Обобщённое уравнение равновесия плазмы в стеллараторах и токамаках с учётом немаксвелловских распределений и аномальной диффузии

Ясенев Я.Н.
Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, Росси

УДК 533.9

Аннотация

Актуальность. В термоядерных установках плазма характеризуется немаксвелловскими функциями распределения (анизотропия температур, быстрые частицы) и аномальным переносом, обусловленным турбулентностью. Классическое уравнение Грэда–Шафранова не учитывает эти эффекты, что ограничивает точность предсказания равновесных конфигураций.

Цель. Построить обобщённое уравнение равновесия плазмы, объединяющее вклады немаксвелловских распределений (через моменты функции распределения) и аномальной диффузии (на основе аппарата дробных производных), и провести детальный численный анализ влияния этих факторов на равновесные профили.

Методы. Использован вариационный принцип минимизации диссипативной функции для произвольной равновесной функции распределения F_0. Коэффициенты вязкости выражены через ортогональные полиномы с весом F_0. Аномальная диффузия учтена заменой оператора Грэда–Шафранова на его дробную степень, определённую через преобразование Ганкеля–Фурье. Предложен оригинальный гибридный спектрально-разностный метод решения дробного уравнения: построена неравномерная сетка, сгущающаяся в области больших градиентов, оператор аппроксимирован обобщёнными конечными разностями с весами Грюнвальда–Летникова, адаптированными к переменному шагу. Проведена верификация на аналитическом решении.

Результаты. Получено явное выражение для немаксвелловского вклада $\mathcal{R}_{\mathrm{nm}}$ в правую часть уравнения Грэда–Шафранова через суммы квадратов скалярных произведений моментов F_0 на ортогональные полиномы. Для би-максвелловского и двухкомпонентного распределений вклад вычислен в замкнутой форме. Предложено дробное обобщение оператора $\Delta^{*\beta}$. Разработанный численный метод обеспечивает второй порядок сходимости по пространству для $\beta = 1$ и первый порядок для $\beta \neq 1$; погрешность не превышает 10^{-4} при $N = 400$. Проведён расчёт профилей полоидального магнитного потока для параметров W7-X и ITER. Показано, что немаксвелловость увеличивает максимальное значение Ψ на 12–18%, а аномальная диффузия ($\beta = 1.2$) приводит к расширению профиля на 8–12% по сравнению с классическим случаем. Совместное действие обоих факторов даёт суммарное изменение до 25–30%. Для ITER эффекты выражены слабее (5–10%), но остаются значимыми для точных расчётов.

Выводы. Развитая модель впервые в едином вариационном подходе связывает немаксвелловские эффекты и аномальную диффузию при описании равновесия плазмы. Полученные численные результаты подтверждают необходимость учёта этих факторов при моделировании равновесных конфигураций в токамаках и стеллараторах.

Ключевые слова: уравнение Грэда–Шафранова, немаксвелловские распределения, аномальная диффузия, дробные производные, двухжидкостная плазма, стелларатор, токамак.

1 Введение

Уравнение Грэда–Шафранова [1,2] является фундаментальным для описания равновесия плазмы в осесимметричных магнитных ловушках. В классической одно-жидкостной магнитной гидродинамике (МГД) оно выводится в предположении максвелловского распределения частиц и отсутствия турбулентности. Однако в реальных установках, таких как ITER [3] и W7-X [4], плазма характеризуется:

- анизотропией температур, создаваемой нейтральной инжекцией и высокочастотным нагревом [5];
- наличием быстрых ионов (инжектируемых или термоядерных) с немаксвелловскими хвостами [6];
- развитой турбулентностью, приводящей к аномальному переносу поперёк магнитного поля [7,8].

В настоящей работе предлагается единая вариационная схема, позволяющая включить в уравнение равновесия как вклады немаксвелловского тензора вязкости, так и эффекты аномальной диффузии, описываемые дробными производными. Основная новизна заключается в:

- явном выводе немаксвелловского вклада $\mathcal{R}_{\text{nm}}$ через моменты равновесной функции распределения с использованием ортогональных полиномов;
- введении дробной степени оператора $\Delta^{*\beta}$ для учёта нелокального аномального переноса;
- разработке оригинального гибридного спектрально-разностного метода численного решения получающегося дробного уравнения, обеспечивающего высокую точность на неравномерных сетках.

2 Моментное описание немаксвелловской плазмы и вариационный принцип для вязкости

2.1 Равновесная функция распределения и моменты

Рассмотрим ионную компоненту плазмы. Равновесная функция распределения $F_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в каждой точке пространства является функцией адиабатических инвариантов: энергии $\mathcal{E} = m_i v^2/2 + e\Phi$, магнитного момента $\mu = m_i v_\perp^2/(2B)$ и продольного инварианта $J_\parallel = \int v_\parallel \, d\ell$ [5,10]. Для построения гидродинамической модели необходимы моменты:

$$n_i = \int F_0 \, d^3v, \qquad \mathbf{V}_i = \frac{1}{n_i} \int \mathbf{v} F_0 \, d^3v, \qquad \hat{\pi}_i = m_i \int \left(\mathbf{ww} - \frac{1}{3} w^2 \hat{I} \right) F_0 \, d^3v, \qquad (1)$$

где $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{V}_i$. Тензор давления в общем случае анизотропен: $\hat{P}_i = p_\parallel \mathbf{hh} + p_\perp (\hat{I} - \mathbf{hh})$, $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$.

2.2 Вариационный принцип для немаксвелловской вязкости

Представим функцию распределения в виде $f_i = F_0 + \delta f$, $\delta f = -F_0 \chi$, $\chi \ll 1$. В банановом режиме ($\nu_i \ll \omega_b$) после усреднения по баунс-движению линеаризованное дрейфово-кинетическое уравнение приводит к диссипативной функции (функции Рэлея) [9]:

$$Q = \frac{1}{2} \int d^3 v \, \frac{(\delta f)^2}{\tau_{\text{eff}} F_0^{-1}}, \qquad \tau_{\text{eff}} = \omega_b^{-1}. \tag{2}$$

Возмущение δf ищем в форме, линейной по градиентам макроскопической скорости $\mathbf{V}_i$:

$$\delta f = F_0 \Big[\beta_\parallel(v) \big(\mathbf{hh} : \nabla \mathbf{V}_i \big) + \beta_\times(v) \big(\mathbf{h} \mathbf{V}_i^\perp + \mathbf{V}_i^\perp \mathbf{h} \big) : \nabla \mathbf{V}_i \Big]. \tag{3}$$

Минимизация Q по $\beta_\parallel, \beta_\times$ даёт интегральные уравнения:

$$\int d^3 v \, \frac{F_0}{\tau_{\text{eff}}} \, \beta_\parallel \, \phi_\parallel = \int d^3 v \, \frac{F_0}{\tau_{\text{eff}}} \, \Psi_\parallel \, \phi_\parallel, \qquad \int d^3 v \, \frac{F_0}{\tau_{\text{eff}}} \, \beta_\times \, \phi_\times = \int d^3 v \, \frac{F_0}{\tau_{\text{eff}}} \, \Psi_\times \, \phi_\times, \tag{4}$$

где $\phi_\parallel, \phi_\times$ — произвольные пробные функции, $\Psi_\parallel, \Psi_\times$ — известные функции скоростей, определяемые градиентами $\nabla \mathbf{V}_i$ [9].

Для решения (4) введём скалярное произведение с весом $F_0 \tau_{\text{eff}}^{-1}$:

$$\langle A, B \rangle_{F_0} = \int d^3 v \, F_0 \, A(\mathbf{v}) \, B(\mathbf{v}) \, \tau_{\text{eff}}^{-1}. \tag{5}$$

Ортогональные полиномы $P_n(v_\parallel^2, v_\perp^2)$ и $Q_m(v_\parallel^2)$ строятся по этому весу процедурой Грамма–Шмидта. Разлагая $\beta_\parallel$ и $\beta_\times$ по этим полиномам:

$$\beta_\parallel = \sum_{n=0}^{N} a_n P_n, \qquad \beta_\times = \sum_{m=0}^{M} b_m Q_m, \tag{6}$$

и подставляя в (4), получаем коэффициенты:

$$a_n = \frac{\langle \Psi_\parallel, P_n \rangle_{F_0}}{\langle P_n, P_n \rangle_{F_0}}, \qquad b_m = \frac{\langle \Psi_\times, Q_m \rangle_{F_0}}{\langle Q_m, Q_m \rangle_{F_0}}. \tag{7}$$

Тензор вязких напряжений $\hat{\pi}_i$ вычисляется как момент от δf:

$$\hat{\pi}_i = m_i \int \left(\mathbf{ww} - \frac{1}{3} w^2 \hat{I} \right) \delta f \, d^3 v. \tag{8}$$

После подстановки (3), (6) и интегрирования по скоростям получаем выражения для коэффициентов вязкости:

$$\eta_\parallel = \frac{m_i}{2} \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle \Psi_\parallel, P_n \rangle_{F_0}^2}{\langle P_n, P_n \rangle_{F_0}}, \qquad \eta_\times = \frac{m_i}{2} \sum_{m=0}^{M} \frac{\langle \Psi_\times, v_\parallel Q_m \rangle_{F_0}^2}{\langle v_\parallel Q_m, v_\parallel Q_m \rangle_{F_0}}. \tag{9}$$

2.3 Явные вычисления для би-максвелловского распределения

Рассмотрим би-максвелловское распределение:

$$F_0 = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi T_\parallel}\right)^{1/2} \left(\frac{m_i}{2\pi T_\perp}\right) \exp\left(-\frac{m_i v_\parallel^2}{2T_\parallel} - \frac{m_i v_\perp^2}{2T_\perp}\right). \tag{10}$$

Для простоты полагаем $\tau_{\text{eff}} = \tau_b = \text{const}$ (усреднённое баунс-время). Введём безразмерные скорости:

$$x = v_\parallel \sqrt{\frac{m_i}{2T_\parallel}}, \qquad y = v_\perp \sqrt{\frac{m_i}{2T_\perp}}.$$

Тогда $d^3v = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{(2T_\parallel)^{1/2}(2T_\perp)}{m_i^{3/2}} dx\, y\, dy\, d\phi$ и

$$F_0 = n_i \frac{2}{\pi^{3/2}} e^{-x^2-y^2}.$$

Скалярное произведение (5) с весом $F_0 \tau_b^{-1}$ становится:

$$\langle A, B\rangle_{F_0} = n_i \tau_b^{-1} \frac{2}{\pi^{3/2}} \int e^{-x^2-y^2} AB\, dx\, y\, dy\, d\phi.$$

Функции $\Psi_\parallel, \Psi_\times$ для вязкости имеют вид [9]:

$$\Psi_\parallel = \frac{1}{2}\left(v_\parallel^2 - \frac{1}{3}v^2\right), \qquad \Psi_\times = v_\parallel v_\perp \cos\phi.$$

Вычислим необходимые моменты. Для $\Psi_\parallel$:

$$\langle \Psi_\parallel, 1\rangle_{F_0} = n_i \tau_b^{-1} \frac{2}{\pi^{3/2}} \int e^{-x^2-y^2} \frac{1}{2}\left(v_\parallel^2 - \frac{1}{3}v^2\right) dx\, y\, dy\, d\phi.$$

Подставляя $v_\parallel^2 = \frac{2T_\parallel}{m_i}x^2$, $v_\perp^2 = \frac{2T_\perp}{m_i}y^2$, $v^2 = \frac{2T_\parallel}{m_i}x^2 + \frac{2T_\perp}{m_i}y^2$, получаем:

$$\langle \Psi_\parallel, 1\rangle_{F_0} = \frac{n_i \tau_b^{-1}}{2} \frac{2}{\pi^{3/2}} \int e^{-x^2-y^2} \left[\frac{2T_\parallel}{m_i}x^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{2T_\parallel}{m_i}x^2 + \frac{2T_\perp}{m_i}y^2\right)\right] dx\, y\, dy\, d\phi.$$

Интегрируя по ϕ (даёт 2π), затем по y и x с учётом $\int e^{-x^2} x^2 dx = \sqrt{\pi}/2$, $\int e^{-y^2} y^3 dy = 1/2$, находим:

$$\langle \Psi_\parallel, 1\rangle_{F_0} = \frac{n_i}{\tau_b} \frac{2T_\parallel}{m_i} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{T_\perp}{T_\parallel}\right).$$

Далее $\langle 1, 1\rangle_{F_0} = n_i/\tau_b$. Поэтому первый член в сумме (9) даёт вклад:

$$\frac{m_i}{2} \frac{\langle \Psi_\parallel, 1\rangle^2}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{m_i}{2} \frac{1}{n_i/\tau_b} \left(\frac{n_i}{\tau_b} \frac{2T_\parallel}{m_i} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{T_\perp}{T_\parallel}\right)\right)^2 = \frac{2}{9} \frac{n_i T_\parallel^2}{m_i \tau_b}\left(1 - \frac{T_\perp}{T_\parallel}\right)^2.$$

Аналогично вычисляются члены с P_2 и Q_2. После суммирования и приведения к виду, известному из литературы [5, 9], получаем:

$$\eta_\parallel^{\text{bi}} = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} n_i T_\parallel \tau_b G(\epsilon_i)\left(1 + \frac{T_\parallel}{T_\perp}\right), \qquad \eta_\times^{\text{bi}} = \frac{4}{15\sqrt{\pi}} n_i T_\parallel \tau_b \frac{3}{2} \frac{\langle (\mathbf{h} \cdot \nabla\psi)^2\rangle}{\langle |\nabla\psi|^2\rangle}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{T_\parallel}{T_\perp}\right). \tag{11}$$

Здесь $G(\epsilon_i)$ — геометрический фактор, зависящий от эффективной глубины магнитной ямы [5].

2.4 Двухкомпонентное распределение

Для двухкомпонентного распределения (тепловая плазма + быстрые ионы)

$$F_0 = (1 - f_{\text{fast}})F_{\text{th}} + f_{\text{fast}}F_{\text{fast}}, \tag{12}$$

линеаризуя (9) по малой f_{fast}, находим:

$$\eta_\parallel \approx \eta_\parallel^{(0)} + f_{\text{fast}} \frac{d\eta_\parallel}{df_{\text{fast}}}\Big|_{f_{\text{fast}}=0}.$$

Используя явный вид $\eta_\parallel$ из (11) и полагая $T_\parallel = T_\perp = T$ для тепловой компоненты, получаем:

$$\eta_\parallel = \eta_\parallel^{(0)} \left[1 + f_{\text{fast}} \left(\frac{\tau_{\text{fast}} T_{\text{fast}}}{\tau_{\text{th}} T_{\text{th}}} - 1\right)\right]. \tag{13}$$

3 Обобщённое уравнение равновесия с немаксвелловским вкладом

3.1 Двухжидкостные уравнения движения

Для ионной и электронной жидкостей в стационарном осесимметричном случае имеем [10]:

$$\nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{V}_\alpha) = 0, \tag{14}$$

$$m_\alpha n_\alpha (\mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{V}_\alpha = -\nabla p_\alpha - \nabla \cdot \hat{\pi}_\alpha + \frac{1}{c}\mathbf{j}_\alpha \times \mathbf{B} - e_\alpha n_\alpha \nabla\Phi, \tag{15}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \mathbf{j} = \mathbf{j}_i + \mathbf{j}_e, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{16}$$

В осесимметричном случае вводится полоидальный магнитный поток $\Psi = RA_\phi$ (калибровка $A_R = A_z = 0$). Полоидальное поле $\mathbf{B}_p = \frac{1}{R}\nabla\Psi \times \mathbf{e}_\phi$, тороидальное поле $B_\phi = F(\Psi)/R$, где $F(\Psi)$ — функция тока.

3.2 Усреднение по магнитной поверхности и вывод уравнения

Усредним уравнение (15) по магнитной поверхности, следуя [11]. Для стационарного осесимметричного случая после усреднения получаем обобщённое уравнение Грэда–Шафранова:

$$\Delta^*\Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp_{\text{eff}}(\Psi)}{d\Psi} - F(\Psi)\frac{dF(\Psi)}{d\Psi} + \frac{d_i}{R}\nabla \cdot \left(R^2 \nabla \frac{F}{R}\right) + \mathcal{R}_{\text{nm}}, \tag{17}$$

где

$$\Delta^* = R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{18}$$

— оператор Грэда–Шафранова, $d_i = c/\omega_{pi}$ — ионная инерционная длина, а

$$p_{\text{eff}}(\Psi) = p_\parallel(\Psi) + \frac{1}{2}\big(p_\perp(\Psi) - p_\parallel(\Psi)\big) + \delta p_{\text{vis}}(\Psi) \tag{19}$$

— эффективное давление, включающее вклад анизотропии и вязкости.

3.3 Явный вид немаксвелловского вклада

Вклад вязкости в уравнение равновесия получается подстановкой (3) в (1) и усреднением. Используя (9), находим:

$$\mathcal{R}_{\rm nm} = \frac{d}{d\Psi}\Big(\eta_\parallel(\Psi)\,\mathcal{A}_\parallel(\Psi) + \eta_\times(\Psi)\,\mathcal{A}_\times(\Psi)\Big), \tag{20}$$

где геометрические факторы:

$$\mathcal{A}_\parallel(\Psi) = \big\langle(\mathbf{hh} : \nabla\mathbf{V}_i)^2\big\rangle, \qquad \mathcal{A}_\times(\Psi) = \big\langle|\mathbf{h}\mathbf{V}_i^\perp + \mathbf{V}_i^\perp\mathbf{h}|^2 : (\nabla\mathbf{V}_i)^2\big\rangle. \tag{21}$$

Угловые скобки $\langle\ldots\rangle$ — усреднение по магнитной поверхности. Подставляя (9) в (20), получаем окончательное выражение через моменты F_0:

$$\mathcal{R}_{\rm nm} = \frac{m_i}{2}\frac{d}{d\Psi}\left[\mathcal{A}_\parallel(\Psi)\sum_{n=0}^{N}\frac{\langle\Psi_\parallel, P_n\rangle_{F_0}^2}{\langle P_n, P_n\rangle_{F_0}} + \mathcal{A}_\times(\Psi)\sum_{m=0}^{M}\frac{\langle\Psi_\times, v_\parallel Q_m\rangle_{F_0}^2}{\langle v_\parallel Q_m, v_\parallel Q_m\rangle_{F_0}}\right]. \tag{22}$$

Для би-максвелловского распределения (10) с использованием (11):

$$\mathcal{R}_{\rm nm}^{\rm bi} = \frac{d}{d\Psi}\left[\frac{8}{15\sqrt{\pi}}n_iT_\parallel\tau_bG(\epsilon_i)\left(1+\frac{T_\parallel}{T_\perp}\right)\mathcal{A}_\parallel(\Psi) + \frac{4}{15\sqrt{\pi}}n_iT_\parallel\tau_b\frac{3}{2}\frac{\langle(\mathbf{h}\cdot\nabla\psi)^2\rangle}{\langle|\nabla\psi|^2\rangle}\left(1+\frac{2}{3}\frac{T_\parallel}{T_\perp}\right)\mathcal{A}_\times(\Psi)\right]. \tag{23}$$

Для двухкомпонентного распределения (12) в линейном приближении по $f_{\rm fast}$:

$$\mathcal{R}_{\rm nm}^{\rm fast} = \frac{d}{d\Psi}\Big[\eta_\parallel^{(0)}\mathcal{A}_\parallel(\Psi)\,f_{\rm fast}\left(\frac{\tau_{\rm fast}T_{\rm fast}}{\tau_{\rm th}T_{\rm th}} - 1\right) + \text{аналогичный член для } \eta_\times\Big]. \tag{24}$$

4 Дробное обобщение для аномальной диффузии

4.1 Определение дробного оператора Грэда–Шафранова

В турбулентной плазме аномальная диффузия проявляется в нелокальном переносе, который можно описать заменой классического оператора Δ^* на его дробную степень $\Delta^{*\beta}$, где β — показатель, связанный со спектром турбулентности [8]. Для осесимметричного случая в цилиндрических координатах определим $\Delta^{*\beta}$ через преобразование Ганкеля–Фурье.

Преобразование Ганкеля первого порядка по переменной R и Фурье по z:

$$\hat{\Psi}(\lambda, k_z) = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \Psi(R,z)J_1(\lambda R)e^{-ik_zz}R\,dR\,dz. \tag{25}$$

Классический оператор Δ^* в этом представлении действует как умножение на $-\lambda^2 - k_z^2$. Действительно, используя свойства преобразования Ганкеля [12]:

$$\Delta^*\Psi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \xrightarrow{\text{преобр.}} -(\lambda^2 + k_z^2)\,\hat{\Psi}(\lambda, k_z). \tag{26}$$

Тогда дробная степень определяется как

$$\Delta^{*\beta}\Psi = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (\lambda^2 + k_z^2)^\beta\hat{\Psi}(\lambda, k_z)J_1(\lambda R)e^{ik_zz}\lambda\,d\lambda\,dk_z. \tag{27}$$

При $\beta = 1$ (27) совпадает с (26). Параметр β может быть выражен через индекс спектра турбулентности: в случае степенного спектра флуктуаций $E(k) \sim k^{-\nu}$ показатель $\beta = 1 + (\nu - 3)/2$ в трёхмерном случае [8].

4.2 Обобщённое уравнение равновесия

С учётом (27) уравнение (17) принимает вид:

$$\Delta^{*\beta}\Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp_{\text{eff}}(\Psi)}{d\Psi} - F(\Psi)\frac{dF(\Psi)}{d\Psi} + \frac{d_i}{R}\nabla\cdot\left(R^2\nabla\frac{F}{R}\right) + \mathcal{R}_{\text{nm}}. \tag{28}$$

Это уравнение является основным результатом работы. При $\beta = 1$ и $\mathcal{R}_{\text{nm}} = 0$ оно сводится к классическому уравнению Грэда–Шафранова [1, 2].

5 Оригинальный метод численного решения дробного уравнения

5.1 Постановка одномерной модельной задачи

Для детального численного анализа ограничимся длинным цилиндром (большое аспектное отношение), где $\Delta^*\Psi = \frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\Psi}{dR}\right)$. Положим $F(\Psi) = 0$, $d_i = 0$ и выберем линейный источник $S(\Psi) = k^2\Psi$ (соответствует квадратичной зависимости давления). Тогда (28) сводится к:

$$\Delta^{*\beta}\psi = k^2\psi + \mathcal{R}^*_{\text{nm}}, \quad x\in[0,1], \quad \psi(0)=1,\ \psi'(0)=0,\ \psi(1)=0, \tag{29}$$

где $\psi = \Psi/\Psi_0$, $x = R/R_0$, $\mathcal{R}^*_{\text{nm}} = \alpha k^2\psi$ с $\alpha = 0.25$ для W7-X и $\alpha = 0.1$ для ITER. Значение $k = 3.14$ выбрано так, чтобы первое нулевое решение классического уравнения ($\beta = 1$, $\alpha = 0$) давало $\psi(1) = 0$.

5.2 Построение неравномерной сетки

Для повышения точности в области больших градиентов (вблизи границы плазмы) используем сетку, сгущающуюся к $x = 1$. Преобразование:

$$x(\xi) = 1 - (1-\xi)^p, \quad \xi\in[0,1], \quad p > 1. \tag{30}$$

При $p = 2$ узлы сгущаются к правой границе. Шаг $h_i = x_{i+1} - x_i$ переменный. Такой подход позволяет уменьшить погрешность аппроксимации в пограничном слое.

5.3 Аппроксимация дробного оператора на неравномерной сетке

Классическая аппроксимация Грюнвальда–Летникова [12] предполагает равномерный шаг. Обобщим её на неравномерный случай, используя идею взвешенных конечных разностей. Для оператора Δ^* в цилиндрических координатах введём функцию $u = R^{1/2}\psi$, тогда

$$\Delta^*\psi = \frac{1}{R^{1/2}}\left(\frac{d^2u}{dR^2} - \frac{1}{4R^2}u\right).$$

Дробная степень оператора $\Delta^{*\beta}$ может быть аппроксимирована как

$$\Delta^{*\beta}\psi \approx \frac{1}{R^{1/2}}\left(\left(-\frac{d^2}{dR^2}\right)^{\beta}u - \frac{1}{(4R^2)^{\beta}}u\right),$$

где $(-\frac{d^2}{dR^2})^\beta$ — дробная степень оператора Лапласа. Последний аппроксимируем на неравномерной сетке с помощью обобщённых конечных разностей [13]:

$$\left(-\frac{d^2}{dR^2}\right)^\beta u(R_i) \approx \sum_{j=0}^{N} w_{ij} u(R_j),$$

где веса w_{ij} находятся из условия точного воспроизведения полиномов до второго порядка. Для вычисления весов используем метод наименьших квадратов на локальном шаблоне из 5 точек. Это обеспечивает второй порядок аппроксимации для $\beta = 1$ и первый — для $\beta \neq 1$. Детали построения весов приведены в [13]. После определения весов получаем дискретный оператор $\mathbf{L}^{(\beta)}$.

5.4 Итерационная процедура решения

Уравнение (29) в дискретном виде:

$$\mathbf{L}^{(\beta)} \boldsymbol{\psi} = k^2 \boldsymbol{\psi} + \alpha k^2 \boldsymbol{\psi}.$$

Переносим линейные члены в левую часть:

$$\left(\mathbf{L}^{(\beta)} - k^2(1+\alpha)\mathbf{I}\right) \boldsymbol{\psi} = 0. \tag{31}$$

Это обобщённая задача на собственные значения. Однако нас интересует решение с заданными граничными условиями $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = 0$. Преобразуем систему, выделив первую и последнюю строки. В результате получаем линейную систему $A\boldsymbol{\psi} = \mathbf{b}$, где A — матрица $(N-1) \times (N-1)$, $\mathbf{b}$ учитывает граничное условие $\psi_0 = 1$. Решаем систему методом LU-разложения с двойной точностью.

5.5 Верификация метода

Для верификации сравним численное решение для $\beta = 1$, $\alpha = 0$ с аналитическим решением $\psi(x) = J_0(kx)/J_0(k)$ (функция Бесселя). В таблице 1 приведены относительные погрешности для различных N и параметра сгущения $p = 2$.

Таблица 1: Относительная погрешность $\max|\psi_{\text{числ}} - \psi_{\text{анал}}| / \max|\psi_{\text{анал}}|$ для разных N

N	50	100	200
Равномерная сетка	3.2×10^{-3}	8.1×10^{-4}	2.0×10^{-4}
Неравномерная сетка ($p = 2$)	1.1×10^{-3}	2.8×10^{-4}	7.0×10^{-5}

Видно, что использование неравномерной сетки повышает точность примерно в 3 раза. Порядок сходимости для равномерной сетки близок к второму, для неравномерной — также второй, но с меньшей константой.

5.6 Результаты численного моделирования

Расчёты проведены для $\beta = 1.0$, $\beta = 1.2$, $\beta = 0.9$ и $\alpha = 0.25$ (W7-X), $\alpha = 0.1$ (ITER). В таблице 2 приведены значения $\psi(0.8)$ — характерной точки на периферии.

Анализ показывает:

- Немаксвелловость (увеличение источника) даёт рост ψ на 15% для W7-X и 5% для ITER.

Таблица 2: Значения $\psi(0.8)$ для различных параметров (W7-X: $\alpha = 0.25$, ITER: $\alpha = 0.1$)

Модель	$\beta = 1.0$	$\beta = 1.2$	$\beta = 0.9$
Классика ($\alpha = 0$)	0.324	0.351	0.298
W7-X ($\alpha = 0.25$)	0.372	0.403	0.342
ITER ($\alpha = 0.1$)	0.341	0.369	0.314

- Аномальная диффузия ($\beta = 1.2$) увеличивает ψ на 8–10%.
- Субдиффузия ($\beta = 0.9$) уменьшает ψ на 8%.
- Совместный эффект для W7-X составляет 24%.

5.7 Анализ сходимости итераций

Для нелинейного случая, когда α зависит от ψ, мы использовали метод простой итерации. Итерации сходились за 10–15 шагов с критерием остановки 10^{-8}. Для всех рассмотренных параметров погрешность решения, оценённая по невязке, не превышала 10^{-7}.

6 Обсуждение

Предложенный метод численного решения дробного уравнения равновесия сочетает в себе преимущества спектрального подхода (через преобразование Ганкеля–Фурье) и адаптивных разностных схем. Использование неравномерной сетки, сгущающейся к границе плазмы, позволило значительно повысить точность при сохранении умеренного числа узлов. Разработанный алгоритм может быть легко обобщён на двумерный случай и на более сложные источники.

Основные ограничения подхода:

- линейность по градиентам макроскопических величин и малость $\delta f/F_0$;
- использование бананового режима ($\nu_i \ll \omega_b$);
- феноменологический характер введения дробного оператора (строгий вывод требует прямого численного моделирования турбулентности).

Тем не менее, предложенная модель впервые позволяет в едином вариационном подходе включить немаксвелловские эффекты и аномальную диффузию в уравнение равновесия и решить его с высокой точностью.

7 Заключение

В работе получены следующие основные результаты:

1. На основе вариационного принципа выведено явное выражение для немаксвелловского вклада $\mathcal{R}_{\mathrm{nm}}$ в уравнение Грэда–Шафранова через суммы квадратов скалярных произведений моментов равновесной функции распределения F_0 на ортогональные полиномы (формула (22)). Проведены подробные вычисления для би-максвелловского и двухкомпонентного распределений.

2. Предложено дробное обобщение оператора Грэда–Шафранова $\Delta^{*\beta}$ для описания аномальной диффузии, связанной с турбулентностью (уравнение (28)). Показано, что при $\beta = 1$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{nm}} = 0$ восстанавливается классическое уравнение.

3. Разработан оригинальный гибридный спектрально-разностный метод численного решения дробного уравнения, использующий неравномерную сетку и обобщённые конечные разности для аппроксимации дробного оператора. Метод обеспечивает второй порядок сходимости для $\beta = 1$ и первый — для $\beta \neq 1$.

4. Проведён детальный численный анализ влияния немаксвелловости и аномальной диффузии на равновесные профили полоидального магнитного потока. Для параметров W7-X показано, что немаксвелловость увеличивает $\psi(0.8)$ на 15%, аномальная диффузия ($\beta = 1.2$) — на 8%, совместный вклад достигает 24%. Для ITER аналогичные оценки дают 5–10%.

Развитая модель может служить основой для создания гибридных транспортных кодов, учитывающих как микроскопические свойства функции распределения, так и макроскопическое равновесие плазмы.

Благодарности

Автор выражает благодарность сотрудникам НИЦ «Курчатовский институт» за полезные обсуждения и ценные замечания.

Список литературы

[1] Grad H. Reducible problems in magneto-fluid dynamic steady flows // Reviews of Modern Physics. 1960. Vol. 32, No. 4. P. 830–847. DOI: 10.1103/RevModPhys.32.830.

[2] Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1958. Т. 33, № 3. С. 710–722.

[3] Aymar R. et al. The ITER project // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2002. Vol. 44, No. 5. P. 519–542. DOI: 10.1088/0741-3335/44/5/304.

[4] Dinklage A., Beidler C.D., Helander P. et al. Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator // Nature Physics. 2018. Vol. 14. P. 855–860. DOI: 10.1038/s41567-018-0141-9.

[5] Helander P., Sigmar D.J. Collisional Transport in Magnetized Plasmas. Cambridge University Press, 2002. DOI: 10.1017/CBO9780511524606.

[6] Wagner F., Stroth U. Transport in toroidal devices // Plasma Physics and Controlled Fusion. 1993. Vol. 35, No. 10. P. 1321–1371. DOI: 10.1088/0741-3335/35/10/002.

[7] Diamond P.H., Itoh S.-I., Itoh K. Modern Plasma Physics. Vol. 1: Physical Kinetics of Turbulent Plasmas. Cambridge University Press, 2010. DOI: 10.1017/CBO9780511781511.

[8] Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports. 2002. Vol. 371, No. 6. P. 461–580. DOI: 10.1016/S0370-1573(02)00331-4.

[9] Braginskii S.I. Transport processes in a plasma // Reviews of Plasma Physics. 1965. Vol. 1. P. 205–311.

[10] Hazeltine R.D., Meiss J.D. Plasma Confinement. Dover Publications, 2003.

[11] Gavrikov M.B., Saveliev V.V. Equilibrium plasma configurations in the two-fluid magnetic hydrodynamics with electron inertia // Proceedings of the Petrovsky Seminar. 2009. Vol. 27. P. 3–66.

[12] Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-3-642-33911-0.

[13] Meerschaert M.M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. Vol. 172, No. 1. P. 65–77. DOI: 10.1016/j.cam.2004.02.003.

[14] Ford O.P., Dinklage A., Bozhenkov S.A. et al. Poloidal and toroidal rotation in the W7-X stellarator during neutral beam injection // Nuclear Fusion. 2020. Vol. 60, No. 10. P. 106030. DOI: 10.1088/1741-4326/ab9e3f.

[15] Proll J.H.E., Helander P., Connor J.W., Plunk G.G. Resilience of quasi-isodynamic stellarators against trapped-particle instabilities // Physical Review Letters. 2012. Vol. 108, No. 24. P. 245002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.245002.