

**А.В. Котов**<sup>1,2</sup>, магистр технических наук

**Д.Г. Кроль**<sup>2</sup>, кандидат физико-математических наук, доцент

<sup>1</sup>ОАО «Сейсмотехника», ул. Владимирова, 16, 246034 Гомель, Республика Беларусь, +375 (232) 56 82 59, androskv@mail.ru

<sup>2</sup>Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», пр-т Октября, 48, 246029 Гомель, Республика Беларусь, +375 (232) 50 97 40, kr-dmitry@gstu.by

## ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ СИНТЕЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ ПО УГЛУ ДАВЛЕНИЯ

В работе представлена методика оптимизационного синтеза плоского рычажного механизма на основе критерия ограничения максимального угла давления. Математическая модель кинематического исследования механизмов реализована с применением теории комплексных чисел и векторного анализа, что позволило компактно и эффективно определить выражения для положений и скоростей характерных точек, а также получить оригинальные аналитические зависимости для определения углов давления. Предложен алгоритм синтеза, базирующийся на ограничении угла давления, который показал свою высокую эффективность применения в современных математических пакетах. Выполнен оптимизационный синтез рычажного механизма, позволивший определить геометрические параметры механизма при обеспечении допустимых значений угла давления. Представлен пример реализации численного моделирования и решения задачи оптимизационного синтеза в математическом пакете PTC MathCAD.

**Ключевые слова:** синтез; угол давления; скорость; векторный анализ; теория комплексных чисел; рычажный механизм.

Рис. 4. Библиогр.: 16 назв.

**A.V. Kotov**<sup>1,2</sup>, Master Sciences in Engineering

**D.G. Krol**<sup>2</sup>, PhD in Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor

<sup>1</sup>JSC “Seismotekhnika”, 16 Vladimirova Str., 246034 Gomel, the Republic of Belarus, +375 (232) 56 82 59, androskv@mail.ru

<sup>2</sup>Institution of Education “Sukhoi State Technical University of Gomel”, 48 Oktyabrya Ave., 246029 Gomel, the Republic of Belarus, +375 (232) 50 97 40, kr-dmitry@gstu.by

## OPTIMIZATION SYNTHESIS OF FLAT LEVER MECHANISMS BY PRESSURE ANGLE

This paper presents a methodology for the optimization of a flat lever mechanism based on a maximum pressure angle limitation criterion. A mathematical model for the kinematic study of the mechanisms is implemented using complex number theory and vector analysis, enabling a compact and efficient definition of expressions for the positions and velocities of characteristic points, as well as the generation of original analytical relationships for determining pressure angles. A synthesis algorithm based on a pressure angle limitation is proposed, which has proven highly effective in modern mathematical packages. An optimization synthesis of the lever mechanism was performed, allowing the determination of the mechanism's geometric parameters while ensuring permissible pressure angle values. An example of numerical modeling and solving an optimization synthesis problem in the PTC MathCAD mathematical package is presented.

**Key words:** synthesis; pressure angle; velocity; vector analysis; complex number theory; lever mechanism.

Fig. 4. Ref.: 16 titles.

**Введение.** Проблема обеспечения высокого КПД и надежности рычажных механизмов напрямую связана с минимизацией потерь в его кинематических парах, которые, в свою очередь, зависят от угла давления [1, 2]. Превышение угла давления от рекомендуемого оптимального значения, приводит к увеличению потерь на трение и радиальных нагрузок в шарнирах рычажного механизма, что приводит к повышенному износу, заклиниванию и снижению общего КПД механизма [3].

Традиционно синтез механизмов по углу давления относится к задачам кинематического проектирования и решается графическими или аналитическими методами, включающими в себя построение планов положений и скоростей [4 – 6]. Такой синтез может предшествовать силовому анализу и давать дополнительную качественную и количественную оценку о потенциальной силовой нагруженности исследуемого механизма. Однако постановка и решение такой задачи часто требует громоздких выкладок и графических построений, что затрудняет возможность проведения алгоритмизации и оптимизации [7].

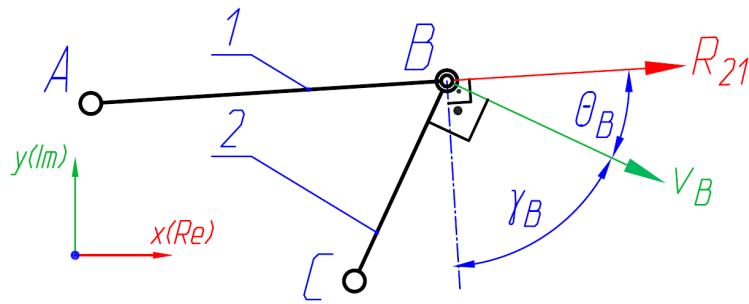
Применение векторного анализа или теории комплексных чисел для описания кинематики плоских рычажных механизмов является хорошо зарекомендовавшим и эффективным подходом [8, 9]. Он позволяет единообразно, компактно и с минимальным числом аналитических выражений вычислять положения и скорости всех характерных точек и звеньев механизма. В то же время, потенциал векторного анализа и комплексных чисел для решения задач кинематического синтеза, в частности оптимизации углов давления в шарнирах, раскрыт недостаточно полно. В связи с этим, разработка методики оперативной оценки углов давления на этапе математического моделирования, основанной на этом аппарате, сохраняет свою научную и практическую актуальность.

Целью настоящего исследования является разработка методики оптимизационного синтеза плоского рычажного механизма по ограничению угла давления. Для достижения поставленной цели получены оригинальные аналитические зависимости для расчета угла давления, а также численные алгоритмы оптимизации.

**Материалы и методы исследования.** Для построения математической модели кинематического анализа плоского рычажного механизма использовался метод преобразования координат в неизменном базисе, реализованный с использованием как векторного анализа, так и теории комплексных чисел. В векторной модели углы давления в шарнирах рассчитывались через скалярное и векторное произведения, в модели с применением комплексных чисел – через аналогию этих произведений и аргумент комплексного числа. Для каждой математической модели применено несколько методик расчета углов давления в шарнирах.

На рисунке 1 представлена структурная группа рычажного механизма, в которой звено 1 принято за входное, а звено 2 – за выходное. Для упрощения расчетов при решении поставленной задачи пренебрегаем массами звеньев и трением в кинематических парах. На рисунке 1 показан угол давления  $\theta_B$  в шарнире  $B$ , вектор реакции связи  $R_{21}$  и вектор скорости  $v_B$  (с учетом принятых допущений, направление реакции связи  $R_{21}$  будет совпадать с линией звена  $AB$ , что в итоге позволяет определить угол давления исключительно на основе кинематических параметров – радиус-вектора звена и вектора скорости точки).

Наряду с углом давления часто рассматривается угол передачи  $\gamma_B$ , дополняющий угол  $\theta_B$  до  $90^\circ$  (см. рисунок 1). Поэтому оптимизационный синтез плоских рычажных механизмов может проводиться как по углу давления, так и по углу передачи [10, 11].



1 – входное звено; 2 – выходное звено

**Рисунок 1. – Расчетная структурная группа рычажного механизма**

Предлагаемый расчет углов давления в шарнирах механизма будет основан на использовании геометрического свойства скалярного и векторного произведения или их аналогов применительно к теории комплексных чисел. Поэтому все исходные кинематические параметры рычажного механизма (в зависимости от базы построения исходной математической модели) должны быть представлены в следующем общем виде:

$$\bar{r}_i = (r_i^x \quad r_i^y \quad 0)^T; \quad \bar{v}_i = (v_i^x \quad v_i^y \quad 0)^T \quad \text{или} \quad \underline{r}_i = r_i^x + j \cdot r_i^y; \quad \underline{v}_i = v_i^x + j \cdot v_i^y, \quad (1)$$

где  $r_i$  – радиус-вектор звена, вдоль которого действует реакция связи;

$v_i$  – вектор действительной скорости точки приложения реакции на ведомом звене;

$j$  – мнимая единица.

В данной работе, начиная с выражения (1), приняты следующие обозначения: верхнее подчеркивание соответствует геометрическому вектору, а нижнее – вектору комплексного числа.

Для первого способа вычисления угла давления воспользуемся геометрическим свойством скалярного произведения и его аналогом применительно к теории комплексных чисел:

$$\theta_i = \arccos \left( \frac{|\bar{r}_i \cdot \bar{v}_i|}{|\bar{r}_i| \cdot |\bar{v}_i|} \right) \quad \text{или} \quad \theta_i = \arccos \left( \frac{|\operatorname{Re}(\underline{r}_i \cdot \underline{v}_i^*)|}{|\underline{r}_i| \cdot |\underline{v}_i|} \right), \quad (2)$$

где  $\underline{v}_i^*$  – вектор комплексно-сопряженного числа действительной скорости точки приложения реакции на ведомом звене;

$\operatorname{Re}$  – функция выделения действительной части комплексного числа.

Для второго способа вычисления угла давления воспользуемся геометрическим свойством векторного произведения и его аналогом применительно к теории комплексных чисел:

$$\theta_i = \arcsin \left( \frac{|\bar{r}_i \times \bar{v}_i|}{|\bar{r}_i| \cdot |\bar{v}_i|} \right) \quad \text{или} \quad \theta_i = \arcsin \left( \frac{|\operatorname{Im}(\underline{r}_i \cdot \underline{v}_i^*)|}{|\underline{r}_i| \cdot |\underline{v}_i|} \right), \quad (3)$$

где  $\operatorname{Im}$  – функция выделения мнимой части комплексного числа.

Третий способ вычисления угла давления заключается в делении выражения (3) на (2) с последующим применением арктангенса к полученному результату:

$$\theta_i = \operatorname{artg} \left( \frac{|\bar{r}_i \times \bar{v}_i|}{|\bar{r}_i \cdot \bar{v}_i|} \right) \quad \text{или} \quad \theta_i = \operatorname{arctg} \left( \frac{|\operatorname{Im}(\underline{r}_i \cdot \underline{v}_i^*)|}{|\operatorname{Re}(\underline{r}_i \cdot \underline{v}_i^*)|} \right). \quad (4)$$

Отметим, что в выражениях (2)–(4) в числителе используется модуль числа, вытекающий из необходимости определения угла давления как острого угла между направлением передачи реакции связи и направлением скорости приложения усилия (расчетный угол должен находиться в первом квадранте).

Четвертый способ определения угла давления применим исключительно к комплексным числам. Как отмечено в исследовании [9], математические модели плоских рычажных механизмов, построенные на основе аппарата комплексных чисел, эффективно

определяют все угловые характеристики векторных величин через аргумент комплексного числа (например, угол ориентации вектора). Следовательно, для непосредственного вычисления угла давления можно использовать аргумент комплексного числа, что выражается следующей зависимостью:

$$\theta_i = \min(|\arg(v_i) - \arg(r_i)|, |\arg(v_i) - \arg(r_i)| - \pi), \quad (5)$$

где  $\arg$  – функция выделения аргумента комплексного числа.

Аргумент комплексного числа определяет угол в диапазоне  $[0 \dots \pi]$ , но так как угол давления по определению является острым, то выражение (5) содержит условие, гарантирующее получение именно острого угла за счет выбора минимального значения между рассчитанным углом и его дополнением до  $180^\circ$ .

Поскольку вектор действительной скорости точки и ее кинематический аналог коллинеарны, то в формулах (2) – (5) могут использоваться обе величины. Причем применение вектора аналога скорости в указанных выражениях является предпочтительным, так как позволяет упростить вычисления за счет сокращения промежуточных этапов расчета.

Выражения (2) – (5) являются тождественными и приводят к идентичному результату расчета. Поэтому выбор одного из них для проведения дальнейшего исследования не принципиален. Ключевым критерием служит выбранный для построения математической модели плоского рычажного механизма математический аппарат: геометрические векторы или теория комплексных чисел.

Рассмотрим алгоритм проведения оптимизационного синтеза плоского рычажного механизма с учетом ограничения по максимально допустимому углу давления в его шарнирах. В качестве объекта исследования возьмем шестизвенный механизм, кинематическая схема которого приведена на рисунке 2, а. Механизм обладает следующими параметрами [12]:  $L_{OA}=0,15$  м;  $L_{AB}=0,97$  м;  $L_{OB}=0,60$  м;  $L_{OC}=0,45$  м;  $L_{CD}=0,86$  м;  $a=0,5$  м;  $b=0,37$  м.

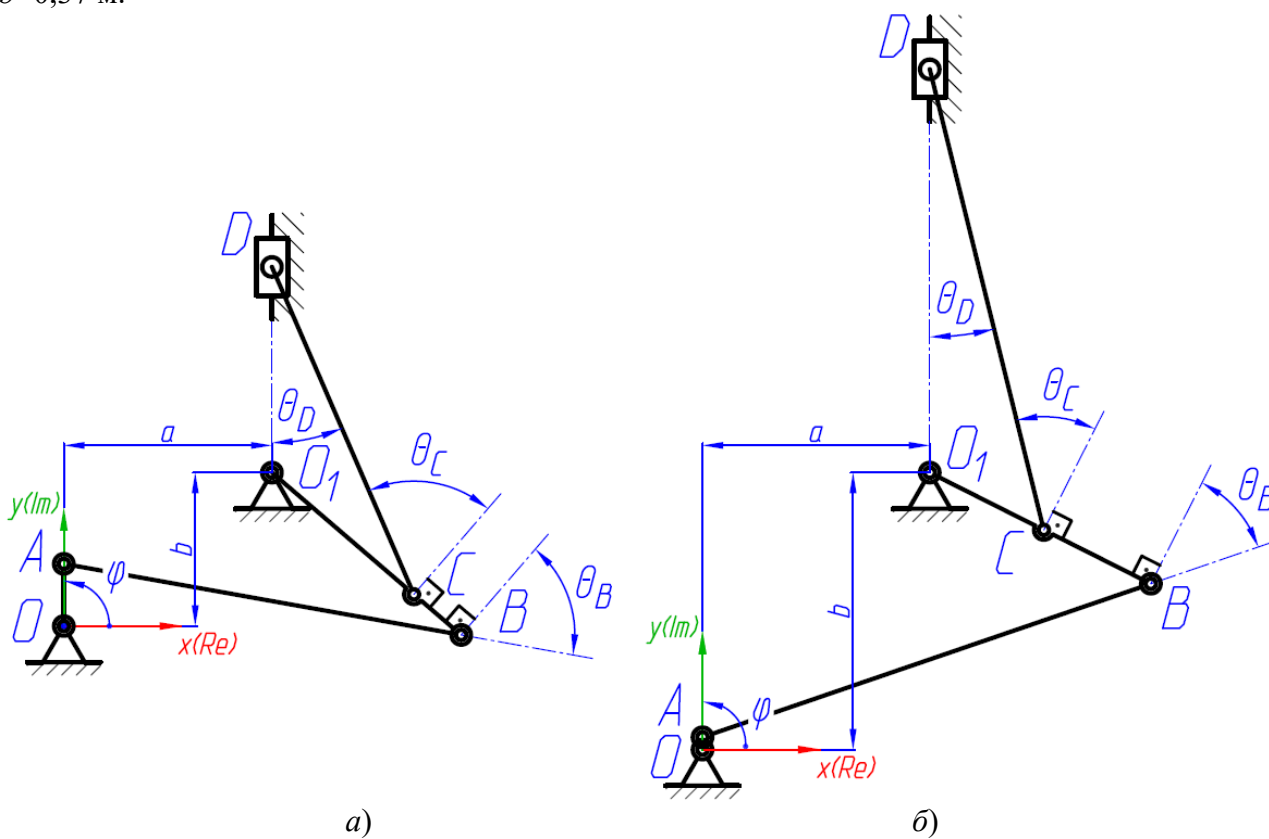


Рисунок 2. – Кинематическая схема плоского шестизвенного механизма

Считаем, что для данного механизма заранее уже выполнен кинематический анализ методом преобразования координат в неизменном базисе с помощью векторного анализа [8] или с помощью теории комплексных чисел [9], т.е. получены радиус-векторы всех его характерных точек, а также аналоги их векторов скоростей (см. выражения (1)). Тогда алгоритм синтеза плоского рычажного механизма по углу давления можно представить в виде следующей блок-схемы, приведенной на рисунке 3.

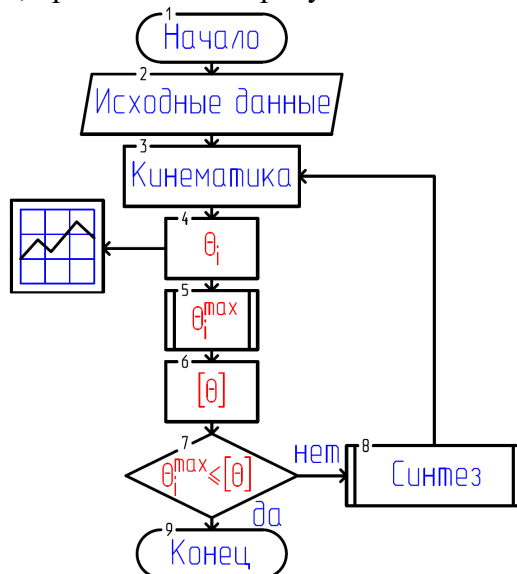


Рисунок 3. – Блок-схема алгоритма синтеза механизма по углу давления

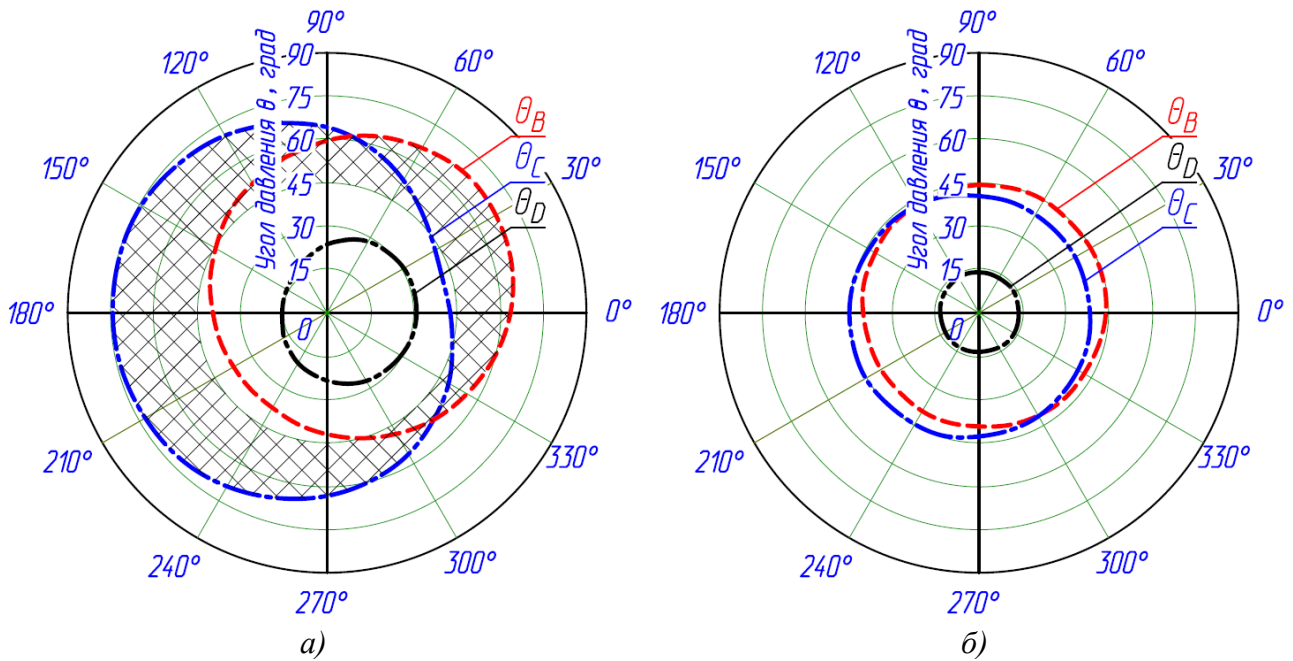
Для плоских рычажных механизмов угол давления  $\theta < 90^\circ$  [1]. При значениях угла давления  $\theta = 90^\circ$  механизм находится в так называемых «мертвых» положениях, что в статике приводит к заклиниванию, а в динамике механизм преодолевает подобные положения за счет движения по инерции [13]. Это явление наблюдается в неправильно спроектированных механизмах. Для исключения подобных ситуаций при синтезе механизмов задаются допустимыми значениями углов давления  $[\theta]$ . В настоящее время отсутствуют единые нормативы на допустимые значения углов давления. На практике, на основе накопленного опыта, рекомендуется для предварительных расчетов в механизмах только с вращательными парами принимать  $[\theta] = 45 \dots 60^\circ$ , а в механизмах с вращательными и поступательными парами  $[\theta] = 30 \dots 45^\circ$  [14]. В данной работе при проведении исследования примем ограничение по максимальному углу давления  $[\theta] = 45^\circ$ .

**Результаты исследования и их обсуждение.** На рисунке 4, а представлен график (годограф) изменения углов давления в шарнирах  $B$ ,  $C$  и  $D$  исходного механизма. Как видно из графиков, для шарниров  $B$  и  $C$  механизма наблюдается существенное превышение принятого допустимого уровня угла давления (заштрихованная область), что требует проведения целенаправленного оптимизационного синтеза.

Сформулируем задачу синтеза следующим образом: для заданного угла поворота ведущего звена (кривошипа), необходимо найти такой набор геометрических параметров звеньев механизма, при котором максимальные значения угла давления в шарнирах за полный оборот кривошипа не превышает заданного допустимого значения  $[\theta]$ .

Задаемся вектором оптимизируемых параметров, в качестве которых будут выступать все длины звеньев механизма, а также координаты одной неподвижной опоры:

$$\bar{p} = \{p_i\} = (L_{OA} \quad L_{AB} \quad L_{O1B} \quad L_{O1C} \quad L_{CD} \quad a \quad b)^T. \quad (6)$$



а – исходный механизм; б – синтезированный механизм

**Рисунок 4. – Результаты расчета углов давления в шарнирах механизмов**

Вычисление углов давления в шарнирах проводим при помощи одного из выражения (2) – (5). В качестве целевой функции будет выступать условие минимизации максимальных значений углов давления для трех шарниров B, C и D:

$$f(\bar{p}) = \sum C_i \cdot \sqrt{(\theta_i^{\max} - [\theta])^2} \rightarrow \min ,$$

где  $C_i$  – весовой коэффициент угла давления, назначаемый индивидуально для каждого из шарниров, который предварительно принимается равным 1 и в зависимости от полученных результатов может «смягчаться» или «ужесточаться» для целевой функции.

Для определения максимального угла давления в каждом шарнире найдем производную от  $\theta(\varphi)$  по обобщенной координате и приравняем его нулю. Полученное уравнение решаем численным методом (например, с помощью математического пакета PTC MathCAD), и находим угол кривошипа ( $\varphi$ ), соответствующий максимальному углу давления, а затем и численное значение угла давления (см. рисунок 3, блок 5 на схеме).

Поиск оптимальных значений для вектора оптимизируемых параметров (6) ограничим следующим диапазоном чисел от их исходных значений:

$$p_i \in [0, 2 \cdot p_i^*; 2 \cdot p_i^*],$$

где  $p_i^*$  – исходные значение  $i$ -го элемента вектора оптимизируемых параметров.

Для обеспечения условия существования кривошипа дополнительно наложим на рассматриваемый рычажный механизм ограничения в виде теоремы Грасгофа [3, 15], согласно которой наименьшее звено является кривошипом, если сумма длин наименьшего и любого другого звена меньше суммы длин остальных двух звеньев:

$$p_0 + \sqrt{p_5^2 + p_6^2} < p_1 + p_2; \min(p_0, p_1, p_2, \sqrt{p_5^2 + p_6^2}) - p_0 = 0 .$$

Дальнейшее решение задачи кинематического синтеза проводится с помощью одного из известных оптимизационных алгоритмов [16]. Для решения поставленной задачи кинематического синтеза был применен численный метод оптимизации, реализованный с помощью встроенной функции минимизации в математическом пакете PTC MathCAD. Результатом вычислений стал следующий оптимальный набор геометрических параметров механизма:

$$\bar{p}_{mcd} = (0,03 \quad 1,139 \quad 0,595 \quad 0,307 \quad 1,144 \quad 0,546 \quad 0,668)^T \text{ м.}$$

На рисунке 2, б приведена кинематическая схема синтезированного механизма, а на рисунке 4, б графики зависимости изменения угла давления в его шарнирах. Как видно из полученных результатов, новые значения углов давления не превышают принятого допустимого значения во всем диапазоне угла поворота ведущего звена. Для синтезированного механизма расчетное значение максимального угла давления в шарнирах  $B$ ,  $C$ ,  $D$  составили соответственно  $\theta_B=44,8^\circ$ ,  $\theta_C=44,9^\circ$  и  $\theta_D=14,1^\circ$ , что удовлетворяет заданному ограничению по допустимому углу  $[\theta]$ .

Однако следует учитывать, что ужесточение конструктивных ограничений в процессе кинематического синтеза на геометрические параметры рычажного механизма может сделать недостижимым одновременную оптимизацию углов давления во всех шарнирах. Если механизм имеет рабочий и холостой (с меньшими нагрузками) ходы, можно для холостого хода принять несколько большие величины для  $[\theta]$ . Поэтому синтез механизма – это всегда поиск рабочего компромисса между условием обеспечения значений углов давления в допустимых пределах и выбором геометрических параметров, соответствующих требованиям конструкции.

**Заключение.** Разработана и реализована методика кинематического оптимизационного синтеза плоского шарнирного механизма, направленная на обеспечение заданного ограничения по максимальному углу давления в его шарнирах. В основе предложенной методики расчета углов давления лежат оригинальные аналитические зависимости, полученные с использованием геометрического свойства скалярного и векторного произведений или их аналогии применительно к комплексным числам, а также аргумента комплексного числа. Предложенный алгоритм и проведенный по нему вычислительный эксперимент подтвердил работоспособность метода. Разработанный подход может предшествовать проведению силового анализа, а также рекомендован для использования в инженерной практике при проектировании рычажных механизмов, к которым предъявляются повышенные требования по КПД, износу и отсутствию заклинивания.

#### Список цитированных источников

1. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин: учебник для вузов / И. И. Артоболевский. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1988. – 640 с.
2. Коловский, М. З. Теория механизмов и машин: учеб. пособие для вузов по машиностроит. спец. / М. З. Коловский [и др.]. – 2-е изд., испр. – М. : Академия, 2008 - 460с.
3. Теория механизмов и машин. Анализ, синтез, расчет / Ю. Ф. Лачуга, А. М. Баусов, А. Н. Воскресенский [и др.]. – 3-е изд. – М. : ИКЦ Колос-с, 2020. – 416 с.
4. Евдокимов, Ю. И. Углы давления в двухопорных механизмах с четырехзвенной трехповодковой структурной группой / Ю. И. Евдокимов // Вестник НГАУ (Новосибирский государственный аграрный университет). – 2011. – № 2(18). – С. 109-112.
5. К определению углов давления и критериев качества передачи движения в рычажных механизмах IV класса с остановками выходного звена по заданным циклограммам / В. С. Хорунжин, В. А. Бакшеев, А. Н. Шариков [и др.] // Омский научный вестник. – 2008. – № 1(64). – С. 27-30.
6. Гебель, Е. С. Проектирование рычажных механизмов высокоточного позиционирования / Е. С. Гебель, В. Г. Хомченко. – Омск : ОмГТУ, 2014. – 136 с.
7. Galabov, V., Roussev, R., Paleva-Kadiyska, Bl. Synthesis of Four-Bar Linkages by Four Infinitely Close Relative Positions and Pressure Angle. El-Cezeri Journal of Science and Engineering, 2023, 10 (2); 401-408.
8. Котов, А. В. Анализ уравновешенности кривошипно-ползунного механизма привода режущего аппарата методом векторов главных точек / А. В. Котов // Тракторы и сельхозмашины. – 2024. – Т. 91, № 2. – С. 167-180. DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-606653>

9. Котов, А. В. Способ и программная реализация кинематического анализа кулисного механизма / А. В. Котов, Д. Г. Кроль // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2025. – № 4(73). – С. 25-30. – DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2025-4-73-25-30>
10. Гордиенко, Э. Л. Определение геометрических параметров плоского рычажного механизма и их влияние на углы давления / Э. Л. Гордиенко, Д. С. Рудской // *Машинознавство : Матеріали 8-ої регіональної науково-методичної конференції, Донецьк, 29–31 марта 2006 года*. – Донецьк : ДонНТУ, 2006. – С. 44-48.
11. Белецкий, В. Я. Расчет механизмов машин-автоматов пищевых производств. Киев: Вища школа, 1974. – 228 с.
12. Бертяев, В. Д. Теоретическая механика на базе MathCAD : практикум / В. Д. Бертяев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 734 с.
13. Кіницький, Я. Т. Теорія механізмів і машин / Я. Т. Кіницький. – К. : Наукова думка, 2002. – 660 с.
14. Гавриленко, В. А. Теория механизмов и машин: учеб. пособие / В. А. Гавриленко. М. : Высшая школа, 1983. – 420 с.
15. Теория механизмов и механика машин: учеб. для вузов / К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов [и др.]; Под ред. К. В. Фролова. – 5-е изд., стереотип. - М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 664 с.
16. Гальченко, В. Я. MathCAD: математические методы и инструментальные средства оптимизации / В. Я. Гальченко, Р. В. Трембовецкая. – Черкассы: ЧП Гордиенко Е. И., 2018. – 516 с.