Дельта-функция Дирака и нестандартный анализ

© Н. М. Мусин

21 февраля 2026

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $f(x)$.

В нестандартном анализе [2] интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ определяется как сумма

$[f(a) + f(a + dx) + f(a + 2dx) + \dots + f(a + (H - 1)dx)]dx$, где $dx = \dfrac{b-a}{H}$ для некоторого бесконечно большого гипернатурального числа H. Если эта сумма будет конечным нестандартным числом, то её стандартная часть даёт интеграл классического анализа.

Геометрически это алгебраическая сумма площадей бесконечного количества прямоугольников с бесконечно малыми основаниями dx и высотами, равными значениям функции[1] на левых концах отрезков разбиения.

Определим функцию $\delta(x)$ следующим образом. Возьмём некоторое положительное бесконечно малое число dx и на отрезке $\left[-\dfrac{dx}{2}, \dfrac{dx}{2}\right]$ зададим этой функции постоянное значение $\dfrac{1}{dx}$. Во всех остальнх точках гипердействительной прямой полагаем $\delta(x) = 0$.

Таким образом, дельта-функция Дирака построена как самая обычная функция: каждому легализованному в нестандартном анализе числу ставит в соответствие - совершенно легально - некоторое нестандартное число (число!). При этом её значение в точке $x = 0$ зависит от выбора бесконечно малого числа dx и принимает значение именно как бесконечно большое число в том смысле, какой оно имеет в рамках нестандартного анализа.

Если, например, dx определяется последовательностью[2] $\left[1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots\right]$, то тогда $\delta(0)$ определяется как бесконечно большое число, определяемое последовательностью $[1, 2, 3, \dots, n, \dots]$. Но если dx определяется последовательнстью $\left[1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dots, \dfrac{1}{n^2}, \dots\right]$, то соответствующая «бесконечность» определяется последова-

[1] Если значения функции отрицательны, то площади соответствующих прямоугольников берутся со знаком минус.

[2] См.[2], §6 (построения проводятся с использованием нетривиального ультрафильтра на множестве натуральных чисел в качестве индексов в последовательностях действительных чисел.

тельностью $[1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots]$. Такого рода бесконечно большие числа гораздо более осязаемы, чем безликий значок ∞. Кроме того, как видим, интегрирование неограниченных функций, принимающих вполне конкретные бесконечно большие значения в рамках нестандартного анализа, может давать конечные значения, которые в классическом анализе невозможно получить.

Из построений следует, что $\int\limits_{-\frac{dx}{2}}^{\frac{dx}{2}} \delta(x)dx = 1$ при любом бесконечно малом dx.

Теперь пусть бесконечно маленькому отрезку длины dx приписана масса 1. Тогда имеет смысл говорить о линейной плотности этого отрезка (она, конечно, равна $\frac{1}{dx}$). Более того, под материальной точкой лучше бы подразумевать шарик бесконечно малого радиуса ε и некоторой массой m, и тогда понятие материальной точки приобретает строго математическое определение[3]. Если масса этой материальной точки равна 1, то плотность будет равна $\dfrac{3}{4\pi} \cdot \dfrac{1}{\varepsilon^3}$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[-\dfrac{dx}{2}, \dfrac{dx}{2}\right]$; для любой точки x этого отрезка $f(x) \approx f(0)$, поэтому $\int\limits_{-\frac{dx}{2}}^{\frac{dx}{2}} f(x)\delta(x)dx \approx f(0) \int\limits_{-\frac{dx}{2}}^{\frac{dx}{2}} \delta(x)dx = f(0)$.

Итак, для произвольной непрерывной функции $f(x)$ мы получили равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0).$$

Приведём пример применения дельта-функции Дирака в рамках нестандартного анализа: подвергнем её преобразованию Фурье. Пусть dx - бесконечно малое положительное число, тогда на отрезке $\left[x_0 - \dfrac{dx}{2}, x_0 + \dfrac{dx}{2}\right]$ для любой точки x этого отрезка $e^{-i\omega x} \approx e^{-i\omega x_0}$, поэтому

$$\mathcal{F}\{\delta(x - x_0)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_0-\frac{dx}{2}}^{x_0+\frac{dx}{2}} \delta(x - x_0)e^{-i\omega x}dx \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_0-\frac{dx}{2}}^{x_0+\frac{dx}{2}} \delta(x - x_0)e^{-i\omega x_0}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega x_0} \int\limits_{x_0-\frac{dx}{2}}^{x_0+\frac{dx}{2}} \delta(x - x_0)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega x_0}.$$

[3]Физики определяют материальную точку как тело, размерами которого можно пренебречь. Слово «пренебречь» у них - одно из любимых.

Посмотрим, как на дельта-функцию действует преобразование Лапласа.

Пусть действительное число $x_0 \geqslant 0$.

$$\mathcal{L}\{\delta(x-x_0)\} = \int\limits_0^\infty \delta(x-x_0)e^{-s\cdot x}dx = \int\limits_{x_0-\frac{dx}{2}}^{x_0+\frac{dx}{2}} \delta(x-x_0)e^{-s\cdot x}dx \approx$$

$$\approx \int\limits_{x_0-\frac{dx}{2}}^{x_0+\frac{dx}{2}} \delta(x-x_0)e^{-s\cdot x_0}dx = e^{-s\cdot x_0}\int\limits_{x_0-\frac{dx}{2}}^{x_0+\frac{dx}{2}} \delta(x-x_0)dx = e^{-s\cdot x_0}.$$

В частности, $\mathcal{L}\{\delta(x)\} = 1$.

Мы получили известные уже формулы, но гораздо проще, чем принято после суровых поправок классическим анализом на языке «$\varepsilon - \delta$» «наивных» рассуждений Дирака.

«Язык нестандартного анализа оказался удобным средством построения математических моделей физических явлений <...> Нестандартный анализ можно сравнить с мостом, переброшенным через реку. Постройка моста не расширяет доступной нам территории (ведь и раньше можно было попасть на другой берег, обойдя исток реки), но сокращает путь с одного берега на другой. Подобным образом нестандартный анализ делает доказательства многих теорем короче.»[2]

Список литературы

[1] Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. The Principles of Quantum Mechanics. — Перевод 4-го изд. — М.: Наука, 1979

[2] Успенский В.А. Нестандартный, или неархимедов, анализ. - М.: «Знание», 1983.