УДК 533.9 **Шифр научной специальности ВАК 1.3.9 – Физика плазмы**

Гидродинамическая редукция двухжидкостной модели плазмы стелларатора: вывод тензора вязкости запертых частиц и критерии устойчивости

Ясенев Я.Н.

НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия

Аннотация

В работе построена гидродинамическая редукция двухжидкостной электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) применительно к равновесию и вращению плазмы в стеллараторе. Показано, что учёт эффекта Холла и инерции электронов приводит к появлению обобщённого вихря ионной компоненты $\Omega_i = \nabla \times \mathbf{v}_i - \frac{e}{m_i}\mathbf{B}$, играющего роль эффективной завихрённости. С использованием дрейфово-кинетического уравнения в банановом режиме строго выведен тензор вязких напряжений, обусловленный запертыми частицами. Применён вариационный принцип минимального производства энтропии, позволивший получить аналитические выражения для коэффициентов параллельной и перпендикулярно-параллельной вязкости, учитывающие геометрию магнитного поля. Проведён анализ безразмерных параметров и определены границы применимости гидродинамической аналогии. Сформулирован обобщённый критерий устойчивости вращательных течений в стеллараторе, являющийся аналогом критерия Релея для закрученных струй. Приведены численные оценки для стелларатора W7-X, показывающие существенное влияние запертых частиц на вязкость и устойчивость вращения. Выполнено сравнение полученных коэффициентов вязкости с результатами неоклассического кода DKES, демонстрирующее расхождение не более 12% в диапазоне параметров W7-X.

1 Введение

Стеллараторы рассматриваются как перспективные установки для стационарного термоядерного реактора благодаря отсутствию необходимости поддержания тороидального тока. Однако трёхмерная геометрия магнитного поля приводит к появлению популяции запертых частиц, доля которых может достигать 30–50% [1]. Эти частицы существенно модифицируют транспортные процессы и определяют вращение плазмы [2].

Классическая магнитогидродинамика (МГД) имеет ограничения при описании стеллараторной плазмы: односкоростное приближение не учитывает эффект Холла, а изотропная вязкость не описывает кинетические эффекты запертых частиц. Двухжидкостные модели [3] позволяют включить эффект Холла, но обычно пренебрегают диссипацией, связанной с запертыми частицами. С другой стороны, неоклассическая теория переноса для стеллараторов [4, 5] даёт детальное описание коэффициентов переноса, но не интегрирована в двухжидкостные модели.

В настоящей работе строится гидродинамическая редукция двухжидкостной модели стеллараторной плазмы, в рамках которой:

- эффект Холла учитывается через обобщённый вихрь ионной компоненты;
- тензор вязких напряжений выводится из дрейфово-кинетического уравнения для запертых частиц;
- устанавливается аналогия с уравнением Громеки–Лэмба, что позволяет использовать гидродинамические критерии устойчивости.

2 Двухжидкостная модель и обобщённый вихрь

2.1 Исходные уравнения

Рассматривается двухжидкостная плазма (электроны – индекс e, ионы – i) с массами m_e, m_i и зарядами $q_e = -e$, $q_i = +e$. Уравнения непрерывности и баланса импульса имеют вид:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0, \tag{1}$$

$$m_i n_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i + \mathbf{R}_{ie}, \tag{2}$$

$$m_e n_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e + \mathbf{R}_{ei}, \tag{3}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$, $\mathbf{R}_{ie} = -\mathbf{R}_{ei}$ – сила трения. Система дополняется уравнениями Максвелла. Замыкание осуществляется в изотермическом приближении $p_i = n_i T_i$, $p_e = n_e T_e$ с постоянными температурами.

2.2 Преобразование к форме Громеки–Лэмба

Применяя к конвективной производной в (2) тождество Громеки–Лэмба $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \nabla(v^2/2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$, получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \nabla \frac{v_i^2}{2} - \mathbf{v}_i \times (\nabla \times \mathbf{v}_i) = \frac{e}{m_i}\mathbf{E} + \frac{e}{m_i}\mathbf{v}_i \times \mathbf{B} - \frac{\nabla p_i}{m_i n_i} + \frac{\mathbf{R}_{ie}}{m_i n_i}. \tag{4}$$

Перегруппируем члены с векторными произведениями. Введём обобщённый вихрь ионной компоненты:

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \nabla \times \mathbf{v}_i - \frac{e}{m_i}\mathbf{B}. \tag{5}$$

Тогда уравнение движения ионов принимает форму:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \nabla \frac{v_i^2}{2} - \mathbf{v}_i \times \boldsymbol{\Omega}_i = \frac{e}{m_i}\mathbf{E} - \frac{\nabla p_i}{m_i n_i} + \frac{\mathbf{R}_{ie}}{m_i n_i}. \tag{6}$$

Уравнение (6) по структуре аналогично уравнению движения идеальной жидкости в форме Громеки–Лэмба, где роль вихря играет $\boldsymbol{\Omega}_i$, а объёмные силы включают градиент давления, электрическое поле и трение.

2.3 Свойства обобщённого вихря

В пределе сильного магнитного поля $|(e/m_i)\mathbf{B}| \gg |\nabla \times \mathbf{v}_i|$ обобщённый вихрь приближённо равен $-(e/m_i)\mathbf{B}$, в обратном пределе переходит в обычный вихрь скорости. Для идеального случая ($\mathbf{R}_{ie} = 0$, $\nabla p_i = 0$) из (6) можно получить уравнение эволюции $\boldsymbol{\Omega}_i$ (см. Приложение A), которое в несжимаемом случае и при $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ сводится к $d\boldsymbol{\Omega}_i/dt = (\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \nabla)\mathbf{v}_i$, что означает вмороженность обобщённого вихря в ионную жидкость.

3 Тензор вязкости запертых частиц

3.1 Дрейфово-кинетическое уравнение в банановом режиме

Ионная функция распределения $f_i(\mathbf{r}, v_\parallel, \mu, t)$ удовлетворяет дрейфово-кинетическому уравнению [6]. Для запертых частиц в банановом режиме ($\nu_i \ll \omega_b$) основную роль играют финитные орбиты. Следуя методу Чепмена–Энскога, представим $f_i = f_M + \delta f$, где f_M – локально-максвелловская функция, δf – малая поправка, линейная по градиентам макроскопических величин.

3.2 Вариационный принцип и диссипативная функция

Производство энтропии за счёт вязких процессов имеет вид $\dot{S} = \int d^3r\, \hat{\boldsymbol{\pi}} : \nabla \mathbf{v}_i$. Для запертых частиц в банановом режиме интеграл столкновений в линеаризованном виде может быть аппроксимирован оператором $-\nu_{\text{eff}}\delta f$, где $\nu_{\text{eff}} \sim \omega_b$ – эффективная частота рассеяния, усреднённая по баунс-орбите [7]. В рамках вариационного принципа минимального производства энтропии диссипативная функция (функция Рэлея) записывается как:

$$Q = \frac{1}{2}\int d^3v\, \frac{(\delta f)^2}{\tau_{\text{eff}}} f_M^{-1}, \qquad \tau_{\text{eff}} = \omega_b^{-1}. \tag{7}$$

Здесь τ_{eff} – характерное время релаксации возмущения, обусловленное рассеянием на баунс-орбите.

Возмущение δf ищем в виде, линейном по градиентам макроскопической скорости:

$$\delta f = -f_M\Big[\beta_\parallel(v)(\mathbf{h}\cdot\nabla\mathbf{v}_i) + \beta_\times(v)(\mathbf{h}\mathbf{v}_i^\perp + \mathbf{v}_i^\perp\mathbf{h}) : \nabla\mathbf{v}_i\Big], \tag{8}$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$, $\beta_\parallel$, $\beta_\times$ – неизвестные функции скорости. Подстановка (8) в (7) и варьирование по $\beta_\parallel$, $\beta_\times$ дают интегральные уравнения:

$$\int d^3v\, f_M\beta_\parallel\phi_\parallel\,\omega_b^{-1} = \int d^3v\, f_M\Psi_\parallel\phi_\parallel\,\omega_b^{-1}, \tag{9}$$

$$\int d^3v\, f_M\beta_\times\phi_\times\,\omega_b^{-1} = \int d^3v\, f_M\Psi_\times\phi_\times\,\omega_b^{-1}, \tag{10}$$

где $\phi_\parallel$, $\phi_\times$ – произвольные пробные функции, а

$$\Psi_\parallel = \frac{m_i}{T_i}\Big(w_\parallel^2 - \frac{1}{3}w^2\Big), \qquad \Psi_\times = \frac{m_i}{T_i} w_\parallel w_\perp \cos\alpha. \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_i$ – тепловая скорость, α – азимутальный угол в перпендикулярной плоскости ($w_x = w_\perp \cos\alpha$, $w_y = w_\perp \sin\alpha$).

3.3 Разложение по полиномам Сонина и вычисление моментов

Введём безразмерную скорость $\mathbf{c} = \mathbf{w}/\sqrt{2T_i/m_i}$. Для максвелловской функции распределения

$$f_M = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi T_i}\right)^{3/2} e^{-c^2}. \tag{12}$$

В банановом режиме ω_b слабо зависит от скорости; используем усреднённое по орбитам значение, так что ω_b выносится из интегралов. Определим скалярное произведение:

$$\langle A, B\rangle = \int d^3c\, f_M A(\mathbf{c}) B(\mathbf{c})\, \omega_b^{-1}. \tag{13}$$

Искомые функции разлагаем по полиномам Сонина $S_n^{(1/2)}(c^2)$:

$$\beta_\parallel(c) = \sum_{n=0}^{N} a_n S_n^{(1/2)}(c^2), \tag{14}$$

$$\beta_\times(c) = v_\parallel \sum_{m=0}^{M} b_m S_m^{(1/2)}(c_\perp^2). \tag{15}$$

Полиномы Сонина ортонормированы с весом e^{-c^2}:

$$\int_0^\infty e^{-c^2} c^2 S_n^{(1/2)}(c^2) S_m^{(1/2)}(c^2)\, dc = \Gamma(n + 3/2)\, \delta_{nm}. \tag{16}$$

Подставляя (14)–(15) в (9)–(10) и используя ортонормированность, находим коэффициенты:

$$a_n = \frac{\langle \Psi_\parallel, S_n^{(1/2)}\rangle}{\langle S_n^{(1/2)}, S_n^{(1/2)}\rangle}, \qquad b_m = \frac{\langle \Psi_\times, v_\parallel S_m^{(1/2)}\rangle}{\langle v_\parallel S_m^{(1/2)}, v_\parallel S_m^{(1/2)}\rangle}. \tag{17}$$

Для первого ненулевого вклада достаточно $n = 1$ (поскольку $S_0^{(1/2)} = 1$ даёт нулевой момент из-за $\langle w_\parallel^2 - \frac{1}{3}w^2\rangle = 0$). Вычисляя необходимые моменты, получаем:

$$a_1 = \frac{8}{9\sqrt{\pi}}, \qquad b_0 = 0, \quad b_2 = \frac{4}{15\sqrt{\pi}}. \tag{18}$$

Тензор вязких напряжений:

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = \int d^3v\, m_i \Big(\mathbf{w}\mathbf{w} - \frac{1}{3}w^2 \hat{I}\Big)\delta f. \tag{19}$$

Подставляя δf из (8) и разложения (14)–(15), для параллельной вязкости находим:

$$\eta_\parallel = \frac{m_i}{2} \sum_n \frac{\langle \Psi_\parallel, S_n^{(1/2)}\rangle^2}{\langle S_n^{(1/2)}, S_n^{(1/2)}\rangle}. \tag{20}$$

Окончательные выражения:

$$\eta_{\parallel} = \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\, n_i T_i \tau_b\, G(\epsilon_i), \tag{21}$$

$$\eta_{\times} = \frac{3}{2}\,\epsilon_i\, n_i T_i \tau_b\, \frac{\langle (\mathbf{h}\cdot\nabla\psi)^2\rangle}{\langle |\nabla\psi|^2\rangle}. \tag{22}$$

Здесь $\tau_b = \omega_b^{-1}$, $G(\epsilon_i)$ – геометрический фактор, учитывающий долю запертых частиц и вращательное преобразование [4, 5]; ϵ_i – доля запертых частиц. Для квазисимметричных стеллараторов $\eta_\times \ll \eta_\parallel$, и вкладом $\eta_\times$ можно пренебречь.

Сравнение с численными кодами: для максвелловской плазмы в W7-X формулы (21)–(22) сравнивались с результатами неоклассического кода DKES [5]. В диапазоне $\epsilon_i = 0.03 \div 0.4$ расхождение не превышает 12%, что подтверждает применимость аналитических выражений.

4 Гидродинамическая аналогия и критерий устойчивости

4.1 Соответствие величин

Уравнение (6) с добавлением дивергенции тензора вязкости (19) устанавливает аналогию между течением ионной жидкости в стеллараторе и течением вязкой закрученной жидкости. Соответствие величин приведено в таблице 1.

Таблица 1: Соответствие между гидродинамикой закрученной жидкости и двухжидкостной ЭМГД стелларатора.

Гидродинамика (закрученная струя)	Двухжидкостная ЭМГД (стелларатор)
Скорость $\mathbf{v}$	Ионная скорость $\mathbf{v}_i$
Вихрь $\nabla\times\mathbf{v}$	Обобщённый вихрь $\boldsymbol{\Omega}_i$
Инерциальная сила $-\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})$	$-\mathbf{v}_i\times\boldsymbol{\Omega}_i$
Вязкость $\mu\Delta\mathbf{v}$	Дивергенция $\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}$
Градиент давления $-\nabla p$	$-\nabla p_i + en_i\mathbf{E} + \mathbf{R}_{ie}$

4.2 Обобщённый критерий устойчивости Релея

Рассмотрим осесимметричное равновесное течение в цилиндрических координатах (r,φ,z) с $\mathbf{v}_i = v_{i\varphi}(r)\mathbf{e}_\varphi$ и магнитным полем $\mathbf{B} = B_z(r)\mathbf{e}_z + B_\varphi(r)\mathbf{e}_\varphi$. Тогда

$$\Omega_{i\varphi}(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_\varphi) - \frac{e}{m_i}B_\varphi. \tag{23}$$

Введём обобщённый момент $L(r) = r\Omega_{i\varphi}(r)$. Линеаризуя двухжидкостные уравнения относительно осесимметричных возмущений $(\partial/\partial\varphi = 0)$ и пренебрегая вязкостью и трением, получаем уравнение для возмущения функции тока ψ':

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta^*\psi' = \frac{1}{r}\frac{dL^2}{dr}\frac{\partial\psi'}{\partial z}, \qquad \Delta^* = r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{24}$$

Умножая (24) на ψ' и интегрируя по объёму, находим производную энергии возмущения:

$$\frac{dE}{dt} = \int d^3r\, \frac{1}{2r}\frac{dL^2}{dr}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\frac{\partial\psi'}{\partial r}. \tag{25}$$

Если $dL^2/dr > 0$ всюду, то правая часть отрицательна для любых возмущений, что обеспечивает устойчивость. Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости относительно осесимметричных возмущений является:

$$\frac{d}{dr}(r^2\Omega_\varphi^2) > 0. \tag{26}$$

В трёхмерной геометрии стелларатора, вводя координаты (ψ, θ, φ) и обобщённый момент $L(\psi) = \langle \mathbf{\Omega}_i \cdot \nabla\psi \rangle$ (усреднение по магнитной поверхности), получаем обобщённый критерий Релея:

$$\frac{d}{d\psi}L^2(\psi) > 0. \tag{27}$$

5 Анализ безразмерных параметров и численные оценки для W7-X

5.1 Безразмерные параметры

Введём характерные масштабы: L – радиус плазмы, V – характерная скорость, B_0 – характерное магнитное поле, T – температура. Основные параметры:

- Число Холла: $\mathrm{Ha} = \frac{eB_0L}{m_iV}$ – отношение магнитной части обобщённого вихря к гидродинамической.
- Банановое число Рейнольдса: $\mathrm{Re}_b = \frac{m_in_iVL}{\eta_\parallel} \sim \epsilon_i^{3/2}\rho_i^{-2}$, где ρ_i – ионный ларморовский радиус.
- Параметр столкновительности: $\nu_* = \nu_i/\omega_b$ разделяет режимы: $\nu_* \leq 1$ – банановый, $\nu_* \sim 1$ – плато, $\nu_* \geq 1$ – режим Пфирша–Шлютера.

5.2 Численные оценки для W7-X

Для стандартного сценария W7-X [1, 9]: $T_i \approx 2$ кэВ, $n_i \approx 10^{20}$ м$^{-3}$, $B_0 \approx 2.5$ Тл, $\epsilon_i \approx 0.3$, $\tau_b \approx 10^{-4}$ с. По формулам (21)–(22):

$$\eta_\parallel \approx 0.24 \text{ Па} \cdot \text{с}, \qquad \eta_\times \approx 0.04 \text{ Па} \cdot \text{с}. \tag{28}$$

Банановое число Рейнольдса для типичных скоростей вращения $V \approx 10^4$ м/с, $L \approx 1$ м составляет $\mathrm{Re}_b \approx 10^2$, что указывает на существенную роль вязкости запертых частиц в балансе импульса.

Проверка критерия устойчивости (27) с использованием профилей скорости и магнитного поля, полученных из моделирования [8], показывает, что в центральной области плазмы условие выполняется, а на периферии может нарушаться, что коррелирует с экспериментально наблюдаемыми колебаниями вращения.

6 Заключение

В работе построена гидродинамическая редукция двухжидкостной модели стеллараторной плазмы. Основные результаты:

1. Введение обобщённого вихря $\mathbf{\Omega}_i = \nabla \times \mathbf{v}_i - \frac{e}{m_i}\mathbf{B}$ позволяет учесть эффект Холла и представить уравнение движения ионов в форме Громеки–Лэмба.

2. Из дрейфово-кинетического уравнения в банановом режиме с использованием вариационного принципа выведен тензор вязких напряжений запертых частиц; получены аналитические выражения для коэффициентов $\eta_\parallel$ и $\eta_\times$ (21)–(22), учитывающие геометрию магнитного поля.

3. Установлена прямая аналогия с гидродинамикой закрученной жидкости, на основе которой сформулирован обобщённый критерий устойчивости Релея (27).

4. Проведён анализ безразмерных параметров и выполнены численные оценки для W7-X, показывающие существенный вклад запертой вязкости в баланс импульса и влияние на устойчивость вращения. Сравнение с кодом DKES подтвердило достоверность результатов (расхождение 12%).

Полученные результаты могут быть использованы для разработки новых численных моделей равновесия и устойчивости плазмы в стеллараторах нового поколения.

A Вывод уравнения эволюции обобщённого вихря

В идеальном случае ($\hat{\boldsymbol{\pi}} = 0$, $\mathbf{R}_{ie} = 0$, $\nabla p_i = 0$) из (6) имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \nabla \frac{v_i^2}{2} - \mathbf{v}_i \times \boldsymbol{\Omega}_i = \frac{e}{m_i}\mathbf{E}. \tag{29}$$

Применяя оператор ротора и учитывая $\nabla \times (\nabla v_i^2/2) = 0$, $\nabla \times (\mathbf{v}_i \times \boldsymbol{\Omega}_i) = \mathbf{v}_i(\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}_i) - \boldsymbol{\Omega}_i(\nabla \cdot \mathbf{v}_i) + (\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \nabla)\mathbf{v}_i - (\mathbf{v}_i \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega}_i$, а также $\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}_i = -\frac{e}{m_i}\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, получаем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega}_i = (\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \nabla)\mathbf{v}_i - \boldsymbol{\Omega}_i(\nabla \cdot \mathbf{v}_i) + \frac{e}{m_i}\nabla \times \mathbf{E}. \tag{30}$$

В несжимаемом случае ($\nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0$) и при $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ имеем $d\boldsymbol{\Omega}_i/dt = (\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \nabla)\mathbf{v}_i$, что означает вмороженность обобщённого вихря.

Список литературы

[1] Dinklage A., Beidler C.D., Helander P. et al. Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator // Nature Physics. 2018. Vol. 14. P. 855–860. doi:10.1038/s41567-018-0141-9

[2] Helander P. Theory of plasma confinement in non-quasisymmetric magnetic fields // Reports on Progress in Physics. 2014. Vol. 77, No. 8. P. 087001. doi:10.1088/0034-4885/77/8/087001

[3] Гавриков М.Б. Электромагнитная гидродинамика. М.: Наука, 2018.

[4] Nemov V.V., Kasilov S.V., Kernbichler W., Heyn M.F. Evaluation of $1/\nu$ neoclassical transport in stellarators // Physics of Plasmas. 1999. Vol. 6, No. 12. P. 4622–4632. doi:10.1063/1.873267

[5] Beidler C.D., Allmaier K., Isaev M.Yu. et al. Benchmarking of the mono-energetic transport coefficients – results from the International Collaboration on Neoclassical Transport in Stellarators // Nuclear Fusion. 2011. Vol. 51, No. 7. P. 076001. doi:10.1088/0029-5515/51/7/076001

[6] Hazeltine R.D., Meiss J.D. Plasma Confinement. Dover Publications, 2003.

[7] Braginskii S.I. Transport processes in a plasma // Reviews of Plasma Physics. 1965. Vol. 1. P. 205–311.

[8] Proll J.H.E., Helander P., Connor J.W., Plunk G.G. Resilience of quasi-isodynamic stellarators against trapped-particle instabilities // Physical Review Letters. 2012. Vol. 108, No. 24. P. 245002. doi:10.1103/PhysRevLett.108.245002

[9] Ford O.P., Dinklage A., Bozhenkov S.A. et al. Poloidal and toroidal rotation in the W7-X stellarator during neutral beam injection // Nuclear Fusion. 2020. Vol. 60, No. 10. P. 106030. doi:10.1088/1741-4326/ab9e3f