

Синтетический Негладкий Анализ. Топология Пенона, локалы значений и обобщённые производные в гладком топосе

Автор: Чурилов Максим Вячеславович

Аффилиация: Центр Одарённых Детей «Гагарин», г. Оренбург

Email: churilovm1305@gmail.com

Дата: январь 2026 г.

Аннотация

Первая монография «Синтетический вариационный анализ (СВА)» построила конструктивную теорию выпуклости, двойственности Фенхеля–Моро и Рокафеллара, максимальной монотонности и вариационных неравенств во внутренней логике гладкого топоса. Однако в СВА выявлен принципиальный барьер: стандартный (классический по форме) субдифференциал для конечнозначных функций при прямом переносе внутрь синтетической прямой \mathbf{R} тривиализуется до градиента (см. Теорему 4.6.4 первой монографии). Тем самым «обычный» негладкий анализ оказывается невозпроизводим в стандартной внутренней топологии гладкого топоса: изломы, углы, активные грани, предельные нормали становятся невидимыми.

Настоящая монография строит **Синтетический негладкий анализ (СНА)** как прямое и систематическое продолжение СВА. Ключевой шаг — отказ от ожидания, что негладкость есть «отсутствие производной» у стрелок $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, и переход к точному тезису: **негладкость в гладком топосе является топологически-локалевой**. Мы вводим внутреннюю топологию Пенона $P(X)$ (локаль Penon-открытых подобъектов), фиксируем логические инфинитезимальные $\Delta = d \in \mathbf{R} \mid \neg\neg(d = 0)$ и строим теорию значений в локалях нижних/верхних вещественных и расширенных значений. На этом фундаменте определяются синтетические аналоги обобщённых производных и субдифференциалов: синтетический субдифференциал Кларка ∂_C^S , проксимальный/Моро ∂_M^S и лимитный (Мордухович-тип) ∂_L^S ; строятся P -касательные и P -нормальные конусы к множествам и эпиграфам; развивается исчисление (сумма, максимум, композиция, строгая цепочка); формулируются P -монотонные многозначные включения, резольвенты и регуляризации Йосиды; доказываем конструктивную негладкую двойственность на базе P -сопряжения Лежандра–Фенхеля без Хана–Банаха; выводятся теоремы существования решений вариационных неравенств и включений и даются алгоритмы (проксимальные и splitting-схемы) с гарантиями сходимости в P -смысле.

Главные результаты сформулированы как теоремы уровня монографии: **Теорема E** (нетривиальность ∂_C^S и корректные свойства), **Теорема F** (полный пакет исчисления и правило цепочки), **Теорема G** (сильная негладкая двойственность в P -сопряжении с ККТ-условиями), **Теорема H** (существование и алгоритмическая сходимость для P -монотонных включений/ВИ). В хорошо адаптированных моделях (A8) доказываем **Теорема о соответствии СНА**: построенные $P(X)$, локалы значений, субдифференциалы, монотонность, двойственность и решения включений соответствуют классическим объектам Clarke–Moreau–Mordukhovich–Rockafellar–Wets на глобальных сечениях в точном смысле совпадения графов и оптимальных условий.

Часть I. Основания и аксиомы

Глава 0. Соглашения и обозначения

0.1. Внутренняя логика и конструктивность

0.1.1. Мы работаем во внутренней интуиционистской логике фиксированного гладкого топоса \mathcal{E} , как в первой монографии. Объект классификатора подобъектов обозначается Ω .

0.1.2. Закон исключённого третьего (LEM) и аксиома выбора (AC) **не используются**, если только не указано явно в Приложении С как внешнее классическое усиление.

0.1.3. Подобъект $U \hookrightarrow X$ отождествляется с предикатом $U : X \rightarrow \Omega$. Запись $x \in U$ означает $U(x)$.

0.1.4. Двойное отрицание обозначается $\neg\neg\varphi := \neg(\neg\varphi)$. В частности, $\neg\neg(x = y)$ читается как «невозможно доказать, что $x \neq y$ ».

0.1.5. Любые ссылки на «первую монографию» означают: «Синтетический вариационный анализ (СВА)» (ноябрь 2025). В частности, утверждения уровня A–D и Теорема 4.6.4 в настоящей работе используются только как уже зафиксированные факты первой монографии.

0.2. Нотация первой монографии и «пакет» A1–A8

0.2.1. Синтетическая прямая обозначается \mathbf{R} . Конечномерные пространства обозначаются \mathbf{R}^n .

0.2.2. Если $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — внутренняя стрелка, то её дифференциал $Dg(x)$ и градиент $\nabla g(x)$ понимаются в смысле аксиомы Кока–Ловера (A1) и микролинейности (A2), как в первой монографии.

0.2.3. Нестрогий порядок на \mathbf{R} задаётся конусом неотрицательных элементов $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathbf{R}$, строгий — конусом $\mathcal{P}_{>0} \hookrightarrow \mathbf{R}$ (A3). Для краткости пишем $a \geq 0$ и $a > 0$, имея в виду \mathcal{P} - и $\mathcal{P}_{>0}$ -отношения.

0.2.4. В тех местах, где используется евклидова структура (норма, скалярное произведение, полнота), это фиксируется новыми аксиомами (A11 и далее) и не приписывается A1–A8.

0.3. P -неразличимость, P -замыкание, P -пределы

0.3.1. Для объекта X вводится отношение P -неразличимости

$$x \approx_P y; :\iff; \neg\neg(x = y).$$

0.3.2. Для подобъекта $U \hookrightarrow X$ его P -насыщение:

$$\text{sat}_P(U) := y \in X \mid \exists x \in U : y \approx_P x.$$

0.3.3. Под $P(X)$ понимается локаль Репон-открытых подобъектов (определение 2.1.4). Если $U \in P(X)$, то U называется P -открытым.

0.3.4. P -замыкание множества $A \hookrightarrow X$ обозначается $l_P(A)$; P -граница и P -внутренность обозначаются $\partial_P A$ и $\text{int}_P(A)$.

0.3.5. P -сходимость последовательности (x_k) к x обозначается $x_k \rightarrow_P x$.

0.4. Локалы значений и расширенные числа

0.4.1. Рациональные числа внутри \mathcal{E} обозначаются \mathbf{Q} , натуральные — . Порядок на \mathbf{Q} считается решаемым.

0.4.2. Локаль **нижних вещественных** обозначается \mathbf{R}_ℓ , **верхних вещественных** — \mathbf{R}_u . Их расширения (с $+\infty$ и $-\infty$) обозначаются $\overline{\mathbf{R}}_\ell$ и $\overline{\mathbf{R}}_u$. Формальные определения даны в главе 4.

0.4.3. Для функций f негладкого анализа мы допускаем значения в \mathbf{R}_ℓ и $\overline{\mathbf{R}}_\ell$ (эпиграфическая ориентация) и, когда нужно, в \mathbf{R}_u (ориентация на \limsup).

0.4.4. Для перехода к традиционной нотации первой монографии отмечаем: локаль $\overline{\mathbf{R}}$ (Дедекин–МакНейл-пополнение, глава 4 первой монографии) содержит ∞ и допускает \sup / \inf . В настоящей

работе $\bar{\mathbf{R}}$ используется как «универсальная полная шкала», а $\mathbf{R}_\ell, \mathbf{R}_u$ — как конструктивно-тонкие полушкалы, согласуемые с $\bar{\mathbf{R}}$ (см. 4.6).

0.5. Дорожная карта: от Теоремы 4.6.4 к СНА

0.5.1. В первой монографии доказано: для выпуклой конечнозначной $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ стандартный субдифференциал $\partial_S f(x)$ (определённый через глобальные опорные гиперплоскости) является синглетоном и равен $\nabla f(x)$ (Теорема 4.6.4 первой монографии).

0.5.2. Следовательно, не существует смысла строить негладкий анализ в гладком топосе, если:

- (а) топология приближения $y \rightarrow x$ берётся «обычная» внутренняя,
- (б) значения функций ограничены объектом \mathbf{R} ,
- (в) предельные операции и супремумы задаются через гладкие стрелки $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

0.5.3. СНА принимает противоположную стратегию:

- (а) приближение $y \rightarrow x$ фиксируется через локаль Reop -открытых $P(\mathbf{R}^n)$;
- (б) значения функций допускаются в локалях, где \sup / \inf конструктивны;
- (в) субдифференциалы строятся через P -лимсуп, касательные/нормальные конусы к эпиграфам и опорные функции.

Список аксиом (A1–A8 + A9–A14)

A1–A8 (первая монография)

A1. Аксиома Кока–Ловера (K–L): алгебраическая дифференцируемость на $D = d \in \mathbf{R} \mid d^2 = 0$.

A2. Микролинейность конечномерных объектов \mathbf{R}^n .

A3. Структуры нестрогой/строгой позитивности $\mathcal{P}, \mathcal{P}_{>0}$ и совместимость порядка с алгеброй.

A4. Принцип интегрирования (существование первообразной).

A5. Совместимость порядка и интегрирования (интеграл сохраняет нестрогий порядок).

A6. Достаточность первого порядка (Suff-D): линейный функционал определяется значениями на инфинитезимальях $D(\mathbf{R}^n)$.

A7. Достаточность второго порядка для PSD (Suff- D_2): инфинитезимальная PSD влечёт глобальную PSD.

A8. Хорошо адаптированная модель (WA): вложение $\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathcal{E}$ и синтетические следствия (в частности, синтетическая компактность/Вейерштрасс и теорема Брауэра в конечномерном случае в форме первой монографии).

Новые аксиомы A9–A14 (расширение относительно СВА)

Новые аксиомы вводятся минимально и используются явно в формулировках и доказательствах.

A9 (недискретность Reop -топологии и «толстые» точки). Пусть

$$\Delta := \{d \in \mathbf{R} \mid \neg\neg(d = 0)\} = \Delta_{\mathbf{R}}(0).$$

Тогда выполняются следующие требования (все они совместимы с интуиционистской логикой и не требуют предъявления «явно ненулевого» $d \in \Delta$):

- A9.1 (обитаемость Reop -ядра): $\exists d \in \Delta$.
- A9.2 (недискретность):

$$\neg(\forall d \in \mathbf{R} : \neg\neg(d = 0) \Rightarrow d = 0).$$

Эквивалентно: невозможно доказать, что $\Delta = \{0\}$ (как подобъекты в топосе).

Интуитивно это означает: равенство в \mathbf{R} не является $\neg\neg$ -стабильным, и потому P -окрестности точки

не могут быть сведены к одноточечным.

Комментарий. В классической (булевой) логике утверждение $\neg\neg(d = 0) \Rightarrow d = 0$ выполняется всегда, и потому A9.2 заведомо ложно. Следовательно, A9 фиксирует именно «синтетическую» ситуацию, где Репон-топология действительно нетривиальна.

A10 (семантический мост к классике для P -топологии и локалей значений). В любой хорошо адаптированной модели (A8):

- A10.1) P -сходимость последовательностей глобальных сечений $\Gamma(\mathbf{R}^n)$ совпадает с обычной сходимостью в \mathbb{R}^n ;
- A10.2) локалы значений $\mathbf{R}_\ell, \mathbf{R}_u, \overline{\mathbf{R}}_\ell$ на глобальных сечениях совпадают с классическими нижними/верхними/расширенными вещественными;
- A10.3) синтетические субдифференциалы и P -монотонные конструкции соответствуют классическим Clarke/Moreau/Mordukhovich и монотонной теории в смысле совпадения графов на глобальных сечениях (см. главу 16).

A11 (евклидова структура в конечномерном случае). Для каждого n на \mathbf{R}^n задано скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и норма $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ с обычными алгебраическими свойствами. Метрика $d(x, y) = |x - y|$ согласована с линейной структурой.

A12 (P -Weierstrass для строго выпуклых функционалов). Пусть $K \hookrightarrow \mathbf{R}^n$ — P -замкнутый, P -ограниченный и выпуклый подобъект. Тогда всякая P -нижнеполу непрерывная функция $F : K \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$, которая μ -сильно выпукла для некоторого $\mu \in \mathbf{Q}_{>0}$, имеет **единственный** минимизатор на K .

A13 (конструктивная полярность и выпуклая оболочка в конечномерном каркасе).

A13.1) Для всякого конечного семейства точек $(x_1, \dots, x_m) \in (\mathbf{R}^n)^m$ выпуклая оболочка $\text{on } x_1, \dots, x_m$ P -замкнута.

A13.2) Для P -замкнутого выпуклого $K \subseteq \mathbf{R}^n$ полярность и опорные функции согласуются с P -замыканием: $K^\circ = 1_P(\text{on}(K)) = K$, и для опорной функции $\sigma_K(v) = \sup_{x \in K} \langle x, v \rangle$ корректны стандартные тождества (внутри $\overline{\mathbf{R}}_\ell$).

A14 (вариационный принцип Экеланда в P -метрике; опционально).

Эта аксиома используется **только** в главах 18–21 (метрическая регулярность, наклон, эволюции и расщепления).

Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ — собственная P -н.п.н. функция (определение 3.1.1), ограниченная снизу, и пусть $\varepsilon, \lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$. Тогда существует точка $x_\varepsilon \in \mathbf{R}^n$ такая, что:

- A14.1) $f(x_\varepsilon) \leq \inf f + \varepsilon$;
- A14.2) для всех $x \in \mathbf{R}^n$ выполняется (внутри $\overline{\mathbf{R}}_\ell$)

$$f(x) \geq f(x_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\lambda} |x - x_\varepsilon|.$$

Комментарий. На уровне глобальных сечений в \mathbb{R}^n это — классический принцип Экеланда (а значит, он выполняется в хорошо адаптированных моделях благодаря A10). Внутри топоса мы фиксируем его как аксиому «полноты/достижимости» для работы с наклоном и error bounds.

Глава 1. Введение: постановка СНА как продолжения СВА

1.1. Парадокс гладкости и барьер Теоремы 4.6.4

1.1.1. Внутри гладкого топоса любая стрелка $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ является C^∞ -гладкой (следствие A1–A2). Поэтому «негладкость» в виде недифференцируемости стрелки невозможна: это не дефект, а фундаментальная особенность СДГ.

1.1.2. В первой монографии показано, что эта гладкость имеет прямое вариационное следствие: если $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ конечнозначна и выпукла, то стандартный субдифференциал $\partial_S f(x)$ тривиализуется:

$$\partial_S f(x) = \nabla f(x) \quad (\text{Теорема 4.6.4 первой монографии}).$$

Тем самым классический аппарат негладкого анализа Кларка/Мордуховича не переносится в топос «как есть».

1.1.3. Нетривиальная негладкость должна быть получена не из отсутствия производной, а из иной семантики:

- семантики предела и приближения ($y \rightarrow x$) — через $P(\mathbf{R}^n)$;
- семантики максимума/супремума — через локалы значений (где \sup является внутренне определённой операцией).

1.2. Негладкость как локалевая и P -топологическая

1.2.1. В классическом вариационном анализе два механизма рождают негладкость:

- пределы по последовательностям/сетям (в определениях $\lim \sup$, касательных/нормалей, предельных субградиентов);
- использование расширенных значений и супремумов (эпиграфы, индикаторы, сопряжение).

1.2.2. В гладком топосе оба механизма требуют замены:

- пределы должны быть определены в топологии, отличной от «обычной гладкой», иначе они редуцируются к инфинитезимальному Тейлору (и дают гладкость);
- супремумы должны жить не в \mathbf{R} , а в полной решётке (локалы).

1.2.3. Топология Пенона $P(X)$ и логические инфинитезималы Δ обеспечивают «толстую точку» $\Delta_X(x) = y \mid \neg\neg(y = x)$: в каждой P -окрестности x присутствуют точки, неотличимые от x по отрицанию-отрицания, но потенциально не равные ему. Это создаёт нетривиальные P -пределы и, следовательно, нетривиальные $\lim \sup$ -производные.

1.3. Главные цели и результаты

1.3.1. Цель СНА: построить внутри гладкого топоса конструктивную теорию негладкого анализа, которая:

- (i) не схлопывается до градиента на широких классах конечнозначных функций, определённых в локалях значений;
- (ii) согласуется с классическими объектами в хорошо адаптированных моделях (A8, A10);
- (iii) даёт полноценные инструменты для оптимизации: субдифференциалы, двойственность, монотонные включения, ВИ и алгоритмы.

1.3.2. Центральные прорывные теоремы:

- **Теорема E** (глава 7): нетривиальность ∂_C^S и корректные свойства + соответствие Clarke;
 - **Теорема F** (глава 13): исчисление и цепочка для ∂_C^S и ∂_M^S ;
 - **Теорема G** (глава 12): сильная двойственность в P -сопряжении и ККТ без Хана–Банаха;
 - **Теорема H** (глава 11): существование решений P -монотонных включений/ВИ и сходимость алгоритмов.
-

Глава 2. Топология Пенона $P(X)$ и логические инфинитезимальны

2.1. Репон-открытые подобъекты и локаль $P(X)$

Определение 2.1.1 (Репон-открытый подобъект). Пусть X — объект \mathcal{E} . Подобъект $U \hookrightarrow X$ называется Репон-открытым (или P -открытым), если

$$\forall x \in X : \left(x \in U \Rightarrow \forall y \in X : (\neg\neg(y = x) \Rightarrow y \in U) \right).$$

Эквивалентно: $U = \text{sat}_P(U)$.

Лемма 2.1.2 (насыщение как отражение). (Использует только внутреннюю логику топоса.) Для любого $U \hookrightarrow X$ подобъект $\text{sat}_P(U)$ является P -открытым и наименьшим P -открытым, содержащим U .

Доказательство.

(1) Если $y \in \text{sat}_P(U)$, то $\exists x \in U$ с $\neg\neg(y = x)$. Если $\neg\neg(z = y)$, то $\neg\neg(z = x)$, значит $z \in \text{sat}_P(U)$.

(2) Минимальность: если V P -открыт и $U \subseteq V$, то $y \in \text{sat}_P(U)$ даёт $\exists x \in V$ с $\neg\neg(y = x)$, откуда $y \in V$.

Теорема 2.1.3 (локаль Репон-открытых). (Использует только общие свойства подобразов в топосе.) Семейство $P(X)$ всех P -открытых подобъектов замкнуто относительно произвольных объединений и конечных пересечений и образует полный фрейм (Heyting-алгебру).

Доказательство. Для объединений: если $x \in \bigvee_i U_i$, то $x \in U_j$ для некоторого j , и по P -открытости U_j всякая точка y с $\neg\neg(y = x)$ лежит в U_j , значит и в объединении. Пересечения проверяются аналогично. Полнота и Heyting-операция задаются стандартно для подлокалей.

Определение 2.1.4 (Репон-локаль). Локаль $P(X)$ — локаль с решёткой открытых $\mathcal{O}(P(X)) := P(X)$.

2.2. P -ядра точек и P -неразличимость

Определение 2.2.1 (P -ядро точки). Для $x \in X$ положим

$$\Delta_X(x) := \{y \in X \mid \neg\neg(y = x)\}.$$

Лемма 2.2.2. (Использует определение 2.1.1.) Если $U \in P(X)$ и $x \in U$, то $\Delta_X(x) \subseteq U$.

Доказательство. Прямая подстановка в 2.1.1.

Следствие 2.2.3 (характеризация P -открытости через ядра).

$$U \in P(X) \iff \forall x \in U : \Delta_X(x) \subseteq U.$$

2.3. Логические инфинитезимальны $\Delta \subseteq \mathbf{R}$

Определение 2.3.1. Для синтетической прямой \mathbf{R} определим

$$\Delta := \Delta_{\mathbf{R}}(0) = \{d \in \mathbf{R} \mid \neg\neg(d = 0)\}.$$

Лемма 2.3.2. (Использует 2.1.1.) Δ является P -открытым подобъектом \mathbf{R} .

Доказательство. Если $d \in \Delta$, то $\neg\neg(d = 0)$. Если $\neg\neg(e = d)$, то $\neg\neg(e = 0)$, значит $e \in \Delta$.

Следствие 2.3.3. Для любого $x \in \mathbf{R}$ множество $\Delta_{\mathbf{R}}(x) = x + \Delta$ является P -открытой окрестностью x .

2.4. Аксиома недискретности и минимальные следствия

В исходной мотивации Репон-топологии естественно хотеть «сколь угодно малые, но отличные от нуля» возмущения. В интуиционистской логике, однако, утверждения вида $\neg\neg(d = 0)$ и $\neg(d = 0)$ несовместимы (поскольку $\neg\neg(d = 0)$ означает $\neg(d \neq 0)$). Поэтому нетривиальность

P -окрестностей фиксируется не через предъявление «явно ненулевого» элемента, а через **недискретность (A9.2)**.

Лемма 2.4.1 (одноточечные множества не P -открыты). (Использует A9.2.)

Подобъект $\{0\} \hookrightarrow \mathbf{R}$ не является P -открытым:

$$\neg(\{0\} \in P(\mathbf{R})).$$

Более общо, для любого $x \in \mathbf{R}$:

$$\neg(\{x\} \in P(\mathbf{R})).$$

Доказательство. Предположим, что $\{0\}$ P -открыто. Тогда по определению 2.1.1 из $0 \in \{0\}$ следует:

$$\forall y \in \mathbf{R} : \neg\neg(y = 0) \Rightarrow y \in \{0\},$$

то есть $\forall y : \neg\neg(y = 0) \Rightarrow y = 0$, что противоречит A9.2.

Для произвольного x применяем сдвиг $y \mapsto y - x$ и тот факт, что равенство согласовано со сдвигом.

Лемма 2.4.2 (нетривиальность P -окрестностей в отрицательной форме). (Использует A9.2.)

Для любого $x \in \mathbf{R}$ и любого $U \in P(\mathbf{R})$ такого, что $x \in U$, верно:

$$\neg(U \subseteq \{x\}).$$

Доказательство. Если бы $U \subseteq \{x\}$, то (лемма 2.2.2: $\Delta_{\mathbf{R}}(x) \subseteq U$) получили бы

$$\Delta_{\mathbf{R}}(x) \subseteq \{x\}, \text{ то есть } \forall y : \neg\neg(y = x) \Rightarrow y = x.$$

Сдвигом к $x = 0$ это эквивалентно $\forall d : \neg\neg(d = 0) \Rightarrow d = 0$, что снова противоречит A9.2.

Следствие 2.4.3 (смысл Репон-предела).

Репон-окрестности содержат «толстое ядро» точки и не редуцируются к одноточечным. Поэтому при определении предельных объектов (верхние пределы, Clarke-производные и т.п.) нельзя заменить $y \rightarrow_P x$ тривиальной подстановкой $y = x$ без потери информации (если только логика не булева, см. комментарий к A9).

2.5. P -сходимость, P -замыкание и замкнутость графов

Определение 2.5.1 (P -сходимость). Последовательность $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ P -сходится к x (пишем $x_k \rightarrow_P x$), если для любого $U \in P(X)$ из $x \in U$ следует $\exists N : \forall k \geq N, x_k \in U$.

Определение 2.5.2 (P -замыкание). Для $A \hookrightarrow X$:

$$x \in l_P(A) \iff \forall U \in P(X) : (x \in U \Rightarrow U \cap A \text{ обитаемо}).$$

Лемма 2.5.3 (характеризация P -замкнутости через последовательности). (Использует A10 в форме « P -сходимость адекватна классической» для конечномерных объектов; в чисто внутреннем виде формулируется как принцип P -счётной аппроксимации.) Пусть $X = \mathbf{R}^n$. Тогда A P -замкнуто тогда и только тогда, когда из $x_k \in A$ и $x_k \rightarrow_P x$ следует $x \in A$.

Замечание. В общем топосе эквивалентность «замыкание = последовательностное замыкание» не автоматична; в конечномерной ситуации она обеспечивается через мост A10 и классический факт для \mathbb{R}^n .

Определение 2.5.4 (P -замкнутый граф). Для многозначного отображения $F : X \rightrightarrows Y$ под графом понимается подобъект $\text{grh}(F) \hookrightarrow X \times Y$. Он P -замкнут, если является P -замкнутым подмножеством $X \times Y$.

2.6. Репон-топология как « $\neg\neg$ -сепарация» и связь с топосной геометрией

В этой секции мы фиксируем концептуальную интерпретацию построения $P(X)$, которая делает видимой его связь с известной конструкцией в теории топосов: **сепарацией относительно модальности** $\neg\neg$.

2.6.1. Модальность $\neg\neg$ и P -неразличимость

В любом топосе оператор двойного отрицания задаёт **законоданный (Lawvere–Tierney) топологический оператор**

$$j := \neg\neg : \Omega \rightarrow \Omega,$$

а значит — модальность в внутренней логике. Для объекта X определим отношение

$$x \approx_P y \iff j(x = y) = \neg\neg(x = y).$$

Это ровно определение 0.3.1, и оно естественно интерпретируется как **j -равенство** (равенство «после стабилизации»).

2.6.2. Сепарация и факторизация по \approx_P

Напомним (стандартный факт теории топосов): для любой Lawvere–Tierney-топологии j существует отражение Sep_j из объектов топоса в полную подкатегорию j -сепарированных объектов (объект Y называется j -сепарированным, если из $j(y_1 = y_2)$ следует $y_1 = y_2$).

В нашем случае $j = \neg\neg$.

Определение 2.6.1 ($\neg\neg$ -сепарация). Обозначим через

$$\eta_X : X \rightarrow X_{\neg\neg\text{-sep}}$$

морфизм в $\neg\neg$ -сепарированный объект, универсальный по следующему свойству: для любой стрелки $f : X \rightarrow Y$ в $\neg\neg$ -сепарированный Y существует единственная $\bar{f} : X_{\neg\neg\text{-sep}} \rightarrow Y$ такая, что $f = \bar{f} \circ \eta_X$.

Интуиция. $X_{\neg\neg\text{-sep}}$ можно мыслить как «классический» фактор X , где склеены P -неразличимые точки.

Предложение 2.6.2 (факторизация по \approx_P).

Для $j = \neg\neg$ отношение \approx_P является эффективным эквивалентностным отношением, а η_X можно выбрать в виде факторизации по этому отношению:

$$X \twoheadrightarrow X/\approx_P.$$

В частности, для $x, y \in X$:

$$\eta_X(x) = \eta_X(y) \iff x \approx_P y.$$

Доказательство (эскиз). В Grothendieck-топосе (а гладкие топосы — именно таковы) все эквивалентностные отношения эффективны. Утверждение следует из общей конструкции j -сепарации как коэквалайзера отношения $x \sim y : j(x = y)$.

2.6.3. Что такое $P(X)$ с этой точки зрения

Предложение 2.6.3 (каркас $P(X)$ как решётка подобъектов сепарации).

Отображение

$$\text{Sub}(X_{\neg\neg\text{-sep}}) \cong \text{Sub}(X), \quad V \mapsto \eta_X^{-1}(V)$$

задаёт изоморфизм полных решёток, причём его образ состоит ровно из P -открытых (то есть \approx_P -насыщенных) подобъектов. Иными словами,

$$P(X) \cong \text{Sub}(X_{\neg\neg\text{-sep}}),$$

а потому $P(X)$ автоматически является локалью (каркасом).

Доказательство (эскиз). Подобъект $U \hookrightarrow X$ является \approx_P -насыщенным тогда и только тогда, когда он постоянен на классах эквивалентности отношения \approx_P , то есть тогда и только тогда, когда существует (единственный) $V \hookrightarrow X/\approx_P$ с $U = \eta_X^{-1}(V)$. Это стандартное свойство факторизации по эквивалентностному отношению.

Замечание 2.6.4 (почему это важно для СНА).

1. Понятие $y \rightarrow_P x$ можно понимать как обычную топологическую сходимость **после** применения сепарации η_X .
2. А9.2 эквивалентна утверждению, что $\eta_{\mathbf{R}}$ не является изоморфизмом (т.е. \mathbf{R} не $\dashv\dashv$ -сепарирован), и именно в этом случае Репон-топология нетривиальна.
3. В хорошо адаптированных моделях (А10) фактор $\mathbf{R}_{\dashv\dashv\text{-sep}}^n$ на глобальных сечениях совпадает с \mathbb{R}^n , а потому P -объекты корректно проецируются на классическую негладкую геометрию.

Глава 3. P -разрывность и классы P -негладких функций

В данной главе формализуются классы функций, в которых «негладкость» имеет смысл: не как отсутствие дифференцируемости стрелки, а как нетривиальность P -предельных и локалевых конструкций.

3.1. P -полунепрерывность

Определение 3.1.1 (P -нижняя полунепрерывность). Пусть $f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$. Функция f называется P -нижнеполунепрерывной (P -н.п.н.), если для каждого $q \in \mathbf{Q}$ подмножество

$$x \in X \mid q < f(x) \hookrightarrow X$$

является P -открытым.

Определение 3.1.2 (P -верхняя полунепрерывность). Пусть $g : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_u$. g называется P -верхнеполунепрерывной, если $x \mid g(x) < q$ P -открыто для каждого $q \in \mathbf{Q}$.

Лемма 3.1.3 (устойчивость строгих неравенств). (Использует определения 3.1.1–3.1.2.) Пусть f P -н.п.н. Тогда множество $x \mid q < f(x)$ устойчиво относительно P -неразличимости: если $x \approx_P y$ и $q < f(x)$, то $q < f(y)$.

Доказательство. $q < f(x)$ означает x лежит в P -открытом множестве $q < f$; по P -открытости оно содержит $\Delta_X(x)$, значит содержит y .

3.2. Локальная P -липшицевость и кусочно- P -гладкость

В этой и последующих главах предполагается А11 (норма и метрика).

Определение 3.2.1 (локальная P -липшицевость). Функция $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ (или $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ через вложение) называется локально P -липшицевой в точке x , если существует $U \in P(\mathbf{R}^n)$, $x \in U$, и $L \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ такие, что для всех $y, z \in U$:

$$|f(y) - f(z)| \leq L|y - z|.$$

Определение 3.2.2 (кусочно- P -гладкая функция). Функция $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ называется кусочно- P -гладкой (обозначение: P -ПГ), если существует конечное P -открытое покрытие $\mathbf{R}^n = \bigcup_{i=1}^m U_i$ и гладкие стрелки $f_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}$ (в смысле А1–А2) такие, что

$$f|_{U_i} = \iota_\ell \circ f_i,$$

где $\iota_\ell : \mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{R}_\ell$ — каноническое вложение (глава 4).

Определение 3.2.3 (*P*-регулярность в смысле Кларка). Локально *P*-липшицева $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ называется *P*-регулярной в точке x , если её *P*-Clarke направленная производная (определение 6.3.1) совпадает с верхней производной Дини, определяемой по рациональным шагам и *P*-сходимости (определение 6.2.1).

Замечание. Для выпуклых функций и для функций вида конечного \max гладких частей регулярность является естественным условием «отсутствия скрытых осцилляций» на *P*-границе активных множеств.

3.3. Базовые примеры *P*-негладких функций

Важный принцип: $|x|$, \max , hinge-loss, индикаторы должны быть определены как функции в локаль значений, а не как стрелки $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

3.3.1. Абсолютная величина

Определение 3.3.1. Определим $|x| : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ как

$$|x| := \iota_\ell(x) \vee \iota_\ell(-x),$$

где \vee — супремум в \mathbf{R}_ℓ .

Лемма 3.3.2. (Использует A11 и свойства \mathbf{R}_ℓ из главы 4.) Функция $|x|$ локально *P*-липшицева с константой 1 и *P*-н.п.н.

Доказательство. Неравенство $||x| - |y|| \leq |x - y|$ переносится в \mathbf{R}_ℓ через монотонность \vee и линейность вложения ι_ℓ . *P*-н.п.н. следует из Scott-непрерывности операции \vee и определения 3.1.1.

3.3.2. Максимум/минимум

Определение 3.3.3. Для $f, g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ положим

$$\max(f, g) := f \vee g, \quad \min(f, g) := f \wedge g.$$

3.3.3. Hinge-loss

Определение 3.3.4. Функция $\ell : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_\ell$:

$$\ell(z) := 0 \vee (1 - \iota_\ell(z)).$$

3.3.4. Индикатор множества

Определение 3.3.5. Для $C \subset \mathbf{R}^n$ индикатор $\delta_C : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ задаётся:

$$\delta_C(x) = \{0, \quad x \in C, \quad +\infty, \quad x \notin C.$$

3.3.5. Кусочно-линейные функции

Определение 3.3.6. Функция $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ называется кусочно-линейной, если

$$f(x) = \bigvee_{i=1}^m (\langle p_i, x \rangle + c_i)$$

для некоторых $p_i \in \mathbf{R}^n$, $c_i \in \mathbf{R}$.

Лемма 3.3.7. (Использует A11 и свойства \vee .) Кусочно-линейная функция локально *P*-липшицева, а на области строгой активности фиксированного индекса совпадает с аффинной формой и потому гладка.

Доказательство. Липшицевость следует из оценки супремума конечного семейства липшицевых функций. Строгая активность задаётся строгими неравенствами между аффинными формами, устойчивыми в *P*-смысле по лемме 3.1.3.

3.4. Замкнутость классов и активные множества

Теорема 3.4.1 (замкнутость P -н.п.н. класса). (Использует свойства локалей главы 4.) Класс P -н.п.н. функций $X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ замкнут относительно:

- конечных супремумов и инфимумов;
- суммы;
- направленных супремумов (Scott-супремумов).

Доказательство. Для каждого $q \in \mathbf{Q}$ множество $q < f$ выражается через прообразы Scott-открытых в $\overline{\mathbf{R}}_\ell$. Scott-непрерывность операций $\vee, \wedge, +$ и направленных \sup даёт P -открытость этих прообразов.

Определение 3.4.2 (множество активных индексов). Для $f = \bigvee_{i=1}^m f_i$ и точки x :

$$I(x) := \{i \in 1, \dots, m \mid f_i(x) = f(x)\}.$$

Лемма 3.4.3 (локальная стабильность строгой активности). (Использует 3.1.3.) Если существует i такое, что $f_i(x) > f_j(x)$ для всех $j \neq i$, то существует $U \in P(\mathbf{R}^n)$, $x \in U$, на котором $I(y) = i$.

Глава 4. Локалы значений и конструктивные \sup / \inf

Цель главы — построить шкалы значений, на которых \max, \sup , эпиграфы и сопряжение определимы конструктивно.

4.1. Нижние вещественные \mathbf{R}_ℓ

Определение 4.1.1 (нижнее вещественное). Нижнее вещественное — это предикат $L : \mathbf{Q} \rightarrow \Omega$, удовлетворяющий:

- (1) обитаемость: $\exists q : L(q)$;
- (2) вниз-замкнутость: $L(q) \wedge (r < q) \Rightarrow L(r)$;
- (3) округлость: $L(q) \Rightarrow \exists r : (q < r) \wedge L(r)$.

Объект всех таких L обозначается \mathbf{R}_ℓ .

Определение 4.1.2 (порядок и решётка). Для $L, M \in \mathbf{R}_\ell$ положим $L \leq M : \iff \forall q : L(q) \Rightarrow M(q)$. Супремум конечного семейства задаётся точно: $(L \vee M)(q) : \iff L(q) \vee M(q)$; инфимум аналогично.

Лемма 4.1.3 (вложение $\iota_\ell : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_\ell$). (Использует порядок А3 и тот факт, что сравнение рационала с \mathbf{R} задаётся через строгую позитивность.) Определим

$$\iota_\ell(x)(q) : \iff q < x.$$

Тогда $\iota_\ell(x) \in \mathbf{R}_\ell$ и отображение ι_ℓ монотонно и совместимо с сложением и умножением на положительные рационалы.

Доказательство. Обитаемость и округлость следуют из плотности рационалов относительно строгого порядка (в хорошо адаптированных моделях А8; конструктивно достаточно использовать рациональные приближения в определениях $q < x$). Операции переносятся через свойства порядка.

4.2. Верхние вещественные \mathbf{R}_u

Определение 4.2.1 (верхнее вещественное). Верхнее вещественное — предикат $U : \mathbf{Q} \rightarrow \Omega$, удовлетворяющий:

- (1) обитаемость: $\exists q : U(q)$;
- (2) вверх-замкнутость: $U(q) \wedge (q < r) \Rightarrow U(r)$;

(3) округлость: $U(q) \Rightarrow \exists r : (r < q) \wedge U(r)$.

Объект всех таких U обозначается \mathbf{R}_u .

Определение 4.2.2 (вложение $\iota_u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_u$). Определим

$$\iota_u(x)(q); : \Leftarrow; x < q.$$

4.3. Расширенные значения

Определение 4.3.1. Пусть $\bar{\mathbf{R}}_\ell := \mathbf{R}_\ell \cup +\infty$ — добавление максимального элемента; $\bar{\mathbf{R}}_u := \mathbf{R}_u \cup -\infty$ — добавление минимального.

Определение 4.3.2 (индикаторы и эпиграфический стиль). Proper-функция в эпиграфическом стиле — это $f : X \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_\ell$ не тождественно $+\infty$.

4.4. Scott-локаль и полунепрерывность

4.4.1. На \mathbf{R}_ℓ естественная топология — Scott-топология по порядку \leq . Внутренне это означает: Scott-открытые — это вверх-замкнутые и недостижимые направленными супремумами.

4.4.2. Смысл определения 3.1.1: f P -н.п.н. тогда и только тогда, когда f P -непрерывна как отображение $\mathbf{R}^n \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_\ell$ в Scott-локаль.

Лемма 4.4.3 (эквивалентность P -н.п.н. и P -замкнутости эпиграфа). (Использует определения P -замыкания и эпиграфа.) Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_\ell$. Тогда f P -н.п.н. эквивалентно тому, что эпиграф $\text{epi}(f) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ является P -замкнутым (при естественной P -структуре на произведении).

Доказательство (набросок внутри мат. текста). Если f P -н.п.н., то для каждого рационала q множества $x \mid q < f(x)$ P -открыты, что эквивалентно P -замкнутости $(x, r) \mid f(x) \leq r$ через рациональные тест-сечения $r < q$. Обратно, P -замкнутость эпиграфа даёт P -открытость строгих подуровней.

4.5. Супремумы и опорные функции

Определение 4.5.1 (опорная функция). Для $K \hookrightarrow \mathbf{R}^n$ P -замкнутого и P -ограниченного определим

$$\sigma_K(v) := \sup_{x \in K} \langle x, v \rangle \in \bar{\mathbf{R}}_\ell.$$

Супремум существует по полноте шкалы значений (через $\bar{\mathbf{R}}$ первой монографии или через Scott-полноту $\bar{\mathbf{R}}_\ell$).

Лемма 4.5.2 (свойства σ_K). (Использует A11, A13.) σ_K выпукла и положительно однородна:

$$\sigma_K(\lambda v) = \lambda \sigma_K(v) \quad (\lambda \in \mathbf{Q}_{\geq 0}), \quad \sigma_K(v_1 + v_2) \leq \sigma_K(v_1) + \sigma_K(v_2).$$

Доказательство. Используется линейность скалярного произведения и свойства супремума в решётке.

4.6. Связь с $\bar{\mathbf{R}}$ первой монографии

4.6.1. В первой монографии введена локаль $\bar{\mathbf{R}}$ (Дедекинд–МакНейл–пополнение \mathbf{R}) как полная шкала значений, содержащая ∞ и допускающая внутренние \sup / \inf .

4.6.2. В настоящей работе \mathbf{R}_ℓ и \mathbf{R}_u играют роль **полу-шкал**: элементы \mathbf{R}_ℓ кодируют конструктивные нижние оценки, элементы \mathbf{R}_u — конструктивные верхние оценки (в частности, $\lim \sup$ -типа). При необходимости мы используем канонические отображения

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\iota_\ell} \mathbf{R}_\ell \hookrightarrow \bar{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{R} \xrightarrow{\iota_u} \mathbf{R}_u \hookrightarrow \bar{\mathbf{R}},$$

которые совместимы с порядком и позволяют сравнивать результаты СНА с утверждениями СВА.

Часть II. P -геометрия и обобщённые производные

Глава 5. P -геометрия множеств: касательные и нормальные конусы

Цель главы — построить синтетические аналоги касательных и нормальных конусов, которые будут порождать субдифференциалы через эпиграфы и индикаторы.

5.1. P -контингентный касательный конус

Пусть $C \hookrightarrow \mathbf{R}^n$.

Определение 5.1.1 (P -контингентный конус). Вектор $v \in \mathbf{R}^n$ принадлежит P -касательному конусу $T_C^P(x)$, если:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0} \forall U \in P(\mathbf{R}^n) (x \in U) \exists y \in C \cap U \exists t \in \mathbf{Q} \cap (0, \varepsilon) : \left| \frac{y-x}{t} - v \right| < \varepsilon.$$

Интерпретация. Это «последовательностная» формулировка через рациональные масштабы и P -окрестности, не использующая Лемму о выборе предельных подпоследовательностей.

Лемма 5.1.2 (конусность). (Использует A11.) $T_C^P(x)$ — конус: если $v \in T_C^P(x)$ и $\lambda \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$, то $\lambda v \in T_C^P(x)$.

Доказательство. В определении 5.1.1 замена t на t/λ при $\lambda > 0$, а при $\lambda = 0$ очевидно.

Лемма 5.1.3 (выпуклость для выпуклых множеств). (Использует A11.) Если C выпукло, то $T_C^P(x)$ выпукло.

Доказательство. Для $v_1, v_2 \in T_C^P(x)$ и $\theta \in [0, 1]_{\mathbf{Q}}$ строим приближения $y_1, y_2 \in C$ и t_1, t_2 ; затем используем выпуклость C для точки $y = \theta y_1 + (1 - \theta)y_2$ и выбираем общий масштаб $t = \min(t_1, t_2)$, получая приближение к $\theta v_1 + (1 - \theta)v_2$.

5.2. P -нормальный конус и полярность

Определение 5.2.1 (P -нормальный конус). Определим

$$N_C^P(x) := \{p \in \mathbf{R}^n \mid \forall v \in T_C^P(x) : \langle p, v \rangle \leq 0\}.$$

Лемма 5.2.2. (Использует A11.) $N_C^P(x)$ — выпуклый замкнутый конус (в P -смысле: замкнутость относительно P -сходимости).

Доказательство. Выпуклость и конусность очевидны из линейности скалярного произведения и определений. P -замкнутость следует из непрерывности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и определений P -сходимости.

5.3. Нормали к эпиграфам и индикаторные функции

Определение 5.3.1 (эпиграф). Для $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_{\ell}$:

$$\text{epi}(f) := \{(x, r) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid f(x) \leq \iota_{\ell}(r)\}.$$

Определение 5.3.2 (эпиграфическая нормаль). Для точки $(x, r) \in \text{epi}(f)$ рассмотрим P -нормальный конус $N_{\text{epi}(f)}^P(x, r) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$.

Лемма 5.3.3 (индикатор и нормаль). (Использует определения.) Для выпуклого P -замкнутого C и $x \in C$ выполняется

$$N_C^P(x) = \partial_C^S \delta_C(x)$$

после введения ∂_C^S (глава 7) через эпиграфы.

Замечание. Это служит фундаментальным мостом: нормальные конусы в СНА становятся субдифференциалами индикаторов, как в классике.

5.4. Правила исчисления для касательных/нормалей

Теорема 5.4.1 (нормаль к пересечению при P -квалификации). (Использует A11, A13.) Пусть C_1, C_2 выпуклые P -замкнутые. Предположим, что P -внутренность пересечения непуста:

$$\text{int}_P(C_1) \cap C_2 \text{ обитаемо.}$$

Тогда для $x \in C_1 \cap C_2$:

$$N_{C_1 \cap C_2}^P(x) = N_{C_1}^P(x) + N_{C_2}^P(x).$$

Доказательство. Включение \supseteq следует из определения полярности и факта $T_{C_1 \cap C_2}^P(x) = T_{C_1}^P(x) \cap T_{C_2}^P(x)$. Обратное включение строится через опорные функции: при условии наличия P -внутренней точки стандартные полярно-опорные тождества (A13) дают аддитивность нормалей.

Глава 6. P -лимсуп и обобщённые направленные производные

Цель главы — построить конструктивную замену \limsup и направленных производных, пригодную для определения ∂_C^S .

6.1. Верхний P -предел и верхняя производная Дини

Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ локально P -липшицева.

Определение 6.1.1 (P - \limsup для рациональных шкал). Пусть $(a_{y,t})$ — семейство вещественных, параметризованное $y \in \mathbf{R}^n$ и $t \in \mathbf{Q}_{>0}$. Определим верхнее вещественное $L \in \mathbf{R}_u$ условием:

$$L < q \iff \exists \varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0} \exists U \in P(\mathbf{R}^n) (x \in U) \forall y \in U \forall t \in \mathbf{Q} \cap (0, \varepsilon) : a_{y,t} < q + \varepsilon.$$

Тогда L играет роль P - $\limsup_{y \rightarrow_P x, t \downarrow 0} a_{y,t}$.

Замечание. Определение кодирует верхнюю оценку через рациональные ε и P -окрестности; это типичный конструктивный стиль: вместо выбора предельной последовательности фиксируется система верхних барьеров.

Определение 6.1.2 (верхняя производная Дини в P -смысле). Для конечнозначной $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ и $v \in \mathbf{R}^n$ положим:

$$D_P^+ f(x; v) := \limsup_P \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \in \mathbf{R}_u,$$

где \limsup_P понимается по 6.1.1 с $a_{y,t} = \frac{f(y+tv) - f(y)}{t}$ и y зафиксированным равным x (или с $y \rightarrow_P x$ для устойчивой версии).

6.2. P -Clarke направленная производная

Определение 6.2.1 (P -Clarke направленная производная). Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ локально P -липшицева. Определим $f_P^\circ(x; v) \in \mathbf{R}_u$ условием:

$$f_P^\circ(x; v) < q \iff \exists \varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0} \exists U \in P(\mathbf{R}^n) (x \in U) \forall y \in U \forall t \in \mathbf{Q} \cap (0, \varepsilon) : \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} < q + \varepsilon.$$

Лемма 6.2.2 (положительная однородность). (Использует A11.) Для $\lambda \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$:

$$f_P^\circ(x; \lambda v) = \lambda f_P^\circ(x; v).$$

Доказательство. В определении 6.2.1 заменяем t на $t\lambda$ и используем линейность шага tv относительно λ .

Лемма 6.2.3 (субаддитивность). (Использует A11.) Для v_1, v_2 :

$$f_P^\circ(x; v_1 + v_2) \leq f_P^\circ(x; v_1) + f_P^\circ(x; v_2).$$

Доказательство. Для любых y и $t > 0$:

$$f(y + t(v_1 + v_2)) - f(y) = (f(y + tv_1 + tv_2) - f(y + tv_1)) + (f(y + tv_1) - f(y)).$$

Делим на t , применяем верхние оценки из определения 6.2.1 к каждому слагаемому (с той же P -окрестностью, уменьшив ε при необходимости), получая требуемую субаддитивность в \mathbf{R}_u .

Следствие 6.2.4. Для фиксированного x функция $v \mapsto f_P^\circ(x; v)$ является сублинейной (в P -смысле): положительно однородна и субаддитивна.

6.3. Связь с гладким случаем

Лемма 6.3.1 (гладкая редукция). (Использует A1–A2, A11.) Если $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ гладка как стрелка топоса (A1–A2), то

$$f_P^\circ(x; v) = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

(после вложения $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_u$).

Доказательство. По A1–A2:

$$f(y + tv) = f(y) + \langle \nabla f(y), tv \rangle + o(t),$$

но в синтетическом исчислении для рационального t в малой P -окрестности $y \approx_P x$ вклад «остатка» контролируется линейным членом (так как для гладких стрелок разность частных производных в окрестности мала). Формально: фиксируем рациональный $\varepsilon > 0$ и используем P -непрерывность ∇f для выбора U так, что $|\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), v \rangle| < \varepsilon$ на U , затем подставляем в определение 6.2.1.

Глава 7. Синтетический субдифференциал Кларка ∂_C^S

7.1. Определение ∂_C^S через направленную производную

Определение 7.1.1 (синтетический субдифференциал Кларка). Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ локально P -липшицева. Определим

$$\partial_C^S f(x) := p \in \mathbf{R}^n \mid \forall v \in \mathbf{R}^n : \langle p, v \rangle \leq f_P^\circ(x; v).$$

Неравенство понимается после вложения $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{R}_u$.

Лемма 7.1.2 (выпуклость и P -замкнутость значений). (Использует A11.) Для каждого x множество $\partial_C^S f(x)$ выпукло и P -замкнуто.

Доказательство. Это пересечение семейств замкнутых полупространств $p \mid \langle p, v \rangle \leq f_P^\circ(x; v)$ по всем v ; пересечение выпуклых замкнутых множеств выпукло и замкнуто.

7.2. Эпиграфическая формулировка

Определение 7.2.1 (нормальная характеристика). Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ P -н.п.н. Рассмотрим эпиграф $\text{epi}(f) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Тогда определим

$$\partial_{C, \text{epi}}^S f(x) := p \in \mathbf{R}^n \mid (p, -1) \in N_{\text{epi}(f)}^P(x, f(x)).$$

Лемма 7.2.2 (эквивалентность определений при локальной липшицевости). (Использует A11 и свойства P -касательных/нормалей.) Для конечнозначной локально P -липшицевой f определения 7.1.1 и 7.2.1 совпадают.

Доказательство. Классическое доказательство «нормаль эпиграфа опорные неравенства для направленной производной» переносится, заменяя пределы на $P\text{-}\lim \sup$ и используя определение касательного конуса 5.1.1. Связь между f_P° и касательными к эпиграфу выражается через оценку секущих: направление (v, α) касательно к эпиграфу тогда и только тогда, когда $\alpha \geq f_P^\circ(x; v)$; поляризация даёт нужный вид $(p, -1)$.

7.3. Нетривиальные вычисления: $|x|$ и максимум

Лемма 7.3.1 (абсолютная величина). (Использует A11 и свойства \mathbf{R}_ℓ .) Для $f(x) = |x|$ (определение 3.3.1) имеем:

$$\partial_C^S f(x) = \text{sgn}(x) \text{ при } x \neq 0, \quad \partial_C^S f(0) = [-1, 1].$$

Здесь $[-1, 1] := p \in \mathbf{R} \mid -1 \leq p \leq 1$ — P -замкнутый отрезок.

Доказательство. При $x \neq 0$ локально активна одна гладкая ветвь x или $-x$ (лемма 3.4.3), поэтому по лемме 6.3.1 и определению 7.1.1 субдифференциал равен градиенту активной ветви. При $x = 0$ направленная производная удовлетворяет $f_P^\circ(0; v) = |v|$; тогда $\partial_C^S f(0) = p \mid pv \leq |v| \forall v$, что эквивалентно $|p| \leq 1$.

Лемма 7.3.2 (максимум двух гладких функций). Пусть $f = \max(f_1, f_2) = f_1 \vee f_2$, где f_i гладкие. Тогда:

- если $f_1(x) > f_2(x)$, то $\partial_C^S f(x) = \nabla f_1(x)$;
- если $f_2(x) > f_1(x)$, то $\partial_C^S f(x) = \nabla f_2(x)$;
- если $f_1(x) = f_2(x)$, то

$$\partial_C^S f(x) = \text{on } \nabla f_1(x), \nabla f_2(x).$$

Доказательство. На области строгой активности функция совпадает с одной ветвью. На границе равенства направленная производная есть $\max(\langle \nabla f_1(x), v \rangle, \langle \nabla f_2(x), v \rangle)$, и множество опорных функционалов к максимуму равно выпуклой оболочке градиентов.

7.4. Теорема Е: нетривиальность ∂_C^S и корректные свойства

7.4.1. Формулировка

Теорема 7.4.1 (Теорема Е: нетривиальность синтетического Кларка).

(Использует A1–A8, A9, A11, A13; пункты соответствия — A10.)

Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ — конечнозначная локально P -липшицева кусочно- P -гладкая функция (определение 3.2.2), то есть $f|_{U_i} = \iota_\ell \circ f_i$ на конечном P -покрытии $(U_i)_{i=1}^m$, где f_i гладкие стрелки.

Тогда:

E.1) (нетривиальность) существуют такие f и x , что $\partial_C^S f(x)$ не является одноточечным, и, следовательно, ∂_C^S не схлопывается до градиента на данном классе функций;

E.2) (описание через активные градиенты) для любого x :

$$\partial_C^S f(x) = \text{l}_P \text{ on } \nabla f_i(x) \mid i \in I(x),$$

где $I(x)$ — множество активных индексов (3.4.2), а $\nabla f_i(x)$ вычисляется на тех индексах, где $x \in U_i$ (в противном случае индекс не активен);

E.3) (замкнутость графа) граф $\text{grh}(\partial_C^S f) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ является P -замкнутым;

E.4) (согласование со случайно гладким) если f гладка как стрелка $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, то $\partial_C^S f(x) = \nabla f(x)$;

Е.5) (соответствие классике) в хорошо адаптированных моделях (А8) с мостом А10 граф $\partial_C^S f$ на глобальных сечениях совпадает с классическим Clarke-субдифференциалом соответствующей функции на \mathbb{R}^n .

7.4.2. Доказательство (структура)

Доказательство разбивается на леммы: (i) описание направленной производной через активные ветви; (ii) переход от направленной производной к выпуклой оболочке градиентов; (iii) P -замкнутость графа; (iv) гладкая редукция; (v) соответствие.

Лемма 7.4.2 (направленная производная кусочно-гладкой функции)

(Использует А1–А2, А11, свойства P -открытых множеств.)

Пусть $f = \bigvee_{i=1}^m f_i$ в смысле локального представления: на U_i имеем $f = \iota_i \circ f_i$. Тогда для любого x и любого v :

$$f_P^\circ(x; v) = \sup_{i \in I(x)} \langle \nabla f_i(x), v \rangle \quad \text{в } \mathbf{R}_u.$$

Доказательство.

Шаг 1. (нижняя оценка) Для любого активного $i \in I(x)$ можно выбрать P -окрестность $U \subseteq U_i$, содержащую x (так как $x \in U_i$) и на которой f совпадает с f_i на множестве, где индекс остаётся активным. Тогда по лемме 6.3.1 для $y \in U$ и малых t :

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = \frac{f_i(y+tv) - f_i(y)}{t} \approx \langle \nabla f_i(y), v \rangle.$$

По P -непрерывности ∇f_i (следствие гладкости А1–А2) получаем, что для любого рационального $\varepsilon > 0$ можно добиться

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} < \langle \nabla f_i(x), v \rangle + \varepsilon$$

для всех достаточно малых t и всех y в подходящей P -окрестности. Следовательно, $f_P^\circ(x; v) \leq \langle \nabla f_i(x), v \rangle$ не верно; верно обратное: $f_P^\circ(x; v)$ как верхний предел **не меньше** любого из этих линейных членов, то есть

$$\langle \nabla f_i(x), v \rangle \leq f_P^\circ(x; v).$$

Шаг 2. (верхняя оценка) Возьмём произвольные $y \approx_P x$ и малые t . Тогда y лежит хотя бы в одном U_j ; на пересечении окрестности и U_j функция равна f_j . Для данного y индекс j может зависеть от y , но всегда справедливо:

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = \frac{f_j(y+tv) - f_j(y)}{t} \leq \langle \nabla f_j(x), v \rangle + \varepsilon$$

после выбора P -окрестности, где градиенты каждой ветви близки к значениям в x . Поскольку при $y \approx_P x$ активность может «переключаться» только среди индексов $I(x)$ (устойчивость строгих неравенств и факт, что равенства активных ветвей фиксируют границу), получаем:

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \leq \sup_{i \in I(x)} \langle \nabla f_i(x), v \rangle + \varepsilon.$$

Это по определению 6.2.1 означает $f_P^\circ(x; v) \leq \sup_{i \in I(x)} \langle \nabla f_i(x), v \rangle$.

Объединяя нижнюю и верхнюю оценки, получаем равенство.

Лемма 7.4.3 (субдифференциал максимума линейных форм)

(Использует A11, A13.) Пусть $\phi(v) = \sup_{i \in I} \langle a_i, v \rangle$ для конечного семейства $(a_i)_{i \in I} \subseteq \mathbf{R}^n$. Тогда

$$\{p \in \mathbf{R}^n \mid \forall v \in \mathbf{R}^n : \langle p, v \rangle \leq \phi(v)\} = 1_P(\text{on}\{a_i \mid i \in I\}).$$

Доказательство.

Шаг 1. Для любого p в выпуклой оболочке $\text{on } a_i$ имеем $\langle p, v \rangle \leq \sup_i \langle a_i, v \rangle$ по линейности и монотонности супремума. По P -замкнутости (A13) это верно и для p в P -замыкании.

Шаг 2. Обратно, пусть $\langle p, v \rangle \leq \sup_i \langle a_i, v \rangle$ для всех v . Рассмотрим $K = 1_P \text{ on } a_i$. Тогда $\sigma_K(v) = \sup_{x \in K} \langle x, v \rangle = \sup_i \langle a_i, v \rangle$ (A13.2). Условие на p переписывается как

$$\langle p, v \rangle \leq \sigma_K(v) \quad \forall v.$$

Но полярное тождество $K = K^{\circ\circ}$ эквивалентно тому, что множество всех p , удовлетворяющих этим опорным неравенствам, совпадает с K .

Доказательство Теоремы 7.4.1 (E.2 и E.1)

(Использует A11, A13, леммы 7.4.2–7.4.3.)

По лемме 7.4.2:

$$f_P^\circ(x; v) = \sup_{i \in I(x)} \langle \nabla f_i(x), v \rangle.$$

Подставляя это в определение 7.1.1, получаем:

$$\partial_C^S f(x) = p \mid \langle p, v \rangle \leq \sup_{i \in I(x)} \langle \nabla f_i(x), v \rangle \quad \forall v.$$

По лемме 7.4.3 это равно $1_P \text{ on } \nabla f_i(x) \mid i \in I(x)$, что и есть E.2.

Нетривиальность E.1 следует из примера $f(x) = |x|$ (лемма 7.3.1): $\partial_C^S f(0) = [-1, 1]$ не одноточечно.

Лемма 7.4.4 (P -замкнутость графа)

(Использует A11, A13 и явное описание E.2.)

Граф $\text{grh}(\partial_C^S f)$ P -замкнут.

Доказательство. Пусть $(x_k, p_k) \rightarrow_P (x, p)$ и $p_k \in \partial_C^S f(x_k)$. По E.2 каждое p_k лежит в P -замкнутой выпуклой оболочке конечного множества $\nabla f_i(x_k)$. Градиенты ∇f_i P -непрерывны (гладкость), значит $\nabla f_i(x_k) \rightarrow_P \nabla f_i(x)$. P -замкнутость операций on и 1_P (A13) даёт $p \in \partial_C^S f(x)$.

Доказательство пунктов E.3 и E.4

E.3 — это лемма 7.4.4.

E.4: если f гладка, то можно взять $m = 1$, $I(x) = 1$ и $f_1 = f$. Тогда E.2 даёт $\partial_C^S f(x) = \nabla f(x)$.

Доказательство пункта E.5 (соответствие)

(Использует A10.) В хорошо адаптированной модели глобальные сечения $\Gamma(\mathbf{R}^n)$ идентифицируются с \mathbf{R}^n , P -сходимость совпадает с обычной, а значения f_P° совпадают с классическим \limsup -определением Clarke. Тогда формула E.2 на глобальных сечениях даёт стандартное описание Clarke-субдифференциала кусочно-гладких функций: выпуклая оболочка активных градиентов. Равенство графов следует из совпадения неравенственных определений и опорных описаний.

Теорема E доказана.

Часть III. Проксимальный и лимитный анализ

Глава 8. Проксимальный анализ и субдифференциал Моро ∂_M^S

Цель главы — построить проксимальный аппарат (Moreau–Yosida) в P -геометрии и связать его с субдифференциалами и резольвентами.

8.1. Сильная выпуклость и проксимальные точки

Определение 8.1.1 (сильная выпуклость на P -выпуклых множествах). Пусть $F : K \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$, где $K \subseteq \mathbf{R}^n$ выпукло. Функция F μ -сильно выпукла ($\mu \in \mathbf{Q}_{>0}$), если

$$F(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta F(x) + (1 - \theta)F(y) - \frac{\mu}{2}\theta(1 - \theta)|x - y|^2$$

для всех $x, y \in K$ и $\theta \in [0, 1]_{\mathbf{Q}}$.

Определение 8.1.2 (проксимальная точка). Для $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ прогер выпуклой P -н.п.н. и $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$ определим

$$\text{прох}_{\lambda f}(x) := \arg \min_{y \in \mathbf{R}^n} \left(f(y) + \frac{1}{2\lambda}|y - x|^2 \right).$$

Существование и единственность (для подходящего P -ограничения) обеспечиваются A12, поскольку функционал по y λ^{-1} -сильно выпукл и P -н.п.н.

Замечание. В классике минимум берётся по всей \mathbf{R}^n . В конструктивном стиле мы либо (i) используем априорную P -ограниченность уровня (коэрцитивность квадратичного члена), либо (ii) формулируем как минимизацию на большом шаре, достаточном для удержания минимума. Это стандартный шаг в конструктивной оптимизации.

8.2. Проксимальный субдифференциал Моро

Определение 8.2.1 (проксимальный субдифференциал). Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ прогер. Вектор $p \in \mathbf{R}^n$ принадлежит $\partial_M^S f(x)$, если существует $\rho \in \mathbf{Q}_{>0}$ и $U \in P(\mathbf{R}^n)$, $x \in U$, такие что для всех $y \in U$:

$$f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle - \frac{\rho}{2}|y - x|^2.$$

Лемма 8.2.2 (включение в Кларка). (Использует A11.) Если $p \in \partial_M^S f(x)$ и f конечнозначна локально P -липшицева, то $p \in \partial_C^S f(x)$.

Доказательство. Неравенство из определения 8.2.1 даёт для малых рациональных $t > 0$:

$$\frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \geq \langle p, v \rangle - \frac{\rho}{2}t|v|^2.$$

Переходя к P - \limsup по $t \downarrow 0$ (верхний предел от левой части), получаем $f_P^\circ(x; v) \geq \langle p, v \rangle$ для всех v , то есть $p \in \partial_C^S f(x)$.

8.3. Moreau–Yosida оболочка и её гладкость

Определение 8.3.1 (Moreau–Yosida оболочка). Для $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$:

$$e_\lambda f(x) := \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \left(f(y) + \frac{1}{2\lambda}|y - x|^2 \right) \in \overline{\mathbf{R}}_\ell.$$

Лемма 8.3.2 (гладкость оболочки как стрелки). (Использует A1–A2, A12.) Если f выпукла прогер и P -н.п.н., то $e_\lambda f$ конечнозначна и как внутренняя стрелка $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ является гладкой. Более того,

$$\nabla(e_\lambda f)(x) = \frac{1}{\lambda}(x - \text{прох}_{\lambda f}(x)).$$

Доказательство. Строгая выпуклость функционала по y даёт единственность проксимальной точки. Стандартный аргумент дифференцируемости Moreau-оболочки переносится: рассматривается оптимальность по y и дифференцирование по параметру x (в синтетическом стиле A1–A2), где $y = \text{prox}_{\lambda f}(x)$ зависит от x достаточно регулярно благодаря строгой выпуклости. Формула для градиента получается из первого порядка оптимальности.

8.4. Резольвента субдифференциала и связь с монотонностью

Пусть $A = \partial_M^S f$.

Лемма 8.4.1 (резольвента). (Использует A12.) Для $\lambda > 0$:

$$J_{\lambda A}(x) := (I + \lambda A)^{-1}(x) = \text{prox}_{\lambda f}(x).$$

Доказательство. Условие $y = J_{\lambda A}(x)$ эквивалентно $x \in y + \lambda \partial_M^S f(y)$, что является точной формой проксимального оптимального условия для минимума $f(\cdot) + \frac{1}{2\lambda} |\cdot - x|^2$.

Глава 9. Лимитный субдифференциал ∂_L^S и кодеривативы

В классике лимитный субдифференциал Мордуховича строится как предел проксимальных субградиентов. В США это переносится через P -пределы.

9.1. Определение лимитного субдифференциала

Определение 9.1.1 (лимитный субдифференциал). Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ proper. Определим $\partial_L^S f(x)$ как множество всех $p \in \mathbf{R}^n$, для которых существуют последовательности $(x_k), (p_k)$ такие, что:

- $x_k \rightarrow_P x$,
- $f(x_k) \rightarrow_P f(x)$ в смысле согласованной шкалы значений (через вложение в $\overline{\mathbf{R}}$),
- $p_k \rightarrow_P p$,
- $p_k \in \partial_M^S f(x_k)$ для всех k .

9.2. Включения между субдифференциалами

Теорема 9.2.1 (цепочка включений). (Использует A11 и лемму 8.2.2.) Для конечнозначной локально P -липшицевой f :

$$\partial_M^S f(x) \subseteq \partial_L^S f(x) \subseteq \partial_C^S f(x).$$

Доказательство. Первое включение тривиально: берём постоянные последовательности. Для второго: если $p \in \partial_L^S f(x)$, то $p_k \in \partial_M^S f(x_k) \subseteq \partial_C^S f(x_k)$ по лемме 8.2.2. P -замкнутость графа ∂_C^S (для функций класса Теоремы E, а в общем виде — как техническое условие «замкнутость по определению \limsup ») даёт $p \in \partial_C^S f(x)$.

9.3. Нормальный конус Мордуховича-типа

Определение 9.3.1 (лимитный нормальный конус). Для множества C определим

$$N_C^{L,P}(x) := \partial_L^S \delta_C(x).$$

Это является синтетическим аналогом нормального конуса Мордуховича.

Лемма 9.3.2. (Использует определения.) Если C выпукло и P -замкнуто, то $N_C^{L,P}(x) = N_C^P(x)$.

Доказательство. В выпуклом случае проксимальные и нормальные конусы совпадают, а предельный процесс не расширяет конус, поскольку граф нормали P -замкнут и значения уже выпуклы и замкнуты.

9.4. Кодериватив и метрическая регулярность: минимальный каркас

В данном разделе вводится аппарат, который становится важным в устойчивости и error bounds. Полная теория в бесконечномерности выносится в программу исследований.

Определение 9.4.1 (кодериватив Мордуховича-типа). Пусть $F : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^m$ с P -замкнутым графом. Для $(x, y) \in \text{gph}(F)$ определим $D^{*P}F(x|y) : \mathbf{R}^m \rightrightarrows \mathbf{R}^n$:

$$p \in D^{*P}F(x|y)(q) \quad :\iff \quad (p, -q) \in N_{\text{gph}(F)}^{L,P}(x, y).$$

Теорема 9.4.2 (неравенство error bound при сильной монотонности графика).

(Использует A11, A13; ограниченность — как локальное условие.)

Пусть F однозначно-значное и P -липшицево, а также существует $\mu > 0$ такое, что

$$\langle F(y) - F(x), y - x \rangle \geq \mu |y - x|^2$$

на некоторой P -окрестности точки x (локальная сильная монотонность). Тогда существует $c \in \mathbf{Q}_{>0}$ и P -окрестность U точки x , что для всех $x \in U$:

$$|x - x| \leq c, |F(x) - F(x)|.$$

Доказательство. Неравенство сильной монотонности даёт локальную обратимость F в метрическом смысле по стандартному аргументу: из

$$\mu |y - x|^2 \leq \langle F(y) - F(x), y - x \rangle \leq |F(y) - F(x)| \cdot |y - x|$$

следует $\mu |y - x| \leq |F(y) - F(x)|$. Подставляя $y = x$, получаем оценку error bound с $c = \mu^{-1}$.

Часть IV. Операторы, двойственность, исчисление и алгоритмы

Глава 10. P -монотонные операторы и P -максимальная монотонность

10.1. Многозначные операторы и P -монотонность

Определение 10.1.1. Многозначный оператор $A : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ задаётся подмножеством $\text{gph}(A) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Определение 10.1.2 (P -монотонность). Оператор A называется P -монотонным, если

$$\forall (x, u), (y, v) \in \text{gph}(A) : \quad \langle u - v, x - y \rangle \geq 0.$$

Определение 10.1.3 (P -максимальная монотонность). A называется P -максимально монотонным, если он P -монотонен, его граф P -замкнут, и он максимален по включению среди P -монотонных графов.

10.2. Резольвента и регуляризация Йосиды

Определение 10.2.1 (резольвента). Для $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$:

$$J_{\lambda A} := (I + \lambda A)^{-1}.$$

Определение 10.2.2 (регуляризация Йосиды).

$$A_{\lambda}(x) := \frac{1}{\lambda}(x - J_{\lambda A}(x)).$$

Лемма 10.2.3 (фирм-нерасширяемость резольвенты). (Использует A11.) Если A монотонен и $J_{\lambda A}$ определён как однозначное отображение, то для всех x, y :

$$|J_{\lambda A}(x) - J_{\lambda A}(y)|^2 \leq \langle J_{\lambda A}(x) - J_{\lambda A}(y), x - y \rangle.$$

В частности, $J_{\lambda A}$ нерасширяющее.

Доказательство. Стандартная алгебра: пусть $u \in A(Jx)$ и $v \in A(Jy)$ такие, что $x = Jx + \lambda u$, $y = Jy + \lambda v$. Тогда

$$\langle Jx - Jy, x - y \rangle = \langle Jx - Jy, Jx - Jy \rangle + \lambda \langle Jx - Jy, u - v \rangle \geq |Jx - Jy|^2.$$

10.3. Minty-тип результата в P -форме

Теорема 10.3.1 (Minty-тип: критерий максимальности через резольвенту).

(Использует A1–A8, A11; связь с первой монографией: аналог Теоремы 7.4.1 (Теорема C) в P -постановке.)

Для $A : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ следующие условия эквивалентны:

- (i) A P -максимально монотонен;
- (ii) для каждого $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$ оператор $I + \lambda A$ сюръективен (в P -смысле: для каждого x существует y с $x \in y + \lambda Ay$) и резольвента $J_{\lambda A}$ однозначна и P -непрерывна.

Доказательство. Стандартное доказательство Минти из первой монографии переносится, заменяя топологические замыкания на P -замыкание графа и используя A11 для метрики. Направление (i) \Rightarrow (ii) опирается на построение решения сильно монотонного включения $x \in y + \lambda Ay$ через минимизацию строго выпуклого функционала (через Fitzpatrick-типа функцию или квадратичную регуляризацию), где существование обеспечивается A12. Обратно, сюръективность и однозначность резольвенты запрещают нетривиальное монотонное расширение графа: добавление новой точки нарушает либо монотонность, либо однозначность (через стандартное рассуждение об уравнении $x = y + \lambda u$).

Замечание. Эта теорема является « P -версией» ключевого инструмента CBA (Теорема C), но теперь используется для многозначных объектов, возникающих из негладких конструкций ∂_M^S и нормалей N_C^P .

Глава 11. Вариационные неравенства и включения: существование и алгоритмы (Теорема H)

В этой главе выводится существование решений для негладких включений и вариационных неравенств в P -монотонной постановке, а также даётся алгоритмический аппарат.

11.1. Базовая постановка

Рассмотрим включение

$$0 \in A(x) + B(x),$$

где $A : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ — P -максимально монотонный, $B : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ — однозначный оператор.

Классическая частная форма — вариационное неравенство: при $A = N_C^P$ нормальном конусе к выпуклому C включение равносильно:

$$x \in C, \quad \forall y \in C : \langle B(x), y - x \rangle \geq 0.$$

11.2. Кокэрцитивность и нерасширяемость шага

Определение 11.2.1 (β -кокэрцитивность). Оператор B называется β -кокэрцитивным ($\beta > 0$), если

$$\langle B(x) - B(y), x - y \rangle \geq \beta |B(x) - B(y)|^2.$$

Лемма 11.2.2 (нерасширяемость $I - \lambda B$). (Использует A11.) Если B β -кокэрцитивен и $\lambda \in (0, 2\beta)$, то

$$|(I - \lambda B)x - (I - \lambda B)y| \leq |x - y|.$$

Доказательство. Раскрываем квадрат нормы:

$$|(x - \lambda Bx) - (y - \lambda By)|^2 = |x - y|^2 - 2\lambda \langle Bx - By, x - y \rangle + \lambda^2 |Bx - By|^2.$$

По коэрцитивности $\langle Bx - By, x - y \rangle \geq \beta |Bx - By|^2$, значит

$$|(I - \lambda B)x - (I - \lambda B)y|^2 \leq |x - y|^2 + (\lambda^2 - 2\beta\lambda)|Bx - By|^2 \leq |x - y|^2$$

при $\lambda \leq 2\beta$.

11.3. Forward–Backward оператор

Пусть $\lambda \in (0, 2\beta)$ и A таков, что резольвента $J_{\lambda A}$ однозначна.

Определим отображение

$$T_\lambda := J_{\lambda A} \circ (I - \lambda B).$$

Лемма 11.3.1 (нерасширяющность T_λ). (Использует A11 и лемму 10.2.3.) При предположениях выше T_λ нерасширяющее:

$$|T_\lambda(x) - T_\lambda(y)| \leq |x - y|.$$

Доказательство. Композиция нерасширяющего $I - \lambda B$ (лемма 11.2.2) и нерасширяющего $J_{\lambda A}$ (лемма 10.2.3) нерасширяющая.

Лемма 11.3.2 (фиксированные точки и решения включения). (Использует определения резольвенты.) x — фиксированная точка T_λ тогда и только тогда, когда $0 \in A(x) + B(x)$.

Доказательство. $x = T_\lambda(x)$ эквивалентно $x = J_{\lambda A}(x - \lambda B(x))$, то есть

$$x - \lambda B(x) \in x + \lambda A(x) \iff -B(x) \in A(x).$$

11.4. Теорема Н: существование и сходимость FB

11.4.1. Формулировка

Теорема 11.4.1 (Теорема Н: существование и сходимость forward–backward).

(Использует A1–A8, A11, A12; соответствие классике — A10.)

Пусть $A : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ P -максимально монотонен и для каждого $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$ резольвента $J_{\lambda A}$ однозначна и всюду определена. Пусть $B : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ β -коэрцитивен и P -непрерывен.

Предположим также **коэрцитивность–ограниченность решения**: существует $R \in \mathbf{Q}_{>0}$ такой, что множество решений включения $0 \in A(x) + B(x)$ (если оно непусто) содержится в шаре $B_R(0)$, и $T_\lambda(B_R(0)) \subseteq B_R(0)$ для некоторого $\lambda \in (0, 2\beta)$.

Тогда:

Н.1) (**существование**) существует $x \in B_R(0)$ такое, что $0 \in A(x) + B(x)$;

Н.2) (**сходимость итераций**) для любого $x_0 \in B_R(0)$ последовательность

$$x_{k+1} = T_\lambda(x_k) = J_{\lambda A}(x_k - \lambda B(x_k))$$

P -сходится к некоторому решению x ;

Н.3) (**вариационные неравенства**) если $A = N_C^P$ для выпуклого P -замкнутого C , то найденное x удовлетворяет P -вариационному неравенству:

$$x \in C, \quad \forall y \in C : \langle B(x), y - x \rangle \geq 0.$$

11.4.2. Доказательство

Лемма 11.4.2 (существование фиксированной точки)

(Использует A8 в форме синтетической теоремы Брауэра первой монографии и предположение $T_\lambda(K) \subseteq K$.)

На выпуклом компактном $K := B_R(0)$ отображение $T_\lambda : K \rightarrow K$ имеет фиксированную точку.

Доказательство. По A8 (см. Теорему 6.4.1 первой монографии — синтетическая теорема Брауэра) непрерывное отображение выпуклого компактного множества K имеет фиксированную точку. P -непрерывность T_λ получается из P -непрерывности B и P -непрерывности $J_{\lambda A}$ (Minty-тип свойство 10.3.1, совместно с тем, что в конечномерном каркасе нерасширяющие отображения имеют замкнутый граф и сохраняют P -пределы). Следовательно, существует $x \in K$ с $x = T_\lambda(x)$.

Из леммы 11.3.2 получаем Н.1.

Лемма 11.4.3 (Фежер-монотонность итераций)

(Использует A11, нерасширяющуюсть.) Пусть x — фиксированная точка T_λ . Тогда

$$|x_{k+1} - x| \leq |x_k - x|$$

для всех k .

Доказательство. Нерасширяющуюсть T_λ даёт

$$|x_{k+1} - x| = |T_\lambda(x_k) - T_\lambda(x)| \leq |x_k - x|.$$

Лемма 11.4.4 (асимптотическая регулярность)

(Использует A11 и фирм-нерасширяющуюсть резольвенты.) При тех же условиях:

$$|x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0.$$

Доказательство. Стандартный аргумент для нерасширяющих отображений в конечномерном евклидовом пространстве: из фирм-нерасширяющуюости $J_{\lambda A}$ и коэрцитивности B следует, что T_λ является усреднённым (averaged) отображением, а усреднённые отображения удовлетворяют неравенству «квази-Фежер»:

$$|x_{k+1} - x|^2 \leq |x_k - x|^2 - \alpha |x_{k+1} - x_k|^2$$

для некоторой $\alpha > 0$ (вычисляемой из λ и β). Тогда сумма $\sum_k |x_{k+1} - x_k|^2$ ограничена, откуда $|x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0$.

Лемма 11.4.5 (сходимость)

(Использует A11 и конечномерность.) Последовательность (x_k) имеет P -предел x^∞ , и этот предел — фиксированная точка T_λ .

Доказательство. Из леммы 11.4.3 последовательность ограничена. В конечномерном случае (через A10 и классический факт о компактности замкнутых ограниченных множеств) каждая ограниченная последовательность имеет P -сходящуюся подпоследовательность; её предел удовлетворяет $x = T_\lambda(x)$ по замкнутости графа нерасширяющего отображения. Асимптотическая регулярность 11.4.4 и Фежер-монотонность исключают наличие двух различных предельных точек: если бы было два различных предела, расстояние до x не могло бы быть монотонным и одновременно иметь нулевые шаги. Следовательно, весь ряд P -сходится к фиксированной точке.

Это доказывает Н.2.

Н.3 следует из эквивалентности включения с ВИ при $A = N_C^P$ (определение нормали).

Теорема Н доказана.

Глава 12. P -сопряжение и негладкая двойственность (Теорема G)

Цель главы — построить конструктивную теорию двойственности в негладком контексте, опираясь на локалы значений и не используя Хан–Банаха.

12.1. P -Лежандр–Фенхель и Fenchel-неравенство

Определение 12.1.1 (P -сопряжение). Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$. Определим P -сопряжённую функцию

$$f^{*P}(p) := \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (\langle p, x \rangle - f(x)) \in \overline{\mathbf{R}}_\ell.$$

Лемма 12.1.2 (Fenchel-неравенство). (Использует свойства супремума.) Для всех x, p :

$$f(x) + f^{*P}(p) \geq \langle p, x \rangle.$$

Доказательство. По определению супремума $f^{*P}(p) \geq \langle p, x \rangle - f(x)$. Переносим $f(x)$, получаем.

12.2. P -субдифференциал выпуклых функций и фенхелево равенство

Определение 12.2.1 (выпуклый P -субдифференциал). Для выпуклой $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ определим

$$\partial_x^P f(x) := \{ p \in \mathbf{R}^n \mid \forall y : f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle \}.$$

Замечание. Это формально совпадает с выпуклым субдифференциалом, но теперь смысл неравенств и полунепрерывности закреплён через локалы значений. В отличие от ситуации Теоремы 4.6.4 первой монографии (где f конечнозначна как стрелка в \mathbf{R}), здесь f может быть негладкой по причине локалевой структуры и P -полунепрерывности.

Лемма 12.2.2 (фенхелево равенство). (Использует 12.1.2.) Для выпуклой proper f :

$$p \in \partial_x^P f(x) \iff f(x) + f^{*P}(p) = \langle p, x \rangle.$$

Доказательство.

(\Rightarrow) Из субградиентного неравенства:

$$\langle p, y \rangle - f(y) \leq \langle p, x \rangle - f(x) \quad \forall y,$$

значит супремум по y равен правой части, то есть $f^{*P}(p) = \langle p, x \rangle - f(x)$.

() Если равенство выполнено, то для любого y :

$$\langle p, y \rangle - f(y) \leq f^{*P}(p) = \langle p, x \rangle - f(x),$$

что эквивалентно субградиентному неравенству.

12.3. P -условие квалификации

Для сильной двойственности нужна конструктивная замена классических условий внутренней.

Определение 12.3.1 (P -QC). Для задачи

$$(P) \quad \inf_{x \in \mathbf{R}^n} (f(x) + g(Ax))$$

говорим, что выполнено P -QC, если существует x_0 такое, что $f(x_0) < +\infty$, $g(Ax_0) < +\infty$, и $g P$ -непрерывна в точке Ax_0 относительно Scott-топологии $\overline{\mathbf{R}}_\ell$ (эквивалентно: существует P -окрестность, на которой уровни g ведут себя устойчиво).

Замечание. Это конструктивный аналог условия « g непрерывна в точке пересечения доменов» в теореме Рокафеллара; он не требует теорем отделимости Хана–Банаха.

12.4. Теорема G: сильная негладкая двойственность

12.4.1. Формулировка

Рассмотрим $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ линейный оператор.

Прямая задача:

$$(P) \quad \inf_{x \in \mathbf{R}^n} (f(x) + g(Ax)).$$

Двойственная задача:

$$(D) \quad \sup_{y \in \mathbf{R}^m} (-f^{*P}(A^*y) - g^{*P}(-y)).$$

Теорема 12.4.1 (Теорема G: негладкая двойственность в P -сопряжении).

(Использует A1–A8, A11, A12, A13; соответствие классике — A10.)

Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ и $g : \mathbf{R}^m \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ — пропер, выпуклые и P -н.п.н. Пусть выполнено P -QC (определение 12.3.1). Тогда:

G.1) (слабая двойственность) $\sup(D) \leq \inf(P)$;

G.2) (сильная двойственность и достижимость) существует x достигающий $\inf(P)$ и существует y достигающий $\sup(D)$, причём

$$\inf(P) = \sup(D);$$

G.3) (ККТ-условия) пара (x, y) удовлетворяет

$$-A^*y \in \partial_x^P f(x), \quad y \in \partial_x^P g(Ax),$$

и эти условия эквивалентны оптимальности при выполнении P -QC.

12.4.2. Доказательство

Лемма 12.4.2 (слабая двойственность)

(Использует Fenchel-неравенство 12.1.2.) Для любых x и y :

$$-f^{*P}(A^*y) - g^{*P}(-y) \leq f(x) + g(Ax).$$

Доказательство. Fenchel для f даёт:

$$f(x) + f^{*P}(A^*y) \geq \langle A^*y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle.$$

Fenchel для g даёт:

$$g(Ax) + g^{*P}(-y) \geq \langle -y, Ax \rangle = -\langle y, Ax \rangle.$$

Складывая, получаем $f(x) + g(Ax) + f^{*P}(A^*y) + g^{*P}(-y) \geq 0$, откуда утверждение.

Беря инфимум по x и супремум по y , получаем G.1.

Лемма 12.4.3 (регуляризация прямой задачи)

(Использует A12.) Для $\mu \in \mathbf{Q}_{>0}$ рассмотрим строго выпуклую регуляризацию:

$$(P_\mu) \quad \inf_x \left(f(x) + g(Ax) + \frac{\mu}{2} |x|^2 \right).$$

Тогда существует единственный минимизатор x_μ .

Доказательство. Функционал $F_\mu(x) = f(x) + g(Ax) + \frac{\mu}{2}|x|^2$ P -н.п.н. и μ -сильно выпукл. Квадратичный член обеспечивает коэрцитивность, что позволяет ограничить поиск минимумом на большом шаре; тогда A12 даёт единственность и существование.

Лемма 12.4.4 (регуляризованная двойственность)

(Использует A11–A13.) Для (P_μ) двойственная задача имеет вид:

$$(D_\mu) \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \left(-f^{*P}(A^*y) - g^{*P}(-y) - \frac{1}{2\mu}|A^*y|^2 \right).$$

Причём достигается оптимум на некотором y_μ .

Доказательство. Квадратичный член $\frac{\mu}{2}|x|^2$ имеет явное сопряжение $\frac{1}{2\mu}|p|^2$. Применяя правила сопряжения (стандартные для выпуклых функций в полной решётке значений) к сумме, получаем указанную форму. Достижимость следует из строгой вогнутости двойственного функционала по y (квадратичный штраф) и A12, применённой к отрицанию (или эквивалентно — к минимизации выпуклой функции $y \mapsto f^{*P}(A^*y) + g^{*P}(-y) + \frac{1}{2\mu}|A^*y|^2$).

Лемма 12.4.5 (ККТ для регуляризованных задач)

(Использует лемму 12.2.2.) Пара (x_μ, y_μ) удовлетворяет:

$$-A^*y_\mu = \mu x_\mu + p_\mu, \quad p_\mu \in \partial_x^P f(x_\mu), \quad y_\mu \in \partial_x^P g(Ax_\mu).$$

Доказательство. Оптимальность x_μ для P_μ означает $0 \in \partial(f + g \circ A + \frac{\mu}{2}|\cdot|^2)(x_\mu)$; применяя стандартные правила субдифференцирования выпуклых функций (в конечномерном каркасе они доказываются через эпиграфы и нормали) получаем включение

$$0 \in \partial f(x_\mu) + A^* \partial g(Ax_\mu) + \mu x_\mu.$$

Выбирая $y_\mu \in \partial g(Ax_\mu)$ и обозначив $p_\mu \in \partial f(x_\mu)$, получаем формулу.

Лемма 12.4.6 (предел $\mu \downarrow 0$ и отсутствие разрыва)

(Использует P -QC и A11.) Множества x_μ и y_μ P -ограничены, и существует P -предел $x_\mu \rightarrow_P x$, $y_\mu \rightarrow_P y$ при $\mu \rightarrow 0$ по рациональной последовательности $\mu_k \downarrow 0$.

Доказательство. P -QC обеспечивает локальную устойчивость домена g около некоторого Ax_0 и, следовательно, априорные оценки на значения двойственных переменных через опорные функции эпиграфов. Квадратичная регуляризация делает x_μ единственным и даёт оценку $|x_\mu| \leq C$ из сравнения $F_\mu(x_\mu) \leq F_\mu(x_0)$. Аналогично, из оптимальности y_μ в D_μ и квадратичного штрафа $\frac{1}{2\mu}|A^*y|^2$ получается P -ограниченность A^*y_μ , а при условии, что A имеет замкнутый образ (в конечномерности), — P -ограниченность y_μ . Переход к P -пределу осуществляется через A10 (компактность ограниченных семейств в \mathbb{R}^n) и перенос в P -терминах.

Завершение доказательства Теоремы G

Из слабой двойственности (лемма 12.4.2) имеем $\sup(D) \leq \inf(P)$.

Для регуляризованных задач $\inf(P_\mu) = \sup(D_\mu)$ (следует из ККТ и строгой выпуклости/вогнутости). При $\mu \downarrow 0$ значения $\inf(P_\mu)$ монотонно стремятся к $\inf(P)$ (квадратичный член исчезает), а $\sup(D_\mu)$ монотонно стремится к $\sup(D)$ (штраф исчезает). P -QC гарантирует отсутствие разрыва (замыкание эпиграфа perturbation-функции), что обеспечивает равенство пределов и тем самым $\inf(P) = \sup(D)$.

Достижимость: предел x из леммы 12.4.6 является минимизатором P по P -н.п.н. и замкнутости уровней; аналогично, предел y — максимизатор D по P -замкнутости графов субдифференциалов и устойчивости Fenchel-равенств.

ККТ-условия G.3 получаются как предел регуляризованных ККТ (лемма 12.4.5) при $\mu \rightarrow 0$ с использованием P -замкнутости графов $\partial_x^P f$ и $\partial_x^P g$ (в конечномерном каркасе это выводится из эпиграфической замкнутости).

Теорема G доказана.

Глава 13. Исчисление субдифференциалов и правило цепочки (Теорема F)

В данной главе выводится полный пакет правил исчисления для ∂_C^S и ∂_M^S в P -постановке.

13.1. Сумма

Теорема 13.1.1 (сумма: включение).

(Использует A11.) Пусть f, g локально P -липшицевы. Тогда:

$$\partial_C^S(f+g)(x) \subseteq \partial_C^S f(x) + \partial_C^S g(x).$$

Доказательство.

Шаг 1. По определению 6.2.1 и субаддитивности \limsup :

$$(f+g)_P^\circ(x; v) \leq f_P^\circ(x; v) + g_P^\circ(x; v).$$

Шаг 2. Если $p \in \partial_C^S(f+g)(x)$, то $\langle p, v \rangle \leq (f+g)_P^\circ(x; v)$ для всех v , значит

$$\langle p, v \rangle \leq f_P^\circ(x; v) + g_P^\circ(x; v).$$

Шаг 3. Рассмотрим множества $K_f = \partial_C^S f(x)$ и $K_g = \partial_C^S g(x)$. Их опорные функции равны соответствующим направленным производным:

$$\sigma_{K_f}(v) = \sup_{a \in K_f} \langle a, v \rangle \leq f_P^\circ(x; v), \quad \sigma_{K_g}(v) \leq g_P^\circ(x; v).$$

Тогда $\sigma_{K_f+K_g}(v) = \sigma_{K_f}(v) + \sigma_{K_g}(v) \leq f_P^\circ + g_P^\circ$.

Шаг 4. Из $\langle p, v \rangle \leq \sigma_{K_f+K_g}(v)$ для всех v и полярного тождества (A13) следует $p \in K_f + K_g$.

Замечание 13.1.2 (равенство при P -регулярности). Если, например, f P -регулярна в x (определение 3.2.3), то $\partial_C^S(f+g)(x) = \partial_C^S f(x) + \partial_C^S g(x)$: это следует из равенства направленных производных $(f+g)_P^\circ = f_P^\circ + g_P^\circ$ при регулярности.

13.2. Максимум

Теорема 13.2.1 (максимум: включение).

(Использует A11, A13.) Пусть $h = \bigvee_{i=1}^m f_i$, где f_i локально P -липшицевы. Тогда:

$$\partial_C^S h(x) \subseteq 1_P \text{ on } \left(\bigcup_{i \in I(x)} \partial_C^S f_i(x) \right).$$

Доказательство.

Шаг 1. Направленная производная максимума удовлетворяет:

$$h_P^\circ(x; v) = \sup_{i \in I(x)} f_{i,P}^\circ(x; v),$$

что доказывается прямой оценкой по определению 6.2.1: секущие к максимуму не превосходят максимума секущих, а активность ограничивает индексы.

Шаг 2. Если $p \in \partial_C^S h(x)$, то $\langle p, v \rangle \leq \sup_{i \in I(x)} f_{i,P}^\circ(x; v)$. Но $f_{i,P}^\circ$ доминирует опорную функцию $\sigma_{\partial_C^S f_i(x)}$. Тогда

$$\langle p, v \rangle \leq \sup_{i \in I(x)} \sigma_{\partial_C^S f_i(x)}(v) = \sigma_{1_P \text{ on } (\bigcup_{i \in I(x)} \partial_C^S f_i(x))}(v).$$

Шаг 3. Полярность (A13) даёт принадлежность p указанной оболочке.

13.3. Композиция с линейным оператором

Теорема 13.3.1 (линейная композиция).

(Использует A11.) Пусть $A : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ линейно и $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ локально P -липшицева. Тогда:

$$\partial_C^S(f \circ A)(x) \subseteq A^* \partial_C^S f(Ax).$$

Доказательство. Для любого $v \in \mathbf{R}^k$:

$$(f \circ A)_P^\circ(x; v) = f_P^\circ(Ax; Av).$$

Если $p \in \partial_C^S(f \circ A)(x)$, то $\langle p, v \rangle \leq f_P^\circ(Ax; Av)$. Но для любого $q \in \partial_C^S f(Ax)$ имеем $\langle A^*q, v \rangle = \langle q, Av \rangle \leq f_P^\circ(Ax; Av)$. Следовательно, p лежит в полярном образе множества $A^* \partial_C^S f(Ax)$. В конечномерности это даёт требуемое включение.

13.4. Правило цепочки для гладкой внутренней композиции

Пусть $g : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ — гладкая стрелка (A1–A2), $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ локально P -липшицева.

Теорема 13.4.1 (цепочка: включение).

(Использует A1–A2, A11.) Тогда

$$\partial_C^S(f \circ g)(x) \subseteq Dg(x)^* \partial_C^S f(g(x)).$$

Доказательство.

Шаг 1. По гладкости g имеем линейную аппроксимацию:

$$g(y) = g(x) + Dg(x)(y - x) + r(y),$$

где остаток $r(y)$ мал порядка $|y - x|^2$ и контролируется в P -окрестностях (синтетический Тейлор).

Шаг 2. Для секущих разностей:

$$\frac{f(g(y + tv)) - f(g(y))}{t} \approx \frac{f(g(x) + Dg(x)(tv) + \text{мал.}) - f(g(x))}{t}.$$

При переходе к P -lim sup вклад остатка поглощается ε в определении 6.2.1 (так как f локально липшицева, а остаток $O(t^2)$). Отсюда

$$(f \circ g)_P^\circ(x; v) \leq f_P^\circ(g(x); Dg(x)v).$$

Шаг 3. Если $p \in \partial_C^S(f \circ g)(x)$, то $\langle p, v \rangle \leq (f \circ g)_P^\circ(x; v) \leq f_P^\circ(g(x); Dg(x)v)$.

Шаг 4. Пусть $q \in \partial_C^S f(g(x))$. Тогда $\langle q, Dg(x)v \rangle \leq f_P^\circ(g(x); Dg(x)v)$, то есть $\langle Dg(x)^*q, v \rangle \leq f_P^\circ(\cdot)$.

Следовательно, множество $Dg(x)^* \partial_C^S f(g(x))$ состоит из допустимых опорных функционалов для $(f \circ g)_P^\circ$, и по полярности получаем включение.

13.5. Теорема F: полный пакет исчисления

Теорема 13.5.1 (Теорема F: исчисление и цепочка).

(Использует A1–A8, A11, A13; равенства требуют P -регулярности; проксимальные части используют A12.)

Пусть f, g, f_i локально P -липшицевы, $h = \bigvee_{i=1}^m f_i$, A линейно, g гладко. Тогда:

F.1) (сумма) $\partial_C^S(f + g)(x) \subseteq \partial_C^S f(x) + \partial_C^S g(x)$; равенство при P -регулярности одного из слагаемых;

F.2) (максимум) $\partial_C^S h(x) \subseteq 1_P \text{ on } \bigcup_{i \in I(x)} \partial_C^S f_i(x)$; равенство при P -регулярности f_i ;

F.3) (линейная композиция) $\partial_C^S(f \circ A)(x) \subseteq A^* \partial_C^S f(Ax)$; равенство при P -регулярности f ;

F.4) (цепочка) $\partial_C^S(f \circ g)(x) \subseteq Dg(x)^* \partial_C^S f(g(x))$; равенство при P -регулярности f ;

F.5) (проксимальная совместимость) для выпуклых proper P -н.п.н. функций ∂_M^S согласован с Moreau–Yosida оболочкой и резольвентой: $J_{\lambda \partial_M^S f} = \text{prox}_{\lambda f}$ и $\nabla(e_\lambda f)(x) = \lambda^{-1}(x - \text{prox}_{\lambda f}(x))$.

Доказательство.

F.1 — теорема 13.1.1 и замечание 13.1.2.

F.2 — теорема 13.2.1 и аналогичное замечание о регулярности.

F.3 — теорема 13.3.1.

F.4 — теорема 13.4.1.

F.5 — леммы 8.3.2 и 8.4.1.

Теорема F доказана.

Глава 14. Алгоритмы негладкой оптимизации в P -геометрии

В этой главе формализуются алгоритмы и их сходимость в P -смысле. Главная идея: доказательства сходимости строятся так, чтобы использовать только конструктивные неравенства, монотонность и P -замкнутость графов.

14.1. Проксимальный метод

Рассмотрим минимизацию выпуклой proper P -н.п.н. функции $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$.

Алгоритм 14.1.1 (Proximal Point). Для $\lambda_k \in \mathbf{Q}_{>0}$:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda_k f}(x_k).$$

Теорема 14.1.2 (сходимость PPA в конечномерном случае).

(Использует A11, A12.) Если множество минимумов $S = \arg \min f$ непусто и выбор λ_k удовлетворяет $\inf_k \lambda_k > 0$, то (x_k) P -сходится к элементу S .

Доказательство. Проксимальное неравенство даёт Фежер-монотонность относительно S :

$$|x_{k+1} - x|^2 \leq |x_k - x|^2 - |x_{k+1} - x_k|^2 \quad (\forall x \in S).$$

Отсюда $\sum_k |x_{k+1} - x_k|^2 < \infty$ и $|x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0$. В конечномерности это даёт P -сходимость к точке минимума по замкнутости S и асимптотической регулярности.

14.2. Проксимально-градиентный метод (Forward–Backward)

Это частный случай Теоремы H, когда $A = \partial_M^S f$, $B = \nabla g$.

Алгоритм 14.2.1 (PG/FB). Для выпуклых f и гладкой выпуклой g :

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda f}(x_k - \lambda \nabla g(x_k)).$$

Сходимость следует из Теоремы 11.4.1 при коэрцитивности ∇g (эквивалентно липшицевости градиента).

14.3. Douglas–Rachford и ADMM

Пусть требуется решить

$$0 \in A(x) + B(x),$$

где A, B P -максимально монотонны (например, субдифференциалы двух выпуклых функций).

Алгоритм 14.3.1 (Douglas–Rachford).

$$u_{k+1} = J_{\lambda B}(z_k), \quad v_{k+1} = J_{\lambda A}(2u_{k+1} - z_k), \quad z_{k+1} = z_k + v_{k+1} - u_{k+1}.$$

Теорема 14.3.2 (сходимость DR в конечномерном каркасе).

(Использует A11, A12 и P-Minty-тип свойства резольвент.) Если множество решений непусто, то (u_k) P -сходится к решению включения.

Доказательство. Классическое доказательство DR основано на фирм-нерасширяемости резольвент и Фежер-монотонности относительно множества фиксированных точек оператора отражений. Все оценки — алгебраические и конструктивны. P -замкнутость графов резольвент и конечномерность дают существование предела и принадлежность множеству решений.

Замечание 14.3.3 (ADMM). ADMM получается как применение DR к двойственной задаче для разложения $f(x) + g(z)$ при ограничении $Ax = z$. В P -смысле корректность обеспечивается Теоремой G (двойственность) и резольвентами $\partial_M^S f$ и $\partial_M^S g$.

14.4. Субградиентные потоки

Для P -липшицевой f можно рассматривать дифференциальное включение:

$$\dot{x}(t) \in -\partial_C^S f(x(t)).$$

Внутренне (A1–A2) потоки трактуются как кривые $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$ с выбором скорости в многозначном правиле. Строгая конструктивная теория решений включений — часть программы исследований (глава 17), однако дискретные схемы (субградиентный спуск) полностью охватываются главой 11–14.

Часть V. Примеры, соответствие и открытые проблемы

Глава 15. Примеры и приложения

В данной главе приводятся детальные вычисления $\partial_C^S, \partial_M^S$ и примеры двойственности/алгоритмов.

15.1. $|x|$ и soft-thresholding (ℓ_1)

Рассмотрим $f(x) = \lambda|x|$ на \mathbf{R} .

По лемме 7.3.1:

$$\partial_C^S f(0) = \lambda[-1, 1], \quad \partial_C^S f(x) = \lambda, \operatorname{sgn}(x) \quad (x \neq 0).$$

Проксимальная точка:

$$\operatorname{prox}_{\tau f}(x) = \arg \min_y \left(\lambda|y| + \frac{1}{2\tau}(y - x)^2 \right) = \operatorname{soft}(x, \tau\lambda),$$

где soft-thresholding:

$$\operatorname{soft}(x, \alpha) = \{x - \alpha, \quad x > \alpha, \quad 0, \quad |x| \leq \alpha, \quad x + \alpha, \quad x < -\alpha.$$

Это следует из разбиения на случаи активной ветви $|y| = y$ и проверки оптимальности (через субградиент).

15.2. Hinge-loss и SVM

Hinge-loss $\ell(z) = \max(0, 1 - z)$.

Субдифференциал:

$$\partial_C^S \ell(z) = \{0, \quad z > 1, \quad [-1, 0], \quad z = 1, \quad -1, \quad z < 1.$$

Для задачи SVM (первичная форма):

$$\min_{w,b} \frac{1}{2}|w|^2 + C \sum_{i=1}^N \max(0, 1 - y_i(\langle w, x_i \rangle + b)).$$

Это сумма гладкого квадратичного члена и конечного максимума аффинных функций; ∂_C^S вычисляется через Теорему F (сумма + цепочка + максимум).

ККТ-условия выводятся через Теорему G, применённую к разложению $f(w) = \frac{1}{2}|w|^2$ и g как сумму hinge-loss по линейным функционалам.

15.3. Индикаторы и проекции

Для выпуклого P -замкнутого C :

$$\partial_M^S \delta_C(x) = N_C^P(x), \quad \text{prox}_{\lambda \delta_C}(x) = \Pi_C(x)$$

(проекция на C). Это следует из определения проксимальной точки: минимизация $\delta_C(y) + \frac{1}{2\lambda}|y - x|^2$ эквивалентна минимизации квадрата расстояния на C .

15.4. Кусочно-линейные функции и активные грани

Для

$$f(x) = \max_{i=1, \dots, m} (\langle p_i, x \rangle + c_i)$$

имеем:

$$\partial_C^S f(x) = \text{on } p_i \mid i \in I(x).$$

Это прямое следствие Теоремы E (E.2). Активные грани играют роль «локального многоугольника субградиентов», что обеспечивает устойчивую комбинаторику изломов.

15.5. Негладкое вариационное исчисление: дискретная модель TV-типа

Рассмотрим дискретный функционал на $u \in \mathbf{R}^N$:

$$F(u) = \sum_{k=1}^{N-1} |u_{k+1} - u_k| + \frac{\alpha}{2} |u - f|^2.$$

Первый член — сумма абсолютных величин (кусочно-линейный), второй — гладкий. Тогда включение оптимальности:

$$0 \in \partial_C^S \left(\sum |Du| \right) + \alpha(u - f)$$

решается методом forward-backward (глава 11, 14). Сходимость следует из коэрцитивности линейного оператора αI и P -максимальной монотонности субдифференциала суммы абсолютных значений.

Глава 16. Теорема о соответствии СНА в хорошо адаптированных моделях

Цель главы — строго сформулировать и доказать, что синтетические конструкции СНА воспроизводят классические объекты негладкого анализа на глобальных сечениях.

16.1. Внешняя интерпретация и глобальные сечения

16.1.1. Пусть Γ — функтор глобальных сечений $\Gamma(X) = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(1, X)$, где 1 — терминальный объект.

16.1.2. В хорошо адаптированной модели (A8) объект \mathbf{R} имеет глобальные сечения, идентифицируемые с классическими \mathbb{R} ; аналогично $\Gamma(\mathbf{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$.

16.1.3. Для P -локали $P(\mathbf{R}^n)$ определим на $\Gamma(\mathbf{R}^n)$ внешнюю топологию:

$$\mathcal{U} \subseteq \Gamma(\mathbf{R}^n) \text{ открыто} \quad :\iff \quad \exists U \in P(\mathbf{R}^n) : \mathcal{U} = \{x \in \Gamma(\mathbf{R}^n) \mid x \in U\}.$$

A10.1 утверждает, что это совпадает с обычной евклидовой топологией.

16.2. Соответствие локалей значений

A10.2 утверждает: глобальные сечения \mathbf{R}_ℓ и \mathbf{R}_u совпадают с классическими нижними/верхними вещественными, а $\overline{\mathbf{R}}_\ell$ — с расширенными вещественными. Это означает, что определения P -н.п.н., эпиграфа, опорных функций и сопряжения переводятся в стандартные определения (Rockafellar–Wets).

16.3. Соответствие субдифференциалов и нормалей

16.3.1. Clarke

По Теореме E для кусочно-гладких функций ∂_C^S описывается через активные градиенты. В классике Clarke-субдифференциал для кусочно-гладких функций имеет то же описание. Следовательно, графы совпадают на глобальных сечениях.

Для более общих локально липшицевых функций соответствие определяется через совпадение формулы для направленной производной (определение 6.2.1) с классическим \limsup -определением.

16.3.2. Moreau и Mordukhovich

Проксимальный субдифференциал ∂_M^S определён через проксимальное квадратичное поддерживание, что совпадает с классическим определением. Лимитный ∂_L^S строится как предел проксимальных субградиентов, также совпадая с Мордухович-тип определением.

16.4. Соответствие монотонности, резольвент и ВИ

16.4.1. По A10.3 и Теореме 10.3.1 резольвенты и регуляризация Йосиды совпадают с классическими на глобальных сечениях.

16.4.2. Теорема H даёт существование и сходимость FB-схемы. В классическом конечномерном случае это стандартный результат для максимальных монотонных и коэкстремальных операторов. Совпадение следует из совпадения резольвент и коэкстремальности на глобальных сечениях.

16.5. Главная теорема соответствия

Теорема 16.5.1 (Теорема о соответствии СНА).

(Использует A8 и A10, а также доказанные в главах 7–14 свойства конструкций.)

В хорошо адаптированной модели \mathcal{E} :

(1) $P(\mathbf{R}^n)$ индуцирует на $\Gamma(\mathbf{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$ обычную топологию; P -сходимость соответствует обычной сходимости.

(2) Локали значений $\mathbf{R}_\ell, \mathbf{R}_u, \overline{\mathbf{R}}_\ell$ на глобальных сечениях соответствуют классическим нижним/верхним/расширенным вещественным; P -полунепрерывность соответствует обычной полунепрерывности.

(3) Для локально липшицевых функций и для выпуклых proper функций синтетические субдифференциалы $\partial_C^S, \partial_M^S, \partial_L^S$ соответствуют классическим Clarke/Moreau/Mordukhovich по совпадению графов на глобальных сечениях.

(4) Для P -монотонных операторов, резольвент и включений решения, существующие по Теореме H, соответствуют классическим решениям монотонных включений и вариационных неравенств; алгоритмы (PPA, FB, DR, ADMM) совпадают с классическими схемами.

Доказательство. Пункты (1)–(2) — содержание A10. Пункты (3)–(4) следуют из того, что определения СНА построены исключительно из:

- логических кванторов по рационалам,
- P -окрестностей,
- операций супремума/инфимума в локалях значений,
- алгебраических операций в \mathbf{R}^n ,
которые под Γ переводятся в соответствующие классические операции. Совпадение графов получается из совпадения определяющих неравенств и устойчивости предельных процедур при переходе к глобальным сечениям (A10.1–A10.3).

Глава 17. Программа дальнейших исследований и открытые проблемы

17.1. P -Rademacher и «почти всюду». Для общего класса локально липшицевых функций теорема Rademacher о почти-всюду дифференцируемости в классике является ключом к построению Clarke-субдифференциала как выпуклой оболочки предельных градиентов. В СНА естественный вопрос: какая внутренняя мера/локаль «почти-всюду» согласуется с $P(\mathbf{R}^n)$ так, чтобы получить P -Rademacher-тип утверждение без LEM?

17.2. **Метрическая регулярность и error bounds в полном объёме.** В главе 9 дан минимальный каркас. Полная синтетическая теория метрической регулярности (Aubin property, coderivative criterion, tilt stability) требует разработки P -аналога «предельных нормалей» к графам в более общей категории и чёткой семантики последовательностных принципов.

17.3. **Бесконечномерные пространства и включения эволюционного типа.** Первая монография сознательно работала в конечномерном каркасе R^n (без Хана–Банаха). Для СНА естественно: (i) построить синтетические гильбертовы/банаховы объекты с локалевой полнотой; (ii) развить P -монотонные потоки и полугруппы для эволюционных включений (градиентные потоки в смысле субдифференциала).

17.4. **Минимальность аксиом A9–A13.**

- A9 отвечает за нетривиальность Репон-инфинитезималов.
- A12 — технический инструмент существования (строгая выпуклость).
- A13 — конечномерная полярность и выпуклая оболочка.

Вопрос: какие части Теорем E–H сохраняются при ослаблении A12/A13 и замене их более базовыми принципами?

17.5. **Ускорение и негладкая гамильтонова геометрия.** В классике ускоренные методы (Нестерова) и инерциальные включения завязаны на тонкие оценки энергии. В СНА возникает возможность формулировать эти оценки внутри P -топологии, где «изломы» отражаются как локалевая многозначность, что может дать новый взгляд на ускорение как геометрию многозначных полей.

Часть VI. Дополнительные главы (A14): метрика, наклон, эволюции и расщепления

Глава 18. Метрика в P -режиме: устойчивость, error bounds, метрическая регулярность

В главах 6–11 построены субдифференциалы и монотонные включения, а также алгоритмы, чьи гарантии естественно формулируются через метрические величины: расстояния до множеств, оценки наклона и регулярность графов. В гладком топосе эти величины не обязаны быть числами типа \mathbf{R} ;

корректным носителем выступают локалы значений (\mathbf{R}_ℓ и $\overline{\mathbf{R}}_\ell$). Мы фиксируем конструктивные определения и выводим базовые результаты, достаточные для приложений к оптимизации.

18.1. Расстояния как нижние вещественные и P -полунепрерывность

Пусть $V = \mathbf{R}^n$ с нормой $|\cdot|$ (A11). Для P -замкнутого $C \hookrightarrow V$ определим расстояние до C как нижнее вещественное:

$$\text{dist}(x, C); :=; \text{nf}_{y \in C, |x - y|} \in \mathbf{R}_\ell.$$

Здесь nf понимается в локалы \mathbf{R}_ℓ (глава 4), и потому не требует LEM/AC.

Лемма 18.1.1 (Локальность расстояния). (Использует A11 и свойства \mathbf{R}_ℓ из главы 4.) Для любых $x \in V$ и $r \in \mathcal{P}_{>0}$:

$$\text{dist}(x, C) < r \iff \exists y \in C : |x - y| <_P r.$$

Доказательство. По определению нижнего инфимума в \mathbf{R}_ℓ имеем:

$\text{dist}(x, C) < r$ эквивалентно существованию $y \in C$ с $|x - y| < r$ (в строгом порядке, решаемом на рациональных аппроксимациях).

Лемма 18.1.2 (P -полунепрерывность расстояния). (Использует A11, A12.) Отображение $x \mapsto \text{dist}(x, C)$ является P -полунепрерывным снизу как функция $V \rightarrow \mathbf{R}_\ell$, а множество субуровня $x \mid \text{dist}(x, C) \leq q$ является P -замкнутым для любого $q \in \mathbf{Q}$.

Доказательство. Множество $x \mid \text{dist}(x, C) > q$ есть объединение P -шаров $B_\varepsilon(x)$, на которых расстояние отделено от q (свойство 18.1.1 и базис A11); следовательно, это множество P -открыто, а значит расстояние P -LSC. Замкнутость субуровней эквивалентна P -LSC.

18.2. Квадратичный рост и error bounds из сильной выпуклости

Пусть $f : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ — proper P -LSC. Сильная выпуклость в смысле первой монографии формулируется для конечнозначных функций $g : V \rightarrow \mathbf{R}$; для f со значениями в локалы мы используем стандартную конструкцию «квадратичного миноранта» на домене.

Определение 18.2.1 (Квадратичный рост на множестве минимизаторов). Пусть $S := \text{argmin} f$ непусто. Говорят, что f имеет квадратичный рост с модулем $\mu \in \mathcal{P}_{>0}$ относительно S , если

$$f(x) \geq \text{nf}_S f + \frac{\mu}{2} \text{dist}(x, S)^2$$

как неравенство в $\overline{\mathbf{R}}_\ell$.

Теорема 18.2.2 (Сильная выпуклость \Rightarrow квадратичный рост). (Использует A1–A8, A11, A12.) Пусть $f : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ выпукла, P -LSC и в точном смысле «сильно выпукла» с модулем $\mu \in \mathcal{P}_{>0}$, т.е. существует выпуклая $g : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ такая, что

$$f(x) = g(x) + \frac{\mu}{2} |x|^2.$$

Тогда $S = \text{argmin} f$ непусто и f имеет квадратичный рост с тем же модулем μ .

Доказательство. По A12 функция f достигает минимума на любом P -компактном субуровне; используя коэрцитивность квадратичного слагаемого, получаем существование минимума на V (стандартная редукция к шарам $B_R(0)$ и предельный переход в \mathbf{R}_ℓ). Пусть $x^* \in S$. Тогда для любого x и $\lambda \in [0, 1]_{\mathbf{R}}$ по сильной выпуклости имеем

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x^*) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x^*) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) |x - x^*|^2.$$

Полагая $\lambda = \frac{1}{2}$ и переставляя, получаем

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{\mu}{2} |x - x^*|^2.$$

Переходя к инфимуму по $x^* \in S$ и используя определение $\text{dist}(x, S)$ (как нижнего инфимума), заключаем искомое неравенство квадратичного роста.

Следствие 18.2.3 (Error bound из квадратичного роста). (Использует A11.) Пусть f имеет квадратичный рост с модулем μ . Тогда

$$\text{dist}(x, S) \leq \sqrt{\frac{1}{2\mu}} \sqrt{f(x) - \inf_S f},$$

в смысле неравенства в \mathbf{R}_ℓ (после естественного вложения в $\overline{\mathbf{R}}_\ell$).

Доказательство. Немедленно из определения квадратичного роста.

Замечание 18.2.4. В типичных приложениях f имеет вид $f(x) = \phi(x) + \delta_K(x)$, где ϕ конечнозначна, выпукла, а K выпукло и P -замкнуто. Тогда квадратичный рост описывает устойчивость решения относительно возмущений и даёт априорные оценки для проксимальных и проекционных методов (глава 11).

18.3. Метрическая регулярность и сильная монотонность

Пусть $A : V \rightrightarrows V^*$ — P -монотонный оператор (глава 8). В классическом анализе сильная монотонность обеспечивает метрическую регулярность графа и устойчивость решения включения $0 \in A(x)$. В синтетическом контексте корректная формулировка проходит через резольвенты.

Определение 18.3.1 (Сильная монотонность). Оператор A называется μ -сильно монотонным ($\mu \in \mathcal{P}_{>0}$), если

$$\forall (x, p), (y, q) \in \text{graph}(A) : \langle p - q, x - y \rangle \geq \mu |x - y|^2.$$

Теорема 18.3.2 (Сильная монотонность \Rightarrow сжимаемость резольвенты). (Использует A11 и леммы главы 8.) Пусть A максимален P -монотонен и μ -сильно монотонен. Тогда для любого $\lambda \in \mathcal{P}_{>0}$ резольвента $J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1} : V \rightarrow V$ существует (по теоремам Минти-типа главы 8) и является сжимающим отображением:

$$|J_\lambda^A(x) - J_\lambda^A(y)| \leq \frac{1}{1 + \lambda\mu} |x - y|.$$

Доказательство. Пусть $u = J_\lambda^A(x)$ и $v = J_\lambda^A(y)$. Тогда существуют $p \in A(u)$ и $q \in A(v)$ такие, что $x = u + \lambda p$ и $y = v + \lambda q$, то есть $x - y = (u - v) + \lambda(p - q)$. Скалярно умножая на $u - v$ и используя сильную монотонность, получаем

$$\langle x - y, u - v \rangle = |u - v|^2 + \lambda \langle p - q, u - v \rangle \geq |u - v|^2 + \lambda\mu |u - v|^2 = (1 + \lambda\mu) |u - v|^2.$$

По неравенству Коши–Буняковского имеем $\langle x - y, u - v \rangle \leq |x - y| |u - v|$. Отсюда $(1 + \lambda\mu) |u - v| \leq |x - y|$, что и даёт оценку.

Следствие 18.3.3 (Уникальность и липшицевость решения включения). (Использует A11.) Если $0 \in A(x)$ разрешимо, то решение единственно и удовлетворяет устойчивости относительно аддитивных возмущений: если $r \in V^*$ и $0 \in A(x_r) + r$, то

$$|x_r - x_0| \leq \frac{1}{\mu} |r|.$$

Доказательство. Уникальность следует из сильной монотонности при $p = q = 0$. Оценка следует из подстановки $(x, p) = (x_r, -r)$ и $(y, q) = (x_0, 0)$ в определение сильной монотонности и применения Коши–Буняковского.

18.4. Error bounds через наклон (условно на A14)

В неконвексных задачах естественным объектом является наклон (slope), связанный с Clarke-субдифференциалом. В синтетическом контексте корректная конструкция использует P -лимсупы.

Определение 18.4.1 (Сильный P -наклон). Пусть $f : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ P -LSC и конечна в x . Определим

$$|\nabla_P f|(x) := \sup_{y \rightarrow Px, y \neq x} \frac{(f(x) - f(y))_+}{|x - y|} \in \mathbf{R}_u,$$

где $(a)_+ = \max(a, 0)$ вычисляется в решётке значений (глава 4).

Теорема 18.4.2 (Slope error bound; условно). (Использует A11, A18.) Пусть $S := \{x \mid f(x) \leq 0\}$ непусто и f P -LSC. Предположим, что существует $m \in \mathcal{P}_{>0}$ и $\rho \in \mathcal{P}_{>0}$ такие, что

$$f(x) \in (0, \rho] \implies |\nabla_P f|(x) \geq m.$$

Тогда в P -окрестности множества S выполнено локальное error bound-неравенство:

$$\text{dist}(x, S) \leq \frac{1}{m} f(x)_+.$$

Доказательство. Стандартная схема выводится из принципа Ekeland (A14). Пусть x с $0 < f(x) \leq \rho$. Применим A14 к функции $f_+(y) := f(y)_+$ с параметрами $\varepsilon = f(x)$ и $\lambda = \frac{1}{m} f(x)$. Получаем x_ε с $f_+(x_\varepsilon) \leq f(x)$ и строгим локальным минимальным свойством для $f_+(y) + \frac{\varepsilon}{\lambda} |y - x_\varepsilon|$. Из этого следует $|\nabla_P f_+|(x_\varepsilon) \leq \varepsilon/\lambda = m$. С другой стороны, по предположению наклон в точках с положительным значением не меньше m , следовательно $f(x_\varepsilon) = 0$ и $x_\varepsilon \in S$. Из Ekeland-неравенства получаем $0 = f(x_\varepsilon) \leq f(x) - m|x - x_\varepsilon|$, т.е. $|x - x_\varepsilon| \leq f(x)/m$ и потому $\text{dist}(x, S) \leq f(x)/m$.

Замечание 18.4.3. В классическом конечномерном анализе при локальной Lipschitz-регулярности выполняется связь $|\nabla f|(x) = \text{dist}(0, \partial^{\text{Cl}} f(x))$. Теорема о соответствии (глава 12) переводит её в синтетическую форму как утверждение о $|\nabla_P f|$ и P -Clarke субдифференциале при предпосылках A10.

Глава 19. P -вариационные принципы (Ekeland-тип) и наклон; приложения к оптимальности

Данная глава развивает инструменты «второго уровня»: как из чисто топологической P -полунепрерывности и полноты метрики получать аппроксимации стационарности, критерии существования субградиентов и устойчивость. Основная предпосылка — A14; при её отсутствии результаты можно рассматривать как условные или как программу для дальнейшего вывода A14 из более первичных свойств $P(\mathbf{R}^n)$.

19.1. P -наклон и стационарность в терминах субдифференциалов

Пусть $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ локально P -Липшицева. Напомним (глава 6), что P -Clarke направленная производная определена как

$$f_P^\circ(x; v) := \limsup_{y \rightarrow Px, t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} \in \mathbf{R}_u,$$

а субдифференциал

$$\partial_C^S f(x) := \{p \in V^* \mid \forall v : \langle p, v \rangle \leq f_P^\circ(x; v)\}.$$

Определение 19.1.1 (P -Кларковская стационарность). Точка x называется P -стационарной для f , если $0 \in \partial_C^S f(x)$.

В классическом анализе (в \mathbb{R}^n) $0 \in \partial^{\text{Cl}} f(x)$ эквивалентно неотрицательности направленной производной во всех направлениях и эквивалентно нулевому наклону. В синтетическом виде это реализуется через A10.

Лемма 19.1.2 (Наклон и субдифференциал; условно на A10). (Использует A10, A11.) Для внутренней реализации классической локально Lipschitz функции f :

$$|\nabla_P f|(x) = \text{Sup}_{p \in \partial_C^S f(x)} |p|.$$

Доказательство. Это переформулировка классического факта $|\nabla f| = \text{dist}(0, \partial^{\text{Cl}} f)$ в терминах графов и внешней интерпретации: обе стороны определяются из одинаковых предельных конструкций и супремумов; A10 обеспечивает совпадение.

19.2. Принцип Ekeland и аппроксимация стационарности

Теорема 19.2.1 (Ekeland \Rightarrow почти-минимизатор). (Использует A11, A14.) Пусть $f : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ P -LSC, ограничена снизу и принимает конечное значение. Для любого $\varepsilon \in \mathcal{P}_{>0}$ существует $x_\varepsilon \in V$ такой, что

1. $f(x_\varepsilon) \leq \text{nf}_V f + \varepsilon$,
2. функция $y \mapsto f(y) + \frac{\varepsilon}{\lambda} |y - x_\varepsilon|$ достигает строгого минимума в x_ε (для некоторого $\lambda \in \mathcal{P}_{>0}$).

Доказательство. Это непосредственная переформулировка A14: пункт (2) — запись условия строгого неравенства A14 для всех $y \neq x_\varepsilon$.

Теорема 19.2.2 (Почти-стационарность; локально Lipschitz случай). (Использует A11, A14 и определения главы 6.) Пусть $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ локально P -Липшицева и P -непрерывна. Тогда для любого $\varepsilon \in \mathcal{P}_{>0}$ существует x_ε такое, что

$$f(x_\varepsilon) \leq \text{nf}_V f + \varepsilon \quad \text{и} \quad 0 \in \partial_C^S f(x_\varepsilon) + \varepsilon B_1,$$

где $B_1 = \{p \in V^* \mid |p| \leq 1\}$.

Доказательство. По теореме 19.2.1 применим A14 к f с параметрами ε и $\lambda = 1$. Получим точку x_ε с локальным минимальным свойством для $f(y) + \varepsilon |y - x_\varepsilon|$. Рассмотрим функцию $g(y) := f(y) + \varepsilon |y - x_\varepsilon|$. Она локально P -Липшицева (глава 3) и достигает минимума в x_ε , значит $0 \in \partial_C^S g(x_\varepsilon)$ по лемме оптимальности Кларка (глава 6). По правилу суммы (теорема F) имеем

$$0 \in \partial_C^S f(x_\varepsilon) + \varepsilon \partial_C^S |\cdot - x_\varepsilon|(x_\varepsilon).$$

Но $\partial_C^S |\cdot - x_\varepsilon|(x_\varepsilon) = B_1$ (пример 6.6.1/11.1.1), откуда следует утверждение.

19.3. Критерии существования субградиента и минимальности

Как следствие, получаем общий конструктивный способ находить «почти-субградиенты» и переходить к точным субградиентам при наличии компактности.

Следствие 19.3.1 (Существование стационарной точки на P -компактных множествах). (Использует A11, A12, A14.) Пусть $K \subset V$ P -компактно и $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ P -непрерывна и локально P -Липшицева. Тогда существует $x^* \in K$ с

$$0 \in \partial_C^S (f + \delta_K)(x^*),$$

где δ_K — индикатор K (глава 11), и, следовательно, выполнено Clarke-условие оптимальности для задачи $\min_{x \in K} f(x)$.

Доказательство. По A12 минимум достигается: найдётся $x^* \in K$ с $f(x^*) = \text{nf}_K f$. Применим теорему 19.2.2 к $f + \delta_K$ на V ; получаем семейство точек x_ε с почти-стационарностью. Используя P -компактность

и замкнутость графа ∂_C^S (глава 6), переходим к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и получаем точную стационарность в x^* .

Глава 20. Негладкие эволюции: субградиентные потоки, дифференциальные включения и дискретизации

Динамические задачи в негладкой оптимизации естественно формулируются как дифференциальные включения

$$\dot{x}(t) \in -A(x(t)),$$

где A — (максимальный) монотонный оператор или субдифференциал. В гладком топосе дифференциальное исчисление существует (A1), однако многозначность требует аккуратной топологии и предельного аппарата. Мы развиваем минимальный синтетический каркас для эволюций, основанный на дискретизации через резольвенты и проксимальные операторы.

20.1. Имплицитная эйлера схема и энергия

Пусть $A : V \rightrightarrows V^*$ максимален P -монотонен (глава 8). Для шага $h \in \mathcal{P}_{>0}$ определим имплицитное обновление

$$x^{k+1} := J_h^A(x^k),$$

где $J_h^A = (I + hA)^{-1}$ — резольвента.

Лемма 20.1.1 (Фейерово уменьшение для J_h^A). (Использует A11 и теорему 8.4.2 о фирменной неэкспансивности резольвенты.) Пусть z — нуль оператора, $0 \in A(z)$. Тогда

$$|x^{k+1} - z| \leq |x^k - z|,$$

и более того выполнена «энергетическая» оценка:

$$|x^{k+1} - z|^2 \leq |x^k - z|^2 - |x^{k+1} - x^k|^2.$$

Доказательство. Из $x^{k+1} = J_h^A(x^k)$ и $z = J_h^A(z)$ и фирменной неэкспансивности получаем первое неравенство. Второе — стандартная тождественная переработка неравенства монотонности для пар $(x^{k+1}, (x^k - x^{k+1})/h)$ и $(z, 0)$, аналогично доказательству теоремы 7.5.1 первой монографии для PPA.

Следствие 20.1.2 (Суммируемость при наличии нулей). (Использует A11.) Если множество нулей $Z := A^{-1}(0)$ непусто, то последовательность (x^k) фейерова относительно Z , а сумма шагов конечна:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x^{k+1} - x^k|^2 < \infty.$$

Доказательство. Суммируем неравенство леммы 20.1.1 по k ; телескопическая сумма даёт ограниченность и сходимость ряда.

20.2. Проксимальные траектории для выпуклых функций

Пусть $f : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ выпукла и P -LSC. Рассмотрим $A = \partial_M^S f$ (глава 7), который является максимальным P -монотонным (глава 7.4). Тогда J_h^A совпадает с проксимальным оператором prox_{hf} .

Теорема 20.2.1 (Дискретная субградиентная динамика). (Использует A11, A12 и результаты главы 7.)

Пусть $S = \text{argmin} f$ непусто. Тогда для любой последовательности шагов $(h_k) \subset \mathcal{P}_{>0}$, удовлетворяющей $\sum h_k = +\infty$ и $\sum h_k^2 < \infty$, итерации

$$x^{k+1} = \text{prox}_{h_k f}(x^k)$$

имеют следующие свойства:

1. (x^k) фейерова относительно S ;
2. $f(x^k)$ монотонно убывает (в порядке \leq_P) и сходится к $\text{nf}f$;
3. каждый P -предельный пункт последовательности принадлежит S .

Доказательство. (1)–(3) следуют из лемм 20.1.1–20.1.2 и стандартной идентификации резольвенты с проксимальным оператором. Для (2) используем определение проксимальной точки как минимизатора функции $y \mapsto f(y) + \frac{1}{2h_k}|y - x^k|^2$ (глава 7) и сравниваем значения в $y = x^k$ и $y = x^{k+1}$, получая

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{1}{2h_k}|x^{k+1} - x^k|^2.$$

Суммирование даёт сходимость $f(x^k)$ к $\text{nf}f$. Замкнутость S в P -топологии (как субуровня P -LSC функции) даёт (3).

20.3. Непрерывные потоки и принцип инвариантности (программа)

Классический результат (Brézis, Crandall–Liggett) утверждает существование и сходимость траекторий $\dot{x} \in -\partial f(x)$ для выпуклых f в гильбертовом пространстве. В синтетическом контексте корректное построение непрерывных траекторий требует дополнительной интернализации компактности и слабой топологии; это выходит за рамки минимальной аксиоматики A1–A14. Тем не менее, уже дискретная динамика 20.2.1 позволяет формулировать синтетический аналог принципа ЛаСалля на уровне предельных множеств дискретной динамики.

Проблема 20.3.1 (Синтетический Crandall–Liggett в P -геометрии). Построить внутренний полугрупповой поток S_t для $A = \partial_M^S f$ как предел произведений резольвент $\lim_{n \rightarrow \infty} (J_{t/n}^A)^n$ и доказать, что $t \mapsto f(S_t x)$ убывает, а ω -предельные множества состоят из стационарных точек, используя синтетический принцип инвариантности ЛаСалля (первая монография, Теорема 9.2.4).

Глава 21. Расщепления и примально-дуальные схемы (DR/ADMM/PD): P -формулы и гарантии

Глава 11 изложила базовые алгоритмы (проксимальный шаг, forward–backward) как методы решения монотонных включений и задач вида $f + g \circ A$. Современная оптимизация использует более богатый класс расщеплений, в частности Douglas–Rachford (DR), ADMM и примально-дуальные методы (PD). Мы формулируем их в синтетической P -геометрии и доказываем базовые гарантии сходимости при стандартных предположениях максимальной монотонности и (ко)коэрцитивности.

21.1. Douglas–Rachford для суммы двух максимальных P -монотонных операторов

Пусть $A, B : V \rightrightarrows V^*$ максимальны P -монотонны. Для $\lambda \in \mathcal{P}_{>0}$ определим отражения

$$R_A := 2J_\lambda^A - I, \quad R_B := 2J_\lambda^B - I,$$

и оператор DR:

$$T_{DR} := \frac{1}{2}(I + R_A \circ R_B).$$

Лемма 21.1.1 (Неэкспансивность T_{DR}). (Использует A11 и фирменную неэкспансивность резольвент из главы 8.) Оператор T_{DR} является неэкспансивным: $|T_{DR}x - T_{DR}y| \leq |x - y|$.

Доказательство. Резольвенты J_λ^A, J_λ^B фирменно неэкспансивны, отражения R_A, R_B неэкспансивны, а усреднение $\frac{1}{2}(I + S)$ неэкспансивно для неэкспансивного S . Все оценки переносятся в P -форме благодаря A11.

Теорема 21.1.2 (Сходимость DR в конечномерном случае). (Использует A11, A12.) Пусть множество решений включения $0 \in (A + B)(x)$ непусто. Тогда для любой начальной точки x^0 итерации

$$x^{k+1} = T_{DR}(x^k)$$

имеют P -предельные точки, и всякая P -предельная точка \bar{x} удовлетворяет $J_\lambda^B(\bar{x}) \in \text{er}(A + B)$.

Доказательство. В конечномерном случае и при P -компактности ограниченных орбит (A12) стандартная схема с использованием фейеровой монотонности относительно множества неподвижных точек $\text{ix}(T_{DR})$ и демизамкнутости графа (глава 8) переносится на P -сходимость. Связь $\text{ix}(T_{DR})$ с решениями включения — классическая идентичность Минти-типа, выводимая во внутренней логике из определений резольвент.

21.2. ADMM как DR на двойственной задаче

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in V, z \in W} f(x) + g(z) \quad \text{при условии } Ax - z = 0,$$

где $A : V \rightarrow W$ — линейный морфизм. В главе 9 построено P -сопряжение и двойственная задача. ADMM соответствует DR-методу для суммы двух максимальных монотонных операторов на пространстве Лагранжевых множителей.

Определение 21.2.1 (ADMM-итерации). Для шага $\rho \in \mathcal{P}_{>0}$ и начальных (z^0, u^0) определим

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\rho f}(x^k - \rho A^* u^k), \quad z^{k+1} = \text{prox}_{\rho g}(Ax^{k+1} + u^k), \quad u^{k+1} = u^k + Ax^{k+1} - z^{k+1}.$$

Теорема 21.2.2 (Сходимость ADMM; выпуклый случай). (Использует A11, A12 и сильную двойственность главы 9.) Пусть f, g proper выпуклы P -LSC и выполнены P -условия квалификации (глава 9) так, что существует седловая точка Лагранжиана. Тогда последовательность (x^k, z^k) P -сходится к примальному решению, а (u^k) — к двойственному.

Доказательство. Стандартная идентификация ADMM с DR-итерациями для операторов $\partial f \circ A^*$ и ∂g^{*P} использует только свойства проксимальных отображений и резольвент, доказанные в главах 7–9, и существование седловой точки из теоремы G. Затем применима теорема 21.1.2.

21.3. Примально-дуальные схемы (Chambolle–Pock) и P -условия

Для задач вида $\min_x f(x) + g(Ax)$ удобно использовать примально-дуальную схему:

$$y^{k+1} = \text{prox}_{\sigma g^{*P}}(y^k + \sigma A \bar{x}^k), \quad x^{k+1} = \text{prox}_{\tau f}(x^k - \tau A^* y^{k+1}), \quad \bar{x}^{k+1} = x^{k+1} + \theta(x^{k+1} - x^k).$$

Параметры τ, σ, θ удовлетворяют стандартным условиям $\tau\sigma|A|^2 < 1$.

Теорема 21.3.1 (Сходимость примально-дуальной схемы; конструктивная форма). (Использует A11, A12.) Пусть f, g proper выпуклы P -LSC, а $\tau, \sigma \in \mathcal{P}_{>0}$ удовлетворяют $\tau\sigma|A|^2 < 1$. Тогда при существовании седловой точки Лагранжиана последовательности (x^k, y^k) ограничены и имеют P -предельные точки, являющиеся решениями соответствующих оптимизационных и двойственных задач.

Доказательство. Доказательство опирается на фейеровы оценки относительно множества седловых точек, которые выводятся из выпуклости и треугольных оценок для проксимальных отображений (глава 7) и из неравенства Коши–Буняковского (A11). Ограниченность и P -компактность орбит обеспечиваются A12.

Приложение А. Конструктивные леммы о \mathbf{R}_ℓ , \mathbf{R}_u

V.1. \mathbf{R}_ℓ и \mathbf{R}_u являются локалями: множества их базовых открытых задаются конечными системами рациональных ограничений.

V.2. Операции \vee, \wedge на \mathbf{R}_ℓ Scott-непрерывны, а на \mathbf{R}_u дуально Scott-непрерывны.

В.3. Для направленных семейств (L_i) в \mathbf{R}_ℓ их Scott-супремум задаётся точечно:

$$\left(\sup_i L_i\right)(q) \iff \exists i : L_i(q).$$

Для \mathbf{R}_u дуально: $(\inf_i U_i)(q) \iff \exists i : U_i(q)$.

В.4. Вложение ι_ℓ переводит \max на \vee , а ι_u переводит \min на \wedge .

Приложение С. Классические вставки (LEM, AC, Хан–Банах)

С.1. В булевом топосе $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$. Тогда $\Delta = 0$, а ядра $\Delta_X(x)$ вырождаются в x . Репон-смысл приближений исчезает: «логическая толщина» точки теряется.

С.2. В классической математике многие ключевые шаги негладкого анализа используют Хан–Банах и отделимость. В СНА эти шаги заменяются: (i) конечномерной полярностью (A13), (ii) регуляризацией и строгой выпуклостью (A12), (iii) P -локальным определением пределов.

Приложение D. Индекс обозначений

\mathcal{E} — гладкий топос.

\mathbf{R} — синтетическая прямая.

\mathbf{R}^n — конечномерное пространство.

$\mathcal{P}, \mathcal{P}_{>0}$ — нестрогая/строгая позитивность (A3).

$P(X)$ — Репон-локаль P -открытых подобъектов.

$x \approx_P y$ — P -неразличимость: $\neg\neg(x = y)$.

$\Delta_X(x)$ — P -ядро точки.

$\Delta = d \in \mathbf{R} \mid \neg\neg(d = 0)$ — логические инфинитезималы.

$\text{sat}_P(U)$ — P -насыщение.

$\text{l}_P(A)$ — P -замыкание.

$\mathbf{R}_\ell, \mathbf{R}_u$ — нижние/верхние вещественные (локали).

$\overline{\mathbf{R}}_\ell$ — расширенные нижние вещественные $(+\infty)$.

$f_P^\circ(x; v)$ — P -Clarke направленная производная.

$\partial_C^S f(x)$ — синтетический Clarke-субдифференциал.

$\partial_M^S f(x)$ — проксимальный/Moreau-субдифференциал.

$\partial_L^S f(x)$ — лимитный (Mordukhovich-тип) субдифференциал.

$T_C^P(x)$ — P -касательный конус.

$N_C^P(x)$ — P -нормальный конус.

A — многозначный оператор, $\text{grh}(A)$ — граф.

$J_{\lambda A}$ — резольвента.

A_λ — регуляризация Йосиды.

f^{*P} — P -сопряжение Лежандра–Фенхеля.

σ_K — опорная функция множества K .

Библиография

- [1] F. W. Lawvere, *Outline of Synthetic Differential Geometry* (лекции и рукописи).
- [2] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 2006.
- [3] R. Lavendhomme, *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry*, Springer, 1996.
- [4] I. Moerdijk, G. E. Reyes, *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer, 1991.
- [5] J. Penon, *Infinitésimaux et intuitionnisme*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques 22 (1981).

- [6] J. Penon, *De l'infinitésimal au local* (Thèse de Doctorat d'État), Diagrammes S13 (1985), 1–191.
- [7] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, 1983; reprint SIAM, 1990.
- [8] J.-J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace hilbertien*, Bull. Soc. Math. France, 1965.
- [9] R. T. Rockafellar, R. J.-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer, 1998.
- [10] B. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation I–II*, Springer, 2006.
- [11] H. H. Bauschke, P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, 2nd ed., Springer, 2017.
- [12] Y. Nesterov, *Introductory Lectures on Convex Optimization*, Springer, 2004.
- [13] Чурилов М. В. 2025. Синтетический Вариационный Анализ. Конструктивная Двойственность, Монотонные Операторы и Геометрия Оптимизации в Гладких Топосах. PREPRINTS.RU.
<https://doi.org/10.24108/preprints-3113832>

© 2025 Чурилов Максим Вячеславович. Все права защищены.

Лицензия: Creative Commons Attribution 4.0

Цитирование этой работы:

Чурилов Максим Вячеславович. "Синтетический Негладкий Анализ. Топология Пенона, локалы значений и обобщённые производные в гладком топосе".