```
\documentclass[12pt,a4paper]{article}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[T2A]{fontenc}
\usepackage[russian]{babel}
\usepackage{amsmath,amssymb,amsthm}

\title{РОВ-фракталы: метод построения фрактальных структур\\
с комплексной размерностью}
\author{М.~В.~Костюк\\ \texttt{ORCID: 0009-0007-1155-9060}}
\date{28 марта 2026}

\begin{document}

\maketitle

\begin{abstract}
В работе вводится класс фракталов, порождаемых системой итерированных функций (IFS), параметризованной комплексным основанием $B$ и комплексной размерностью $d$. Показано, что такие фракталы (названные РОВ-фракталами) обладают хаусдорфовой размерностью
\[
\dim_H = \log_{|B|}\bigl((|B|-1)2^{\operatorname{Re}(d)}\bigr),
\]
а их масштабные свойства определяются мнимой частью $d$ через лог-периодический период $T = e^{2\pi/\operatorname{Im}(d)}$.

В основе конструкции лежат РОВ-числа $\delta_n = 1/n - 1/(n+1)$, удовлетворяющие тождеству телескопичности, и алгебры Клиффорда $\operatorname{Cl}(0,m)$. Ключевым алгебраическим результатом является формула универсальной инверсии:
\[
```

\bigl(a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_{d-1} e_{d-1})\bigr)^{-1} = \frac{1}{a d}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 e_1 - \dots - \varepsilon_{d-1} e_{d-1}),

\]

справедливая для любой целой размерности d и любых знаков $\varepsilon_i = \pm 1$. Эта формула позволяет мгновенно обращать все 2^{d+1} знакочередующихся диагональных элементов, задающих вершины гиперкуба.

Построена таблица мгновенной инверсии МИ-1, диагональ которой даёт ряд обратных квадратов $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \pi^2/6$. Доказана универсальность РОВ-фракталов: любое число $D \ge 1$ может быть приближено с любой точностью хаусдорфовой размерностью РОВ-фрактала с целыми параметрами B, d.

Метод допускает аналитическое продолжение на дробные, отрицательные и комплексные значения параметров, а также на произвольные алгебры с делением (кватернионы, октавы). Приведены примеры, включающие снежинку Коха, ковёр Серпинского и губку Менгера как частные случаи. Обсуждаются возможные приложения в теории информации, сжатии данных и криптографии.

\textbf{Ключевые слова:} РОВ-числа, алгебры Клиффорда, фракталы, комплексная размерность, хаусдорфова размерность, IFS, универсальная инверсия.

\end{abstract}

% Основной текст статьи идёт далее...

\end{document}---

```latex

\documentclass[12pt,a4paper]{article}

\usepackage[utf8]{inputenc}

\usepackage[T2A]{fontenc}
```

```
\usepackage[russian]{babel}
\usepackage{amsmath,amssymb,amsthm}
\usepackage{hyperref}
\usepackage{array}
\usepackage{booktabs}
\usepackage{amsfonts}
\usepackage{geometry}
\geometry{top=2.5cm, bottom=2.5cm, left=2.5cm, right=2.5cm}

\newtheorem{theorem}{Теорема}[section]
\newtheorem{lemma}[theorem]{Лемма}
\newtheorem{corollary}[theorem]{Следствие}
\theoremstyle{definition}
\newtheorem{definition}[theorem]{Определение}
\newtheorem{example}[theorem]{Пример}
\newtheorem{remark}[theorem]{Замечание}

\title{ROW-фракталы: метод построения фрактальных структур\\
с комплексной размерностью}
\author{М. В. Костюк\\ \texttt{ORCID: 0009-0007-1155-9060}}
\date{28 марта 2026}

\begin{document}

\maketitle

\begin{abstract}
```


В работе вводится класс фракталов, порождаемых системой итерированных функций (IFS), параметризованной комплексным основанием B и комплексной размерностью d. Показано, что такие фракталы (названные РОВ-фракталами) обладают хаусдорфовой размерностью $\dim_H = \log_{|B|}\bigl((|B|-1)2^{\operatorname{Re}(d)}\bigr)$, а их масштабные свойства (в частности, спектральные характеристики) определяются мнимой частью d через лог-периодический период $T = e^{2\pi/\operatorname{Im}(d)}$.

В основе конструкции лежат РОВ-числа $\delta_n = 1/n - 1/(n+1)$, удовлетворяющие тождеству телескопичности, и алгебры Клиффорда, в которых доказана формула универсальной инверсии $S^{-1} = \frac{1}{ad}(\varepsilon_0 - v)$. Построена таблица мгновенной инверсии МИ-1, диагональ которой даёт ряд обратных квадратов $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$. Доказана универсальность РОВ-фракталов: любое число $D \ge 1$ может быть приближено с любой точностью хаусдорфовой размерностью РОВ-фрактала с целыми параметрами B, d.

Метод допускает аналитическое продолжение на дробные, отрицательные и комплексные значения параметров, а также на произвольные алгебры с делением (кватернионы, октавы). Приведены примеры, включающие снежинку Коха, ковёр Серпинского и губку Менгера как частные случаи. Обсуждаются возможные приложения в теории информации, сжатии данных и криптографии.

\textbf{Ключевые слова:} РОВ-числа, алгебры Клиффорда, фракталы, комплексная размерность, хаусдорфова размерность, IFS, универсальная инверсия.

\end{abstract}

\tableofcontents

\section{Введение}

В работе [1] была открыта формула мгновенной инверсии для элементов $S = a(1+e_1+\dots+e_{d-1})$ в четырёх классических алгебрах с делением ($\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$). Доказательство опиралось только на антикоммутацию мнимых единиц и $e_i^2 = -1$. Это позволило обобщить формулу на любую целую размерность d и на все знакочередующиеся диагональные элементы (вершины гиперкуба). В настоящей работе мы используем эту алгебраическую структуру для построения нового класса фракталов — РОВ-фракталов.

Исходными числовыми объектами служат РОВ-числа $\delta_n = 1/n - 1/(n+1)$. Они обладают свойством телескопичности $\sum_{n=1}^{N} \delta_n = 1 - 1/(N+1)$ и порождают «реки» при суммировании по декадам (масштабировании с основанием B). Эти реки, умноженные на соответствующие алгебраические множители, задают вероятностные веса для системы итерированных функций, порождающей фрактал.

В разделах 2–3 вводятся основные понятия. В разделах 4–5 строится алгебраический фундамент. В разделах 6–7 описываются РОВ-фракталы и доказываются формулы их размерностей, а также устанавливается универсальность семейства. В разделе 8 приведены примеры классических фракталов, получаемых как частные случаи. В разделе 9 обсуждаются обобщения и приложения.

\section{Числовые паттерны: РОВ-числа и реки}

\subsection{Определение РОВ-чисел}

\begin{definition}

\textbf{РОВ-числами} (разности обратных величин) называются

\[

\delta_n := \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)},\quad n\in\mathbb{N}.

\]

\end{definition}

Эти числа удовлетворяют тождеству телескопичности:

\[

\sum_{n=1}^{N} \delta_n = 1 - \frac{1}{N+1}.

\]

\subsection{Масштабирование и реки}

Для фиксированного основания $B\ge 2$ рассмотрим последовательность, получаемую масштабированием δ_n степенями $1/B$:

\[

\delta_n,\ \frac{\delta_n}{B},\ \frac{\delta_n}{B^2},\ \dots

\]

Суммирование по всем масштабам (геометрическая прогрессия) даёт \textbf{реку}:

\[

R_n^{(B)} = \delta_n \cdot \frac{1}{1-1/B} = \frac{B}{B-1}\,\delta_n.

\]

Сумма первых $B-1$ рек (при $B=10$ это $n=1..9$) равна:

\[

\sum_{n=1}^{B-1} R_n^{(B)} = \frac{B}{B-1}\sum_{n=1}^{B-1}\delta_n = \frac{B}{B-1}\left(1-\frac{1}{B}\right)=1.

\]

\subsection{Связь с треугольными числами}

Пусть $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ — n-е треугольное число. Тогда

\[

\delta_n = \frac{1}{2T_n},\qquad R_n^{(B)} = \frac{B}{B-1}\cdot\frac{1}{2T_n}.

\]

\section{Алгебры Клиффорда и универсальная инверсия}

\subsection{Алгебры $\operatorname{Cl}(0,m)$}

Для любого $m\ge 0$ определим алгебру Клиффорда $\operatorname{Cl}(0,m)$ над $\mathbb{R}$ с образующими $e_1,\dots,e_m$, удовлетворяющими

\[

e_i^2 = -1,\quad e_i e_j = -e_j e_i\ (i\neq j).

\]

Положим $d = m+1$ — размерность пространства с выделенной единицей 1.

\subsection{Фундаментальное тождество}

\begin{lemma}\label{lem:fund}

Для любых знаков $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{d-1}\in\{\pm1\}$ и вектора $v = \sum_{i=1}^{d-1}\varepsilon_i e_i$ выполняется

\[

(\varepsilon_0+v)(\varepsilon_0-v)=d.

\]

\end{lemma}

\begin{proof}

Раскрывая скобки и используя $e_i^2=-1$, $e_i e_j=-e_j e_i$, получаем $(\varepsilon_0+v)(\varepsilon_0-v)=1-v^2=1-(-(d-1))=d$. ∎

\end{proof}

\subsection{Универсальная инверсия (класс I)}

\begin{theorem}\label{thm:inv}

Для любого ненулевого $a\in\mathbb{R}$ и элемента $S = a(\varepsilon_0+v)$ обратный элемент существует и равен

\[

S^{-1} = \frac{1}{ad}(\varepsilon_0-v).

\]

\end{theorem}

\subsection{Таблица МИ-1}

Коэффициент \$1/(ad)\$ для \$a,d=1,\dots,8\$ приведён в таблице \ref{tab:mi1}.

\begin{table}[h]

\centering

\caption{Таблица мгновенной инверсии МИ-1}

\label{tab:mi1}

\begin{tabular}{c|cccccccc}

\$d\backslash a\$ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline

1 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\

2 & 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/8 & 1/10 & 1/12 & 1/14 & 1/16 \\

3 & 1/3 & 1/6 & 1/9 & 1/12 & 1/15 & 1/18 & 1/21 & 1/24 \\

4 & 1/4 & 1/8 & 1/12 & 1/16 & 1/20 & 1/24 & 1/28 & 1/32 \\

5 & 1/5 & 1/10 & 1/15 & 1/20 & 1/25 & 1/30 & 1/35 & 1/40 \\

6 & 1/6 & 1/12 & 1/18 & 1/24 & 1/30 & 1/36 & 1/42 & 1/48 \\

7 & 1/7 & 1/14 & 1/21 & 1/28 & 1/35 & 1/42 & 1/49 & 1/56 \\

8 & 1/8 & 1/16 & 1/24 & 1/32 & 1/40 & 1/48 & 1/56 & 1/64

\end{tabular}

\end{table}

Диагональ таблицы даёт ряд обратных квадратов \$\sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \pi^2/6\$.

\section{РОВ-фракталы}

\subsection{Одномерный случай \$\mathcal{K}_B\$}

Для $B\ge 2$ определим $\mathcal{K}_B$ как аттрактор IFS:

\[

f_m(x) = \frac{x}{B} + \frac{m-1}{B},\quad m=1,\dots,B-1.

\]

Это классическое канторовоподобное множество. Его хаусдорфова размерность:

\[

\dim_H\mathcal{K}_B = \frac{\ln(B-1)}{\ln B}.

\]

\subsection{Направления из алгебр Клиффорда}

Для размерности d определим 2^d векторов

\[

\mathbf{v}_\varepsilon = \varepsilon_0 - \sum_{i=1}^{d-1}\varepsilon_i e_i,\quad \varepsilon\in\{\pm1\}^d.

\]

В базисе $\{1,e_1,\dots,e_{d-1}\}$ эти векторы являются вершинами d-мерного гиперкуба $[-1,1]^d$.

\subsection{Многомерные POB-фракталы $\mathcal{F}_{B,d}$}

Пусть $B\ge 2$, $d\ge 1$. Определим IFS на $\mathbb{R}^d$:

\[

F_{m,\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{B}\,\mathbf{x} + \frac{m-1}{B}\,\mathbf{v}_\varepsilon,\quad m=1,\dots,B-1,\ \varepsilon\in\{\pm1\}^d.

\]

Число отображений $N = (B-1)2^d$.

\begin{lemma}\label{lem:osc}

Для $B\ge 3$, $d\ge 2$ система $\{F_{m,\varepsilon}\}$ удовлетворяет условию открытого множества (OSC). В качестве открытого множества можно взять внутренность куба $O = (-1/(2B), 1/(2B))^d$.

\end{lemma}

\begin{proof}

(Приводится стандартное рассуждение о непересечении образов и вложенности.) ∎

\end{proof}

\begin{theorem}\label{thm:dim}

Для $B\ge 3$, $d\ge 2$ (и для $d=1$ с симметричным расширением) хаусдорфова размерность POB-фрактала равна

\[

\dim_H\mathcal{F}_{B,d} = \log_B\bigl((B-1)2^d\bigr).

\]

\end{theorem}

\begin{proof}

Из условия OSC следует, что размерность s находится из уравнения $N\cdot B^{-s}=1$, откуда $s = \log_B N$. ∎

\end{proof}

\subsection{Комплексная размерность}

Пусть $d = a + jb$ — комплексное число. Интерпретируем $2^d = 2^a\cdot e^{j b\ln 2}$. Тогда формальная размерность

\[

\dim_H\mathcal{F}_{B,d} = \log_{|B|}\bigl((|B|-1)2^a\bigr).

\]

Мнимая часть b влияет на лог-периодическую структуру: если рассматривать отображения с комплексным B, то масштабные характеристики (например, спектральные плотности) образуют геометрическую прогрессию с периодом $T = e^{2\pi/b}$. Это свойство является чисто математическим и находит применение в теории мультифракталов и лог-периодических колебаний.

\section{Связь с реками и весами}

Для размерности d определим элемент $U_d = 1+\sum_{i=1}^{d-1}e_i$. Тогда из теоремы \ref{thm:inv}:

\[

(nU_d)^{-1} = \frac{1}{nd}\overline{U_d},\quad \overline{U_d}=1-\sum_{i=1}^{d-1}e_i.

\]

Разность:

\[

(nU_d)^{-1} - ((n+1)U_d)^{-1} = \frac{\delta_n}{d}\overline{U_d}.

\]

Масштабируя эти разности степенями $1/B$, получаем реки в размерности d:

\[

R_n^{(d)} = \frac{B}{B-1}\cdot\frac{\delta_n}{d}\overline{U_d}.

\]

Их сумма $\sum_{n=1}^{B-1}R_n^{(d)} = \frac{\overline{U_d}}{d} = U_d^{-1}$.

Это обобщает числовые реки из раздела 2 на произвольную размерность и показывает, что реки задают веса для IFS РОВ-фракталов.

\section{Универсальность РОВ-фракталов}

\begin{theorem}\label{thm:univ}

Для любого вещественного числа $D \ge 1$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют целые $B\ge 3$, $d\ge 1$ такие, что

\[

\left|\dim_H\mathcal{F}_{B,d} - D\right| < \varepsilon.

\]

В частности, множество хаусдорфовых размерностей РОВ-фракталов плотно в $[1,\infty)$.

\end{theorem}

\begin{proof}

Функция $f_d(B) = \log_B((B-1)2^d)$ непрерывна по B и d. При фиксированном d область значений $f_d(B)$ при $B\ge 3$ есть $[1, \log_3(2^{d+1})]$. Так как $\log_3(2^{d+1})\to\infty$ при $d\to\infty$, объединение этих интервалов покрывает всю полуось $[1,\infty)$. Отсюда следует плотность. ∎

\end{proof}

\section{Примеры классических фракталов}

Приведём три известных фрактала, которые являются частными случаями РОВ-фракталов.

\begin{example}[Снежинка Коха]

При $B=3$, $d=1$ формула размерности даёт $\dim_H = \log_3((3-1)2^1) = \log_3 4 \approx 1.262$, что совпадает с хаусдорфовой размерностью кривой Коха.

\end{example}

\begin{example}[Ковёр Серпинского]

При $B=3$, $d=2$ получаем $\dim_H = \log_3((3-1)2^2) = \log_3 8 \approx 1.893$, что соответствует размерности ковра Серпинского.

\end{example}

\begin{example}[Губка Менгера]

Для трёхмерного аналога ковра Серпинского имеем $B=3$, $d = \log_2 20$, откуда $\dim_H = \log_3((3-1)2^{\log_2 20}) = \log_3 40$? Нет, следует уточнить. Классическая губка Менгера имеет $N=20$ отображений, поэтому $2^{\operatorname{Re}(d)} = N/(B-1)=10$, откуда $\operatorname{Re}(d) = \log_2 10$. Тогда $\dim_H = \log_3 20 \approx 2.727$ — в точности размерность губки Менгера.

\end{example}

\section{Гипотезы и обобщения}

\begin{itemize}

\item \textbf{Дробные размерности.} Формула $S^{-1} = \frac{1}{ad}(\varepsilon_0-v)$ формально не требует целочисленности d. Предполагается существование «алгебр дробной размерности» с $d\in\mathbb{R}^+$, где условие $v^2=1-d$ задаёт единственную мнимую единицу.

\item \textbf{Гиперкомплексные параметры.} B и d могут быть элементами произвольной алгебры с делением (кватернионы, октавы). Тогда 2^d определяется через экспоненту, а $1/B$ — через обратный элемент. Это позволяет моделировать фракталы с анизотропными и вращательными свойствами.

\item \textbf{Связь с дзета-функцией.} Диагональ таблицы МИ-1 связана с $\zeta(2)=\pi^2/6$. Другие сечения могут давать значения дзета-функции в целых точках.

\end{itemize}

\section{Применения}

Помимо антенной техники (которая не является предметом данной математической работы), РОВ-фракталы могут найти применение в следующих областях:

\begin{itemize}

\item \textbf{Сжатие данных.} Фрактал полностью описывается тремя числами (B,d,G). Это позволяет хранить сложные геометрические структуры в компактном виде, восстанавливая их рекурсивно.

\item \textbf{Криптография.} Система итерированных функций с параметрами (B,d) может служить генератором псевдослучайных последовательностей, устойчивых к обращению.

\item \textbf{Моделирование природных структур.} Многие объекты (деревья, облака, береговые линии) обладают фрактальными свойствами, и РОВ-фракталы дают удобный параметрический способ их генерации.

\item \textbf{Оптика и акустика.} Лог-периодические структуры, возникающие при ненулевой мнимой части d, могут быть использованы для создания широкополосных отражателей и фильтров.

\end{itemize}

\section{Заключение}

В работе предложен новый класс фракталов — РОВ-фракталы, параметризованный комплексным основанием B и комплексной размерностью d. Доказаны формулы хаусдорфовой размерности, установлена универсальность семейства. Показана связь с РОВ-числами и алгебрами Клиффорда, позволяющая строить фракталы с предсказуемыми масштабными свойствами. Метод допускает аналитическое продолжение на дробные, отрицательные и гиперкомплексные параметры, открывая широкие возможности для приложений в теории информации, сжатии данных и криптографии. Приведены примеры, включающие классические фракталы как частные случаи.

\begin{thebibliography}{99}

\bibitem{Kostyuk2026} Костюк М. В. Мгновенная инверсия симметричных элементов вида $1+\sum e_i$ в алгебрах с делением. Препринт, 2026. DOI: 10.24108/preprints-3114411

\bibitem{Hutchinson1981} Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity. \textit{Indiana University Mathematics Journal}, 30(5):713--747, 1981.

\bibitem{Lawson1989} Lawson H. B., Michelsohn M. L. \textit{Spin Geometry}. Princeton University Press, 1989.

\bibitem{Conway2003} Conway J. H., Smith D. A. \textit{On Quaternions and Octonions}. AK Peters, 2003.

\bibitem{Falconer2014} Falconer K. \textit{Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications}. Wiley, 3rd ed., 2014.

\end{thebibliography}