять его телом вращения, позволяющим геометрически представить непрерывный профиль распределения. Такое представление особенно полезно тогда, когда необходимо связать форму концентрационной кривой с размерностью носителя и типом наблюдаемой величины.

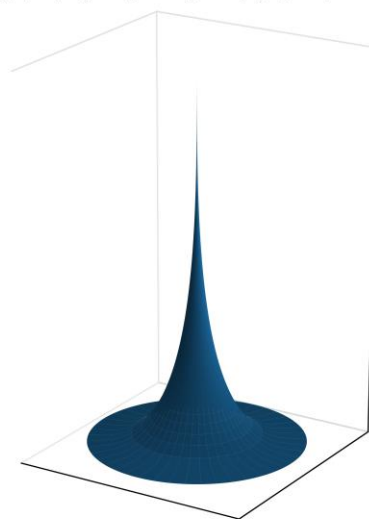
На рис. 1 показаны тела вращения для радиального профиля $r(p) = 1 - S(p)$. Широкое основание соответствует большинству элементов с малыми значениями ресурса, а сужающаяся верхняя часть — сравнительно малому числу элементов, аккумулирующих

значительную долю совокупного эффекта. Варианты (а) и (с) соответствуют базовым объёмной и поверхностной концентрациям, а варианты (b) и (d) иллюстрируют двухпараметрические формы при $a=b=3$ и $a=b=2$ соответственно.

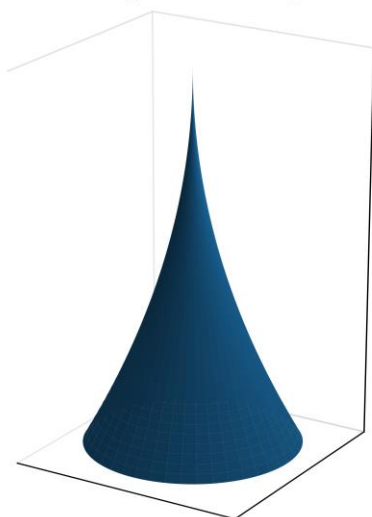
(a) $S_V(p) = 1 - (1 - p)^3$



(b) $S(p; a, b) = [1 - (1 - p)^a]^{1/b}$, $a = b = 3$



(c) $S_A(p) = 1 - (1 - p)^2$



(d) $S(p; a, b) = [1 - (1 - p)^a]^{1/b}$, $a = b = 2$

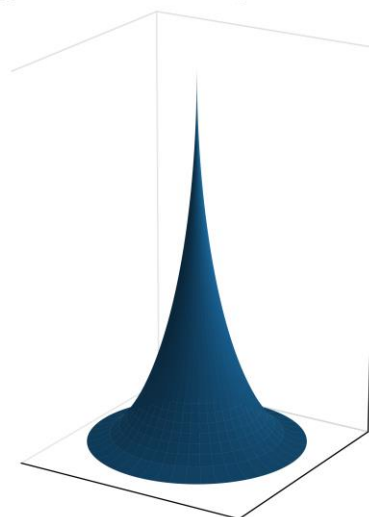


Рисунок 1 — Тела вращения для кривых Парето (вертикальная ось: p , радиус: $1 - S(p)$)

5. Двухпараметрическая РС

Однопараметрическая симметричная кривая (14) является частным случаем более общего двухпараметрического семейства [23]

$$S(p; a, b) = [1 - (1 - p)^a]^{1/b}. \tag{16}$$

где a и b — эмпирические параметры формы, удовлетворяющие условиям $1 \leq a < \infty$ и $1 \leq b < \infty$. Для описания поведения в окрестности нуля удобно ввести показатель $\beta = 1/b$. Тогда из разложения (8) получаем

$$S(p; a, b) \approx (ap)^\beta, \quad 1 \leq a < \infty, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad p \rightarrow 0. \tag{17}$$

По аналогии с физикой фазовых переходов показатель β можно интерпретировать как критический показатель степени, определяющий режим нарастания концентрации в области малых p .

$$\beta = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\ln S(p; a, b)}{\ln p}. \quad (18)$$

Для семейства (16) коэффициент Джини выражается аналитически:

$$G(a, \beta) = \frac{2 \Gamma(1/a) \Gamma(\beta + 1)}{a \Gamma(\beta + 1 + 1/a)} - 1. \quad (19)$$

Таким образом, поведение $S(p; a, b)$ при $p \rightarrow 0$ зависит в первую очередь от β . При $\beta \rightarrow 1$ распределение ресурса вблизи нуля стремится к более равномерному, а при $\beta \rightarrow 0$ ресурс концентрируется у первых по рангу элементов.

Расстояние от точки $(p, S(p))$ до эгалитарной линии по вертикали равно $d(p) = S(p) - p$. Производная $d'(p) = S'(p) - 1$ обращается в нуль при $S'(p) = 1$; соответствующую абсциссу обозначим p_μ . В этой точке кривая максимально удалена от эгалитарной линии, а в прикладных задачах по неравенству используется индекс Гувера $HI = S(p_\mu) - p_\mu$ [24].

Для дискретно ранжированного распределения, теоретическое значение доли ресурса элемента ранга $w(p_r)$, можно вычислить по формуле:

$$w_r = S(p_r) - S(p_{r-1}). \quad (20)$$

Поскольку в точке p_μ выполняется условие $S'(p_\mu) = 1$ вклад элемента в этой окрестности близок к среднему:

$$w(p_\mu) \approx \frac{1}{n}. \quad (21)$$

Следовательно, абсцисса p_μ определяет ранг среднего элемента рангового распределения. Элементы с ресурсом выше среднего, то есть элементы, для которых $p \leq p_\mu$, естественно, трактовать как значимые элементы системы. Для численной оценки асимметрии РС используем коэффициент

$$РАС = 1 - p_\mu - S_\mu. \quad (22)$$

Величина РАС обращается в нуль, когда точка $(p_\mu, S(p_\mu))$ лежит на альтернативной диагонали единичного квадрата; в целом выполняется неравенство $-1 \leq РАС \leq 1$. Для симметричного подкласса, то есть при $a = b$, получаем явные выражения: [16]

$$p_\mu(a) = 1 - 2^{-1/a}, \quad S_\mu(a) = 2^{-1/a}. \quad (23)$$

Для симметричного случая коэффициент Джини принимает вид $G(a) = \Gamma(1/a)^2 / [a \Gamma(2/a)] - 1$. Зависимость концентрации ресурса и асимметрии РС от размерности наблюдаемой величины приведена в табл. 1; графическая иллюстрация показана на рис. 2.

Таблица 1 — Зависимость PR и параметров РС от размерности наблюдаемой величины

Модель	β	$\rho\mu$	$S\mu$	РАС	S(0.2)	G
$S(p; 3) = 1 - (1 - p)^3$	1.00	0.42	0.81	-0.23	0.488	0.50
$S(p; 2) = 1 - (1 - p)^2$	1.00	0.50	0.75	-0.25	0.360	0.33
$S(p; 3, 1/3) = \sqrt[3]{1 - (1 - p)^3}$	0.33	0.21	0.79	0.00	0.787	0.77
$S(p; 2, 1/2) = \sqrt{1 - (1 - p)^2}$	0.50	0.29	0.71	0.00	0.600	0.57

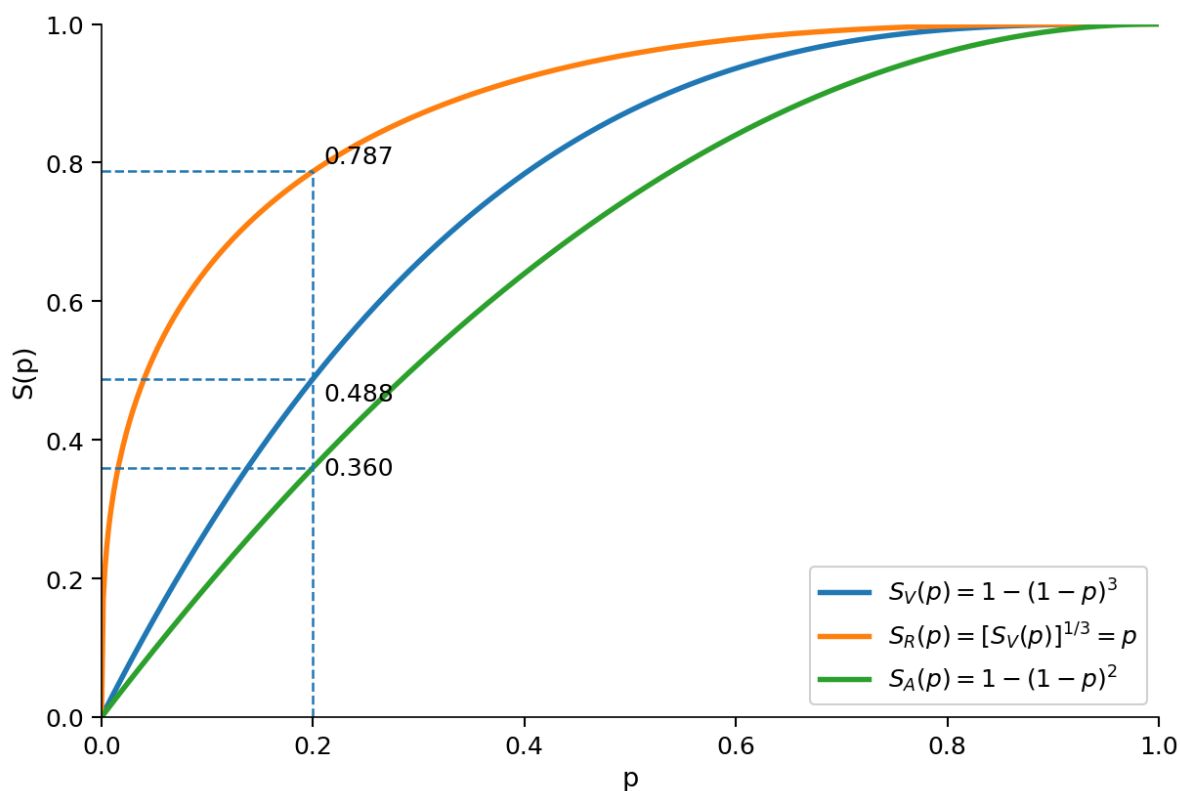


Рисунок 2 — Функции концентрации для объёма конуса и размерностных отображений

Данные табл. 1 показывают, что многообразие правил концентрации не случайно: оно отражает одно и то же ранжирование, но разные размерности наблюдаемой величины. При одинаковой размерности у симметричных кривых концентрация, как правило, выше, чем у асимметричных базовых моделей.

Системы, для которых $\beta = 1$, можно трактовать как суммативные: внутренняя связь между элементами здесь слабее внешних воздействий, и кривая концентрации описывает преимущественно аддитивное сложение частных вкладов. Альтернативой им служат интегративные системы, у которых взаимодействие элементов внутри системы превосходит внешние воздействия; в этом случае кривая концентрации отражает уже не простое суммирование, а кооперативное усиление вкладов, что и проявляется в большей концентрации и иной асимметрии.

6. Норма упорядоченности систем

6.1. Координата центра масс и коэффициент Джини

Под нормой упорядоченности далее будем понимать такое распределение ресурса, при котором система в рамках рассматриваемого класса моделей обладает наибольшей структурной устойчивостью. В предлагаемой геометрической интерпретации это условие естественно связывается с минимизацией нормированной высоты центра масс распределения вкладов элементов в совокупный эффект.

Используя формулу (20), запишем координату центра масс в виде

$$p_c = \int_0^1 p dS(p) = \int_0^1 p S'(p) dp. \quad (24)$$

Так как $S(0) = 0$ и $S(1) = 1$, интегрирование по частям даёт

$$p_c = 1 - \int_0^1 S(p) dp. \quad (25)$$

С другой стороны, коэффициент Джини для кривой концентрации равен

$$G = 2 \int_0^1 S(p) dp - 1. \quad (26)$$

Следовательно,

$$p_c = \frac{1 - G}{2}. \quad (27)$$

Тем самым коэффициент Джини получает в данной модели ясную геометрическую интерпретацию: он задаёт положение центра масс распределения вкладов. Чем меньше p_c , тем ниже расположен центр масс и тем более концентрированным является распределение ресурса.

Обозначим через p_k абсциссу точки пересечения кривой концентрации с альтернативной диагональю:

$$S(p_k) = 1 - p_k. \quad (28)$$

Для любой вогнутой кривой концентрации выполняется неравенство

$$p_c \leq p_k. \quad (29)$$

Равенство достигается лишь в предельном случае, когда кривая совпадает с ломаной, соединяющей точки $(0,0)$, $(p_k, 1 - p_k)$ и $(1,1)$. Следовательно, положение центра масс и положение точки пересечения с альтернативной диагональю характеризуют разные аспекты структуры распределения: первое связано с общей концентрацией, второе — с его балансом относительно ранговой шкалы.

6.2. Правило рычага и коэффициент асимметрии

Рассмотрим теперь точку (p_μ, S_μ) , где p_μ определяется условием $S'(p_\mu) = 1$, а $S_\mu = S(p_\mu)$. В этой точке кривая концентрации имеет тот же локальный наклон, что и эгалитарная прямая, а для дискретного распределения вклад элемента в окрестности p_μ близок к среднему значению. Поэтому p_μ можно интерпретировать как ранг среднего элемента рангово упорядоченной системы.

Если сопоставить кривой концентрации условный рычаг с точкой опоры в p_μ то естественное условие равновесия можно записать в форме

$$\frac{S_\mu}{1 - S_\mu} = \frac{1 - p_\mu}{p_\mu}. \quad (30)$$

Отсюда вытекает

$$p_\mu S_\mu = (1 - p_\mu)(1 - S_\mu). \quad (31)$$

и, следовательно,

$$p_\mu + S_\mu = 1. \quad (32)$$

Тем самым равновесное состояние соответствует расположению точки (p_μ, S_μ) на альтернативной диагонали единичного квадрата. Именно это условие выражается через коэффициент асимметрии

$$PAC = 1 - p_\mu - S_\mu. \quad (33)$$

При $PAC = 0$ точка среднего элемента находится в равновесном положении; при отклонении от нуля нарушается согласование между рангом среднего элемента и долей накопленного к этому рангу эффекта. Поэтому величину $|PAC|$ естественно рассматривать как показатель структурной несбалансированности кривой концентрации. В этой трактовке правило 20/80 выступает не как отдельная эмпирическая эвристика, а как один из частных случаев более общего условия $PAC = 0$.

6.3. Критерий нормы упорядоченности

В рамках принятой модели норма упорядоченности определяется совместным выполнением двух требований:

$$|PAC| \rightarrow \min, \quad p_c \rightarrow \min. \quad (34)$$

Первое условие характеризует структурный баланс, второе — степень концентрации распределения; в силу (27) второе условие эквивалентно требованию $G \rightarrow \max$. Следовательно, более устойчивой в рассматриваемом классе следует считать такую систему, которая одновременно ближе к равновесию по показателю PAC и обладает меньшей высотой центра масс. Иначе говоря, норма упорядоченности соответствует распределению, в котором согласованы баланс ранговой структуры и высокая концентрация вклада.

7. Обсуждение: правило 20/80 как размерностный эффект

Полученные результаты позволяют по-новому интерпретировать классическое правило 20/80. В исходной геометрической модели конической кучи объёмная концентрация определяется формулой (5), то есть непосредственно задаётся кубическим масштабированием объёма по линейному размеру. Однако при переходе от объёма к эквивалентному радиусу, площади или иной наблюдаемой величине изменяется и сама функция концентрации. Иными словами, одна и та же ранговая организация системы может приводить к разным численным пропорциям накопленного ресурса в зависимости от того, какая именно величина измеряется.

В более общем виде, если наблюдаемая величина Q связана с базовой мерой степенным законом, то и кривая концентрации для Q получается как размерностное отображение базовой кривой. Отсюда следует важный вывод: правило 20/80 не обязано рассматриваться как универсальная константа, одинаково применимая ко всем системам. Оно представляет собой частный численный результат, возникающий при определённом способе перехода от носителя эффекта к наблюдаемой величине. В той же схеме естественно возникают и другие соотношения, в частности 20/79 и 20/62.

Принципиально важно, что ранги и доли рангов сами по себе безразмерны. Поэтому размерность проявляется не в процедуре ранжирования, а в правиле, которое связывает ресурс с линейным масштабом носителя. Именно в этом смысле размерностная интерпретация объединяет геометрическую модель песчаного конуса и параметрические кривые концентрации: различие между наблюдаемыми законами объясняется не сменой порядка элементов, а сменой метрики.

Такое объяснение отличается от других интерпретаций правила 20/80, обсуждаемых в [25–28]. В которых, соответствующая пропорция выводится из конкретных вероятностных распределений, в других — из энтропийных принципов или индексных конструкций. В предлагаемой работе источник соотношения иной: оно выводится из геометрии, масштабирования и выбора наблюдаемой величины. Поэтому основная идея статьи состоит не в постулировании новой универсальной константы, а в сведении нескольких известных концентрационных правил к единому размерностному механизму.

8. Калибровка симметричной модели по коэффициенту Джини

Для симметричной однопараметрической модели коэффициент Джини $G(a)$ монотонно зависит от параметра концентрации a . Поэтому наблюдаемое значение G_{obs} однозначно задаёт параметр модели из уравнения $G(a) = G_{\text{obs}}$. Это позволяет использовать статистически измеряемое неравенство как входной параметр для восстановления соответствующей симметричной кривой концентрации. В результате возникает удобная схема перехода от эмпирического показателя неравенства к параметризованной нормативной модели распределения ресурса.

В качестве иллюстрации рассмотрим США. Для доходов используется официальный исторический ряд коэффициента Джини для денежных доходов домохозяйств до налогообложения (pretax household money income). Для богатства используются оценки чистого богатства семей, основанные на данных Survey of Consumer Finances. Сравнимые ряды относятся к разным статистическим объектам, поэтому сопоставление следует

понимать не как буквальное сравнение однотипных агрегатов, а как структурное сопоставление двух форм неравенства — текущих доходов и накопленного богатства [29–32].

Таблица 2 — Калибровка параметра симметричной модели по коэффициенту Джини

Показатель	Год	G	a	р _ц	PR
Доходы	1989	0.48	1.63	0.35	0.48
Доходы	2007	0.46	1.70	0.34	0.51
Доходы	2019	0.48	1.75	0.33	0.52
Доходы	2024	0.49	1.76	0.33	0.53
Богатство	1989	0.83	3.62	0.17	0.85
Богатство	2007	0.83	3.70	0.17	0.86
Богатство	2019	0.87	4.43	0.14	0.90
Богатство	2024	0.85	3.89	0.16	0.87

Таблица 2 показывает, что траектория параметра симметричной модели для денежных доходов домохозяйств до налогов сравнительно стабильна и лежит в диапазоне $a \approx 1.6–1.8$ (коэффициент Парето $PR \approx 0.48 – 0.53$), тогда как для чистого богатства семей соответствующие значения заметно выше. Это означает, что с точки зрения предлагаемой модели распределение богатства находится в существенно более концентрированном состоянии, чем распределение доходов.

Тем самым коэффициент Джини в рамках данной схемы выполняет двойную функцию. С одной стороны, он остаётся стандартной мерой наблюдаемого неравенства. С другой стороны, через обратное определение параметра a он позволяет перейти к нормативной симметричной модели и задать согласованное распределение долей ресурса между элементами системы. В этом состоит прикладной смысл предложенной калибровки для задач анализа и сравнительного описания социально-экономических распределений.

Заключение

В работе предложена размерностная интерпретация эмпирических правил концентрации ресурса. Показано, что форма кривой концентрации определяется не только ранговым порядком элементов, но и тем, как наблюдаемая величина масштабируется относительно линейного носителя. Геометрическая модель конической кучи песка служит простым аналитическим примером, в котором при неизменной структуре носителя различные эффекты — объём, поверхность, эквивалентный радиус и энергия — приводят к различным законам концентрации.

Главный результат состоит в том, что правило 20/80 интерпретируется как частный случай более общего класса размерностно обусловленных соотношений. В предлагаемом подходе конкретные пропорции типа 20/80, 20/79 и 20/62 возникают не как независимые эмпирические константы, а как следствия выбора метрики и способа отображения ресурса. Это позволяет рассматривать известные концентрационные правила в рамках единой схемы.

Дополнительный результат связан с использованием симметричной параметрической модели и коэффициента Джини. Показано, что наблюдаемое значение Джини может быть использовано для восстановления параметра нормативной кривой концентрации, а тем самым — для перехода от эмпирически измеряемого неравенства к согласованной модельной структуре распределения ресурса. Примеры для доходов и богатства США показывают, что такая процедура позволяет на единой основе сопоставлять различные формы социально-экономического неравенства.

Благодарности

Автор благодарит Daniel Grachov за ценные замечания и обсуждения, которые помогли улучшить презентацию этой работы.

Финансирование

Исследование выполнено без специальной финансовой поддержки со стороны государственных, коммерческих или некоммерческих организаций.

Декларация о конкурирующих интересах

Автор заявляет об отсутствии конкурирующих финансовых интересов и личных обстоятельств, которые могли бы повлиять на результаты, представленные в данной работе.

Доступность данных

Новые первичные данные в рамках данного исследования не создавались. В аналитической части работы используются теоретические выводы, а в эмпирической иллюстрации — опубликованные внешние источники, указанные в списке литературы и в тексте статьи. Этой информации достаточно для воспроизведения представленных результатов.

Декларация о генеративном ИИ и технологиях с поддержкой ИИ в процессе написания

Во время подготовки этой работы автор использовал ChatGPT (OpenAI) для помощи в переводе на английский язык, улучшении языка и стиля, а также для совершенствования оформления рукописи. После использования этого инструмента автор тщательно изучал и редактировал материал по мере необходимости, беря на себя полную ответственность за содержание публикации.

Литература

- [1] V. Pareto, *Cours d'Économie Politique*, vols. 1 and 2, F. Rouge, Lausanne, 1896–1897.
- [2] J.M. Juran, The Non-Pareto Principle; mea culpa, *Qual. Prog.* 8 (5) (1975) 8–9.
- [3] J.M. Juran, *Juran's Quality Control*, McGraw-Hill, New York, 1951.
- [4] J.M. Juran, Universals in management planning and controlling, *Manage. Rev.* 43 (11) (1954) 748–761.
- [5] Г.А. Грачёв, Моделирование принципа Парето, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 2011, 223 p.
- [6] Г.А. Грачёв, Управление структурой денежных доходов населения на основе принципа Парето, *Terra Econ.* 11 (1) (2013) 57–63.
- [7] G.A. Grachev, Size distribution of states, counties, and cities in the USA: New inequality form information, *Physica A* 592 (2022) 126831. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.126831>.

- [8] G.K. Zipf, *Human Behavior and the Principle of Least Effort*, Addison-Wesley, Cambridge, MA, 1949.
- [9] M.E.J. Newman, Power laws, Pareto distributions and Zipf's law, *Contemp. Phys.* 46 (5) (2005) 323–351.
- [10] С.А. Крашаков, А.Б. Теслюк, Л.Н. Щур, Об универсальности рангового распределения популярности веб-серверов, *Вестн. РФФИ* 35 (1) (2004) 46–66.
- [11] Г.А. Грачёв, *Принцип Парето: предсказуемые концентрации ресурса в самоорганизующихся системах*, Издательство Южного федерального университета, Ростов-на-Дону–Таганрог, 2024, 102 р.
- [12] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise, *Phys. Rev. Lett.* 59 (4) (1987) 381–384.
- [13] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Self-organized criticality, *Phys. Rev. A* 38 (1) (1988) 364–374.
- [14] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [15] I.W. Burr, Cumulative frequency functions, *Ann. Math. Stat.* 13 (2) (1942) 215–232.
- [16] N. Kakwani, *Income Inequality and Poverty: Methods of Estimation and Policy Applications*, Oxford University Press, Oxford, 1980.
- [17] В.В. Матохин, *Алгебра управления*, Москва, 1994, 12 р.
- [18] А.В. Крянев, В.В. Матохин, С.Г. Климанов, *Статистические функции распределения ресурсов в экономике: 010–98*, Москва, 1998, 15 р.
- [19] I. Antoniou, V.V. Ivanov, Yu.L. Korolev, A.V. Kryanev, V.V. Matokhin, Z. Suchanecki, Analysis of resources distribution in economics based on entropy, *Physica A* 304 (3) (2002) 525–534. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00575-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00575-1).
- [20] I. Antoniou, V.V. Ivanov, A.V. Kryanev, V.V. Matokhin, M.V. Shapovalov, On the efficient resources distribution in economics based on entropy, *Physica A* 336 (3–4) (2004) 549–562. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.12.051>.
- [21] J.M. Henle, N.J. Horton, S.J. Jakus, Modelling inequality with a single parameter, in: D. Chotikapanich (Ed.), *Modeling Income Distributions and Lorenz Curves*, Springer, New York, 2008, pp. 255–269.
- [22] J.M. Sarabia, V. Jordá, C. Trueba, The Lamé class of Lorenz curves, *Commun. Stat. Theory Methods* 46 (11) (2017) 5311–5326. <https://doi.org/10.1080/03610926.2013.775306>.
- [23] B.C. Arnold, *Majorization and the Lorenz Order: A Brief Introduction*, Springer, New York, 1987.
- [24] E.M. Hoover, The measurement of industrial localization, *Rev. Econ. Stat.* 18 (1936) 162–171.
- [25] K. Tanabe, Pareto's 80/20 rule and the Gaussian distribution, *Physica A* 510 (2018) 635–640. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.07.023>.
- [26] P.K. Rawlings, D. Reguera, H. Reiss, Entropic basis of the Pareto law, *Physica A* 343 (2004) 643–652. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.06.152>.
- [27] S. Banerjee, B.K. Chakrabarti, M. Mitra, S. Mutuswami, On the Kolkata index as a measure of income inequality, *Physica A* 545 (2020) 123178. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.123178>.
- [28] Special issue: Inequalities in Socio-Economic, Bio-Medical & Physical Systems: a statistical physics perspective, *Physica A*, 2025.
- [29] Board of Governors of the Federal Reserve System, *Distributional Financial Accounts Overview*, Federal Reserve, 2026.
- [30] M.M. Batty, J. Bricker, J.S. Briggs, E. Holmquist, S. McIntosh, K.B. Moore, E.R. Nielsen, S. Reber, M. Shatto, K. Sommer, T. Sweeney, A.H. Volz, *Introducing the Distributional Financial Accounts of the United States*, Finance and Economics Discussion Series 2019-017 (2019). <https://doi.org/10.17016/FEDS.2019.017>.
- [31] J. Bricker, S. Goodman, K.B. Moore, A.H. Volz, *Wealth and Income Concentration in the SCF: 1989–2019*, FEDS Notes (2020). <https://doi.org/10.17016/2380-7172.2795>.
- [32] M. Kollar, Z. Scherer, *Income in the United States: 2024*, Current Population Reports P60-286, U.S. Census Bureau, Washington, DC, 2025.