

Размерная интерпретация правила 20/80 в задачах распределения ресурсов

Г.А. Грачёв

Аннотация

Несмотря на большое число статистических интерпретаций правила 20/80, его геометрическое и размерностное происхождение исследовано значительно слабее. В работе предлагается размерностная интерпретация эмпирических закономерностей концентрации ресурса в системах. В качестве основной характеристики используется функция концентрации, задающая долю ресурса, принадлежащую верхней доле элементов, упорядоченных по убыванию вклада. Для аналитического исследования привлекается простая геометрическая модель — коническая куча песка, в которой при одной и той же структуре носителя могут рассматриваться различные наблюдаемые величины: объём (масса), площадь поверхности, эквивалентный линейный масштаб и потенциальная энергия. Показано, что соответствующие функции концентрации не совпадают и определяются не только порядком ранжирования элементов, но и размерностью рассматриваемого эффекта. Для трёхмерного случая переход от объёмной меры к эквивалентному линейному масштабу приводит к функции концентрации, для которой $S(0.2) = 0.787$, то есть практически к правилу 20/80. Сопоставление малых- p асимптотик даёт точное соотношение $\alpha = D/(D - 1)$, связывающее показатель Парето с размерностью наблюдаемой величины D ; при $D = 1$ возникает естественный порог между эгалитарным и концентрированным режимами. Дополнительно обсуждается связь симметричной параметрической модели с коэффициентом Джини, возможность её использования для нормативного описания распределений доходов и применение к сопоставлению рыночных и располагаемых доходов США и Коста-Рики. Подчёркивается, что в работе используется статический геометрический профиль песчаной кучи как аналитически точный benchmark; связь найденных кривых концентрации с динамикой самоорганизованной критичности и с полной эмпирической подгонкой кривых Лоренца рассматривается как естественное направление дальнейших исследований.

Ключевые слова: принцип Парето, кривая Лоренца, кривая концентрации, коэффициент Джини, размерностное масштабирование, эконофизика, самоорганизованная критичность, Burt III, нормативное распределение, налогово-трансфертная политика

1. Введение

Неравномерное распределение ресурса наблюдается в системах самой различной природы — от доходов и богатства до потоков энергии, массы и интенсивности взаимодействий. Однако для анализа таких систем существенен не только сам факт неравенства, но и форма концентрации: какая доля совокупного ресурса приходится на верхнюю долю элементов после их ранжирования по убыванию вклада. Именно эта задача лежит в основе обсуждения правила 20/80 и родственных ему эмпирических соотношений.

Начиная с работ Вильфредо Парето [1], исследования концентрации ресурса обычно развивались в статистическом направлении: искали функции распределения, способные описывать тяжёлые хвосты, кривые Лоренца и связанные с ними индексы неравенства.

Такой подход чрезвычайно продуктивен, однако он не отвечает напрямую на другой вопрос: почему при сходной ранговой организации системы наблюдаемые пропорции концентрации могут различаться? Иначе говоря, каков механизм перехода от одного и того же порядка элементов к различным долям аккумулированного ресурса?

Для верхних хвостов распределения Парето показал устойчивость степенной аппроксимации, которую в терминах функции концентрации удобно записать как асимптотику кумулятивной доли ресурса, принадлежащей верхней доле рангов.

$$S(p) \propto p^{1-1/\alpha}, \quad 0 \leq p \ll 1. \quad (1)$$

Далее кривую кумулятивной концентрации $S(p)$, по аналогии со стандартной кривой Лоренца (L), будем называть кривой Парето (PC). Парето также отмечал, что во многих эмпирических рядах форма концентрации близка к норме с параметром $\alpha = 3/2$. Подстановка этого значения в асимптотику (1) приводит к приближению, которое удобно использовать как отправную точку для сравнения различных моделей концентрации.

$$S(p) \propto p^{1/3}, \quad 0 \leq p \ll 1. \quad (2)$$

Далее будет показано, что показатель степени в приближении (2) естественным образом приводит к правилу 20/80: около 20 % элементов системы аккумулируют приблизительно 80 % совокупного ресурса, тогда как на оставшиеся 80 % элементов приходится около 20 % ресурса.

Правило 20/80 более ста лет используется как практическая эвристика в управлении качеством [2]–[4], экономике [5], [6], географии [7], социологии [8] и естественных науках [9]–[11]. Вместе с тем сама устойчивость этой пропорции обычно констатируется эмпирически, тогда как её геометрическая и размерная интерпретация остаётся недостаточно прояснённой.

В настоящей работе рассматривается гипотеза о том, что существенную роль здесь играет размерность наблюдаемой величины. Один и тот же носитель может порождать разные законы концентрации в зависимости от того, что именно принимается за ресурс: линейный размер, площадь, объём, энергия или иная величина, степенным образом связанная с геометрическим масштабом. В этом случае различие между концентрационными правилами оказывается связанным не с произвольным выбором числовой константы, а со способом измерения эффекта.

Для прояснения этой идеи используется простая аналитическая модель — коническая куча песка. Она удобна тем, что допускает явное описание ранжированного накопления ресурса и позволяет в рамках одной геометрии сопоставить несколько различных величин. При неизменной форме носителя можно последовательно рассматривать накопление объёма, площади поверхности, эквивалентного линейного размера и потенциальной энергии, а затем сравнивать соответствующие функции концентрации.

Важно, что песчаная куча в работах Бака, Танга и Визенфельда выступает не только как геометрический объект, но и как каноническая модель самоорганизованной критичности. В настоящей статье используется лишь её стационарный конический профиль как

аналитически прозрачный носитель ранжированного накопления; статистика лавин, критический наклон и другие динамические признаки SOC специально не моделируются.

Поэтому статья не претендует на универсальное динамическое объяснение всех случаев правила 20/80. Её задача скромнее и, вместе с тем, конструктивнее: выделить размерностный геометрический эталон, относительно которого наблюдаемое неравенство можно интерпретировать как отклонение от нормальной концентрации, задаваемой типом наблюдаемого эффекта. Такой статический benchmark удобен и тем, что позволяет сопоставлять реальные распределения с аналитически точной базовой конфигурацией, в том числе в задачах, где сама концентрация возникает из динамики обменов, накопления или критических событий.

Цель работы состоит в том, чтобы связать эмпирические правила концентрации с размерной структурой наблюдаемого эффекта. В предлагаемой трактовке ранжирование элементов само по себе остаётся безразмерной процедурой, тогда как конкретная пропорция вида 20/80, 20/79 или 20/62 определяется тем, как рассматриваемый ресурс масштабируется относительно линейного носителя. Это позволяет рассматривать известные концентрационные соотношения как элементы единой схемы, а не как набор разрозненных эмпирических правил.

Статья организована следующим образом. Сначала вводятся основные обозначения и формальная постановка задачи. Затем коническая куча песка рассматривается как модель, в которой различным физическим величинам соответствуют различные функции концентрации. После этого обсуждаются размерные отображения и их параметрические обобщения, а далее — интерпретация полученных результатов в терминах симметрии, коэффициента Джини и нормативных характеристик распределения. В заключительной части модель иллюстрируется на данных OECD о рыночных и располагаемых доходах США и Коста-Рики и обсуждается её применение к оценке налогово-трансфертной политики.

2. Постановка задачи

Рассмотрим n элементов системы, упорядоченных по убыванию доли их вклада в суммарный ресурс системы (w_r) , где r — ранг элемента. Кривая Парето, по определению, функция, интерполирующая кумулятивную сумму долей ресурса элементов

$$S(p_i) = \sum_{r=1}^i w_r, \quad 0 \leq p_i \leq 1. \quad (3)$$

где p — доля рангов, то есть доля элементов, отсчитанных от наиболее обеспеченных к наименее обеспеченным.

Для сопоставления РС с кривой Лоренца $(L(p))$, определяемой по возрастанию ресурса (наименьшие значения располагаются первыми), удобно использовать тождество: $L(p) = 1 - S(1 - p)$, позволяющее перейти от ранжирования «сверху вниз» к ранжированию «снизу вверх». Соответственно основные аксиомы для РС можно записать так:

$$S(0) = 0, \quad S(1) = 1, \quad S'_+(p) \geq 0, \quad S''_+(p) \leq 0, \quad p \in (0,1). \quad (4)$$

Из условий (4) следует, что РС является неубывающей вогнутой кривой концентрации. Обозначим $PR = S(0.2)$. Далее PR будем называть коэффициентом Парето. Он представляет собой долю ресурса, аккумулированную верхними 20 % элементов, и широко используется в прикладных задачах для сравнения концентрации ресурсов в системах.

В рамках поставленной задачи необходимо: (i) выявить зависимость коэффициента Парето от размерности наблюдаемой величины; (ii) исследовать, как один и тот же носитель приводит к различным кривым концентрации при переходе от объёма к площади, эквивалентному радиусу и энергии; (iii) связать наблюдаемое неравенство с параметром модели и нормативным распределением ресурса; (iv) обсудить критерии структурной устойчивости; (v) проиллюстрировать восстановление параметра модели по коэффициенту Джини и сопоставить фактические посленалоговые (post-tax) кривые Парето с симметричным нормативным эталоном на данных OECD для США и Коста-Рики.

3. Песчаный конус как модель разных концентраций ресурса

Классической моделью самоорганизующихся систем служит куча однородного песка [12], [13]. В стационарном состоянии она имеет форму прямого кругового конуса высоты H .

В интерпретации Бака–Танга–Визенфельда такая куча соответствует стационарному профилю системы, находящейся в режиме самоорганизованной критичности. В дальнейшем мы используем именно этот статический профиль как геометрически упорядоченный носитель эффекта. Связь между получаемыми ниже функциями концентрации и динамическими характеристиками SOC — распределениями лавин, критическими наклонами и классами универсальности — в данной работе не выводится и рассматривается как открытый вопрос.

Обозначим через $S_M(p)$ накопление объёма (а при постоянной плотности — и массы), а через $S_A(p)$ — накопление боковой поверхности усечённого конуса. Из подобия сечений следует, что радиус на высоте z пропорционален $(1 - p)$, а объём верхнего малого конуса над уровнем z составляет $(1 - p)^3$ долю полного объёма. Следовательно, доля объёма, заключённая в нижней доле высоты p , равна:

$$S_V(p) = \frac{V(p)}{V_{tot}} = 1 - (1 - p)^3. \quad (5)$$

Для модели (5) коэффициент Парето равен $PR \approx 0.488$. Аналогично доля боковой поверхности усечённого конуса, заключённого в нижней доле высоты p , определяется формулой:

$$S_A(p) = \frac{A(p)}{A_{tot}} = 1 - (1 - p)^2. \quad (6)$$

У модели (6) коэффициент Парето равен $PR \approx 0.360$, что заметно меньше, чем у объёмной модели. Это отражает более слабую концентрацию ресурса при переходе от объёма к поверхности. В общем случае обе зависимости удобно записать в унифицированном виде:

$$S(p; D) = 1 - (1 - p)^D. \quad (7)$$

Здесь параметр D интерпретируется как размерность, или число степеней свободы величины, характеризующей состояние системы. Для дальнейших выводов полезно использовать стандартное разложение в окрестности нуля:

$$(1 - p)^\alpha = 1 - \alpha p + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} p^2 + O(p^3), \quad p \rightarrow 0. \quad (8)$$

Из (8) сразу следует, что при $p \rightarrow 0 +$ семейство (7) имеет линейную асимптотику:

$$S(p; D) \propto p, \quad 0 \leq p \ll 1. \quad (9)$$

Сравнение соотношений (2) и (9) показывает, что чисто геометрическая модель (7) вблизи нуля нарастает заметно мягче, чем эмпирическая кривая концентрации доходов. Следовательно, одного лишь геометрического фактора недостаточно для воспроизведения высокой концентрации, характерной для социально-экономических распределений, и именно поэтому далее рассматриваются размерностные отображения, усиливающие накопление эффекта при переходе к линейному масштабу. В частности, переход от объёмной меры к эквивалентному радиусу заменяет кубическое накопление корневым преобразованием, вследствие чего функция концентрации становится существенно круче уже в области малых p .

Если же в качестве аккумулируемого ресурса рассматривать потенциальную энергию песчинок, то соответствующая кривая накопления становится более выпуклой, поскольку вклад каждой части массы дополнительно взвешивается её высотой. В экономических терминах это соответствует усилению концентрации за счёт весового фактора, аналогичного эффекту плеча. Подробное аналитическое описание энергетической кривой выходит за рамки настоящей статьи, однако сам факт показывает, что один и тот же носитель порождает различные законы концентрации в зависимости от природы измеряемой величины.

4. Эквивалентный радиус: размерностные отображения

4.1. Размерность D

Размерность D показывает, сколько параметров требуется для описания объекта: нулевая размерность соответствует точке, одномерная — линии, двумерная — площади, трёхмерная — объёму. Для сложных и раздробленных объектов возможно использование дробных значений $D \in (1,3)$, как это делается во фрактальной геометрии. [14]

Пусть носитель эффекта обладает мерой M (например, площадью, объёмом или массой), которая масштабируется с характерным линейным размером S по степенному закону

$$M \propto S^D. \quad (10)$$

Тогда эквивалентный линейный масштаб вычисляется формулой

$$S = M^{1/D}. \quad (11)$$

Величина S имеет прямой физический смысл: это доля линейного масштаба, которой обладал бы подобный объект, если бы он содержал долю меры M . Такой переход является стандартным для операций «объём \rightarrow эквивалентный радиус» и, в общем виде, «мера \rightarrow линейный масштаб».

Переход от меры к эквивалентному линейному масштабу не является единственно возможным отображением. В данной работе он используется как естественная нормированная конструкция, позволяющая сопоставить эффекты различной размерности в единой схеме и перейти от геометрически заданной меры к наблюдаемому линейному масштабу.

4.2. Эквивалентные шар и круг

Сопоставим накопленному объёму $V(p)$ эквивалентный шар, то есть шар того же объёма. Его радиус $R_{eq}(p)$ определяется равенством объёмов, а после нормировки на значение при $p = 1$ получаем долю эквивалентного радиуса как функцию ранга:

$$\frac{R_{eq}(p)}{R_{eq}(1)} = \left[\frac{V(p)}{V(1)} \right]^{1/3}. \quad (12)$$

Подставляя (5) в (12), приходим к явной формуле для трёхмерного размерностного отображения:

$$S(p; 3, 1/3) = \sqrt[3]{1 - (1 - p)^3}. \quad (13)$$

При $p = 0.2$ формула (13) даёт значение около 0.787, то есть пропорцию «20/79», практически совпадающую с эвристикой «20/80». Аналогично накопленной площади $A(p)$ можно сопоставить эквивалентный круг той же площади. В результате модель (13) естественно обобщается на случай произвольной размерности:

$$S(p; D, 1/D) = \sqrt[D]{1 - (1 - p)^D}. \quad (14)$$

Для $D = 2$ получаем $PR \approx 0.600$. Используя разложение (8), нетрудно видеть, что при $p \rightarrow 0+$ зависимости (14) обладают степенной асимптотикой [15]

$$S(p; D, 1/D) \sim D^{1/D} p^{1/D}, \quad 0 \leq p \ll 1. \quad (15)$$

Сравнение с (2) показывает, что при соответствующем выборе параметра асимптотики совпадают по ведущему члену. Следовательно, различие между моделями состоит не в ранговой структуре как таковой, а в том, как одна и та же ранговая организация отображается в наблюдаемую величину различной размерности. Именно в этом состоит ключевая идея размерностной интерпретации концентрации: размерностное отображение задаёт геометрический механизм, который воспроизводит ведущую паретовскую асимптотику без явного задания специального стохастического механизма. Отметим также, что модель (14) совпадает с однопараметрической симметричной кривой Лоренца распределения Вигг III [15], которую разными способами получали в [16–22].

Особенно важным является сопоставление асимптотики модели (14) с верхнехвостовой асимптотикой распределения Парето. Для распределения Парето функция концентрации имеет вид $S(p) \sim p^{1-1/\alpha}$, тогда как размерностная модель (14) даёт $S(p) \sim p^{1/D}$. Приравнивая показатели степени, получаем точное соотношение $\alpha = D/(D - 1)$. В частности, при $D = 3$ получаем $\alpha = 3/2$ — классическое значение Парето. Это тождество не подменяет собой механизм формирования распределения, но выявляет структурную связь между

пространственной размерностью наблюдаемого эффекта и хвостовым показателем концентрации.

4.3. Тела вращения вместо «социальной пирамиды»

В т. II «Cours d'Économie Politique» на с. 312–318 Парето критиковал образ социальной пирамиды как слишком грубую схему и предлагал заменять его телом вращения, позволяющим геометрически представить непрерывный профиль распределения. Такое представление особенно полезно тогда, когда необходимо связать форму концентрационной кривой с размерностью носителя и типом наблюдаемой величины.

На рис. 1 показаны тела вращения для радиального профиля $r(p) = 1 - S(p)$. Широкое основание соответствует большинству элементов с малыми значениями ресурса, а сужающаяся верхняя часть — сравнительно малому числу элементов, аккумулирующих значительную долю совокупного эффекта. Варианты (a) и (c) соответствуют базовым объёмной и поверхностной концентрациям, а варианты (b) и (d) иллюстрируют двухпараметрические формы при $a=b=3$ и $a=b=2$ соответственно.

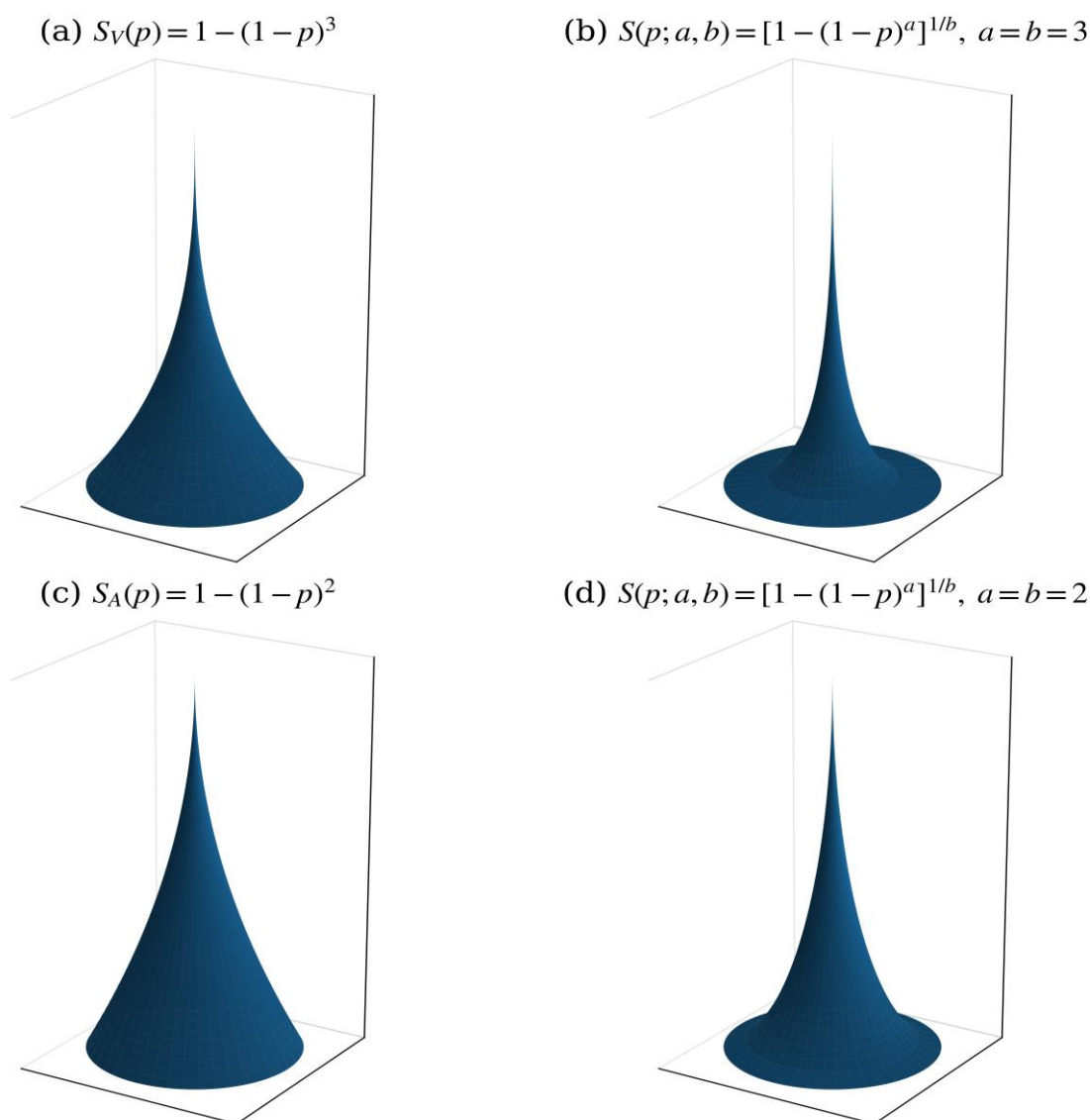


Рисунок 1 — Тела вращения для кривых Парето (вертикальная ось: p , радиус: $1 - S(p)$)

5. Двухпараметрическая РС

Однопараметрическая симметричная кривая (14) естественно интерпретируется как размерностно обусловленный нормативный эталон. Она является частным случаем более общего двухпараметрического семейства [23], которое позволяет описывать отклонения реальных распределений от этого эталона.

$$S(p; a, b) = [1 - (1 - p)^a]^{1/b}. \quad (16)$$

где a и b — эмпирические параметры формы, удовлетворяющие условиям $1 \leq a < \infty$ и $1 \leq b < \infty$. Для описания поведения в окрестности нуля удобно ввести показатель $\beta = 1/b$. Тогда из разложения (8) получаем

$$S(p; a, b) \approx (ap)^\beta, \quad 1 \leq a < \infty, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad p \rightarrow 0. \quad (17)$$

По аналогии с физикой фазовых переходов показатель β можно интерпретировать как критический показатель степени, определяющий режим нарастания концентрации в области малых p .

$$\beta = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\ln S(p; a, b)}{\ln p} = \frac{1}{b}. \quad (18)$$

Для семейства (16) коэффициент Джини выражается аналитически:

$$G(a, \beta) = \frac{2 \Gamma(1/a) \Gamma(\beta + 1)}{a \Gamma(\beta + 1 + 1/a)} - 1. \quad (19)$$

Таким образом, поведение $S(p; a, b)$ при $p \rightarrow 0$ зависит в первую очередь от β . При $\beta \rightarrow 1$ распределение ресурса вблизи нуля стремится к более равномерному, а при $\beta \rightarrow 0$ ресурс концентрируется у первых по рангу элементов.

Расстояние от точки $(p, S(p))$ до эгалитарной линии по вертикали равно $d(p) = S(p) - p$. Производная $d'(p) = S'(p) - 1$ обращается в нуль при $S'(p) = 1$; соответствующую абсциссу обозначим p_μ . В этой точке кривая максимально удалена от эгалитарной линии, а в прикладных задачах по неравенству используется индекс Гувера $HI = S(p_\mu) - p_\mu$ [24].

Для дискретно ранжированного распределения, теоретическое значение доли ресурса элемента ранга $w(p_r)$, можно вычислить по формуле:

$$w_r = S(p_r) - S(p_{r-1}). \quad (20)$$

Поскольку в точке p_μ выполняется условие $S'(p_\mu) = 1$ вклад элемента в этой окрестности близок к среднему:

$$w(p_\mu) \approx \frac{1}{n}. \quad (21)$$

Следовательно, абсцисса p_μ определяет ранг среднего элемента рангового распределения. Элементы с ресурсом выше среднего, то есть элементы, для которых $p \leq p_\mu$, естественно, трактовать как значимые элементы системы. Для численной оценки асимметрии РС используем коэффициент

$$PAC = 1 - p_\mu - S_\mu. \quad (22)$$

Величина PAC обращается в нуль, когда точка $(p_\mu, S(p_\mu))$ лежит на альтернативной диагонали единичного квадрата; в целом выполняется неравенство $-1 \leq \text{PAC} \leq 1$. Для симметричного подкласса, то есть при $a = b$, получаем явные выражения: [16]

$$p_\mu(a) = 1 - 2^{-1/a}, \quad S_\mu(a) = 2^{-1/a}. \quad (23)$$

Для симметричного случая коэффициент Джини принимает вид $G(a) = \Gamma(1/a)^2 / [a \Gamma(2/a)] - 1$. Зависимость концентрации ресурса и асимметрии PC от размерности наблюдаемой величины приведена в табл. 1; графическая иллюстрация показана на рис. 2.

Таблица 1 — Зависимость PR и параметров PC от размерности наблюдаемой величины

Модель	β	p_μ	S_μ	PAC	$S(0.2)$	G
$S(p; 3) = 1 - (1 - p)^3$	1.00	0.42	0.8076	-0.23	0.488	0.508
$S(p; 2) = 1 - (1 - p)^2$	1.00	0.50	0.7500	-0.25	0.360	0.333
$S(p; 3, 1/3) = \sqrt[3]{1 - (1 - p)^3}$	0.33	0.21	0.7937	0.00	0.787	0.767
$S(p; 2, 1/2) = \sqrt{1 - (1 - p)^2}$	0.50	0.29	0.7071	0.00	0.600	0.571

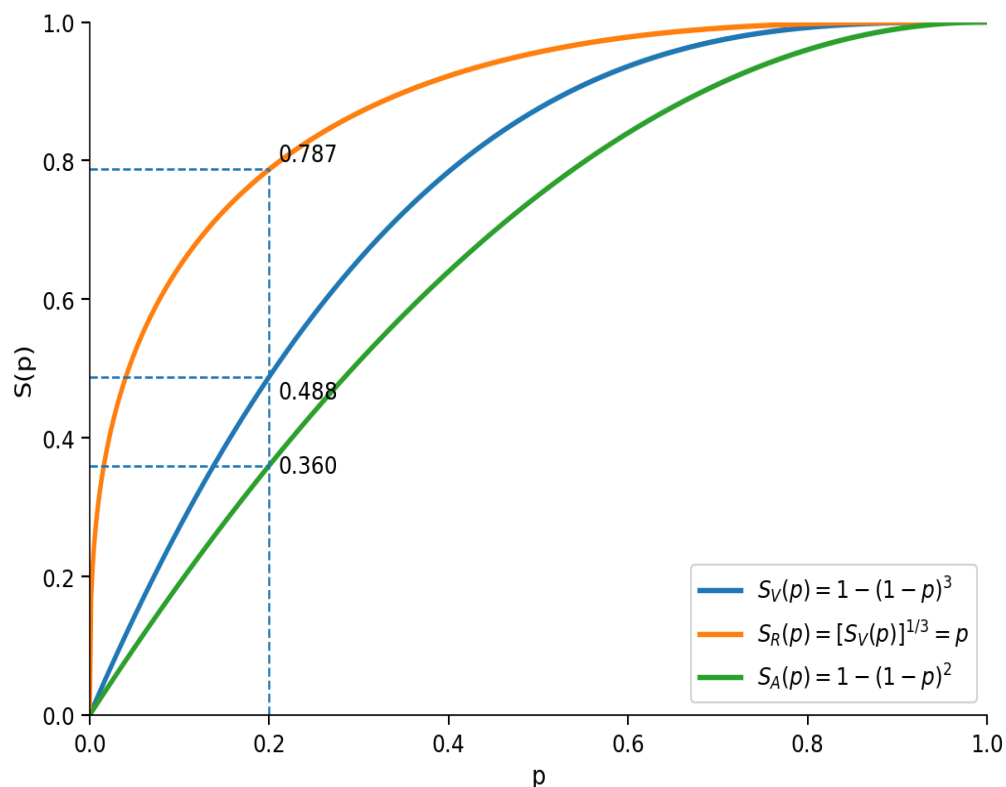


Рисунок 2 — Функции концентрации для объема конуса и размерностных отображений

Данные табл. 1 показывают, что многообразие правил концентрации не случайно: оно отражает одно и то же ранжирование, но разные размерности наблюдаемой величины. При

одинаковой размерности у симметричных кривых концентрация, как правило, выше, чем у асимметричных базовых моделей.

Системы, для которых $\beta = 1$, можно трактовать как суммативные: внутренняя связь между элементами здесь слабее внешних воздействий, и кривая концентрации описывает преимущественно аддитивное сложение частных вкладов. Альтернативой им служат интегративные системы, у которых взаимодействие элементов внутри системы превосходит внешние воздействия; в этом случае кривая концентрации отражает уже не простое суммирование, а кооперативное усиление вкладов, что и проявляется в большей концентрации и иной асимметрии.

6. Норма упорядоченности систем

6.1. Координата центра масс и коэффициент Джини

Под нормой упорядоченности далее будем понимать такое распределение ресурса, при котором система в рамках рассматриваемого класса моделей обладает наибольшей структурной устойчивостью. В предлагаемой геометрической интерпретации это условие естественно связывается с минимизацией нормированной высоты центра масс распределения вкладов элементов в совокупный эффект и, в симметричном подклассе, с балансом относительно альтернативной диагонали.

Используя формулу (20), запишем координату центра масс в виде

$$p_c = \int_0^1 p \, dS(p) = \int_0^1 p S'(p) \, dp. \quad (24)$$

Так как $S(0) = 0$ и $S(1) = 1$, интегрирование по частям даёт

$$p_c = 1 - \int_0^1 S(p) \, dp. \quad (25)$$

С другой стороны, коэффициент Джини для кривой концентрации равен

$$G = 2 \int_0^1 S(p) \, dp - 1. \quad (26)$$

Следовательно,

$$p_c = \frac{1 - G}{2}. \quad (27)$$

Тем самым коэффициент Джини получает в данной модели ясную геометрическую интерпретацию: он задаёт положение центра масс распределения вкладов. Чем меньше p_c , тем ниже расположен центр масс и тем более концентрированным является распределение ресурса.

Обозначим через p_k абсциссу точки пересечения кривой концентрации с альтернативной диагональю:

$$S(p_k) = 1 - p_k. \quad (28)$$

Для любой вогнутой кривой концентрации выполняется неравенство

$$p_c \leq p_k. \quad (29)$$

Равенство достигается лишь в предельном случае, когда кривая совпадает с ломаной, соединяющей точки $(0,0)$, $(p_k, 1 - p_k)$ и $(1,1)$. Следовательно, положение центра масс и положение точки пересечения с альтернативной диагональю характеризуют разные аспекты структуры распределения: первое связано с общей концентрацией, второе — с его балансом относительно ранговой шкалы.

6.2. Правило рычага в симметричном подклассе

Рассмотрим теперь точку (p_μ, S_μ) , где p_μ определяется условием $S'(p_\mu) = 1$, а $S_\mu = S(p_\mu)$. Ниже ограничимся симметрическим подклассом, то есть случаем $a=b$. В этой точке кривая концентрации имеет тот же локальный наклон, что и эгалитарная прямая, а для дискретного распределения вклад элемента в окрестности p_μ близок к среднему значению. Поэтому p_μ можно интерпретировать как ранг среднего элемента рангово упорядоченной системы.

Если сопоставить кривой концентрации условный рычаг с точкой опоры в p_μ и дополнительно потребовать симметрию кривой относительно альтернативной диагонали, то естественное условие равновесия можно записать в форме

$$\frac{S_\mu}{1 - S_\mu} = \frac{1 - p_\mu}{p_\mu}. \quad (30)$$

Отсюда вытекает

$$p_\mu S_\mu = (1 - p_\mu)(1 - S_\mu). \quad (31)$$

и, следовательно,

$$p_\mu + S_\mu = 1. \quad (32)$$

Тем самым равновесное состояние в симметрическом подклассе соответствует расположению точки (p_μ, S_μ) на альтернативной диагонали единичного квадрата. Именно это условие выражается через коэффициент асимметрии

$$РАС = 1 - p_\mu - S_\mu. \quad (33)$$

При $РАС = 0$ точка среднего элемента находится в равновесном положении; при отклонении от нуля нарушается согласование между рангом среднего элемента и долей накопленного к этому рангу эффекта. Поэтому величину $|РАС|$ естественно рассматривать как показатель структурной несбалансированности кривой концентрации относительно симметрического нормативного случая. В этой трактовке правило 20/80 выступает не как отдельная эмпирическая эвристика, а как один из частных случаев более общего условия $РАС = 0$. Оно реализуется именно в симметрическом подклассе и не должно безоговорочно переноситься на весь двухпараметрический класс.

6.3. Критерий нормы упорядоченности

В рамках принятой модели норма упорядоченности трактуется не как произвольное эмпирическое распределение, а как нормативный эталон внутри рассматриваемого класса кривых. Тогда она определяется совместным выполнением двух требований:

$$|PAC| \rightarrow \min, \quad p_c \rightarrow \min. \quad (34)$$

Первое условие характеризует структурный баланс, второе — степень концентрации распределения; в силу (27) второе условие эквивалентно требованию $G \rightarrow \max$. Следовательно, более устойчивой в рассматриваемом классе следует считать такую систему, которая одновременно удовлетворяет условию $PAC = 0$ и минимизирует нормированную высоту центра масс. Иначе говоря, норма упорядоченности соответствует распределению, в котором согласованы баланс ранговой структуры и максимально низкое положение центра масс; именно поэтому симметричная нормативная кривая играет роль эталона структурной устойчивости внутри выбранного класса моделей.

7. Обсуждение: правило 20/80 как размерностный эффект

Полученные результаты позволяют по-новому интерпретировать классическое правило 20/80. В исходной геометрической модели конической кучи объёмная концентрация определяется формулой (5), то есть непосредственно задаётся кубическим масштабированием объёма по линейному размеру. Однако при переходе от объёма к эквивалентному радиусу, площади или иной наблюдаемой величине изменяется и сама функция концентрации. Иными словами, одна и та же ранговая организация системы может приводить к разным численным правилам концентрации, если наблюдаемый эффект обладает иной размерностью или иной степенной связью с линейным масштабом носителя.

В более общем виде, если наблюдаемая величина Q связана с базовой мерой степенным законом, то и кривая концентрации для Q получается, как размерностное отображение базовой кривой. Отсюда следует важный вывод: правило 20/80 не обязано рассматриваться как универсальная константа, одинаково применимая ко всем системам. Оно представляет собой частный численный результат, возникающий при определённом способе перехода от носителя эффекта к наблюдаемой величине. В той же схеме естественно возникают и другие соотношения, в частности 20/79 и 20/62.

Принципиально важно, что ранги и доли рангов сами по себе безразмерны. Поэтому размерность проявляется не в процедуре ранжирования, а в правиле, которое связывает ресурс с линейным масштабом носителя. Именно в этом смысле размерностная интерпретация объединяет геометрическую модель песчаного конуса и параметрические кривые концентрации: различие между наблюдаемыми законами объясняется не сменой порядка элементов, а сменой метрики и способа проекции эффекта на одномерную шкалу.

Такое объяснение отличается от других интерпретаций правила 20/80, обсуждаемых в [25–27, 39]. В одних работах соответствующая пропорция выводится из конкретных вероятностных распределений, в других — из энтропийных принципов или индексных конструкций. В предлагаемой работе источник соотношения иной: оно выводится из геометрии, масштабирования и выбора наблюдаемой величины. Поэтому основная идея

статьи состоит не в постулировании новой универсальной константы, а в сведении нескольких известных концентрационных правил к единому размерностному механизму.

7.1. Самоорганизованная критичность и статическая геометрия

Выбранная модель песчаной кучи заимствована из классического контекста самоорганизованной критичности [12], [13]. Вместе с тем в настоящей работе рассматривается только статический геометрический профиль стационарного состояния. Динамика лавин, критические наклоны и статистика событий не моделируются. Тем самым размерностная интерпретация задаёт не полную динамическую теорию SOC, а аналитически прозрачный статический benchmark, с которым могут сопоставляться наблюдаемые концентрационные режимы. Такая постановка особенно полезна потому, что в недавних работах Physica A показатели Gini и Kolkata уже применялись к статистике лавин в SOC-моделях и демонстрировали близкие почти универсальные значения порядка 0.87 [38], [39]. Следовательно, предлагаемая здесь геометрическая схема может рассматриваться как базовый эталон, относительно которого удобно интерпретировать отклонения между статически ожидаемым и динамически возникающим неравенством.

7.2. Показатель Парето и размерность эффекта

Соотношение $\alpha = D/(D - 1)$ придаёт размерностной интерпретации дополнительную строгость. Оно показывает, что показатель Парето может рассматриваться как отражение эффективной размерности наблюдаемого эффекта. При $D = 3$ получается $\alpha = 3/2$, то есть именно то значение, которое исторически ассоциируется с классическим законом Парето. В этом смысле правило 20/80 выступает не случайной эмпирической пропорцией, а частным проявлением структурного соответствия между размерностью носителя и хвостовой концентрацией.

7.3. Критическая точка $D = 1$ и эффективная размерность

Размерностная схема естественным образом выделяет случай $D = 1$. При $D = 1$ модель даёт $S(p) = p$, то есть режим полного равенства. При $D > 1$ концентрация возникает непрерывно, а в предельных режимах сильной нелинейности кривая стремится к почти ступенчатому виду. Поэтому $D = 1$ удобно интерпретировать как критическую точку, отделяющую эгалитарный режим от концентрированного, а само появление концентрации — как размерностный аналог перехода от равновесного к неравновесно-накопительному режиму. С практической точки зрения это позволяет трактовать калиброванный параметр модели как эффективную размерность наблюдаемого эффекта: не только как меру неравенства, но и как характеристику способа масштабирования ресурса.

7.4. Эконофизическая интерпретация

В эконофизике неравенство и хвостовые распределения часто объясняются через модели взаимодействующих агентов и кинетические модели обмена [33–35]. Эти работы показывают, что макроскопическая концентрация может возникать из локальных правил обмена, сохранения и сбережения. Предлагаемая здесь размерностная схема не конкурирует с такими моделями, а дополняет их: она задаёт нормативный геометрический профиль, или target profile, относительно которого динамически возникающее неравенство может быть

интерпретировано как усиление, ослабление или деформация размерностно ожидаемого распределения.

7.5. Энтропийная интерпретация и семейство Burr III

Полученное в статье симметрическое семейство естественно сопоставляется с кривой Лоренца распределения Burr III. Это допускает также дополнительную статистико-механическую интерпретацию. В литературе по не экстенсивной статистике q -экспоненциальные и Burr-распределения оказываются тесно связанными [36], [37]. В этом смысле нормативный симметрический профиль можно рассматривать не только как геометрически и энергетически выделенную форму, но и как статистически естественную. Вместе с тем в настоящей работе энтропийный принцип не используется как исходное основание модели: главным критерием остаётся эффективность системы, выраженная через минимум потенциальную энергию и положение центра масс. Поэтому энтропийная интерпретация рассматривается здесь как дополнительное физическое обоснование, а не как замена размерностно-геометрического подхода.

8. Управление неравенством доходов

8.1. Снижение неравенства по коэффициенту Джини

В качестве прикладной иллюстрации использования симметричной модели РС для анализа налогово-трансфертной политики используются данные OECD Income Distribution Database (IDD) и материалы OECD по неравенству в бюджетировании для США и Коста-Рики за 2021 год [29], [30], [32]. Согласно этим данным, действующие в обеих странах налогово-трансфертные механизмы работают в направлении ослабления концентрации доходов: в США коэффициент Джини снижается с 0.503 для рыночных доходов до 0.397 для располагаемых, а в Коста-Рике — с 0.551 до 0.487 [30], [32]. Вместе с тем само по себе уменьшение коэффициента Джини ещё не показывает, насколько результирующее распределение близко к нормативной симметричной конфигурации. Поэтому данный пример следует понимать как иллюстративный: он демонстрирует содержательность предлагаемого критерия, но не подменяет собой полную эмпирическую подгонку всей кривой Лоренца.

8.2. Посленалоговая кривая Парето и симметричная нормативная кривая

Для оценки качества налогово-трансфертной политики фактическая *post-tax* кривая Парето сравнивается в работе с симметричной нормативной кривой, имеющей то же значение коэффициента Джини. Так как коэффициент Джини G монотонно зависит от параметра концентрации a , то наблюдаемое значение G_{obs} однозначно задаёт параметр модели из уравнения $G(a) = G_{\text{obs}}$.

Для аппроксимации располагаемых доходов дополнительно использовалось квинтильное отношение S80/S20 из базы OECD, что позволило аппроксимировать фактические посленалоговые РС двухпараметрической моделью (16) [31], [32].

Исходные данные OECD за 2021 год и результаты аппроксимации представлены в таблице 2. Сравнение фактических посленалоговых кривых Парето с нормативными симметричными РС показано на рисунке 3.

Таблица 2 — OECD 2021: доходы до и после налогов и трансфертов, США и Коста-Рика

Страна	Вид дохода	G	S80/S20	a	b	ρ_μ	S_μ	РАС	Примечание
США	market	0.503	—	—	—	—	—	—	OECD IDD / OECD budgeting materials, 2021
США	disposable	0.397	5.1	0.92	2.49	0.21	0.52	0.27	OECD IDD, 2021
Коста-Рика	market	0.551	—	—	—	—	—	—	OECD IDD / OECD budgeting materials, 2021
Коста-Рика	disposable	0.487	11.56	1.45	2.11	0.27	0.63	0.10	OECD IDD, 2021

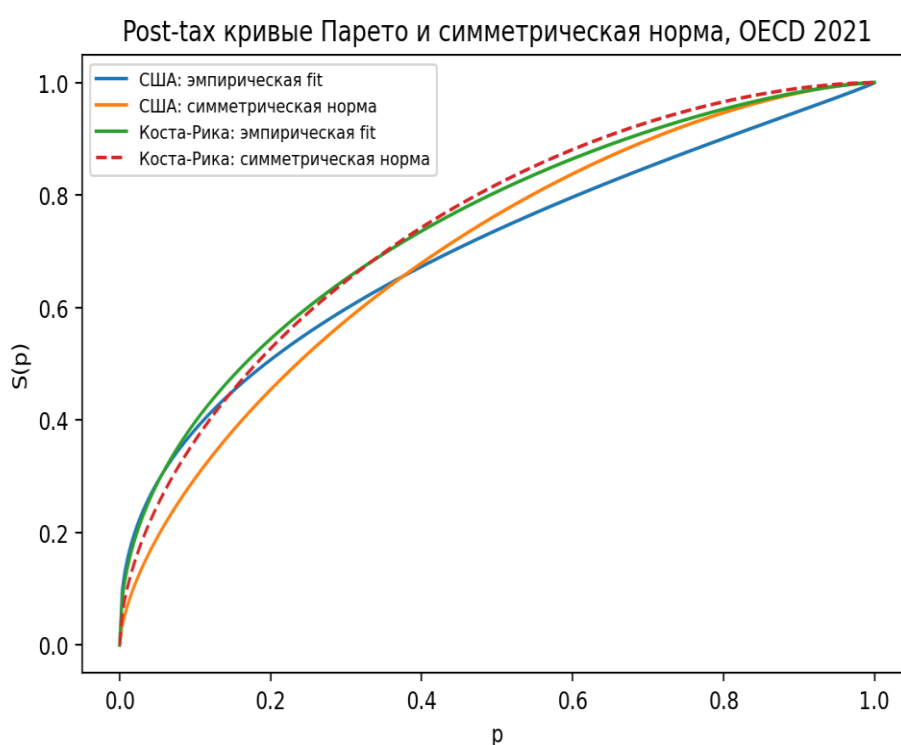


Рисунок 3 — Post-tax эмпирические кривые Парето и симметричная нормативная кривая

Из представленных в таблице 2 значений РАС и кривых на рисунке 3 видно, что РС доходов населения после уплаты налогов и получения трансфертов у Коста-Рики оказывается ближе к нормативно-симметричной, чем у США, хотя общий уровень неравенства в Коста-Рике остаётся выше. Это означает, что post-tax профиль распределения в США сильнее отклоняется от симметричного нормативного эталона, тогда как в Коста-Рике форма посленалоговой кривой Парето ближе к нему, несмотря на более высокий общий уровень неравенства. Тем самым сравнение показывает, что одной только редукции G недостаточно для содержательной оценки структурного эффекта перераспределения.

8.3. Практический вывод

Полученный результат важен для интерпретации налогово-трансфертной политики. Если использовать только коэффициент Джини, то можно заключить лишь то, что перераспределение уменьшает неравенство. Однако сопоставление *post-tax* кривой с симметричной нормативной кривой показывает более содержательную картину: политика перераспределения должна оцениваться не только по снижению G , но и по тому, насколько она уменьшает асимметрию фактической кривой Парето и приближает систему к нормативной симметричной конфигурации. Иными словами, эффективное управление неравенством состоит не просто в механическом уменьшении доходного разрыва, а в переводе системы к более сбалансированному распределению ресурса. В этом смысле близость к симметричной нормативной кривой может рассматриваться как дополнительный критерий структурного качества налогово-трансфертной политики.

Заключение

В работе предложена размерностная интерпретация эмпирических правил концентрации ресурса. Показано, что форма кривой концентрации определяется не только ранговым порядком элементов, но и тем, как наблюдаемая величина масштабируется относительно линейного носителя. Геометрическая модель конической кучи песка служит аналитически прозрачным примером, в котором при неизменной структуре носителя различные эффекты — объём, поверхность, эквивалентный радиус и энергия — приводят к различным законам концентрации. Главный вклад работы состоит в построении размерностного геометрического *benchmark*, который связывает наблюдаемое соотношение концентрации с размерностью измеряемого эффекта.

Главный результат состоит в том, что правило 20/80 интерпретируется как частный случай более общего класса размерностно обусловленных соотношений. Для трёхмерного случая переход от объёмной меры к эквивалентному линейному масштабу приводит к значению $S(0.2) = 0.787$, практически совпадающему с классической эвристикой. Сопоставление асимптотик даёт точное соотношение $\alpha = D/(D - 1)$, связывающее показатель Парето с размерностью наблюдаемого эффекта. При этом случай $D = 1$ естественно выделяется как порог между режимом полного равенства и режимами концентрации, а калиброванный параметр модели может интерпретироваться как эффективная размерность наблюдаемой величины.

Дополнительный результат связан с использованием симметричной параметрической модели и коэффициента Джини. Показано, что наблюдаемое значение Джини может быть использовано для восстановления параметра нормативной кривой концентрации, а тем самым — для перехода от эмпирически измеряемого неравенства к согласованной модельной структуре распределения ресурса. Пример с данными OECD по рыночным и располагаемым доходам США и Коста-Рики за 2021 год показывает, что такая процедура позволяет оценивать не только общий уровень посленалогового неравенства, но и степень близости фактической кривой Парето к симметричному нормативному эталону. Тем самым снижение коэффициента Джини выступает необходимым, но не достаточным критерием структурной сбалансированности распределения. В то же время полная валидация модели требует подгонки всей кривой Лоренца, а связь размерностной геометрии с динамикой

самоорганизованной критичности и с энтропийными принципами следует рассматривать как естественное направление дальнейших исследований.

Показано, что эффективность налогово-трансфертной политики должна оцениваться не только по снижению коэффициента Джини, но и по тому, насколько эта политика приближает фактическую кривую Парето к симметричной нормативной конфигурации.

Благодарности

Автор благодарит Daniel Grachov за ценные замечания и обсуждения, которые помогли улучшить презентацию этой работы.

Финансирование

Исследование выполнено без специальной финансовой поддержки со стороны государственных, коммерческих или некоммерческих организаций.

Декларация о конкурирующих интересах

Автор заявляет об отсутствии конкурирующих финансовых интересов и личных обстоятельств, которые могли бы повлиять на результаты, представленные в данной работе.

Доступность данных

Новые первичные данные в рамках данного исследования не создавались. В аналитической части работы используются теоретические выводы, а в эмпирической иллюстрации — опубликованные внешние источники, указанные в списке литературы и в тексте статьи. Этой информации достаточно для воспроизведения представленных результатов.

Декларация о генеративном ИИ и технологиях с поддержкой ИИ в процессе написания

Во время подготовки этой работы автор использовал ChatGPT (OpenAI) для помощи в переводе на английский язык, улучшении языка и стиля, а также для совершенствования оформления рукописи. После использования этого инструмента автор тщательно изучал и редактировал материал по мере необходимости, беря на себя полную ответственность за содержание публикации.

Литература

- [1] V. Pareto, *Cours d'Économie Politique*, vols. 1 and 2, F. Rouge, Lausanne, 1896–1897.
- [2] J.M. Juran, The Non-Pareto Principle; mea culpa, *Qual. Prog.* 8 (5) (1975) 8–9.
- [3] J.M. Juran, *Juran's Quality Control*, McGraw-Hill, New York, 1951.
- [4] J.M. Juran, Universals in management planning and controlling, *Manage. Rev.* 43 (11) (1954) 748–761.
- [5] Г.А. Грачёв, Моделирование принципа Парето, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 2011, 223 p.
- [6] Г.А. Грачёв, Управление структурой денежных доходов населения на основе принципа Парето, *Terra Econ.* 11 (1) (2013) 57–63.
- [7] G.A. Grachev, Size distribution of states, counties, and cities in the USA: New inequality form information, *Physica A* 592 (2022) 126831. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.126831>.
- [8] G.K. Zipf, *Human Behavior and the Principle of Least Effort*, Addison-Wesley, Cambridge, MA, 1949.
- [9] M.E.J. Newman, Power laws, Pareto distributions and Zipf's law, *Contemp. Phys.* 46 (5) (2005) 323–351.

- [10] С.А. Крашаков, А.Б. Теслюк, Л.Н. Щур, Об универсальности рангового распределения популярности веб-серверов, Вестн. РФФИ 35 (1) (2004) 46–66.
- [11] Г.А. Грачёв, Принцип Парето: предсказуемые концентрации ресурса в самоорганизующихся системах, Издательство Южного федерального университета, Ростов-на-Дону–Таганрог, 2024, 102 р.
- [12] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise, *Phys. Rev. Lett.* 59 (4) (1987) 381–384.
- [13] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Self-organized criticality, *Phys. Rev. A* 38 (1) (1988) 364–374.
- [14] В.В. Мандельброт, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [15] I.W. Burr, Cumulative frequency functions, *Ann. Math. Stat.* 13 (2) (1942) 215–232.
- [16] N. Kakwani, *Income Inequality and Poverty: Methods of Estimation and Policy Applications*, Oxford University Press, Oxford, 1980.
- [17] В.В. Матохин, *Алгебра управления*, Москва, 1994, 12 р.
- [18] А.В. Крянев, В.В. Матохин, С.Г. Климанов, *Статистические функции распределения ресурсов в экономике: 010–98*, Москва, 1998, 15 р.
- [19] I. Antoniou, V.V. Ivanov, Yu.L. Korolev, A.V. Kryanev, V.V. Matokhin, Z. Suchanecki, Analysis of resources distribution in economics based on entropy, *Physica A* 304 (3) (2002) 525–534. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00575-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00575-1).
- [20] I. Antoniou, V.V. Ivanov, A.V. Kryanev, V.V. Matokhin, M.V. Shapovalov, On the efficient resources distribution in economics based on entropy, *Physica A* 336 (3–4) (2004) 549–562. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.12.051>.
- [21] J.M. Henle, N.J. Horton, S.J. Jakus, Modelling inequality with a single parameter, in: D. Chotikapanich (Ed.), *Modeling Income Distributions and Lorenz Curves*, Springer, New York, 2008, pp. 255–269.
- [22] J.M. Sarabia, V. Jordá, C. Trueba, The Lamé class of Lorenz curves, *Commun. Stat. Theory Methods* 46 (11) (2017) 5311–5326. <https://doi.org/10.1080/03610926.2013.775306>.
- [23] B.C. Arnold, *Majorization and the Lorenz Order: A Brief Introduction*, Springer, New York, 1987.
- [24] E.M. Hoover, The measurement of industrial localization, *Rev. Econ. Stat.* 18 (1936) 162–171.
- [25] K. Tanabe, Pareto’s 80/20 rule and the Gaussian distribution, *Physica A* 510 (2018) 635–640. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.07.023>.
- [26] P.K. Rawlings, D. Reguera, H. Reiss, Entropic basis of the Pareto law, *Physica A* 343 (2004) 643–652. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.06.152>.
- [27] S. Banerjee, B.K. Chakrabarti, M. Mitra, S. Mutuswami, On the Kolkata index as a measure of income inequality, *Physica A* 545 (2020) 123178. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.123178>.
- [28] Special issue: Inequalities in Socio-Economic, Bio-Medical & Physical Systems: a statistical physics perspective, *Physica A*, 2025.
- [29] OECD, *Income and wealth distribution databases*, OECD, Paris, updated 17 Dec. 2025. Available at: <https://www.oecd.org/en/data/datasets/income-and-wealth-distribution-database.html>.
- [30] OECD, *Addressing Inequality in Budgeting*, OECD Publishing, Paris, 2024.
- [31] OECD, *Income inequality, OECD indicator metadata*, OECD, Paris, 2026. Available at: <https://www.oecd.org/en/data/indicators/income-inequality.html>.
- [32] OECD, *Income Distribution Database (IDD)*, OECD Data Explorer, Paris, accessed March 2026. Available at: <https://data-explorer.oecd.org/>.
- [33] A.A. Drăgulescu, V.M. Yakovenko, Statistical mechanics of money, *Eur. Phys. J. B* 17 (4) (2000) 723–729. <https://doi.org/10.1007/s100510070114>.
- [34] A. Chakraborti, B.K. Chakrabarti, Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution, *Eur. Phys. J. B* 17 (1) (2000) 167–170. <https://doi.org/10.1007/s100510070173>.
- [35] A. Chatterjee, B.K. Chakrabarti, S.S. Manna, Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity, *Physica A* 335 (1–2) (2004) 155–163. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.11.014>.

- [36] C. Tsallis, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, *J. Stat. Phys.* 52 (1–2) (1988) 479–487. <https://doi.org/10.1007/BF01016429>.
- [37] S. Nadarajah, S. Kotz, q exponential is a Burr distribution, *Phys. Lett. A* 359 (6) (2006) 577–579. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.07.035>.
- [38] S.S. Manna, S. Biswas, B.K. Chakrabarti, Near universal values of social inequality indices in self-organized critical models, *Physica A* 593 (2022) 127121. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.127121>.
- [39] A. Ghosh, B.K. Chakrabarti, Limiting value of the Kolkata index for social inequality and a possible social constant, *Physica A* 573 (2021) 125944. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.125944>.