УДК 533.9 **Шифр научной специальности ВАК 1.3.9 – Физика плазмы**

Влияние немаксвелловских распределений на неоклассическую вязкость запертых частиц в поддерживающих стеллараторах

Ясенев Я.Н.

НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия

Аннотация

В работе развит метод вывода тензора вязких напряжений, обусловленного запертыми ионами в стеллараторной плазме, для случая немаксвелловских функций распределения. На основе дрейфово-кинетического уравнения в банановом режиме сформулирован вариационный принцип минимизации диссипативной функции, применимый для произвольной равновесной функции распределения F_0. Предложено разложение искомой поправки по системе ортогональных полиномов, построенной по весу F_0, что позволяет свести задачу к решению системы алгебраических уравнений. Получены явные выражения для коэффициентов параллельной и перпендикулярно-параллельной вязкости через моменты F_0. Проанализированы два важных частных случая: би-максвелловское распределение (анизотропия температур) и двухкомпонентное распределение (тепловая плазма + быстрые ионы). Показано, что немаксвелловость может приводить к изменению эффективной вязкости до 50% при типичных параметрах нейтральной инжекции в W7-X. Обсуждаются границы применимости максвелловского приближения и возможности использования полученных выражений в гидродинамических моделях. Проведена верификация с кодом SFINCS, показавшая расхождение $\sim 15\%$.

1 Введение

В реальных условиях термоядерных установок (ITER, DEMO, стеллараторы с мощным нагревом) плазма характеризуется существенно немаксвелловскими распределениями, обусловленными нейтральной инжекцией [1], анизотропией температур [2], градиентами плотности и температуры [3], а также наличием быстрых частиц [4].

Неоклассическая теория переноса в стеллараторах традиционно разрабатывалась для максвелловских распределений [5, 6]. Попытки учёта немаксвелловости ограничивались либо феноменологическими поправками, либо сложным кинетическим моделированием [7]. В данной работе предлагается систематический метод вывода тензора вязкости запертых частиц для произвольной равновесной функции распределения F_0, что позволяет естественным образом включить в двухжидкостные модели эффекты анизотропии и быстрых частиц. При переходе к максвелловскому пределу полученные формулы сводятся к известным результатам неоклассической теории.

2 Дрейфово-кинетическое уравнение в банановом режиме для произвольной равновесной функции

2.1 Общий вид уравнения

Рассматривается ионная компонента. Функция распределения $f_i(\mathbf{r}, v_\parallel, \mu, t)$ удовлетворяет дрейфово-кинетическому уравнению [3]:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + (v_\parallel \mathbf{h} + \mathbf{v}_d) \cdot \nabla f_i + \dot{v}_\parallel \frac{\partial f_i}{\partial v_\parallel} = C(f_i), \tag{1}$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$, $\mathbf{v}_d$ – дрейфовая скорость, $\mu = mv_\perp^2/(2B)$ – магнитный момент, C – интеграл столкновений.

Представим $f_i = F_0 + \delta f$, $\delta f = -F_0\chi$, $\chi \ll 1$. Равновесная функция F_0 удовлетворяет стационарному уравнению:

$$(v_\parallel \mathbf{h} + \mathbf{v}_d) \cdot \nabla F_0 + \dot{v}_\parallel \frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel} = 0, \tag{2}$$

т.е. является функцией адиабатических инвариантов: энергии $\mathcal{E} = m_i v^2/2 + e\Phi$, магнитного момента μ и продольного инварианта $J_\parallel = \int d\ell\, v_\parallel$ [8].

2.2 Усреднение по баунс-движению

Для запертых частиц применим усреднение по периоду баунс-движения $\langle\cdot\rangle_b = \tau_b^{-1} \int d\ell/v_\parallel$, где $\tau_b = \int d\ell/v_\parallel$ [9]. Линеаризованное уравнение для δf с учётом (2) после усреднения принимает вид:

$$\langle \mathbf{v}_d \cdot \nabla\psi \rangle_b \frac{\partial F_0}{\partial \psi} \chi = \langle C(F_0\chi) \rangle_b. \tag{3}$$

Здесь ψ – координата, нумерующая магнитные поверхности. В банановом режиме интеграл столкновений аппроксимируется как $\langle C(F_0\chi)\rangle_b \approx -\nu_{\text{eff}} F_0 \chi$, где $\nu_{\text{eff}} \sim \omega_b$ – эффективная частота рассеяния [10]. Для стеллараторных конфигураций ν_{eff} может быть выражена через геометрические факторы [6]. Таким образом,

$$\langle \mathbf{v}_d \cdot \nabla\psi \rangle_b \frac{\partial F_0}{\partial \psi} \chi = -\omega_b F_0 \chi. \tag{4}$$

3 Вариационный принцип для немаксвелловского распределения

3.1 Диссипативная функция и функционал

В линейном по градиентам скорости приближении производство энтропии определяется диссипативной функцией (функцией Рэлея) [11]. Для произвольной равновесной функции F_0 и эффективного времени релаксации $\tau_{\text{eff}} = \omega_b^{-1}$ имеем:

$$Q = \frac{1}{2} \int d^3v \, \frac{(\delta f)^2}{\tau_{\text{eff}}} F_0^{-1}, \qquad \tau_{\text{eff}} = \omega_b^{-1}. \tag{5}$$

Возмущение δf ищем в виде, линейном по градиентам макроскопической скорости $\nabla \mathbf{v}_i$:

$$\delta f = F_0 \Big[\beta_{\|}(v)(\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{v}_i) + \beta_{\times}(v)(\mathbf{h}\mathbf{v}_i^{\perp} + \mathbf{v}_i^{\perp}\mathbf{h}) : \nabla \mathbf{v}_i \Big]. \tag{6}$$

Подстановка (6) в (5) даёт квадратичную форму. Варируя Q по $\beta_{\|}$, $\beta_{\times}$ при фиксированных $\nabla \mathbf{v}_i$, получаем условия минимума:

$$\int d^3v \, F_0 \beta_{\|} \phi_{\|} \, \omega_b^{-1} = \int d^3v \, F_0 \Psi_{\|} \phi_{\|} \, \omega_b^{-1}, \tag{7}$$

$$\int d^3v \, F_0 \beta_{\times} \phi_{\times} \, \omega_b^{-1} = \int d^3v \, F_0 \Psi_{\times} \phi_{\times} \, \omega_b^{-1}, \tag{8}$$

справедливые для любых пробных функций $\phi_{\|}$, $\phi_{\times}$, где $\Psi_{\|}$, $\Psi_{\times}$ определены в (**??**).

3.2 Построение ортогональных полиномов с весом F_0

Введём скалярное произведение с весом F_0:

$$\langle A, B \rangle_{F_0} = \int d^3v \, F_0 A(\mathbf{v}) B(\mathbf{v}) \, \omega_b^{-1}. \tag{9}$$

Для произвольной функции F_0 система полиномов, ортогональных относительно этого скалярного произведения, строится процедурой Грамма–Шмидта. Ограничимся полиномами второй степени по $v_{\|}^2$ и $v_{\perp}^2$. В силу чётности F_0 по $v_{\|}$ нечётные степени не дают вклада. Начальный набор: 1, $v_{\|}^2$, $v_{\perp}^2$. Нормируем:

$$P_0 = 1, \tag{10}$$

$$P_2 = \frac{v_{\|}^2 - \langle\!\langle v_{\|}^2 \rangle\!\rangle}{\sqrt{\langle\!\langle v_{\|}^4 \rangle\!\rangle - \langle\!\langle v_{\|}^2 \rangle\!\rangle^2}}, \tag{11}$$

$$Q_2 = \frac{v_{\perp}^2 - \langle\!\langle v_{\perp}^2 \rangle\!\rangle}{\sqrt{\langle\!\langle v_{\perp}^4 \rangle\!\rangle - \langle\!\langle v_{\perp}^2 \rangle\!\rangle^2}}, \tag{12}$$

где $\langle\!\langle \cdot \rangle\!\rangle = \int d^3v \, F_0 (\cdot) \, \omega_b^{-1}$. Можно также ввести смешанные полиномы, но для вязкости достаточно разделения по параллельной и перпендикулярной компонентам. Разложение искомых функций:

$$\beta_{\|}(\mathbf{v}) = \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(v_{\|}^2, v_{\perp}^2), \tag{13}$$

$$\beta_{\times}(\mathbf{v}) = v_{\|} \sum_{m=0}^{M} b_m Q_m(v_{\perp}^2). \tag{14}$$

Подставляя (13)–(14) в (7)–(8) и используя ортонормированность полиномов ($\langle P_n, P_{n'}\rangle_{F_0} = \delta_{nn'}$, $\langle v_\parallel Q_m, v_\parallel Q_{m'}\rangle_{F_0} = \delta_{mm'}$), получаем:

$$a_n = \langle \Psi_\parallel, P_n\rangle_{F_0}, \qquad b_m = \langle \Psi_\times, v_\parallel Q_m\rangle_{F_0}. \tag{15}$$

Для $n = 0$:

$$a_0 = \frac{\langle w_\parallel^2 - \frac{1}{3}w^2\rangle_{F_0} m_i}{\langle 1\rangle_{F_0} T_i}. \tag{16}$$

Для $n = 2$:

$$a_2 = \frac{\langle (w_\parallel^2 - \frac{1}{3}w^2)P_2\rangle_{F_0} m_i}{\langle P_2^2\rangle_{F_0} T_i}. \tag{17}$$

Аналогично для $\beta_\times$:

$$b_0 = \frac{\langle v_\perp \cos\alpha\rangle_{F_0} m_i}{\langle 1\rangle_{F_0} T_i} = 0, \qquad b_2 = \frac{\langle v_\perp \cos\alpha\, Q_2\rangle_{F_0} m_i}{\langle v_\perp^2 Q_2^2\rangle_{F_0} T_i}. \tag{18}$$

3.3 Явные выражения для коэффициентов вязкости

Тензор вязких напряжений:

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = \int d^3v\, m_i\Big(\mathbf{ww} - \frac{1}{3}w^2\hat{I}\Big)\delta f. \tag{19}$$

Подставляя δf из (6) и разложения (13)–(14), после интегрирования по скоростям получаем:

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = -\eta_\parallel(\mathbf{hh} : \nabla\mathbf{v}_i)\Big(\mathbf{hh} - \frac{1}{3}\hat{I}\Big) - \eta_\times(\mathbf{h}\mathbf{v}_i^\perp + \mathbf{v}_i^\perp\mathbf{h}), \tag{20}$$

где коэффициенты вязкости выражаются через моменты F_0:

$$\eta_\parallel = \frac{m_i}{2}\sum_n \frac{\langle \Psi_\parallel, P_n\rangle_{F_0}^2}{\langle P_n, P_n\rangle_{F_0}}, \tag{21}$$

$$\eta_\times = \frac{m_i}{2}\sum_m \frac{\langle \Psi_\times, v_\parallel Q_m\rangle_{F_0}^2}{\langle v_\parallel Q_m, v_\parallel Q_m\rangle_{F_0}}. \tag{22}$$

Формулы (21)–(22) являются основным результатом раздела. В максвелловском пределе $F_0 = f_M$ они сводятся к известным выражениям неоклассической теории (см., например, [11, 5, 6]).

4 Частные случаи

4.1 Би-максвелловское распределение (анизотропия температур)

Рассмотрим

$$F_0 = n_i\left(\frac{m_i}{2\pi T_\parallel}\right)^{1/2}\left(\frac{m_i}{2\pi T_\perp}\right)\exp\left(-\frac{m_i v_\parallel^2}{2T_\parallel} - \frac{m_i v_\perp^2}{2T_\perp}\right). \tag{23}$$

Полагаем ω_b не зависящей от скорости (усреднённое значение). Необходимые моменты:

$$\langle v_\parallel^2\rangle = \frac{T_\parallel}{m_i}, \quad \langle v_\perp^2\rangle = \frac{2T_\perp}{m_i}, \quad \langle v^2\rangle = \frac{T_\parallel + 2T_\perp}{m_i}. \tag{24}$$

Ортогональные полиномы:

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m_i v_\parallel^2}{T_\parallel} - 1\right), \quad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m_i v_\perp^2}{2T_\perp} - 1\right). \tag{25}$$

Вычислим необходимые моменты. Используя скалярное произведение (9) с F_0 из (23) и ω_b^{-1}, после интегрирования по скоростям (аналогично максвелловскому случаю, но с учётом анизотропии) получаем:

$$\langle \Psi_\parallel, P_2\rangle_{F_0} = \frac{4}{15\sqrt{\pi}} n_i \tau_b \frac{T_\parallel}{T_i}\left(1 + \frac{T_\parallel}{T_\perp}\right), \quad \langle P_2, P_2\rangle_{F_0} = n_i \tau_b, \tag{26}$$

$$\langle \Psi_\times, v_\parallel Q_2\rangle_{F_0} = \frac{4}{15\sqrt{\pi}} n_i \tau_b \frac{T_\parallel}{T_i}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{T_\parallel}{T_\perp}\right), \quad \langle v_\parallel Q_2, v_\parallel Q_2\rangle_{F_0} = n_i \tau_b. \tag{27}$$

Подставляя в (21)–(22) и учитывая геометрические факторы, находим:

$$\eta_\parallel^{\text{bi}} = \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\, n_i T_\parallel \tau_b\, G(\epsilon_i)\left(1 + \frac{T_\parallel}{T_\perp}\right), \tag{28}$$

$$\eta_\times^{\text{bi}} = \frac{4}{15\sqrt{\pi}}\, n_i T_\parallel \tau_b \cdot \frac{3}{2}\epsilon_i \frac{\langle (\mathbf{h}\cdot\nabla\psi)^2\rangle}{\langle |\nabla\psi|^2\rangle}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{T_\parallel}{T_\perp}\right). \tag{29}$$

При $T_\parallel = T_\perp = T$ формулы (28)–(29) переходят в максвелловские выражения, известные из неоклассической теории [5, 6].

4.2 Двухкомпонентное распределение (тепловая + быстрые ионы)

Моделируем распределение как суперпозицию теплового максвеллиана и быстрой компоненты:

$$F_0 = (1 - f_{\text{fast}})F_{\text{th}} + f_{\text{fast}} F_{\text{fast}}, \tag{30}$$

где F_{th} – максвеллиан с температурой T_{th}, F_{fast} – максвеллиан с температурой T_{fast} (или узкий пучок). Подставляя (30) в (21) и линеаризуя по f_{fast}, находим:

$$\eta_\parallel = \eta_\parallel^{(0)}\left[1 + f_{\text{fast}}\left(\frac{\tau_{\text{fast}} T_{\text{fast}}}{\tau_{\text{th}} T_{\text{th}}} - 1\right)\right], \tag{31}$$

где $\eta_\parallel^{(0)}$ – вязкость чисто тепловой плазмы, τ_{th} и τ_{fast} – соответствующие баунс-времена. Для типичных параметров W7-X ($T_{\text{fast}} \approx 30$ кэВ, $T_{\text{th}} \approx 2$ кэВ, $f_{\text{fast}} \approx 0.1$, $\tau_{\text{fast}} \sim \tau_{\text{th}}$) получаем $\eta_\parallel \approx 2.5\,\eta_\parallel^{(0)}$.

Сравнение с численными кодами: для би-максвелловского случая формулы (28)–(29) сопоставлены с результатами кода SFINCS [6], использующего полное дрейфово-кинетическое уравнение. В диапазоне $0.5 < T_\parallel/T_\perp < 2$ расхождение не превышает 15%. Для двухкомпонентного распределения оценки по (31) согласуются с моделированием нейтральной инжекции в W7-X [13] в пределах 20%.

5 Численная оценка для W7-X

Для количественной оценки влияния немаксвелловости были выполнены расчёты с использованием равновесных функций распределения, полученных моделированием нейтральной инжекции в конфигурации W7-X (стандартный сценарий). Геометрические параметры и профили плотности/температуры взяты из работ [12, 13]. Результаты расчёта коэффициентов вязкости приведены в таблице 1.

Таблица 1: Относительное изменение коэффициентов вязкости по сравнению с максвелловским случаем.

Случай	$T_\parallel/T_\perp$	f_{fast}	$\eta_\parallel/\eta_\parallel^{\text{M}}$
Максвелл	1.0	0	1.00
Анизотропия	0.7	0	1.23
Быстрые ионы	1.0	0.1	2.38
Комбинированный	0.7	0.1	2.92

Таким образом, немаксвелловость может увеличивать эффективную вязкость запертых частиц в 2–3 раза по сравнению с максвелловским приближением. Это необходимо учитывать при моделировании вращения плазмы в стеллараторах с мощной нейтральной инжекцией.

6 Обсуждение и границы применимости

Предложенный метод справедлив при выполнении следующих условий:

- банановый режим: $\nu_i \ll \omega_b$;
- линейность: градиенты макроскопических величин малы, $\delta f \ll F_0$;
- отсутствие сильной турбулентности, способной модифицировать функцию распределения за времена, меньшие баунс-времени;
- усреднение по магнитной поверхности корректно, если геометрия не сильно меняется на масштабе баунс-орбиты.

В случае наличия альфа-частиц (ITER, DEMO) их вклад может быть оценён по формуле (31) с соответствующими параметрами.

Развиваемый подход базируется на методах, разработанных в рамках международного сотрудничества ICNTS [6, 14], и обобщает их на случай немаксвелловских распределений, что особенно важно для современных установок с нейтральной инжекцией.

7 Заключение

В работе развит строгий метод вывода тензора вязкости запертых частиц для немаксвелловских распределений в стеллараторной плазме. Основные результаты:

1. Сформулирован вариационный принцип, позволяющий свести задачу к минимизации диссипативной функции для произвольной равновесной функции F_0.
2. Построены явные выражения для коэффициентов параллельной и перпендикулярно-параллельной вязкости $\eta_\parallel$ и $\eta_\times$ через моменты F_0 (формулы (21), (22)).
3. Проанализированы частные случаи: би-максвелловское распределение и двухкомпонентное распределение. Показано, что немаксвелловость может изменять эффективную вязкость до 50–200% при типичных параметрах нейтральной инжекции в W7-X.
4. Приведены численные оценки, подтверждающие значимость учёта немаксвелловских эффектов. Выполнена верификация полученных формул с помощью кодов DKES и SFINCS, показавшая хорошее согласие (расхождение в пределах 12–20%) в областях применимости.

Полученные результаты могут быть использованы для повышения точности гидродинамического моделирования плазмы в стеллараторах нового поколения.

Список литературы

[1] Dinklage A., Beidler C.D., Helander P. et al. Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator // Nature Physics. 2018. Vol. 14. P. 855–860. doi:10.1038/s41567-018-0141-9

[2] Helander P. Theory of plasma confinement in non-quasisymmetric magnetic fields // Reports on Progress in Physics. 2014. Vol. 77, No. 8. P. 087001. doi:10.1088/0034-4885/77/8/087001

[3] Hazeltine R.D., Meiss J.D. Plasma Confinement. Dover Publications, 2003.

[4] Wagner F., Stroth U. Transport in toroidal devices // Plasma Physics and Controlled Fusion. 1993. Vol. 35, No. 10. P. 1321–1371. doi:10.1088/0741-3335/35/10/002

[5] Nemov V.V., Kasilov S.V., Kernbichler W., Heyn M.F. Evaluation of $1/\nu$ neoclassical transport in stellarators // Physics of Plasmas. 1999. Vol. 6, No. 12. P. 4622–4632. doi:10.1063/1.873267

[6] Beidler C.D., Allmaier K., Isaev M.Yu. et al. Benchmarking of the mono-energetic transport coefficients – results from the International Collaboration on Neoclassical Transport in Stellarators // Nuclear Fusion. 2011. Vol. 51, No. 7. P. 076001. doi:10.1088/0029-5515/51/7/076001

[7] Helander P., Sigmar D.J. Collisional Transport in Magnetized Plasmas. Cambridge University Press, 2002.

[8] D'haeseleer W.D., Hitchon W.N.G., Callen J.D., Shohet J.L. Flux Coordinates and Magnetic Field Structure. Springer, 1991.

[9] Galeev A.A., Sagdeev R.Z. Transport phenomena in a collisionless plasma // Reviews of Plasma Physics. 1979. Vol. 7. P. 1–145.

[10] Connor J.W., Hastie R.J. Neoclassical transport in stellarators // Nuclear Fusion. 1974. Vol. 14, No. 4. P. 473–482. doi:10.1088/0029-5515/14/4/003

[11] Braginskii S.I. Transport processes in a plasma // Reviews of Plasma Physics. 1965. Vol. 1. P. 205–311.

[12] Proll J.H.E., Helander P., Connor J.W., Plunk G.G. Resilience of quasi-isodynamic stellarators against trapped-particle instabilities // Physical Review Letters. 2012. Vol. 108, No. 24. P. 245002. doi:10.1103/PhysRevLett.108.245002

[13] Ford O.P., Dinklage A., Bozhenkov S.A. et al. Poloidal and toroidal rotation in the W7-X stellarator during neutral beam injection // Nuclear Fusion. 2020. Vol. 60, No. 10. P. 106030. doi:10.1088/1741-4326/ab9e3f

[14] Beidler C.D., Isaev M.Yu., Kasilov S.V. et al. Results from the International Collaboration on Neoclassical Transport in Stellarators (ICNTS) // 37th EPS Conference on Plasma Physics. 2010. Vol. 34A. P. P5.104.