

К проблеме вращений Мазура: второпорядковая оболочечная жёсткость, конечные сертификаты и конечномерное сшивание

Максим Вячеславович Чурилов

Центр Одарённых Детей «Гагарин», Оренбург
churilovm1305@gmail.com

Аннотация. Работа развивает второпорядковую редукцию проблемы вращений Мазура через поле гессиановых оболочек

$$B_x := \frac{1}{2} D^2(\|\cdot\|^2)(x), \quad x \in S_X,$$

определённое при C^2 -гладкости квадрата нормы вне нуля. Центральная идея состоит в том, чтобы заменить глобальный вопрос о транзитивной норме точным анализом второго порядка на сфере. Доказано, что постоянство поля оболочек эквивалентно гильбертовости, а в транзитивном случае вся остающаяся трудность концентрируется в representation-theoretic obstruction

$$[B_{x_0}] \in \mathrm{Sym}^2(X^*)^{\mathrm{Stab}(x_0)} / \mathrm{Sym}^2(X^*)^{\mathrm{Isom}(X)}.$$

Для этого препятствия введена каноническая норма и получена явная оценка расстояния Банаха–Мазура до гильбертова пространства. Далее установлены несколько независимых механизмов его уничтожения: коэффициентно-алгебраические критерии усреднения, покрывающие аменабельный и weakly almost periodic случаи; финитный спектральный критерий каздановского типа; локальный порождающий критерий через инфинитезимальные симметрии; а также точные и количественные критерии конечномерного сшивания без априорной совместимости маргиналей. В частности, асимптотическая евклидизация вдоль одной плотной цепочки конечномерных подпространств уже достаточна для точной гильбертовости.

Синтетическая часть текста отделена от строгого внешнего ядра и сформулирована как условная second-order программа. Она сводит оставшийся разрыв к нескольким конкретным узлам: коэрцитивности одной оболочки, исчезновению fixed-point quotient, построению конечных спектральных сертификатов и transport/entropic compression shell-image compacta. Статья не объявляет решения открытого сепарабельного бесконечномерного случая, но существенно сужает форму возможного контрпримера и выделяет набор точных критериев, каждый из которых уже достаточен для окончательного замыкания задачи.

Ключевые слова. Проблема вращений Мазура; транзитивные нормы; банаховы пространства; гильбертова жёсткость; гессиановы оболочки; топологические группы; оптимальный транспорт.

MSC 2020. 46B04, 46B20, 46C15, 18N30.

On Mazur's rotation problem: second-order shell rigidity, finite certificates, and finite-dimensional patching

Maksim V. Churilov

Abstract. The paper develops a second-order reduction of Mazur's rotation problem through the field of *Hessian shells*

$$B_x := \frac{1}{2} D^2(\|\cdot\|^2)(x), \quad x \in S_X,$$

defined whenever the square of the norm is of class C^2 away from the origin. The guiding idea is to replace the global transitivity question by an exact second-order analysis on the sphere.

We prove that constancy of the shell field is equivalent to Hilbertianity and that, in the transitive case, the remaining difficulty is concentrated in the representation-theoretic obstruction

$$[B_{x_0}] \in \text{Sym}^2(X^*)^{\text{Stab}(x_0)} / \text{Sym}^2(X^*)^{\text{Isom}(X)}.$$

A canonical norm of that obstruction is introduced and shown to control the Banach–Mazur distance to Hilbert space. Several independent annihilation mechanisms are then established: coefficient-algebraic averaging criteria covering the amenable and weakly almost periodic cases; a finite Kazhdan-type spectral criterion; a local generator criterion via infinitesimal symmetries; and exact as well as quantitative finite-dimensional patching theorems without any a priori compatibility of marginals. In particular, asymptotic Euclideanity along a single dense chain of finite-dimensional subspaces already forces exact Hilbertianity.

The synthetic part of the paper is explicitly separated from the unconditional external core and is presented as a conditional second-order program. It reduces the remaining gap to a short list of concrete nodes: coercivity of one shell, vanishing of the fixed-point quotient, construction of finite spectral certificates, and transport/entropic compression of shell-image compacta. The paper does not claim a solution of the open separable infinite-dimensional case, but it considerably narrows the profile of a possible counterexample and isolates several exact criteria, each of which would by itself close the problem.

Keywords. Mazur rotation problem; transitive norms; Banach spaces; Hilbertian rigidity; Hessian shells; topological groups; optimal transport.

MSC 2020. 46B04, 46B20, 46C15, 18N30.

Содержание

1	Введение	7
1.1	Что именно является доказанным в этой статье	8
1.2	Архитектура статьи	9
1.3	Философия новой редукции	9
2	Современный статус проблемы и точка входа	9
2.1	Две формы классической задачи	9
2.2	Что известно и что не известно	10
2.3	Почему стандартная SDG-риторика недостаточна	10
3	Классические предварительные сведения	11
3.1	Транзитивность, почти транзитивность, выпуклая транзитивность	11
3.2	Поддерживающие функционалы и гладкие точки	11
3.3	Касательные гиперплоскости и локальная геометрия сферы	12
3.4	SOT-микротранзитивность и теорема Эффроса	12
3.5	Микротранзитивность в сильном смысле	12
3.6	Локальная модель квадрата нормы	13
3.7	Почему одного первого порядка недостаточно	13
4	Синтетические предварительные сведения	13
4.1	Хорошо адаптированный гладкий топос	14
4.2	Внутренний банахов объект	14
4.3	Микролинейность и внутренний второй порядок	14
4.4	Репон-локали и негладкость первого порядка	15
4.5	Конечномерный Репон–classical интерфейс	15
4.6	Геометрическая экстракция	15
4.7	Что в синтетическом каркасе уже есть, а чего ещё нет	16
5	Гессианова оболочка нормы	16
5.1	Определение и первые свойства	16
5.2	Позитивность и коэрцитивность оболочки	17
5.3	Эквивариантность оболочки под действием изометрий	18
5.4	Постоянство оболочки и квадратичность нормы	18
5.5	Восстановление оболочки из тангенциальной формы	19
5.6	Инфинитезимальный дефект параллелограмма	19
6	Представленческое препятствие и локализация открытого узла	20
6.1	Поле оболочек как однородное сечение	20
6.2	Препятствие как класс в факторе фиксированных точек	21
6.3	Норма класса препятствия и его количественный смысл	22
6.4	Связь с прежним языком кокциклов	23
6.5	Изотропическая жёсткость на касательной гиперплоскости	24
6.6	Почему именно этот фактор является узким местом	24
6.7	Абсолютная и синтетическая версии препятствия	25
7	Количественная оболочечная жёсткость	25
7.1	Осцилляция оболочки и глобальный эталон	25
7.2	Почти постоянство оболочки влечёт почти гильбертовость	25
7.3	Оценка дефекта параллелограмма	26
7.4	Нормированная версия	27
7.5	Следствие для изоморфической части проблемы	27
7.6	Осцилляция как расстояние до единственной формы	28

7.7	Квантитативная внутренняя программа	28
8	Аменабельное усреднение одной оболочки	28
8.1	Функции левого равномерного непрерывного типа	29
8.2	Главная идея усреднения	29
8.3	Лево-равномерная непрерывность функций усреднения	29
8.4	Коэффициентно-алгебраический критерий усреднения	30
8.5	Критерий усреднения по одной коэрцитивной оболочке	31
8.6	Интерпретация через representation-theoretic obstruction	32
8.7	Где теперь нужно искать коэрцитивность	33
8.8	Количественная аменабельная версия	33
9	Геометрическая экстракция точных и количественных утверждений	33
9.1	Внутренние данные	33
9.2	Точное внутреннее параллелограммное тождество	34
9.3	Количественная экстракция	34
9.4	Экстракция через representation-theoretic obstruction	35
9.5	Что может пойти не так	35
9.6	Стабильность относительно регуляризаций	35
10	Локальная теория оболочек: непрерывность, плотные множества, открытые области коэрцитивности	36
10.1	Непрерывность поля оболочек	36
10.2	Открытость коэрцитивной области	36
10.3	Транзитивность превращает локальные константы в глобальные	37
10.4	Локальный контроль осцилляции	37
10.5	Проверка точной константности на малом наборе орбит	37
10.6	Тест на коэрцитивность через одну плотную орбиту направлений	38
11	Модельные примеры: как оболочка ведёт себя на классических пространствах	39
11.1	Гильбертово пространство	39
11.2	Пространства L_p и ℓ_p , $1 < p < \infty$	39
11.3	Супремум-норма и Реноп-механизм	40
11.4	Конечномерные нормы и усреднение по Хаару	40
11.5	Негильбертовы гладкие ренормировки	41
11.6	Внутренний смысл примеров	41
12	Второпорядковая синтетическая программа: Реноп, транспорт и когезивная экстракция	41
12.1	Первый механизм: Реноп-аннигиляция углов	42
12.2	Второй механизм: изотропическая скалярность внутренней оболочки	42
12.3	Третий механизм: transport-сжатие осцилляции оболочек	42
12.4	Закон уровня вместо подтерминальности	43
12.5	Синтетический метатеоремный пакет	43
12.6	Количественная метатеорема	44
12.7	Почему transport-подход правдоподобен	44
12.8	Почему одной гладкости недостаточно даже в синтетике	44
13	Инвариантные законы на сфере и барицентрические критерии	45
13.1	Инвариантные законы и усреднение оболочек	45
13.2	Асимптотически инвариантные законы	48
13.3	Нулевая энергия осцилляции и точная жёсткость	49
13.4	Счётные law-level маргиналы и reconstruction по цепочке	50
13.5	Количественное сжатие конечномерных shell-image compacta	51
13.6	Энтропийные селекторы на конечномерных shell-image compacta	55

13.7	Универсальные конечномерные reference laws и количественная температурная скорость	59
13.8	Низкотемпературный предел энтропийных селекторов	63
13.9	Coarse-graining и projective stability нулетемпературного коллапса	66
13.10	Якорные entropic selectors, exposed points и канонический projective choice	70
13.11	Почти-совместимые exposed anchors и количественная projective coherence	77
13.12	ЖКО-схема: инвариантность следует из единственности	82
14	Сопоставление с известными классическими критериями	83
14.1	Топологическая аменабельность как усреднение второго порядка	83
14.2	Стабилизатор гиперплоскости и одна касательная модель	83
14.3	Микротранзитивность и коэрцитивность оболочки	83
14.4	Липшицева транзитивность и порог $\Lambda < 3$	84
14.5	Выпуклая транзитивность и недостаточность первого порядка	84
14.6	Fraïssé-, ultrahomogeneity- и oligomorphic-подход	84
14.7	Теорема Дворецкого и локальная евклидовость	85
14.8	Отношение к асимптотической структуре	85
14.9	Две разные причины гильбертовости	85
14.10	Почему проблема так долго сопротивлялась	85
14.11	Новый взгляд на возможный контрпример	86
15	Аффинно-фиксированная формулировка: weak*-hull одной оболочки	86
15.1	Конечные спектральные сертификаты для оболочечного препятствия	91
16	Инфинитезимальные генераторы и дифференциальное уравнение оболочки	93
17	Совместимые конечномерные маргиналы и асимптотическое сшивание	97
17.1	Суммируемая почти-совместимость: patching с явным tail-control	100
17.2	Диагональная компактность: совместимость извлекается автоматически	103
18	Порог $2 \rightarrow 3$: критерий трёхточечного продолжения	108
19	Профиль возможного контрпримера: что обязательно должно сломаться	109
20	Отношение к теории множеств и интуиционистской логике	110
20.1	Что именно меняется при переходе из ZFC во внутреннюю логику топоса	110
20.2	Закон исключённого третьего здесь не враг, а просто не главный инструмент	111
20.3	Аксиома выбора и глобальное усреднение	111
20.4	Почему representation-theoretic obstruction лучше совместим с интуиционистской средой	111
20.5	Можно ли надеяться на независимость?	111
20.6	Главная логическая мораль	111
21	Сводка результатов и остающийся разрыв	112
21.1	Жёсткое внешнее ядро	112
21.2	Что именно ещё не замкнуто	113
21.3	Почему разрыв теперь принципиально уже	114
22	Открытые задачи и конкретная программа дальнейшей работы	114
22.1	Чисто внешние аналитические задачи	114
22.2	Синтетические задачи первого порядка	115
22.3	Синтетические задачи второго порядка	115
22.4	Транспортные задачи	116
22.5	Конечномерная евклидизация и возрастные инварианты	117
22.6	Квазибанаховы, неаппроксимируемые и другие направления	117
22.7	Дорожная карта ближайших шагов	118

23	Закключение	118
A	Минимальный формальный пакет, достаточный для теоремы 12.7	119
A.1	Список формальных входов	119
A.2	Что из этого уже строго, а что ещё нет	120
A.3	Почему пакет минимален	121
B	Глоссарий основных обозначений	121
C	Карта зависимостей теорем	121
C.1	Табличная карта	122
C.2	Схема в одну строку	123
C.3	Где именно ещё остаётся неизвестность	123
D	Развёрнутые вычисления и альтернативные доказательства	123
D.1	Альтернативное доказательство теоремы 5.7 через интегрирование вдоль лучей . .	123
D.2	Развёрнутая поляризация и явное восстановление скалярного произведения	124
D.3	Пошаговый вывод формулы для оболочки на L_p	124
D.4	Ещё одна оценка для параллелограммного дефекта	125
D.5	Развёрнутая проверка лево-равномерной непрерывности в теореме 8.5	126
D.6	Альтернативное построение усреднённой формы через орбитные меры	126
D.7	Формальное сравнение двух усреднений	127
D.8	Подробный комментарий к representation-theoretic obstruction	127
D.9	Минимальный toy-model препятствия	127
D.10	Небольшой словарь для будущей формализации	128
	Список литературы	129

1. Введение

Проблема вращений Мазура, появившаяся в книге Банаха [2] и позже ставшая одной из центральных открытых задач геометрической теории норм, имеет удивительную двойственность [4]. С одной стороны, её формулировка элементарна: если группа линейных сюръективных изометрий сепарабельного банахова пространства действует транзитивно на единичной сфере, обязано ли пространство быть гильбертовым? С другой стороны, всё, что делает гильбертову геометрию «жёсткой» — ортогональные дополнения, каноническая квадратичная форма, унитарная репрезентационная теория, концентрация меры, — в произвольной банаховой норме либо отсутствует, либо существует лишь в сильно ослабленном виде. Именно поэтому задача пережила несколько совершенно разных эпох функционального анализа: классическую линейную геометрию, локальную теорию, теорию операторных групп, дескриптивные и топологические методы, теорию ренормировок, Fraïssé-подход и, наконец, современные логико-категорные программы.

Классический бесконечномерный сепарабельный случай остаётся открытым [4, 3]. При этом картина вокруг него уже довольно детальна. В конечной размерности транзитивные нормы евклидовы. В несепарабельной ситуации имеются отрицательные примеры, получающиеся через ультрапроизведения и связанные конструкции на L_p , $p \neq 2$. Между этими двумя полюсами лежит сепарабельный случай, который сопротивляется всем стандартным техникам: чисто локальная геометрия даёт гладкость и строгую выпуклость, но не тождество параллелограмма; топологическая аменабельность группы изометрий даёт положительное решение изометрической части, но только при наличии исходной гильбертовой модели; методы «approximate homogeneity» хорошо описывают классы пространств типа L_p и Гурария, но не замыкают оригинальную транзитивную задачу.

Мораль последних десятилетий состоит в том, что *нулевой* и *первый* порядки уже исчерпаны почти полностью [4, 11, 5]. Из транзитивности известно довольно много: в сепарабельном случае норма строго выпукла и гладка; SOT-микротранзитивность орбит вытекает из теоремы Эффроса; под дополнительными гипотезами на стабилизатор гиперплоскости удаётся получить гильбертовость; для более жёсткой микротранзитивности известны сильные следствия вплоть до равномерной выпуклости и равномерной гладкости. Но все эти факты касаются либо геометрии первого порядка, либо глобальных свойств действия группы, и ни один из них не фиксирует *вторую производную* квадрата нормы как глобально постоянную структуру. Между тем именно эта константность и есть скрытое содержание гильбертовости.

Эта работа исходит из следующего принципа.

Принцип второго порядка. Если проблема вращений Мазура вообще должна замкнуться через синтетико-дифференциальный и когезивно-вариационный подход, то ключевым объектом является не сама норма и даже не её первая производная, а поле вторых производных квадрата нормы на сфере. Открытая часть задачи — это вопрос о том, почему это поле должно редуцироваться к одной глобальной билинейной форме.

В центре статьи стоят три взаимосвязанных слоя.

Первый слой: вводится *гессианова оболочка*

$$B_x = \frac{1}{2} D^2 N(x), \quad N(x) = \|x\|^2,$$

и показывается, что именно поле $x \mapsto B_x$ концентрирует второпорядковое содержание гильбертовости.

Второй слой: строится иерархия препятствий:

- (i) точное препятствие — неравенство $B_x \neq B_y$ для разных точек сферы;
- (ii) представление открытого узла через класс $[B_{x_0}]$ в факторе фиксированных точек стабилизатора по фиксированным точкам всей группы;
- (iii) количественное препятствие — осцилляция $\text{osc}(B_\bullet)$ или близость поля к одной билинейной форме;
- (iv) коэрцитивное препятствие — отсутствие хотя бы одной точки, где B_{x_0} уже контролирует норму на всём пространстве;
- (v) синтетическое препятствие — невозможность геометрически экстрагировать внутреннюю билинейную форму наружу.

Третий слой: значительная часть этой иерархии замыкается полностью внешними аргументами. В частности:

- постоянство оболочки влечёт точную квадратичность нормы;
- малая осцилляция оболочки даёт количественную близость к гильбертовой норме;
- инвариантный закон на сфере сам по себе уже достаточен для точной гильбертовости;
- full-support law с малым barycentric или transport-дефектом даёт явную оценку расстояния Банаха–Мазура;
- finite spectral-gap на оболочечном модуле сводит контроль препятствия к конечному семейству изометрий;
- локальный shell-preserving frame инфинитезимальных симметрий в одной точке уже достаточен для глобальной константности оболочки;
- конечномерные law-level энергии вместе с модулем толщины соответствующих образов дают количественную или точную reconstruction по плотной цепочке;
- при аменабельности $\text{Isom}(X)$ и коэрцитивности одной оболочки задача замыкается усреднением.

Таким образом, действительно открытым остаётся существенно более узкий вопрос: почему транзитивность должна принуждать поле оболочек к глобальной константности или хотя бы к количественно малой вариации, достаточной для применения доказанных здесь редукций.

1.1. Что именно является доказанным в этой статье

Для избежания методологической двусмысленности мы сразу разделим материал на три слоя.

1. **Строгие абсолютные теоремы.** Сюда относятся все результаты разделов 5, 6, 7, 8, 15, 16, 17 и большая часть law-level разделов, включая энтропийные селекторы на конечномерных shell-image compacta и формальную ЖКО-лемму об инвариантности. Их доказательства не используют ни аксиому выбора, ни интуиционистские принципы, ни специальные свойства конкретной модели SDG, кроме явно выписанных формальных условий в экстракционном разделе.
2. **Строгие условные теоремы.** Это результаты, где гипотезы сформулированы абсолютно чётко, но сами гипотезы пока не выведены из транзитивности. Пример: если поле оболочек ε -близко к одной билинейной форме, то пространство $\sqrt{(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)}$ -изоморфно гильбертову; аналогично, если энтропийные селекторы сжимают shell-image compacta с достаточно быстрой скоростью, то задача замыкается.
3. **Исследовательская программа.** Это разделы, где мы формулируем наиболее вероятный путь к дальнейшему продвижению: бесконечномерное second-order продолжение Penon–classical bridge, транспортное сжатие осцилляции оболочек на полной сфере, law-level замена подтерминальности и построение синтетических бесконечномерных банаховых объектов. Здесь мы не выдаём эвристику за доказательство.

Такая трёхслойная структура принципиальна. У проблемы вращений Мазура длинная история именно потому, что многие «почти доказательства» на самом деле прятали ключевую неявную гипотезу. Мы стремимся к противоположному: всякий раз, когда возникает зазор, он вынесен наружу и локализован.

1.2. Архитектура статьи

Статья построена так, чтобы читатель мог отделить жёсткое математическое ядро от синтетической надстройки.

В разделе 2 мы фиксируем современный статус задачи и напоминаем, какие части уже известны в литературе. Раздел 3 содержит необходимые классические предварительные сведения о транзитивности, гладкости, поддерживающих функционалах и локальной дифференциальной геометрии сферы. В разделе 4 мы излагаем минимальный синтетический каркас, достаточный для последующих формулировок: хорошо адаптированный гладкий топос, микролинейность, Реполокали, геометрическая экстракция и внутренний второй порядок.

Раздел 5 вводит гессианову оболочку и доказывает основную *точную* теорему: постоянство оболочки равносильно квадратичности нормы. В разделе 6 строится representation-theoretic obstruction и вводится его каноническая количественная норма. Раздел 7 посвящён количественной жёсткости: малая вариация оболочек переводится в контроль дефекта параллелограмма и расстояния Банаха–Мазура до гильбертова пространства. В разделе 8 выделяется общий коэффициентно-алгебраический механизм усреднения, из которого следуют аменабельный, weakly almost periodic и рефлексивно-модульный критерии.

Далее раздел 12 формулирует синтетическую программу, а раздел 13 — её measure-theoretic тень на уровне законов на сфере. Разделы 14–20 сопоставляют эту редукцию с классическими критериями, affine fixed-point подходом, инфинитезимальными генераторами, трёхточечной однородностью и set-theoretic obstructions. Заключительный раздел 22 формулирует конкретные открытые подпрограммы, каждая из которых действительно приближает задачу к разрешению.

1.3. Философия новой редукции

Есть два разных способа думать о rotation problem.

Первый — *динамический*: исследовать большие орбиты группы изометрий и надеяться, что большая симметрия вынудит норму стать евклидовой. Это традиционный путь, и почти всё известное до сих пор находится именно здесь.

Второй — *оболочечный*: смотреть не на орбиты самих точек, а на орбиты *вторых производных* в этих точках. Тогда транзитивность означает не то, что норма «большесимметрична», а то, что из каждой точки сферы мы получаем одну и ту же второпорядковую модель, но транспортируемую группой. Вопрос о гильбертовости превращается в вопрос: *является ли эта транспортируемая модель на самом деле одной и той же билинейной формой на всём пространстве?*

С нашей точки зрения, именно второй взгляд и есть правильная граница между уже понятой и ещё непонятой частью проблемы.

2. Современный статус проблемы и точка входа

В этом разделе мы фиксируем лишь те факты, которые используются далее как мотивация и контекст.

2.1. Две формы классической задачи

Уже стандартным стало разделение исходной проблемы на две части:

- (а) *изоморфическая часть*: если X — сепарабельное транзитивное банахово пространство, обязано ли X быть изоморфно гильбертову пространству;

- (b) *изометрическая часть*: если $\|\cdot\|$ — эквивалентная транзитивная норма на гильбертовом пространстве, обязана ли эта норма быть индуцированной скалярным произведением.

Именно такое разделение подчёркнуто в современных обзорах и лекциях по теме, и обе части в сепарабельной бесконечномерной постановке всё ещё открыты [4].

2.2. Что известно и что не известно

Для целей настоящей статьи нам понадобятся лишь следующие ориентиры.

1. В конечной размерности транзитивные нормы евклидовы.
2. В несепарабельной бесконечномерной ситуации существуют отрицательные примеры; в частности, ультрапроизведения пространств L_p , $p \neq 2$, дают транзитивные непохожие на гильбертовы пространства.
3. Для сепарабельных транзитивных пространств известны строгая выпуклость, гладкость и SOT-микротранзитивность действия группы на сфере [4, 11].
4. Для более сильной микротранзитивности известны равномерная выпуклость и равномерная гладкость; однако сама «только гильбертовы?» версия микротранзитивной задачи остаётся открытой [5].
5. Если X — почти транзитивная ренормировка гильбертова пространства и $\text{Isom}(X)$ топологически аменабельна, то X изометрично гильбертову пространству. Этот результат будет служить для нас мостом к усреднению гессиановых оболочек [3].
6. В многоточечных и конечномерно-однородных версиях граница уже заметно резче: *strong n -point homogeneity* при $n \geq 3$ характеризует пространства внутреннего произведения, тогда как *envelope*-, *almost-Fraïssé*- и *guarded-Fraïssé*-подходы уточняют, насколько далеко может заходить конечномерная однородность без решения исходного сепарабельного транзитивного случая [7, 9, 10, 6].

Современное продвижение темы идёт по нескольким существенно различным линиям, и для настоящей статьи важно держать их в одном поле зрения. Во-первых, метрическая и *semitransitive* линия показывает, что усиленные формы однородности уже чрезвычайно жёстки: в частности, Λ -Lipschitz-transitivity при $\Lambda < 3$ влечёт изоморфизм к гильбертову пространству, а транзитивные ренормировки сепарабельного гильбертова пространства оказываются дважды гато-дифференцируемыми вне нуля [3]. Во-вторых, *Fraïssé/envelope*-направление всё теснее связывает локальную конечномерную однородность с глобальной геометрией: для *Fraïssé*-пространств с C_∞ -нормой уже известна гильбертова жёсткость, а современные *almost*- и *guarded-Fraïssé* версии делают более прозрачным, какие именно конечномерные данные реально управляют пространством [9, 10, 6]. В-третьих, сильная n -точечная однородность при любом $n \geq 3$ уже характеризует внутреннее произведение [7]. Поэтому открытым остаётся не «гомогенный случай вообще», а именно тонкий пороговый переход от двухточечной однородности к трёхточечной.

2.3. Почему стандартная SDG-риторика недостаточна

Здесь важно подчеркнуть методологический момент. Высказывания вида «в гладком тополе все функции гладкие, значит норма становится квадратичной» неверны без дополнительных аргументов. Автоматическая гладкость морфизмов внутри SDG не превращает произвольную однородную выпуклую функцию в квадратичную. Нужен именно *механизм жёсткости*, который заставляет вторую производную стать глобально постоянной. В настоящей работе этим механизмом служит теория оболочек и препятствий.

В частности, даже если внутренняя норма становится внутренне C^∞ -морфизмом, мы всё равно должны ответить на три независимых вопроса:

- (i) почему в каждой точке сферы гессиан действительно коэрцитивен в нужном направлении;
- (ii) почему семейство этих гессианов склеивается в одну форму, а не только эквивариантно переносится группой;
- (iii) почему полученное внутреннее квадратичное тождество корректно экстрагируется наружу.

Ровно эти три вопроса и структурируют остальную часть статьи.

3. Классические предварительные сведения

3.1. Транзитивность, почти транзитивность, выпуклая транзитивность

Пусть X — вещественное банахово пространство, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, а $\text{Isom}(X)$ — группа линейных сюръективных изометрий.

Определение 3.1. Говорят, что

- (a) X *транзитивно*, если действие $\text{Isom}(X) \curvearrowright S_X$ транзитивно;
- (b) X *почти транзитивно*, если каждая орбита на S_X плотна;
- (c) X *выпукло транзитивно*, если для каждого $x \in S_X$ выпуклая замкнутая оболочка $\text{co}(\text{Orb}(x))$ совпадает с единичным шаром.

Стандартная цепочка импликаций имеет вид

$$\text{транзитивность} \implies \text{почти транзитивность} \implies \text{выпуклая транзитивность},$$

и ни одна из обратных импликаций в общем случае не верна. Для нас принципиально, что именно транзитивность даёт возможность идентифицировать локальную геометрию в различных точках сферы *без потери констант*. Почти транзитивность часто достаточна для изоморфической информации, но точная изометрическая жёсткость требует именно совпадения орбит, а не только их плотности.

3.2. Поддерживающие функционалы и гладкие точки

Пусть $x \in S_X$. Функционал $\phi \in S_X^*$ называется *поддерживающим* для x , если $\phi(x) = 1$. Если такой функционал единственен, то говорят, что норма *гладка* в точке x ; если для каждого $y \in S_X$, $y \neq x$, выполнено $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$, то норма *строго выпукла* в x .

В сепарабельном транзитивном пространстве гладкость и строгая выпуклость имеют глобальный характер. Причина проста: множество гладких точек сферы в сепарабельном пространстве — плотное G_δ по теореме Мазура; орбита любой гладкой точки под действием группы изометрий целиком состоит из гладких точек; транзитивность переводит это свойство на всю сферу. Аналогичный аргумент работает для строгой выпуклости. В результате в сепарабельном транзитивном случае для каждого $x \in S_X$ существует единственный поддерживающий функционал, который мы будем обозначать через ϕ_x .

Определение 3.2. Если норма гладка на сфере, то *поддерживающее отображение*

$$\Phi : S_X \rightarrow S_X^*, \quad \Phi(x) = \phi_x,$$

определено глобально.

Эквивариантность этого отображения является элементарной, но очень важной.

Лемма 3.3. Пусть норма гладка на сфере. Тогда для всякого $T \in \text{Isom}(X)$ и $x \in S_X$ имеем

$$\phi_{Tx} = T^{-*} \phi_x.$$

Доказательство. Функционал $T^{-*}\phi_x$ имеет норму 1 и

$$(T^{-*}\phi_x)(Tx) = \phi_x(x) = 1.$$

Следовательно, $T^{-*}\phi_x$ поддерживает Tx . По единственности поддерживающего функционала получаем требуемое равенство. ■

3.3. Касательные гиперплоскости и локальная геометрия сферы

Когда норма гладка в точке $x \in S_X$, естественная касательная гиперплоскость определяется как

$$H_x := \text{Ker } \phi_x.$$

Тогда

$$X = \mathbf{R}x \oplus H_x$$

как топологическая прямая сумма, причём разложение имеет явный вид

$$y = \phi_x(y)x + \pi_x y, \quad \pi_x := I - \phi_x \otimes x.$$

Оператор π_x есть проектор на H_x вдоль радиального направления $\mathbf{R}x$.

Если квадрат нормы $N(y) = \|y\|^2$ дифференцируем в окрестности x , то

$$DN(x) = 2\phi_x$$

в естественном отождествлении непрерывных линейных функционалов с дифференциалами. Уже отсюда видно, что гильбертовость норма должна «чувствоваться» на уровне второго порядка: если бы N был квадратичной формой, то $D^2N(x)$ не зависел бы от x .

3.4. SOT-микротранзитивность и теорема Эффроса

Топология сильной операторной сходимости на $\text{Isom}(X)$ определяется семейством полунорм

$$T \mapsto \|Tx_1 - y_1\| + \dots + \|Tx_n - y_n\|.$$

Если X сепарабельно, то $\text{Isom}(X)$ в SOT является польской группой. По теореме Эффроса транзитивное действие польской группы на польском пространстве автоматически микротранзитивно: для каждого $x \in S_X$ орбитное отображение

$$\text{ev}_x : \text{Isom}(X) \rightarrow S_X, \quad \text{ev}_x(T) = Tx$$

открыто. Для нас это означает, что любое локальное утверждение об оболочках, сформулированное в координатах вокруг одной точки сферы, *априори* переносимо в окрестности других точек посредством локально малых изометрий. Этого ещё недостаточно для глобальной константности оболочки, но достаточно, чтобы говорить о непрерывном однородном поле второго порядка на сфере.

3.5. Микротранзитивность в сильном смысле

Напомним, что *нормовая микротранзитивность* требует существования для каждого $\varepsilon > 0$ числа $\delta > 0$ такого, что из $\|x - y\| < \delta$ следует существование $T \in \text{Isom}(X)$ с $Tx = y$ и $\|T - I\|_{\text{op}} < \varepsilon$. Известно, что это свойство гораздо сильнее SOT-микротранзитивности. В частности, в доступной литературе единственными известными примерами являются гильбертовы

пространства. Более того, нормовая микротранзитивность влечёт равномерную выпуклость и равномерную гладкость.

Мы будем использовать этот факт лишь как ориентир: он показывает, что если удастся синтетически усилить обычную транзитивность до какой-либо формы «контролируемой локальной однородности» оболочек, то путь к гильбертовости существенно сокращается.

3.6. Локальная модель квадрата нормы

Пусть теперь X — банахово пространство, а $N(y) = \|y\|^2$ дважды непрерывно дифференцируема на $X \setminus \{0\}$. Тогда для $x \in S_X$ и малых $h \in X$ имеем тауловское разложение

$$N(x+h) = 1 + 2\phi_x(h) + \frac{1}{2}D^2N(x)(h, h) + o(\|h\|^2).$$

Если $h \in H_x$, линейный член исчезает, и остаётся

$$N(x+h) = 1 + \frac{1}{2}D^2N(x)(h, h) + o(\|h\|^2).$$

Именно поэтому ограничение $D^2N(x)|_{H_x \times H_x}$ является точным второпорядковым профилем сферической геометрии в точке x .

Определение 3.4. Для $x \in S_X$ определим *тангенциальную вторую форму*

$$Q_x := \frac{1}{2}D^2N(x)|_{H_x \times H_x}.$$

В гильбертовом пространстве Q_x есть просто ограничение скалярного произведения на ортогональное дополнение к x . В общем банаховом пространстве это уже нетривиальный объект, зависящий от точки и, вообще говоря, не продолжимый глобально одной билинейной формой на X .

3.7. Почему одного первого порядка недостаточно

В классических попытках решить rotation problem часто используется следующий интуитивный аргумент: раз все точки сферы эквивалентны под действием изометрий, то поддерживающие гиперплоскости и локальные характеристики должны быть одинаковыми, следовательно норма должна быть евклидовой. Ошибка в таком рассуждении заключается в смешении *орбитной эквивалентности* локальных моделей с их *глобальной идентичностью*.

Да, транзитивность заставляет все гиперплоскости H_x выглядеть одинаково как банаховы пространства с действием стабилизатора. Но отсюда ещё не следует, что существует одна форма B на X , ограничение которой на каждую H_x совпадает с соответствующей Q_x . Именно этот переход от «локально одинаково» к «глобально та же форма» и есть сердцевина всей задачи.

4. Синтетические предварительные сведения

Далее мы фиксируем только тот минимум синтетического аппарата, который действительно нужен для формулировки наших редукций. Мы не пытаемся заново строить всю теорию гладких когезивных топосов; читатель может воспринимать этот раздел как *аксиоматический интерфейс*, совместимый с современным аппаратом синтетической дифференциальной геометрии и когезивного вариационного анализа [17, 20, 18].

4.1. Хорошо адаптированный гладкий топос

Гипотеза 4.1 (Хорошая адаптация). Существует гладкий когезивный топос $\mathcal{E}$ с внутренней прямой $\mathbf{R}$, обладающий следующими свойствами:

- (i) выполнены аксиомы Кока–Ловера для инфинитезимальных объектов D, D_k ;
- (ii) классические конечномерные гладкие многообразия вкладываются в $\mathcal{E}$ полным и точным функтором i ;
- (iii) функтор глобальных сечений $\Gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ правосопряжён к дискретному вложению и сохраняет конечные пределы;
- (iv) формулы, используемые в статье для выражения квадратичности и тождества параллелограмма, являются геометрическими в достаточной степени, чтобы корректно экстрагироваться через Γ .

Мы не будем заново доказывать существование таких моделей; задача статьи другая. Важно только, что синтетическая часть не опирается на магию «внутри топоса всё хорошо», а использует конкретные формальные входы: внутреннюю дифференцируемость, микролинейность, функториальность действия изометрий и возможность геометрической экстракции.

4.2. Внутренний банахов объект

Определение 4.2. Под внутренним банаховым объектом мы будем понимать линейный объект $\tilde{X} \in \mathcal{E}$, снабжённый морфизмом нормы

$$\|\cdot\| : \tilde{X} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0},$$

внешняя интерпретация которого на глобальных точках совпадает с исходной нормой пространства X .

Конечно, полноценная теория всех синтетических бесконечномерных банаховых объектов ещё не построена в той завершённости, которая была бы необходима для закрытия rotation problem. Однако для целей настоящей работы нам не нужна полная теория: достаточно иметь один конкретный объект $\tilde{X}$, являющийся корректным внутренним подъёмом данного внешнего пространства X вместе с нормой и группой изометрий.

4.3. Микролинейность и внутренний второй порядок

Одним из главных преимуществ SDG является то, что вторые производные можно интерпретировать алгебраически через нильпотентные инфинитезималы. Если $F : \tilde{X} \rightarrow \mathbf{R}$ — внутренний морфизм и $\tilde{X}$ микролинеен, то в точке x разложение

$$F(x + d_1 u + d_2 v) = F(x) + d_1 DF(x)[u] + d_2 DF(x)[v] + d_1 d_2 \text{Hess}_x F(u, v)$$

при $d_1, d_2 \in D$ задаёт внутренний гессиан. Для нас важно, что эта конструкция функториальна относительно внутренних линейных изометрий.

Определение 4.3. Если $N : \tilde{X} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ есть внутренний квадрат нормы, то его внутренняя гессиановая оболочка в точке x определяется как

$$\tilde{B}_x := \frac{1}{2} \text{Hess}_x N.$$

4.4. Репон-локали и негладкость первого порядка

В рамках СНА Репон-локали и обобщённые производные Кларка/Мордуховича призваны описывать негладкость там, где обычная дифференцируемость отсутствует. Для нашей задачи принципиален следующий момент: если у транзитивной нормы имеется подлинная локальная негладкость на сфере, то такая негладкость должна быть совместима с действием стабилизатора точки. Отсюда возникает естественная надежда, что сильная изотропия и Репон-теория запретят углы на сфере. Но это — ещё не доказанный мост. В статье мы будем использовать Репон-язык лишь как место, куда нужно направить дальнейшие усилия.

4.5. Конечномерный Репон–classical интерфейс

Для локальных first-order рассуждений на сфере не нужен весь аппарат СНА; достаточно того факта, что на конечномерных chart-ах его объекты корректно выходят наружу через глобальные сечения. Этот мост уже имеет строгую форму.

Теорема 4.4 (Конечномерный Репон–classical bridge). Пусть $U \subset \tilde{X}$ — конечномерный микролинейный chart внутреннего банахова объекта, и предположим, что на глобальных сечениях:

- (i) Репон-локаль $P(U)$ индуцирует обычную евклидову топологию на $\Gamma(U)$;
- (ii) нижние/верхние вещественные и расширенные значения внешне совпадают с классическими lower/upper semicontinuous and extended-real scales;
- (iii) P -сходимость переходит в обычную сходимость последовательностей и сетей на $\Gamma(U)$.

Тогда для всех first-order объектов, строящихся из P -окрестностей, lower/upper real values и конечного числа рациональных кванторов, после применения Γ получаем точные классические аналоги. В частности:

- (a) P -касательные и P -нормальные конусы переходят в классические касательные и нормальные конусы;
- (b) Репон–Clarke направленные производные переходят в классические Clarke upper derivatives;
- (c) соответствующие Clarke-, Moreau- и Mordukhovich-type субдифференциалы совпадают по графам на глобальных сечениях.

Доказательство. Все перечисленные first-order конструкции определяются через одну и ту же ограниченную палитру операций: P -окрестности, линейные комбинации, неравенства в lower/upper real scales, супремумы/инфимумы по рациональным аппроксимациям и предельные переходы в P -топологии. По предположению эти операции на глобальных сечениях переходят соответственно в обычную евклидову топологию, классические lower/upper semicontinuous scales и стандартные предельные процедуры. Поэтому определяющие формулы для касательных конусов, нормалей, направленных производных и субдифференциалов буквально превращаются в классические определения Clarke/Moreau/Mordukhovich. Следовательно, внешние графы совпадают. ■

Следствие 4.5. Для локальных first-order аргументов на конечномерных сечениях единичной сферы Репон-язык является не эвристическим украшением, а консервативным расширением классического негладкого анализа. Следовательно, оставшийся открытый узел синтетической программы лежит не в конечномерном first-order интерфейсе, а в его бесконечномерном и genuinely second-order продолжении к полю оболочек $x \mapsto B_x$.

4.6. Геометрическая экстракция

Ключевой формальный механизм можно сформулировать так.

Принцип 4.6 (Неформальная форма). Если внутри $\mathcal{E}$ доказано тождество, выражающееся через конечное число кванторов над линейными объектами, равенств морфизмов и операций сложения/умножения/нормы, и если это тождество корректно интерпретируется на глобальных точках $i(X)$, то после применения Γ получаем внешнее тождество в X .

В частности, если внутри топоса удалось бы доказать

$$\forall x, y \in \tilde{X} \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

то внешнее пространство X было бы гильбертовым по теореме Жордана–фон Неймана.

4.7. Что в синтетическом каркасе уже есть, а чего ещё нет

На этом этапе важно сделать честное различие. Уже разработанный синтетический дифференциальный и когезивно-вариационный каркас даёт богатый язык для:

- (1) внутренней гладкости и гессианов;
- (2) инфинитезимальной выпуклости;
- (3) Репоп-негладкости и локальных субдифференциалов;
- (4) когезивной геометрической экстракции;
- (5) вероятностного и транспортного уровня, позволяющего рассматривать law-level convexity.

Но для непосредственного завершения rotation problem пока не хватает по крайней мере трёх теорем:

- (a) бесконечномерной внутренней теории банаховых объектов в степени, достаточной для глобального контроля вторых производных;
- (b) бесконечномерного и second-order продолжения теоремы 4.4 от локальных first-order chart-ов к целой сфере и к полю оболочек $x \mapsto B_x$;
- (c) механизма, который превращает эквивариантность гессиановых оболочек в их глобальную константность.

Настоящая работа нацелена ровно на третий пункт и показывает, как именно должны работать два других, чтобы задача замкнулась.

5. Гессианова оболочка нормы

Теперь переходим к главному объекту статьи. Внешне всё будет формулироваться для обычного банахова пространства X с дважды непрерывно дифференцируемым квадратом нормы на $X \setminus \{0\}$. Внутренняя синтетическая версия получается заменой D^2 на внутренний гессиан и всех объектов — на их подъёмы.

5.1. Определение и первые свойства

Определение 5.1 (Гессианова оболочка). Пусть X — вещественное банахово пространство, а функция

$$N : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad N(x) = \|x\|^2,$$

принадлежит классу C^2 . Для $x \in S_X$ положим

$$B_x := \frac{1}{2} D^2 N(x) \in \text{Sym}^2(X^*).$$

Семейство $\{B_x\}_{x \in S_X}$ будем называть *гессиановой оболочкой* нормы.

Ниже мы систематически используем тот факт, что N — 2-однородная функция. Это даёт эйлеровы тождества, которые в сущности и превращают поле вторых производных в геометрически осмысленный объект.

Лемма 5.2 (Эйлеровы тождества). Пусть $N(x) = \|x\|^2$ и $N \in C^2(X \setminus \{0\})$. Тогда для всяких $x \neq 0$, $t > 0$ и $u, v \in X$ выполнено:

$$N(tx) = t^2 N(x), \quad (1)$$

$$DN(tx)[u] = t DN(x)[u], \quad (2)$$

$$D^2N(tx)[u, v] = D^2N(x)[u, v]. \quad (3)$$

Если $x \in S_X$, то

$$DN(x) = 2\phi_x, \quad (4)$$

$$B_x(x, x) = 1, \quad (5)$$

$$B_x(x, h) = \phi_x(h) \quad (h \in X), \quad (6)$$

$$B_x(h, k) = Q_x(h, k) \quad (h, k \in H_x), \quad (7)$$

где Q_x — тангенциальная вторая форма. **Доказательство.** Равенство (1) есть просто 2-однородность квадрата нормы. Дифференцирование по переменной x даёт (2), второе дифференцирование — (3).

Для (4) заметим, что при $x \in S_X$ и малом s имеем

$$N(x + sh) = \|x + sh\|^2 = 1 + 2s\phi_x(h) + o(s),$$

поскольку ϕ_x — единственный поддерживающий функционал. Следовательно, $DN(x) = 2\phi_x$.

Теперь дифференцируем тождество (2) по x в направлении h и подставляем $u = x$:

$$D^2N(x)[h, x] + DN(x)[h] = 2DN(x)[h].$$

Отсюда

$$D^2N(x)[h, x] = DN(x)[h] = 2\phi_x(h),$$

а значит (6). При $h = x$ получаем (5). Наконец, (7) — просто определение Q_x . ■

Замечание 5.3. Равенство (6) особенно важно: оно показывает, что полная оболочка B_x уже кодирует не только чисто тангенциальный второй порядок, но и первый порядок через поддержку ϕ_x . Следовательно, фиксируя B_x , мы автоматически фиксируем и касательную гиперплоскость H_x .

5.2. Позитивность и коэрцитивность оболочки

Так как N выпукла, её второй дифференциал в любой точке, где он существует, положителен в квадратичном смысле.

Лемма 5.4 (Позитивность). Для каждого $x \in S_X$ и $u \in X$ выполнено

$$B_x(u, u) \geq 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию одной переменной

$$f(t) = N(x + tu).$$

Она выпукла как композиция выпуклой функции N с аффинным отображением. Поскольку $f \in C^2$ в окрестности 0, имеем $f''(0) \geq 0$. Но

$$f''(0) = D^2N(x)[u, u] = 2B_x(u, u).$$

Следовательно, $B_x(u, u) \geq 0$. ■

Позитивность сама по себе ещё не достаточна. Для ряда дальнейших теорем нам понадобится более сильное понятие.

Определение 5.5. Скажем, что оболочка B_x коэрцитивна на всём X , если существуют константы $0 < c_x \leq C_x < \infty$ такие, что

$$c_x \|u\|^2 \leq B_x(u, u) \leq C_x \|u\|^2 \quad (u \in X).$$

В общей банаховой норме коэрцитивность B_x на всём пространстве совершенно не очевидна. На тангенциальной гиперплоскости она отражает «положительную кривизну» сферы в точке x ; на смешанных направлениях она эквивалентна тому, что радиально-тангенциальное разложение не вырождается. Именно эта коэрцитивность, как мы увидим ниже, служит естественным мостом между «локальным вторым порядком» и «глобальным усреднением».

5.3. Эквивариантность оболочки под действием изометрий

Лемма 5.6 (Эквивариантность). Пусть $T \in \text{Isom}(X)$ и $x \in S_X$. Тогда

$$B_{Tx}(Tu, Tv) = B_x(u, v) \quad (u, v \in X).$$

Эквивалентно,

$$B_{Tx} = T^{-*} B_x T^{-1}$$

в естественном действии $\text{Isom}(X)$ на $\text{Sym}^2(X^*)$. **Доказательство.** Изометричность означает $N \circ T = N$. Следовательно, в точке x имеем

$$D^2N(Tx)[Tu, Tv] = D^2(N \circ T)(x)[u, v] = D^2N(x)[u, v].$$

Деление на 2 даёт требуемое. ■

Тем самым $x \mapsto B_x$ есть непрерывное G -эквивариантное поле симметрических билинейных форм на сфере, где $G = \text{Isom}(X)$. Именно эта эквивариантность и будет далее интерпретироваться как 0-мерная форма препятствия к гильбертовости.

5.4. Постоянство оболочки и квадратичность нормы

Теперь формулируется первая ключевая редукция.

Теорема 5.7 (Точная оболочечная жёсткость). Пусть X — вещественное банахово пространство, для которого $N(x) = \|x\|^2$ принадлежит $C^2(X \setminus \{0\})$. Предположим, что существует симметрическая билинейная форма $B \in \text{Sym}^2(X^*)$ такая, что

$$B_x = B \quad \text{для всех } x \in S_X.$$

Тогда

$$\|u\|^2 = B(u, u) \quad (u \in X),$$

u , следовательно, X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** Пусть $u \neq 0$ и $x = u / \|u\| \in S_X$. Тогда по 2-однородности формы B и по лемме 5.2

$$B(u, u) = \|u\|^2 B(x, x) = \|u\|^2 B_x(x, x) = \|u\|^2.$$

Для $u = 0$ равенство очевидно. Полученная квадратичная форма положительно определена и порождает данную норму. По стандартной поляризационной формуле она индуцирует скалярное произведение, относительно которого норма равна исходной. ■

Замечание 5.8. Теорема 5.7 по сути говорит, что rotation problem второго порядка уже решена: если можно доказать постоянство оболочки, то всё остальное мгновенно замыкается. Это важнее, чем кажется. Большинство традиционных попыток доказать гильбертовость пытаются работать непосредственно с точками сферы. Теорема 5.7 показывает, что достаточно установить неизменность второй микролокальной модели.

5.5. Восстановление оболочки из тангенциальной формы

Следующее наблюдение полезно для построения препятствий.

Лемма 5.9 (Формула расщепления). Пусть $x \in S_X$. Тогда для любых $u, v \in X$ имеем

$$B_x(u, v) = \phi_x(u)\phi_x(v) + Q_x(\pi_x u, \pi_x v).$$

Доказательство. Разложим $u = \phi_x(u)x + \pi_x u$ и $v = \phi_x(v)x + \pi_x v$. Билинейность даёт

$$B_x(u, v) = \phi_x(u)\phi_x(v)B_x(x, x) + \phi_x(u)B_x(x, \pi_x v) + \phi_x(v)B_x(\pi_x u, x) + B_x(\pi_x u, \pi_x v).$$

По лемме 5.2 имеем $B_x(x, x) = 1$, а также

$$B_x(x, \pi_x v) = \phi_x(\pi_x v) = 0, \quad B_x(\pi_x u, x) = \phi_x(\pi_x u) = 0.$$

Остаётся

$$B_x(u, v) = \phi_x(u)\phi_x(v) + Q_x(\pi_x u, \pi_x v).$$

■

Замечание 5.10. Формула расщепления показывает, что поле полных оболочек эквивалентно паре полей

$$x \mapsto \phi_x, \quad x \mapsto Q_x.$$

Первое уже контролируется транзитивностью и гладкостью. Следовательно, вся трудность сосредоточена во втором: нужно понять, почему эквивариантное поле тангенциальных форм на гиперплоскостях H_x должно происходить от одной глобальной формы.

5.6. Инфинитезимальный дефект параллелограмма

Для дальнейших количественных оценок удобен следующий локальный аналог дефекта Жордана–фон Неймана.

Определение 5.11. Пусть $x \in S_X$ и $h \in H_x$. Определим инфинитезимальный дефект параллелограмма в точке x по направлению h как

$$\delta_{\inf}(x; h) := 2Q_x(h, h) - 2\|h\|^2.$$

Этот дефект возникает как главный коэффициент при разложении глобального параллелограммного дефекта.

Лемма 5.12. Для $x \in S_X$ и $h \in H_x$ выполнено

$$\Delta(x, th) := \|x + th\|^2 + \|x - th\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|th\|^2 = t^2 \delta_{\inf}(x; h) + o(t^2)$$

при $t \rightarrow 0$. **Доказательство.** Используем разложение

$$N(x \pm th) = 1 + \frac{t^2}{2} D^2 N(x)[h, h] + o(t^2) = 1 + t^2 Q_x(h, h) + o(t^2),$$

поскольку $h \in H_x$. Складывая два равенства и вычитая $2 + 2t^2 \|h\|^2$, получаем искомую формулу. ■

Этот факт полезен тем, что связывает *точно вычислимый* второй порядок с классическим глобальным тождеством параллелограмма. Если когда-либо удастся доказать, что $Q_x(h, h) = \|h\|^2$ для всех касательных пар (x, h) , то глобальная гильбертовость станет уже вопросом интеграции этого локального тождества.

6. Представленческое препятствие и локализация открытого узла

Основной условный объект удобно формулировать не на языке «гессиановых коциклов», а на языке фиксированных точек представления стабилизатора. Этот переход устраняет лишнюю ко-гомологическую упаковку и выделяет именно ту линейную структуру, которая реально контролирует задачу. По существу, открытая часть задачи — это вопрос о том, почему одно конкретное H -инвариантное состояние второго порядка должно быть уже G -инвариантным, где

$$G = \text{Isom}(X), \quad H = \text{Stab}_G(x_0)$$

для фиксированной точки $x_0 \in S_X$.

6.1. Поле оболочек как однородное сечение

Пусть $E := \text{Sym}^2(X^*)$, снабжённое естественным линейным представлением группы G :

$$(g \cdot B)(u, v) := B(g^{-1}u, g^{-1}v).$$

Тогда по лемме 5.6 поле оболочек

$$\mathcal{B} : S_X \rightarrow E, \quad \mathcal{B}(x) = B_x,$$

является G -эквивариантным:

$$\mathcal{B}(gx) = g \cdot \mathcal{B}(x).$$

Выберем базовую точку $x_0 \in S_X$ и положим $H = \text{Stab}_G(x_0)$. Тогда S_X можно рассматривать как однородное пространство G/H . Следующее утверждение является стандартным фактом теории однородных пучков, но мы приведём доказательство, поскольку именно здесь локализуется новое препятствие.

Предложение 6.1 (Эквивариантные поля и фиксированные точки). *Отображение*

$$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(x_0)$$

устанавливает биекцию между непрерывными G -эквивариантными отображениями $\mathcal{F} : S_X \rightarrow E$ и подпространством E^H H -фиксированных векторов в E . **Доказательство.** Пусть $\mathcal{F}$ эквивариантно. Тогда для всякого $h \in H$ имеем

$$h \cdot \mathcal{F}(x_0) = \mathcal{F}(hx_0) = \mathcal{F}(x_0),$$

то есть $\mathcal{F}(x_0) \in E^H$.

Обратно, пусть $e \in E^H$. Для точки $x = gx_0$ положим

$$\mathcal{F}_e(x) := g \cdot e.$$

Нужно проверить корректность. Если $gx_0 = g'x_0$, то $g^{-1}g' \in H$, и потому

$$g' \cdot e = g(g^{-1}g') \cdot e = g \cdot e.$$

Следовательно, $\mathcal{F}_e$ корректно определено. Явно видно, что оно G -эквивариантно:

$$\mathcal{F}_e(g_1x) = \mathcal{F}_e(g_1gx_0) = g_1g \cdot e = g_1 \cdot \mathcal{F}_e(x).$$

Оба построения взаимно обратны. ■

6.2. Препятствие как класс в факторе фиксированных точек

Применяя предложение 6.1 к полю оболочек, получаем, что вся информация о $x \mapsto B_x$ уже содержится в одной форме

$$B_{x_0} \in E^H.$$

Теперь возникает естественный вопрос: когда поле $\mathcal{B}$ постоянно? По теореме 5.7 это и есть условие гильбертовости. Ответ оказывается чрезвычайно простым.

Предложение 6.2 (Тривиальность поля). Пусть $\mathcal{B}(x) = B_x$ — поле оболочек. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) поле $\mathcal{B}$ постоянно на S_X ;
- (ii) существует G -инвариантная форма $B \in E^G$, такая что $B_{x_0} = B$;
- (iii) элемент $B_{x_0} \in E^H$ принадлежит подпространству $E^G \subset E^H$.

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидна: если $\mathcal{B}(x) \equiv B$, то по эквивариантности

$$g \cdot B = \mathcal{B}(gx_0) = \mathcal{B}(x_0) = B.$$

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) тривиальна. Для (iii) $\Rightarrow$ (i) если $B_{x_0} = B \in E^G$, то по предложению 6.1

$$B_x = g \cdot B = B$$

для всякого $x = gx_0$. ■

Эта эквивалентность подсказывает правильное определение.

Определение 6.3 (Representation-theoretic obstruction). Положим

$$\mathfrak{Ob}(X, x_0) := E^H / E^G = \text{Sym}^2(X^*)^H / \text{Sym}^2(X^*)^G.$$

Класс

$$\mathfrak{o}(X, x_0) := [B_{x_0}] \in \mathfrak{Ob}(X, x_0)$$

назовём *representation-theoretic obstruction* к гильбертовости, индуцированным гессиановой оболочкой.

Теорема 6.4 (Редукция к representation-theoretic obstruction). Пусть X — транзитивное вещественное банахово пространство с C^2 -квадратом нормы вне нуля. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) X линейно изометрично гильбертову пространству;
- (2) поле оболочек постоянно;
- (3) $\mathfrak{o}(X, x_0) = 0$ для некоторой (эквивалентно, для любой) базовой точки $x_0 \in S_X$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): в гильбертовом пространстве $N(x) = \langle x, x \rangle$, а значит B_x не зависит от x и совпадает со скалярным произведением.

(2) $\Rightarrow$ (1): это теорема 5.7.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): это предложение 6.2. Осталось проверить независимость от базовой точки. Если $y_0 = gx_0$, то стабилизатор $H_y = gHg^{-1}$, а соответствующие пространства фиксированных точек естественно изоморфны действием g . При этом класс $[B_{y_0}]$ переходит в класс $[B_{x_0}]$. ■

Замечание 6.5. Теорема 6.4 является одной из центральных формулировок статьи. Она переводит открытую проблему в совершенно конкретный язык представлений:

почему специальный H -инвариантный элемент B_{x_0} в пространстве симметрических билинейных форм должен уже быть G -инвариантным?

Это уже не туманная «глобальная симметрия нормы», а чёткая задача о фиксированных точках двух вложенных представлений.

6.3. Норма класса препятствия и его количественный смысл

Редукция теоремы 6.4 допускает и каноническую количественную форму. Так как $\text{Sym}^2(X^*)^G$ — замкнутое линейное подпространство $\text{Sym}^2(X^*)$, на факторе

$$\mathfrak{Ob}(X, x_0) = \text{Sym}^2(X^*)^H / \text{Sym}^2(X^*)^G$$

имеется естественная факторнорма.

Определение 6.6 (Норма класса препятствия). Для базовой точки $x_0 \in S_X$ положим

$$\omega_{\text{rep}}(X, x_0) := \inf \left\{ \|B_{x_0} - B\|_{\text{op}} : B \in \text{Sym}^2(X^*)^G \right\}.$$

Это и есть норма класса $\mathfrak{o}(X, x_0) = [B_{x_0}]$ в факторпространстве $\mathfrak{Ob}(X, x_0)$.

Предложение 6.7 (Инвариантное расстояние до оболочечного поля). Пусть $B \in \text{Sym}^2(X^*)^G$. Тогда для всякой базовой точки $x_0 \in S_X$

$$\sup_{x \in S_X} \|B_x - B\|_{\text{op}} = \|B_{x_0} - B\|_{\text{op}}.$$

Следовательно,

$$\omega_{\text{rep}}(X, x_0) = \inf_{B \in \text{Sym}^2(X^*)^G} \sup_{x \in S_X} \|B_x - B\|_{\text{op}}.$$

Доказательство. Если $x = Tx_0$ для некоторого $T \in G$, то по эквивариантности оболочек и G -инвариантности B имеем

$$B_x - B = T \cdot B_{x_0} - T \cdot B = T \cdot (B_{x_0} - B).$$

Действие G на $\text{Sym}^2(X^*)$ изометрично относительно операторной нормы, поэтому

$$\|B_x - B\|_{\text{op}} = \|B_{x_0} - B\|_{\text{op}}.$$

Беря супремум по $x \in S_X$, получаем первое равенство, а затем и второе по определению инфимума. ■

Следствие 6.8 (Независимость от базовой точки). Величина $\omega_{\text{rep}}(X, x_0)$ не зависит от выбора $x_0 \in S_X$. **Доказательство.** Если $y_0 = Tx_0$, то

$$\omega_{\text{rep}}(X, y_0) = \inf_{B \in \text{Sym}^2(X^*)^G} \|B_{y_0} - B\|_{\text{op}} = \inf_{B \in \text{Sym}^2(X^*)^G} \|T \cdot B_{x_0} - T \cdot B\|_{\text{op}} = \omega_{\text{rep}}(X, x_0),$$

поскольку действие $T \cdot (\cdot)$ изометрично и сохраняет $\text{Sym}^2(X^*)^G$. ■

Следствие 6.9 (Количественный критерий через норму препятствия). Пусть X — вещественное банахово пространство с $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$. Если

$$\omega_{\text{rep}}(X, x_0) < 1$$

для некоторой (эквивалентно, любой) точки $x_0 \in S_X$, то

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1 + \omega_{\text{rep}}(X, x_0)}{1 - \omega_{\text{rep}}(X, x_0)}}.$$

В частности, если $\omega_{\text{rep}}(X, x_0) = 0$, то X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** Выберем ε так, что

$$\omega_{\text{rep}}(X, x_0) < \varepsilon < 1,$$

и форму $B \in \text{Sym}^2(X^*)^G$ с

$$\|B_{x_0} - B\|_{\text{op}} < \varepsilon.$$

По предложению 6.7

$$\sup_{x \in S_X} \|B_x - B\|_{\text{op}} < \varepsilon.$$

Теперь применяем теорему 7.2 и получаем

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}.$$

Переходя к инфимуму по $\varepsilon \downarrow \omega_{\text{rep}}(X, x_0)$, получаем требуемую оценку. Если же $\omega_{\text{rep}}(X, x_0) = 0$, то замкнутость $\text{Sym}^2(X^*)^G$ даёт $B_{x_0} \in \text{Sym}^2(X^*)^G$, а тогда по теореме 6.4 пространство X гильбертово. ■

6.4. Связь с прежним языком кокциклов

Хотя язык фиксированных точек оказался более жёстким, полезно понимать, как он связан с прежним кокцикловым описанием. Выберем локальное сечение $\sigma : U \subset S_X \rightarrow G$ орбитного расслоения $G \rightarrow G/H$ около x_0 , так что $\sigma(x)x_0 = x$. Тогда локально можно «перенести» оболочки к базовой точке:

$$\tilde{B}(x) := \sigma(x)^{-1} \cdot B_x.$$

По эквивариантности это есть просто локально постоянное значение B_{x_0} . На перекрытиях двух сечений $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ их отношение принимает значения в H , и потому разность соответствующих локальных переносов исчезает в точности тогда, когда B_{x_0} фиксирован всем H . Таким образом, «кокцикл» здесь вырождается в ещё более простую структуру: одно значение в E^H , которое нужно проверить на принадлежность E^G .

Это важное упрощение. Оно показывает, что геометрическое препятствие не обязано жить в высоких когомологиях; в нашем случае оно уже содержится в нулевом слое фиксированных точек.

6.5. Изотропическая жёсткость на касательной гиперплоскости

Для приложений полезно отделить полные формы на X от их тангенциальных частей. Зафиксируем $x_0 \in S_X$ и положим $H_0 = H_{x_0} = \text{Ker } \phi_{x_0}$, $H = \text{Stab}_G(x_0)$. Тогда H действует на H_0 . По формуле расщепления 5.9 форма B_{x_0} полностью определяется тангенциальной частью

$$Q_{x_0} \in \text{Sym}^2(H_0^*)^H$$

вместе с фиксированными радиальными условиями

$$B_{x_0}(x_0, x_0) = 1, \quad B_{x_0}(x_0, h) = 0 \quad (h \in H_0).$$

Предложение 6.10 (Изотропическая скалярность). *Предположим, что пространство*

$$E_H := \text{Sym}^2(H_0^*)^H$$

одномерно. Тогда существует единственная с точностью до скаляра H -инвариантная положительная форма q_0 на H_0 . Кроме того, существует число $\lambda > 0$ такое, что

$$Q_{x_0} = \lambda q_0.$$

Доказательство. Одномерность пространства фиксированных точек означает, что любое H -инвариантное симметрическое билинейное отображение на H_0 является скалярным множителем некоторого ненулевого q_0 . Поскольку Q_{x_0} положительна по лемме 5.4, соответствующий скаляр неотрицателен. В транзитивном гладком случае вырождение Q_{x_0} противоречило бы локальной строгой выпуклости, поэтому $\lambda > 0$. ■

Замечание 6.11. Предложение 6.10 не решает задачу: оно описывает только тангенциальную форму в одной точке. Но оно показывает, куда естественно направить Repon- и transport-методы. Если удастся доказать, что H -инвариантность на касательной гиперплоскости настолько сильна, что вынуждает Q_{x_0} совпасть с ограничением некоторой глобальной G -инвариантной формы, то проблема будет закрыта.

6.6. Почему именно этот фактор является узким местом

Стоит подчеркнуть: фактор

$$\text{Sym}^2(X^*)^H / \text{Sym}^2(X^*)^G$$

не является искусственной конструкцией, добавленной задним числом. Он возникает неизбежно из трёх уже известных фактов:

- (1) оболочка эквивариантна;
- (2) эквивариантные поля однородного пространства задаются H -фиксированными векторами;

(3) гильбертовость эквивалентна постоянству поля оболочек.

Следовательно, вся оставшаяся сложность задачи действительно сводится к сравнению двух подпространств фиксированных точек. В этом смысле полученная редукция заменяет открытый «глобально-геометрический» вопрос на открытый «representation-theoretic» вопрос.

6.7. Абсолютная и синтетическая версии препятствия

Внутри топоса $\mathcal{E}$ можно в точности повторить ту же конструкцию. Если $\tilde{G}$ — внутренний групповой объект изометрий, $\tilde{x}_0$ — внутренняя точка внутренней сферы, а $\tilde{E} = \text{Sym}^2(\tilde{X}^*)$, то имеем внутренний фактор

$$\widetilde{\text{Ob}}(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \tilde{E}^{\tilde{H}} / \tilde{E}^{\tilde{G}}.$$

Внутреннее исчезновение класса $[\tilde{B}_{\tilde{x}_0}]$ означало бы внутреннюю квадратичность нормы. Вопрос затем состоит в том, можно ли этот факт корректно экстрагировать наружу. Мы покажем ниже, что для точных и количественных формулировок ответ положителен при естественных геометрических условиях на Γ .

7. Количественная оболочечная жёсткость

Одно из главных преимуществ оболочечного подхода состоит в том, что он допускает не только точную, но и количественную версию. Если поле оболочек почти постоянно, то пространство уже почти гильбертово. Этот переход не требует ни тонкой глобальной топологии группы, ни специальных бесконечномерных теорем — достаточно элементарной оценки на одной билинейной форме.

7.1. Осцилляция оболочки и глобальный эталон

Определение 7.1. Пусть X — банахово пространство с C^2 -квадратом нормы вне нуля. Для $B \in \text{Sym}^2(X^*)$ и поля оболочек $x \mapsto B_x$ положим

$$\text{osc}_B(B_\bullet) := \sup_{x \in S_X} \|B_x - B\|_{\text{op}},$$

где операторная норма берётся относительно исходной банаховой нормы:

$$\|A\|_{\text{op}} := \sup_{\|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1} |A(u, v)|.$$

Кроме того, определим

$$\text{osc}(B_\bullet) := \inf_{B \in \text{Sym}^2(X^*)} \text{osc}_B(B_\bullet).$$

Величина $\text{osc}(B_\bullet)$ измеряет, насколько близко поле оболочек к одной глобальной билинейной форме. Если она равна нулю, то по теореме 5.7 имеем точную гильбертовость. Ниже мы покажем, что малая осцилляция контролирует и расстояние Банаха–Мазура до гильбертова пространства, и дефект параллелограмма.

7.2. Почти постоянство оболочки влечёт почти гильбертовость

Теорема 7.2 (Количественная теорема оболочечной жёсткости). Пусть X — вещественное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$. Предположим, что существует симметрическая билинейная форма $B \in \text{Sym}^2(X^*)$ и число $0 \leq \varepsilon < 1$ такие, что

$$\sup_{x \in S_X} \|B_x - B\|_{\text{op}} \leq \varepsilon.$$

Тогда для всех $u \in X$ выполнено

$$(1 - \varepsilon) \|u\|^2 \leq B(u, u) \leq (1 + \varepsilon) \|u\|^2.$$

В частности, B положительно определена, и пространство X линейно изоморфно гильбертову пространству H_B , индуцированному скалярным произведением B , причём

$$d_{\text{BM}}(X, H_B) \leq \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}.$$

Доказательство. Пусть $u \neq 0$ и $x = u / \|u\| \in S_X$. Тогда по лемме 5.2

$$B_x(u, u) = \|u\|^2 B_x(x, x) = \|u\|^2.$$

Следовательно,

$$\left| B(u, u) - \|u\|^2 \right| = |(B - B_x)(u, u)| \leq \|B - B_x\|_{\text{op}} \|u\|^2 \leq \varepsilon \|u\|^2.$$

Отсюда сразу следует двусторонняя оценка. При $\varepsilon < 1$ форма B положительно определена. Норма $\|u\|_B := \sqrt{B(u, u)}$ удовлетворяет

$$\sqrt{1 - \varepsilon} \|u\| \leq \|u\|_B \leq \sqrt{1 + \varepsilon} \|u\|,$$

поэтому тождественный оператор $\text{id} : X \rightarrow H_B$ имеет норму не больше $\sqrt{1 + \varepsilon}$, а обратный — не больше $(1 - \varepsilon)^{-1/2}$. Это и даёт указанную оценку расстояния Банаха–Мазура. ■

Замечание 7.3. Теорема 7.2 полезна сразу в двух направлениях. Во-первых, она показывает, что для изоморфической части rotation problem уже достаточно контролировать поле оболочек с точностью до малой ошибки. Во-вторых, она делает возможной асимптотическую стратегию: даже если невозможно сразу доказать точное исчезновение препятствия, можно пытаться показать, что синтетические регуляризации сжимают осцилляцию оболочек до нуля.

7.3. Оценка дефекта параллелограмма

Теперь выразим через ε глобальный дефект Жордана–фон Неймана

$$\mathfrak{J}(u, v) := \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 - 2\|u\|^2 - 2\|v\|^2.$$

Теорема 7.4 (Количественная оценка параллелограммного дефекта). *При гипотезах теоремы 7.2 для всех $u, v \in X$ имеем*

$$|\mathfrak{J}(u, v)| \leq \frac{4\varepsilon}{1 - \varepsilon} (\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Доказательство. Так как B — квадратичная форма, выполняется точное тождество

$$B(u + v, u + v) + B(u - v, u - v) = 2B(u, u) + 2B(v, v).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(u, v) &= (\|u + v\|^2 - B(u + v, u + v)) + (\|u - v\|^2 - B(u - v, u - v)) \\ &\quad - 2(\|u\|^2 - B(u, u)) - 2(\|v\|^2 - B(v, v)). \end{aligned}$$

По теореме 7.2,

$$\left| \|w\|^2 - B(w, w) \right| \leq \varepsilon \|w\|^2 \quad (w \in X).$$

Отсюда

$$|\mathfrak{J}(u, v)| \leq \varepsilon \left(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 + 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \right).$$

Остаётся оценить первую сумму. Снова по теореме 7.2,

$$\|u \pm v\|^2 \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} B(u \pm v, u \pm v).$$

Складывая и используя точное параллелограммное тождество для B , получаем

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 \leq \frac{2}{1 - \varepsilon} (B(u, u) + B(v, v)) \leq \frac{2(1 + \varepsilon)}{1 - \varepsilon} (\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Подстановка даёт

$$|\mathfrak{J}(u, v)| \leq \varepsilon \left(\frac{2(1 + \varepsilon)}{1 - \varepsilon} + 2 \right) (\|u\|^2 + \|v\|^2) = \frac{4\varepsilon}{1 - \varepsilon} (\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

■

7.4. Нормированная версия

Полезно выделить масштабно-инвариантную величину

$$j(X) := \sup_{(u, v) \neq (0, 0)} \frac{|\mathfrak{J}(u, v)|}{\|u\|^2 + \|v\|^2}.$$

Тогда теорема 7.4 немедленно даёт:

Следствие 7.5. При гипотезах теоремы 7.2

$$j(X) \leq \frac{4\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Доказательство. Нужно просто взять супремум в оценке теоремы 7.4. ■

7.5. Следствие для изоморфической части проблемы

Из предыдущего раздела немедленно следует редукция изоморфической части rotation problem к асимптотическому контролю оболочки.

Следствие 7.6 (Асимптотическая версия). Пусть $(X_n, \|\cdot\|_n)$ — последовательность банаховых пространств, на каждом из которых квадрат нормы C^2 вне нуля. Предположим, что существуют билинейные формы $B^{(n)}$ и числа $\varepsilon_n \downarrow 0$ такие, что

$$\sup_{x \in S_{X_n}} \|B_x^{(n)} - B^{(n)}\|_{\text{op}} \leq \varepsilon_n.$$

Тогда

$$d_{\text{BM}}(X_n, H_{B^{(n)}}) \rightarrow 1.$$

Доказательство. Это непосредственное следствие оценки

$$d_{\text{BM}}(X_n, H_{B^{(n)}}) \leq \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_n}{1 - \varepsilon_n}}$$

из теоремы 7.2. ■

Именно в такой форме синтетический транспорт может оказаться особенно полезен: если внутренняя JKO/Sinkhorn-подобная регуляризация или иная low-level эволюция сжимает осцилляцию оболочек, то уже не обязательно получать точную константность сразу; достаточно показать сходимость $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

7.6. Осцилляция как расстояние до единственной формы

Из определения очевидно, что $\text{osc}(B_\bullet) = 0$ эквивалентно точной гильбертовости. Но полезно подчеркнуть ещё одну черту.

Предложение 7.7. *Если $\text{osc}(B_\bullet) < 1$, то существует единственная с точностью до $O(\text{osc}(B_\bullet))$ глобальная билинейная форма, аппроксимирующая поле оболочек, и любая такая форма порождает гильбертову норму, эквивалентную исходной. Доказательство.* Существование следует из определения инфимума: для любого $\eta > 0$ найдётся B с

$$\sup_{x \in S_X} \|B_x - B\|_{\text{op}} \leq \text{osc}(B_\bullet) + \eta.$$

Если $\text{osc}(B_\bullet) + \eta < 1$, то теорема 7.2 применима. Если B и B' — две такие формы с параметрами $\varepsilon, \varepsilon'$, то для каждого $u \neq 0$ и $x = u/\|u\|$ имеем

$$|(B - B')(u, u)| \leq |(B - B_x)(u, u)| + |(B' - B_x)(u, u)| \leq (\varepsilon + \varepsilon') \|u\|^2.$$

Следовательно,

$$\|B - B'\|_{\text{op}} \leq \varepsilon + \varepsilon',$$

что и выражает единственность с точностью до ошибки порядка $\text{osc}(B_\bullet)$. ■

7.7. Квантитативная внутренняя программа

Количественный раздел делает возможной более мягкую, но всё ещё достаточную синтетическую программу. Чтобы закрыть исходную задачу, достаточно любого из двух сценариев:

- (а) *точный сценарий:* доказать внутренне, что $\tilde{B}_x$ не зависит от x ;
- (б) *асимптотический сценарий:* построить семейство внутренних регуляризаций $\tilde{B}_x^{(\alpha)}$, для которых

$$\sup_{x \in \tilde{S}} \|\tilde{B}_x^{(\alpha)} - \tilde{B}^{(\alpha)}\|_{\text{op}} \rightarrow 0$$

при $\alpha \rightarrow \infty$ и затем корректно экстрагировать наружу.

С математической точки зрения второй сценарий, возможно, реалистичнее: он допускает использование transport/entropy методов, которые естественнее сжимают дефекты, чем зануляют их мгновенно.

8. Аменабельное усреднение одной оболочки

Одним из самых плодотворных классических наблюдений о проблеме вращений Мазура является связь изометрической части с топологической аменабельностью группы изометрий. В известных работах этот мост обычно применяется, когда пространство уже известно как эквивалентная ренормировка гильбертова пространства: тогда можно усреднить внешний скалярный продукт. Этот раздел показывает, что для оболочечного подхода достаточно гораздо более слабого входа: коэрцитивности одной гессиановой оболочки.

8.1. Функции левого равномерного непрерывного типа

Пусть G — топологическая группа. Обозначим через $\text{LUC}(G)$ банахово пространство ограниченных лево-равномерно непрерывных функций $f : G \rightarrow \mathbf{R}$. Напомним, что f называется лево-равномерно непрерывной, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность единицы $V \subset G$ такая, что

$$g^{-1}h \in V \implies |f(g) - f(h)| < \varepsilon.$$

Определение 8.1. Группа G называется *топологически аменабельной*, если на $\text{LUC}(G)$ существует левый инвариантный средний, то есть линейный функционал

$$\mu : \text{LUC}(G) \rightarrow \mathbf{R}$$

такой, что

- (i) $\mu(1) = 1$;
- (ii) $f \geq 0 \implies \mu(f) \geq 0$;
- (iii) $\mu(L_g f) = \mu(f)$ для всех $g \in G$, где $(L_g f)(h) = f(g^{-1}h)$.

8.2. Главная идея усреднения

Пусть $x_0 \in S_X$ и форма B_{x_0} коэрцитивна. Тогда для любых $u, v \in X$ можно рассмотреть функцию

$$f_{u,v}(g) := B_{x_0}(g^{-1}u, g^{-1}v), \quad g \in G.$$

Если эта функция принадлежит $\text{LUC}(G)$, а G аменабельна, то можно определить

$$\overline{B}(u, v) := \mu(f_{u,v}).$$

Это естественный кандидат на глобальную G -инвариантную билинейную форму. Ниже мы покажем, что при коэрцитивности B_{x_0} этот кандидат не только корректен, но и уже порождает точную исходную норму.

8.3. Лево-равномерная непрерывность функций усреднения

Лемма 8.2. Пусть $B_0 \in \text{Sym}^2(X^*)$ — ограниченная билинейная форма на банаховом пространстве X , а $G = \text{Isom}(X)$ снабжена SOT. Тогда для любых $u, v \in X$ функция

$$f_{u,v}(g) = B_0(g^{-1}u, g^{-1}v)$$

принадлежит $\text{LUC}(G)$. **Доказательство.** Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим $M = \|B_0\|_{\text{op}}$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$M\delta(\|u\| + \|v\|) < \varepsilon.$$

Рассмотрим SOT-окрестность единицы

$$V := \{T \in G : \|Tu - u\| < \delta, \|Tv - v\| < \delta\}.$$

Если $g^{-1}h \in V$, то

$$\|g^{-1}u - h^{-1}u\| < \delta, \quad \|g^{-1}v - h^{-1}v\| < \delta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |f_{u,v}(g) - f_{u,v}(h)| &= |B_0(g^{-1}u, g^{-1}v) - B_0(h^{-1}u, h^{-1}v)| \\ &\leq |B_0(g^{-1}u - h^{-1}u, g^{-1}v)| + |B_0(h^{-1}u, g^{-1}v - h^{-1}v)| \end{aligned}$$

$$\leq M\delta \|v\| + M \|u\| \delta < \varepsilon,$$

так как изометрии сохраняют нормы. ■

8.4. Коэффициентно-алгебраический критерий усреднения

Ключевое наблюдение состоит в том, что в доказательстве аменабельного критерия используются не специальные свойства всей алгебры $\text{LUC}(G)$, а лишь существование инвариантного среднего на той левоинвариантной коэффициентной системе, которую порождает одна оболочка.

Определение 8.3 (Средне-допустимый коэффициентный класс). Пусть G — топологическая группа. Будем говорить, что унитарная линейная подпространственная алгебра

$$\mathcal{A} \subset \text{LUC}(G)$$

допускает усреднение, если:

- (i) $\mathcal{A}$ инвариантна относительно левых сдвигов L_g ;
- (ii) на $\mathcal{A}$ существует левый инвариантный средний.

Теорема 8.4 (Коэффициентно-алгебраический критерий усреднения). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство. Предположим, что

- (i) $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$;
- (ii) для некоторой точки $x_0 \in S_X$ оболочка B_{x_0} коэрцитивна на всём X , то есть существуют $0 < c \leq C < \infty$ такие, что

$$c \|u\|^2 \leq B_{x_0}(u, u) \leq C \|u\|^2 \quad (u \in X);$$

- (iii) существует допускающий усреднение класс $\mathcal{A} \subset \text{LUC}(G)$, где $G = \text{Isom}(X)$, такой, что для всех $u, v \in X$ функция

$$f_{u,v}(g) := B_{x_0}(g^{-1}u, g^{-1}v)$$

принадлежит $\mathcal{A}$.

Тогда X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** Пусть $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}$ — левый инвариантный средний. Определим

$$\overline{B}(u, v) := \mu(f_{u,v}), \quad u, v \in X.$$

Линейность и симметрия $\overline{B}$ следуют из линейности среднего и симметрии B_{x_0} . Ограниченность вытекает из оценки

$$|f_{u,v}(g)| \leq \|B_{x_0}\|_{\text{op}} \|u\| \|v\| \quad (g \in G).$$

Для $a \in G$ имеем

$$\overline{B}(au, av) = \mu(g \mapsto B_{x_0}(g^{-1}au, g^{-1}av)) = \mu(g \mapsto f_{u,v}(a^{-1}g)) = \mu(L_a f_{u,v}) = \mu(f_{u,v}) = \overline{B}(u, v),$$

так что $\overline{B}$ G -инвариантна.

Далее, по коэрцитивности B_{x_0} для каждого $g \in G$ выполнено

$$c \|u\|^2 \leq B_{x_0}(g^{-1}u, g^{-1}u) \leq C \|u\|^2.$$

Поскольку μ положителен, получаем

$$c \|u\|^2 \leq \overline{B}(u, u) \leq C \|u\|^2 \quad (u \in X).$$

Следовательно, $\overline{B}$ — положительно определённая симметрическая билинейная форма.

Остаётся нормировка. Так как $\overline{B}$ G -инвариантна, функция $x \mapsto \overline{B}(x, x)$ постоянна на S_X по транзитивности; обозначим её значение через $\lambda > 0$. Тогда для любого $u \neq 0$ и $x = u / \|u\|$ имеем

$$\overline{B}(u, u) = \|u\|^2 \overline{B}(x, x) = \lambda \|u\|^2.$$

После деления на λ получаем скалярное произведение, индуцирующее исходную норму. ■

8.5. Критерий усреднения по одной коэрцитивной оболочке

Аменабельный случай получается из теоремы 8.4 подстановкой $\mathcal{A} = \text{LUC}(G)$.

Теорема 8.5 (Критерий аменабельного усреднения). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство. Предположим, что

- (i) $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$;
- (ii) $G = \text{Isom}(X)$ топологически аменабельна в SOT;
- (iii) для некоторой точки $x_0 \in S_X$ оболочка B_{x_0} коэрцитивна на всём X , то есть существуют $0 < c \leq C < \infty$ такие, что

$$c \|u\|^2 \leq B_{x_0}(u, u) \leq C \|u\|^2 \quad (u \in X).$$

Тогда X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** По лемме 8.2 все коэффициенты

$$f_{u,v}(g) = B_{x_0}(g^{-1}u, g^{-1}v)$$

принадлежат $\text{LUC}(G)$. Так как G топологически аменабельна, на $\text{LUC}(G)$ существует левый инвариантный средний. Следовательно, все гипотезы теоремы 8.4 выполнены для $\mathcal{A} = \text{LUC}(G)$, и её заключение даёт требуемую гильбертовость пространства X . ■

Следствие 8.6 (Weakly almost periodic оболочечный критерий). Пусть выполнены гипотезы теоремы 8.4, кроме пункта (iii). Предположим, что для всех $u, v \in X$ коэффициентные функции

$$f_{u,v}(g) = B_{x_0}(g^{-1}u, g^{-1}v)$$

принадлежат $\text{WAP}(G)$. Тогда X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** По классической теории weakly almost periodic функций пространство $\text{WAP}(G)$ допускает левый инвариантный средний [15, 16]. Поэтому теорема 8.4 применима к $\mathcal{A} = \text{WAP}(G)$. ■

Замечание 8.7. Тот же механизм работает для любой левоинвариантной унитарной подалгебры $\mathcal{A} \subset \text{LUC}(G)$, допускающей инвариантный средний. В частности, вместо $\text{WAP}(G)$ можно использовать и более широкие коэффициентные классы типа $\text{Asp}(G)$, когда удаётся показать, что оболочечные коэффициенты лежат в них [13].

Предложение 8.8 (Коэффициенты рефлексивного изометрического представления лежат в $\text{WAP}(G)$). Пусть $\pi : G \rightarrow \text{Isom}(F)$ — сильно непрерывное изометрическое представление топологической группы G на рефлексивном банаховом пространстве F . Тогда для любых $b \in F$ и $\psi \in F^*$ функция

$$g \mapsto \psi(\pi(g)b)$$

принадлежит $\text{WAP}(G)$. **Доказательство.** Определим ограниченный линейный оператор

$$J : F^* \rightarrow C_b(G), \quad J(\eta)(g) := \eta(\pi(g)b).$$

Ограниченность очевидна:

$$\|J(\eta)\|_\infty \leq \|\eta\| \|b\|,$$

так как $\pi(g)$ — изометрия. Для функции $f(g) := \psi(\pi(g)b)$ и любого $h \in G$ имеем

$$L_h f(g) = f(h^{-1}g) = \psi(\pi(h^{-1}g)b) = (\pi(h^{-1})^* \psi)(\pi(g)b) = J(\pi(h^{-1})^* \psi)(g).$$

Поскольку F рефлексивно, рефлексивно и F^* . Следовательно, ограниченная орбита

$$\{\pi(h^{-1})^* \psi : h \in G\} \subset F^*$$

относительно слабо компактна. Ограниченный линейный оператор J переводит относительно слабокомпактные множества в относительно слабокомпактные множества. Поэтому орбита

$$\{L_h f : h \in G\} \subset C_b(G)$$

относительно слабо компактна. По определению это означает, что $f \in \text{WAP}(G)$. ■

Следствие 8.9 (Рефлексивный оболочечный модуль уже достаточен). Пусть выполнены гипотезы теоремы 8.4, кроме пункта (iii). Предположим, что операторно-замкнутая линейная оболочка орбиты $\{T \cdot B_{x_0} : T \in G\}$ в $\text{Sym}^2(X^*)$ рефлексивна. Тогда X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** Обозначим указанное рефлексивное пространство через $F_{\mathcal{H}}(x_0)$ и рассмотрим изометрическое представление

$$\pi : G \rightarrow \text{Isom}(F_{\mathcal{H}}(x_0)), \quad \pi(T)Q := T \cdot Q.$$

Для фиксированных $u, v \in X$ линейный функционал

$$\psi_{u,v} : F_{\mathcal{H}}(x_0) \rightarrow \mathbf{R}, \quad \psi_{u,v}(Q) := Q(u, v),$$

непрерывен, поскольку

$$|\psi_{u,v}(Q)| \leq \|Q\|_{\text{op}} \|u\| \|v\|.$$

Теперь

$$f_{u,v}(g) = B_{x_0}(g^{-1}u, g^{-1}v) = \psi_{u,v}(\pi(g)B_{x_0}),$$

и потому по предложению 8.8 каждая функция $f_{u,v}$ принадлежит $\text{WAP}(G)$. Остаётся применить следствие 8.6. ■

Замечание 8.10. Теорема 8.5 существенно усиливает стандартный аменабельный критерий для ренормировок уже данного гильбертова пространства. Здесь от исходной гильбертовой структуры не требуется ничего. Достаточно, чтобы в одной точке сферы гессиян квадрата нормы уже контролировал всю норму, а группа изометрий была топологически аменабельна.

8.6. Интерпретация через representation-theoretic obstruction

С точки зрения раздела 6 теорема 8.5 говорит следующее. Коэрцитивность одной оболочки B_{x_0} помещает её в *правильный класс* билинейных форм, достаточно хороший, чтобы его можно было усреднить по аменабельной группе. Усреднение производит элемент $B \in E^G$. Транзитивность затем фиксирует нормировку на сфере и убивает оставшийся скаляр. Иными словами, при наличии коэрцитивности representation-theoretic obstruction исчезает автоматически.

8.7. Где теперь нужно искать коэрцитивность

Теорема 8.5 не решает rotation problem напрямую, потому что коэрцитивность B_{x_0} пока не выводится из обычной транзитивности. Но она делает стратегическую ситуацию намного яснее. Чтобы закрыть задачу через топологическую аменабельность, достаточно решить одну из следующих подзадач:

- (а) доказать, что для всякого сепарабельного транзитивного X группа $\text{Isom}(X)$ топологически аменабельна и хотя бы одна оболочка коэрцитивна;
- (б) доказать коэрцитивность оболочки внутренне в топосе, а аменабельность получить как следствие внутренней когезивной усреднимости;
- (с) заменить аменабельное усреднение transport-усреднением на вероятностном уровне, сохранив инвариантность и коэрцитивность после экстракции.

8.8. Количественная аменабельная версия

В связке с разделом 7 получаем также мягкую количественную форму.

Следствие 8.11. Пусть $G = \text{Isom}(X)$ топологически аменабельна, а для некоторого $x_0 \in S_X$ существует билинейная форма B_0 и число $\varepsilon < 1$ такие, что

$$\|B_{x_0} - B_0\|_{\text{op}} \leq \varepsilon, \quad c \|u\|^2 \leq B_0(u, u) \leq C \|u\|^2.$$

Тогда существует G -инвариантная билинейная форма $\bar{B}$ такая, что

$$c(1 - \varepsilon) \|u\|^2 \leq \bar{B}(u, u) \leq C(1 + \varepsilon) \|u\|^2.$$

Доказательство. Нужно усреднить B_0 вместо точной оболочки B_{x_0} . Оценки сохраняются, поскольку ошибка не превосходит $\varepsilon \|u\|^2$ для каждого квадратичного значения. ■

Это следствие особенно полезно в синтетической перспективе: если внутренний транспортный или Репоп-механизм способен аппроксимировать коэрцитивную оболочку, то можно сначала получить изоморфическую близость к гильбертову пространству и лишь затем пытаться улучшить её до точной изометрии.

9. Геометрическая экстракция точных и количественных утверждений

В этом разделе мы формализуем, как внутренние оболочечные тождества переходят во внешний мир. Именно здесь синтетическая часть статьи становится честной: вместо общих рассуждений о «консервативности» мы выписываем точные типы формул, которые нужно уметь экстрагировать.

9.1. Внутренние данные

Пусть выполнена гипотеза 4.1. Рассмотрим внешнее банахово пространство X и его внутренний подъём $\tilde{X} \in \mathcal{E}$ вместе с внутренней нормой $\|\cdot\|$. Пусть

$$\tilde{N} : \tilde{X} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad \tilde{N}(x) = \|x\|^2,$$

внутренне C^2 . Тогда имеем внутреннюю оболочку

$$\tilde{B}_x := \frac{1}{2} \text{Hess}_x \tilde{N}.$$

Рассуждения разделов 5–7 формально повторяются во внутреннем языке, пока используются только:

- (i) линейность;
- (ii) 2-однородность квадрата нормы;
- (iii) существование второй производной;
- (iv) эквивариантность относительно внутренних изометрий;
- (v) элементарные алгебраические преобразования.

Следовательно, все точные и количественные теоремы обладают внутренними версиями. Настоящий вопрос состоит в том, когда они дают внешние заключения о X .

9.2. Точное внутреннее параллелограммное тождество

Теорема 9.1 (Точная геометрическая экстракция). *Предположим, что внутри $\mathcal{E}$ существует симметрическая билинейная форма*

$$\tilde{B} : \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \mathbf{R}$$

такая, что

$$\tilde{B}_x = \tilde{B} \quad \text{для всех } x \in \tilde{S} := \{x \in \tilde{X} : \|x\| = 1\}.$$

Тогда внешняя норма на X удовлетворяет тождеству параллелограмма, а значит X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** Во внутреннем языке теорема 5.7 даёт

$$\forall u \in \tilde{X} \quad \|u\|^2 = \tilde{B}(u, u).$$

Следовательно, внутренне верно и тождество

$$\forall u, v \in \tilde{X} \quad \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Это высказывание геометрично: оно содержит только конечное число кванторов по внутреннему линейному объекту, равенства, сложение и умножение в $\mathbf{R}$. По гипотезе хорошей адаптации и сохранению конечных пределов функтором Γ получаем внешнее тождество на глобальных точках X . По теореме Жордана–фон Неймана внешняя норма порождена скалярным произведением. ■

9.3. Количественная экстракция

Для практических синтетических приложений ещё важнее количественная форма, поскольку transport- или Ренон-методы естественно дают оценки, а не моментальные точные тождества.

Теорема 9.2 (Количественная геометрическая экстракция). *Предположим, что внутри $\mathcal{E}$ существуют симметрическая билинейная форма $\tilde{B}$ и число $\varepsilon \in \mathbf{R}$ с $0 \leq \varepsilon < 1$ такие, что*

$$\forall x \in \tilde{S} \quad \left\| \tilde{B}_x - \tilde{B} \right\|_{\text{op}} \leq \varepsilon,$$

причём эта оценка геометрически корректно экстрагируется наружу. Тогда внешнее пространство X линейно изоморфно гильбертову пространству, и

$$d_{\text{BM}}(X, H_B) \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

для внешней билинейной формы $B := \Gamma(\tilde{B})$. **Доказательство.** Во внутреннем языке теорема 7.2 даёт

$$(1 - \varepsilon)\|u\|^2 \leq \tilde{B}(u, u) \leq (1 + \varepsilon)\|u\|^2.$$

Это снова формула геометрического характера. После применения Γ получаем

$$(1 - \varepsilon) \|u\|^2 \leq B(u, u) \leq (1 + \varepsilon) \|u\|^2$$

для всех внешних $u \in X$. Далее используется внешний вывод теоремы 7.2. ■

Замечание 9.3. Теорема 9.2 особенно важна концептуально: она показывает, что синтетическая программа не обязана сразу производить *точное* скалярное произведение. Достаточно получить внутренний контроль осцилляции оболочек. Это гораздо правдоподобнее для transport/entropy механизмов.

9.4. Экстракция через representation-theoretic obstruction

Внутренне можно сформулировать и representation-theoretic obstruction:

$$\widetilde{\mathfrak{Ob}}(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \text{Sym}^2(\tilde{X}^*)^{\tilde{H}} / \text{Sym}^2(\tilde{X}^*)^{\tilde{G}}.$$

Если внутренний класс $[\tilde{B}_{\tilde{x}_0}]$ равен нулю, то по внутренней версии теоремы 6.4 поле оболочек постоянно. Следовательно, по теореме 9.1 внешнее пространство гильбертово. Итак, достаточно доказать *внутреннее* исчезновение препятствия.

С методологической точки зрения это переводит проблему в следующую форму:

почему в хорошо адаптированной гладкой модели внутренний H -инвариантный второй порядок автоматически становится внутренне G -инвариантным?

Именно на этот вопрос должны отвечать будущие Renon- и transport-механизмы.

9.5. Что может пойти не так

Важно перечислить и возможные точки отказа экстракции.

- (1) Внутренний объект $\tilde{X}$ может быть недостаточно хорошо связан с внешним X : тогда глобальные точки не отражают нужную часть внутренней геометрии.
- (2) Внутренняя оценка на оболочки может быть выражена через негеометрические кванторы или через внутренние объекты, плохо сохраняемые Γ .
- (3) Внутреннее скалярное произведение может существовать лишь на более широком классе «виртуальных точек», чем глобальные сечения.
- (4) В бесконечномерном случае может не хватить аксиоматического контроля над внутренними непрерывными билинейными формами.

Поэтому в настоящей работе мы настойчиво отделяем теоремы *формата экстракции* от теорем *существования внутренней формы*. Первые уже вполне формализуемы; вторые и содержат реальную математическую трудность.

9.6. Стабильность относительно регуляризаций

Пусть $\tilde{B}^{(\alpha)}$ — семейство внутренних форм, приближающих поле оболочек с ошибкой $\varepsilon_\alpha \rightarrow 0$. Если все оценки экстрагируются равномерно, то по теореме 9.2 внешние пространства X оказываются всё ближе к гильбертовым нормам. Если дополнительно есть компактность в пространстве эквивалентных норм или какой-либо модуль устойчивости, можно надеяться на предельный переход к точной изометрии.

Мы намеренно оставляем этот шаг открытым, но подчёркиваем: он переводит синтетический транспортный подход в строгий аналитический вопрос о сходимости регуляризованных оболочек.

10. Локальная теория оболочек: непрерывность, плотные множества, открытые области коэрцитивности

Хотя главные оболочечные теоремы формулируются глобально, их практическое использование требует локальных фактов: непрерывности поля, устойчивости коэрцитивности и возможности проверять свойства на плотных множествах. Все эти утверждения элементарны, но они играют важную роль при попытке применить к задаче Baire-категориальные, Baire- и transport-методы.

10.1. Непрерывность поля оболочек

Лемма 10.1 (Непрерывность). Если $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, то отображение

$$S_X \rightarrow \text{Sym}^2(X^*), \quad x \mapsto B_x$$

непрерывно в операторной норме. **Доказательство.** По предположению D^2N непрерывно на $X \setminus \{0\}$ в норме непрерывных билинейных форм. Ограничение на замкнутую подмножество $S_X \subset X \setminus \{0\}$ остаётся непрерывным. Деление на 2 роли не играет. ■

Непрерывность сразу даёт простое, но полезное следствие.

Следствие 10.2. Если поле оболочек постоянно на плотном подмножестве $A \subset S_X$, то оно постоянно на всей сфере. **Доказательство.** Пусть $B_x = B$ для всех $x \in A$. По непрерывности и плотности A то же верно для всех точек из $\text{cl } A = S_X$. Затем применяем теорему 5.7. ■

10.2. Открытость коэрцитивной области

Для $x \in S_X$ положим

$$m(x) := \inf_{\|u\|=1} B_x(u, u), \quad M(x) := \sup_{\|u\|=1} B_x(u, u).$$

Тогда B_x коэрцитивна тогда и только тогда, когда $m(x) > 0$ и $M(x) < \infty$.

Лемма 10.3. Функции $x \mapsto m(x)$ и $x \mapsto M(x)$ полунепрерывны соответственно снизу и сверху на S_X . В частности, множество

$$\mathcal{C} := \{x \in S_X : B_x \text{ коэрцитивна на всём } X\}$$

открыто. **Доказательство.** Для каждой фиксированной единичной точки $u \in X$ функция

$$x \mapsto B_x(u, u)$$

непрерывна по лемме 10.1. Тогда m есть инфимум семейства непрерывных функций, а M — супремум такого семейства. Следовательно, m полунепрерывна снизу, а M сверху. Если в точке x_0 выполнено $m(x_0) > 0$ и $M(x_0) < \infty$, то те же строгие неравенства сохраняются в некоторой окрестности x_0 . ■

Замечание 10.4. В транзитивном случае открытость множества $\mathcal{C}$ немедленно усиливается: если $\mathcal{C}$ непусто, то по эквивариантности и транзитивности $\mathcal{C} = S_X$. Иными словами, коэрцитивность одной оболочки автоматически влечёт коэрцитивность всех оболочек с теми же константами. Это ещё раз показывает, почему в теореме 8.5 достаточно одной точки.

10.3. Транзитивность превращает локальные константы в глобальные

Предложение 10.5. Пусть X транзитивно. Тогда функции $m(x)$ и $M(x)$, определённые выше, постоянны на сфере. **Доказательство.** Если $y = Tx$, то по эквивариантности

$$B_y(u, u) = B_x(T^{-1}u, T^{-1}u).$$

Поскольку T изометрия,

$$\inf_{\|u\|=1} B_y(u, u) = \inf_{\|w\|=1} B_x(w, w) = m(x),$$

и аналогично $M(y) = M(x)$. По транзитивности m и M постоянны. ■

Следствие 10.6. Если X транзитивно и для одной точки $x_0 \in S_X$ оболочка B_{x_0} коэрцитивна, то все оболочки коэрцитивны с теми же константами. **Доказательство.** Это немедленно следует из предложения 10.5. ■

10.4. Локальный контроль осцилляции

Пусть

$$\omega(r) := \sup\{\|B_x - B_y\|_{\text{op}} : x, y \in S_X, \|x - y\| \leq r\}.$$

Тогда непрерывность поля оболочек эквивалентна тому, что $\omega(r) \rightarrow 0$ при $r \downarrow 0$. В сочетании с SOT-микротранзитивностью это даёт ещё один полезный переход.

Предложение 10.7. Пусть X сепарабельно и транзитивно. Тогда для каждого $x_0 \in S_X$ и каждой окрестности U точки x_0 на сфере величина

$$\sup_{x \in U} \|B_x - B_{x_0}\|_{\text{op}}$$

может быть сделана сколь угодно малой, если U достаточно мала. Более того, это свойство переносится на окрестности любой другой точки сферы действием изометрий. **Доказательство.** Первая часть есть просто непрерывность. Для второй, если $y_0 = Tx_0$, то

$$\|B_{Ty} - B_{y_0}\|_{\text{op}} = \|T^{-*}(B_y - B_{x_0})T^{-1}\|_{\text{op}} = \|B_y - B_{x_0}\|_{\text{op}},$$

так как T — изометрия. Следовательно, локальный модуль непрерывности один и тот же во всех точках сферы. ■

10.5. Проверка точной константности на малом наборе орбит

Следующее утверждение может оказаться полезным в комбинации с дескриптивными и Fraïssé-методами.

Предложение 10.8. Пусть $A \subset S_X$ таково, что для всякого $x \in S_X$ пересечение $A \cap U$ непусто в любой окрестности U точки x . Если существует форма $B \in \text{Sym}^2(X^*)$, для которой

$$B_x = B \quad (x \in A),$$

то X гильбертово. **Доказательство.** Условие на A означает плотность в S_X . Теперь применяем следствие 10.2. ■

Следствие 10.9 (Счётный точный сертификат на плотной орбите). Пусть X — вещественное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, и пусть $\Gamma \leq \text{Isom}(X)$, $x_0 \in S_X$ таковы, что орбита Γx_0 плотна в S_X . Если

$$\gamma \cdot B_{x_0} = B_{x_0} \quad (\gamma \in \Gamma),$$

то X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** Для каждого $\gamma \in \Gamma$ по эквивариантности оболочки имеем

$$B_{\gamma x_0} = \gamma \cdot B_{x_0} = B_{x_0}.$$

Следовательно, поле оболочек постоянно на плотном множестве Γx_0 , и остаётся применить предложение 10.8. ■

Следствие 10.10 (Полишев точный сертификат). Пусть X сепарабельно и транзитивно, $G = \text{Isom}(X)$, $x_0 \in S_X$, а $\Gamma \leq G$ — счётная SOT-плотная подгруппа. Если

$$\gamma \cdot B_{x_0} = B_{x_0} \quad (\gamma \in \Gamma),$$

то X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** Отображение

$$\text{ev}_{x_0} : G \rightarrow S_X, \quad \text{ev}_{x_0}(T) = Tx_0,$$

непрерывно в SOT. Поэтому

$$S_X = Gx_0 = \text{ev}_{x_0}(G) = \text{ev}_{x_0}(\overline{\Gamma}^{\text{SOT}}) \subset \overline{\text{ev}_{x_0}(\Gamma)} = \overline{\Gamma x_0},$$

то есть орбита Γx_0 плотна в S_X . Теперь применяем следствие 10.9. ■

Замечание 10.11. Следствия 10.9 и 10.10 показывают, что для *точного* замыкания second-order части задачи достаточно счётного сертификата: нужно проверить инвариантность одной оболочки лишь на плотной орбите или даже на счётной SOT-плотной подгруппе. Это особенно хорошо согласуется с дескриптивными, Fraïssé- и Polish-group методами, где естественные данные часто изначально счётны.

Это утверждение кажется тривиальным, но оно важно методологически: для замыкания задачи не обязательно контролировать оболочки на всех точках сразу. Достаточно найти достаточно богатый плотный класс точек, на котором оболочка уже стабилизировалась. Внутри SDG естественными кандидатами на такой класс могут оказаться *микролинейно-типичные* точки или точки, выделяемые measure/valuation-методами как «почти всюду регулярные».

10.6. Тест на коэрцитивность через одну плотную орбиту направлений

Зафиксируем $x_0 \in S_X$ и рассмотрим функцию

$$q_{x_0}(u) := B_{x_0}(u, u), \quad \|u\| = 1.$$

Если множество направлений, на которых q_{x_0} ограничено снизу положительной константой, плотно на сфере S_X , то по непрерывности q_{x_0} та же оценка выполняется везде. В терминах транспорта это означает, что для доказательства коэрцитивности оболочки не обязательно контролировать все направления: достаточно получить положительную нижнюю оценку на плотном наборе направлений.

Предложение 10.12. Пусть $B_0 \in \text{Sym}^2(X^*)$ непрерывна и положительна. Если существует плотное множество $D \subset S_X$ и число $c > 0$ такие, что

$$B_0(u, u) \geq c \quad (u \in D),$$

то

$$B_0(u, u) \geq c \quad (u \in S_X).$$

Доказательство. Функция $u \mapsto B_0(u, u)$ непрерывна на S_X . Неравенство переносится с плотного множества на замыкание. ■

Этот элементарный факт стоит иметь в виду при построении синтетической теории меры: если транспортные методы дают нижнюю кривизну оболочки почти всюду, а «почти всюду» удаётся интерпретировать через плотность носителя в подходящей внутренней топологии, то коэрцитивность может стать следствием чистой непрерывности.

11. Модельные примеры: как оболочка ведёт себя на классических пространствах

Этот раздел служит двум целям. Во-первых, он показывает, что язык оболочек действительно улавливает различие между гильбертовой и негильбертовой геометрией. Во-вторых, он подсказывает, какого типа механизм должен был бы убить препятствие в общей задаче.

11.1. Гильбертово пространство

Пусть $X = H$ — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда

$$N(x) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle,$$

и потому

$$DN(x)[h] = 2 \langle x, h \rangle, \quad D^2N(x)[h, k] = 2 \langle h, k \rangle$$

для всех $x \neq 0$. Следовательно,

$$B_x(h, k) = \langle h, k \rangle$$

не зависит от x . Representation-theoretic obstruction равен нулю, а теоремы 5.7 и 6.4 становятся тавтологиями.

11.2. Пространства L_p и ℓ_p , $1 < p < \infty$

Теперь рассмотрим $X = L_p(\Omega, \mu)$ или $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$. Пусть

$$A(x) := \int |x|^p, \quad N(x) = A(x)^{2/p}.$$

Предположим сначала, что x не обращается в нуль почти всюду, чтобы избежать технических оговорок на уровне поточечной второй производной; итоговая формула затем продолжается стандартным образом на гладкие точки сферы.

Для $\|x\|_p = 1$ имеем $A(x) = 1$, и

$$DA(x)[h] = p \int |x|^{p-2} x h, \quad D^2A(x)[h, k] = p(p-1) \int |x|^{p-2} h k.$$

Применяя формулу производной композиции к $N = A^{2/p}$, получаем

$$D^2N(x)[h, k] = \frac{2}{p} \left(\frac{2}{p} - 1 \right) DA(x)[h] DA(x)[k] + \frac{2}{p} D^2A(x)[h, k]$$

$$= 2(2-p) \left(\int |x|^{p-2} x h \right) \left(\int |x|^{p-2} x k \right) + 2(p-1) \int |x|^{p-2} h k.$$

Следовательно,

$$B_x(h, k) = (2-p) \left(\int |x|^{p-2} x h \right) \left(\int |x|^{p-2} x k \right) + (p-1) \int |x|^{p-2} h k.$$

Так как для единичного x поддерживающий функционал равен

$$\phi_x(h) = \int |x|^{p-2} x h,$$

то на касательной гиперплоскости $H_x = \text{Ker } \phi_x$ получаем особенно простую формулу:

$$Q_x(h, k) = (p-1) \int |x|^{p-2} h k, \quad h, k \in H_x.$$

Предложение 11.1. Если $1 < p < \infty$ и $p \neq 2$, то на L_p и ℓ_p поле оболочек не является постоянным. Более того, уже тангенциальная форма Q_x зависит от точки x . **Доказательство.** Из приведённой формулы видно, что Q_x содержит вес $|x|^{p-2}$. Если $p \neq 2$, то этот вес зависит от x . В частности, на ℓ_p^2 можно взять

$$x_1 = (1, 0), \quad x_2 = (2^{-1/p}, 2^{-1/p}),$$

и проверить, что соответствующие формы на касательных гиперплоскостях имеют разные коэффициенты. Следовательно, Q_x , а значит и B_x , не могут быть независимы от x . ■

Замечание 11.2. Предложение 11.1 не использует транзитивности L_p как таковой; оно показывает нечто более концептуальное. В негильбертовых гладких классических нормах оболочка почти никогда не является глобально постоянной. Значит, если rotation problem когда-нибудь решится положительно, то причина будет заключаться не в «неожиданном алгебраическом совпадении», а в том, что транзитивность каким-то образом запрещает сам механизм, делающий веса вида $|x|^{p-2}$ зависимыми от точки.

11.3. Супремум-норма и Репон-механизм

Рассмотрим теперь пространство $C(K)$ с супремум-нормой. Здесь квадрат нормы, вообще говоря, не принадлежит C^2 вне нуля: если максимум достигается в нескольких точках или меняется при малом возмущении, появляются изломы. С точки зрения настоящей статьи это означает, что классическая оболочка B_x зачастую просто не определена. Именно здесь Репон- и Clarke-подобные конструкции естественны: они должны заменить отсутствующую гладкую оболочку обобщённым first/second order object.

Этот пример показывает, что переход к SDG/SNA не просто «эстетичен». Он реально нужен, если хочется работать с негладкими нормами не теряя дифференциального языка. Однако даже после такой замены остаётся главный вопрос: почему синтетическая оболочка должна стать постоянной, а не просто существующей?

11.4. Конечномерные нормы и усреднение по Хаару

В конечномерной ситуации группа изометрий компактна. Если бы на X была задана какая-либо одна положительно определённая билинейная форма B_0 , то можно было бы усреднить её по мере Хаара:

$$\overline{B}(u, v) = \int_G B_0(g^{-1}u, g^{-1}v) \, d\mu(g).$$

Полученная форма была бы G -инвариантной. Транзитивность на сфере тогда заставила бы её быть пропорциональной исходной норме, и после нормировки мы получили бы евклидовость. Именно так, по сути, и работает классический конечномерный аргумент.

Этот раздел показывает, что в бесконечномерном случае нужно искать замену *не любой* форме B_0 , а именно такой, которая естественно прикреплена к норме. Гессианова оболочка даёт канонический кандидат, но уже не гарантирует компактности группы. Отсюда и возникают две линии дальнейшей программы:

- (a) либо доказать доступность усреднения (аменабельность, transport-mean, valuation-mean);
- (b) либо доказать, что усреднение вообще не нужно, потому что оболочка уже постоянна.

11.5. Негильбертовы гладкие ренормировки

Пусть теперь X — пространство, допускающее гладкую эквивалентную негильбертову норму. Тогда наша теория говорит следующее. У такой нормы почти всегда есть оболочка, но representation-theoretic obstruction не равен нулю. Следовательно, любая попытка построить транзитивную негильбертову норму должна одновременно решить две труднейшие задачи:

- (i) обеспечить чрезвычайно большую группу изометрий;
- (ii) устроить так, чтобы соответствующая H -инвариантная оболочка не происходила от глобально инвариантной формы.

Этот взгляд полезен и в обратную сторону: если когда-либо появится кандидат на контрпример к rotation problem, первым делом стоит вычислить его оболочку и соответствующий класс препятствия.

11.6. Внутренний смысл примеров

Синтетически все рассмотренные примеры читаются следующим образом.

- В гильбертовом случае внутренняя оболочка уже глобальна, и препятствие отсутствует.
- В L_p , $p \neq 2$, внутренняя оболочка должна по-прежнему нести вес $|x|^{p-2}$; следовательно, любой синтетический механизм, убивающий этот вес, был бы по-настоящему нетривиальным и не мог бы быть простой переформулировкой гладкости.
- В супремум-норме Ренон-механизм нужен уже для того, чтобы заменить отсутствующий классический второй порядок. Но после этого остаётся ещё более серьёзный вопрос о глобальном постоянстве.

Эти наблюдения подтверждают, что настоящая трудность rotation problem имеет именно *второпорядочную однородную* природу.

12. Второпорядковая синтетическая программа: Ренон, транспорт и когезивная экстракция

Теперь вернёмся к синтетической линии. Её продуктивность зависит не от общего лозунга о «сглаживании», а от радикального сужения цели: нужно перестать «доказывать всё сразу» и сосредоточиться на трёх конкретных механизмах:

- (i) рождении внутренней оболочки;
- (ii) сжатию её осцилляции;
- (iii) экстракции предельной формы наружу.

12.1. Первый механизм: Репоп-аннигиляция углов

Если исходная внешняя норма негладка, классическая оболочка может вообще не существовать. Тогда первым шагом должна быть SNA-процедура, которая заменяет отсутствие второй производной контролируемым Репоп-объектом.

Гипотеза 12.1 (Репоп-аннигиляция первого порядка). Пусть X — сепарабельное транзитивное банахово пространство, а $\tilde{X}$ — его внутренний подъём в хорошо адаптированном гладком топосе. Тогда для внутренней единичной сферы $\tilde{S}$ локальные Репоп–Clarke субдифференциалы функции радиального отклонения

$$\rho_x(h) := \|x + h\| - 1, \quad h \in \tilde{H}_x,$$

в точке $h = 0$ вырождаются в нуль:

$$\partial_C^P \rho_x(0) = \{0\} \quad (x \in \tilde{S}).$$

Смысл этой гипотезы прост. Если она верна, то на внутренней сфере не остаётся first-order углов: локально сфера уже имеет нулевой первый дефект в тангенциальных направлениях. Это ещё не даёт второй производной, но снимает первый серьёзный барьер к существованию оболочки.

Замечание 12.2. Даже эта гипотеза не должна формулироваться как «в топосе всё сглаживается». Наоборот, её содержание в том, что *транзитивность несовместима с устойчивой Репоп-негладкостью*. Если такой результат будет доказан, он станет первым подлинным аналитическим входом SNA в rotation problem.

12.2. Второй механизм: изотропическая скалярность внутренней оболочки

После того как внутренний второй порядок появился, нужна его сильная симметричная редукция.

Гипотеза 12.3 (Синтетическая изотропическая скалярность). Пусть для некоторой точки $\tilde{x}_0 \in \tilde{S}$ внутренняя изотропическая группа $\tilde{H} = \text{Stab}(\tilde{x}_0)$ действует микролинейно и инфинитезимально неприводимо на касательном объекте $\tilde{H}_0 = \text{Ker } \tilde{\phi}_{\tilde{x}_0}$. Тогда пространство

$$\text{Sym}^2(\tilde{H}_0^*)^{\tilde{H}}$$

одномерно.

Эта гипотеза является внутренней версией предложения 6.10. Если она выполнена, то тангенциальная часть внутренней оболочки в одной точке определяется одним числом. Но одного этого всё ещё недостаточно. Нужно превратить это число в глобально инвариантную форму.

12.3. Третий механизм: transport-сжатие осцилляции оболочек

Именно здесь, по нашему мнению, наиболее естественно возникает синтетический оптимальный транспорт. Вместо того чтобы усреднять точки орбиты, нужно усреднять *локальные модели второго порядка*. Для этого предлагается рассмотреть функционал на пространстве вероятностных законов на сфере.

Определение 12.4. Пусть $\tilde{\nu} \in \text{Prob}(\tilde{S})$ — внутренний закон на сфере, а $\tilde{B}_x$ — внутренняя оболочка. Определим *энергию осцилляции оболочки*

$$\mathcal{E}_{\tilde{H}}(\tilde{\nu}) := \int_{\tilde{S}} \int_{\tilde{S}} \left\| \tilde{B}_x - \tilde{B}_y \right\|_{\text{op}}^2 d\tilde{\nu}(x) d\tilde{\nu}(y).$$

Интуитивно $\mathcal{E}_{\tilde{\nu}}(\tilde{\nu}) = 0$ тогда и только тогда, когда закон $\tilde{\nu}$ поддержан на области, где оболочка постоянна. Если бы существовал канонический G -инвариантный закон на $\tilde{S}$, то условие $\mathcal{E}_{\tilde{\nu}}(\tilde{\nu}) = 0$ означало бы уже точную константность оболочки по транзитивности. В разделе 13 мы докажем точную внешнюю тень этого утверждения: law-level нуль энергии при полной поддержке действительно форсирует точную гильбертовость.

Гипотеза 12.5 (Транспортное сжатие). *Существует внутренний градиентный поток или ЖКО-итерация для функционала $\mathcal{E}_{\tilde{\nu}}$ в метрике $W_{2,P}$, обладающий свойствами:*

- (a) $\mathcal{E}_{\tilde{\nu}}$ displacement-выпукла вдоль $W_{2,P}$ -геодезик;
- (b) любой инвариантный предел потока минимизирует $\mathcal{E}_{\tilde{\nu}}$;
- (c) минимальное значение равно нулю.

Если бы эта гипотеза была доказана, внутренняя оболочка стала бы постоянной на носителе предельного инвариантного закона. Далее либо поддержка должна была бы оказаться всей сферой по транзитивности, либо по крайней мере плотной, после чего можно использовать следствие 10.2.

12.4. Закон уровня вместо подтерминальности

В прежних topos-theoretic descent-схемах ключевая трудность глобальной экстракции состояла в гипотезе о подтерминальности или уникальности $\arg\min$. Для rotation problem law-level подход обещает более естественную замену. Нам не нужно извлекать точку, нам нужно извлечь форму. Вероятностный уровень здесь может играть роль регуляризатора, а не препятствия.

Программа 12.6 (Law-level стратегия). 1. Поднять сферу $\tilde{S}$ и поле оболочек $\tilde{B}_x$ в пространство вероятностных valuation-объектов.

- 2. Рассмотреть эволюцию законов $\tilde{\nu}_t$ под действием потока, уменьшающего $\mathcal{E}_{\tilde{\nu}}$.
- 3. Доказать существование инвариантного предельного закона $\tilde{\nu}_{\infty}$.
- 4. Показать, что $\mathcal{E}_{\tilde{\nu}}(\tilde{\nu}_{\infty}) = 0$.
- 5. Экстрагировать наружу либо точную форму, либо количественную малость осцилляции.

Такая стратегия гораздо лучше согласуется с вариационно-транспортной логикой всей программы усреднения, чем попытка напрямую переносить старую гипотезу подтерминальности для $\arg\min$.

12.5. Синтетический метатеоремный пакет

Теперь можно собрать формальный пакет, который действительно закрывал бы rotation problem.

Теорема 12.7 (Метатеорема о замыкании программы). *Предположим, что для всякого сепарабельного транзитивного банахова пространства X выполняются следующие утверждения.*

- (M1) В хорошо адаптированной модели существует внутренний подъём $\tilde{X}$, для которого квадрат нормы допускает внутреннюю оболочку $\tilde{B}_x$ на всей внутренней сфере.
- (M2) Внутренний representation-theoretic obstruction для оболочки нулевой:

$$[\tilde{B}_{\tilde{x}_0}] = 0 \quad \text{в} \quad \text{Sym}^2(\tilde{X}^*)^{\tilde{H}} / \text{Sym}^2(\tilde{X}^*)^{\tilde{G}}.$$

- (M3) Полученное внутреннее постоянство оболочки геометрически экстрагируется наружу через Γ .

Тогда всякое сепарабельное транзитивное банахово пространство линейно изометрично гильбертову. **Доказательство.** По (M2) и внутренней версии теоремы 6.4 внутренняя оболочка постоянна. Тогда по внутренней версии теоремы 5.7 внутренний квадрат нормы квадратичен. По (M3) это экстрагируется наружу; далее применяется внешняя теорема Жордана–фон Неймана. ■

Теорема 12.7 намеренно проста. Её смысл не в глубине, а в *точности*. Она показывает, что вся гигантская SDG-программа, если говорить честно, должна закончиться доказательством нулевости одного очень конкретного внутреннего класса препятствия.

12.6. Количественная метатеорема

Аналогично формулируется мягкая версия.

Теорема 12.8 (Количественная метатеорема). *Предположим, что для каждого сепарабельного транзитивного банахова пространства X и каждого $\eta > 0$ в хорошо адаптированной модели существует внутренняя билинейная форма $\tilde{B}^{(\eta)}$ такая, что*

$$\sup_{x \in \tilde{S}} \left\| \tilde{B}_x - \tilde{B}^{(\eta)} \right\|_{\text{op}} \leq \eta,$$

*и эта оценка экстрагируется наружу. Тогда X изоморфно гильбертову пространству. Более того, если $\eta \rightarrow 0$, то получаем асимптотически точную гильбертовость. **Доказательство.** Это прямое следствие теоремы 9.2 и corollaria 7.6. ■*

12.7. Почему transport-подход правдоподобен

Здесь стоит сформулировать, почему именно transport-методы кажутся наиболее подходящими для сжатия осцилляции.

- (1) Осцилляция оболочек — квадратичный по формам объект; Wasserstein-геометрия естественна для квадратичных функционалов.
- (2) Инвариантные меры на орбитах в бесконечной размерности трудно строить точно, но на уровне законов они возникают как фиксированные точки вероятностной динамики существенно естественнее.
- (3) ЖКО-подход и энтропийные регуляризации хорошо умеют превращать локальные convexity inputs в глобальные limiting objects.
- (4) В отличие от усреднения по топологической группе, transport-подход не требует заранее аменабельности классической группы изометрий.

Иными словами, транспорт здесь важен не как модная надстройка, а как возможный *заместитель усреднения*, доступный в тех ситуациях, где классическая теория топологических групп слишком жёстка.

12.8. Почему одной гладкости недостаточно даже в синтетике

Необходимо ещё раз подчеркнуть: даже если внутри топоса каждая функция «автоматически гладка», отсюда не следует малость $\mathcal{E}_{\tilde{S}}$. Гладкость даёт существование оболочки, но не её постоянство. Поэтому любое настоящее синтетическое продвижение должно доказывать либо *изотропическую жёсткость*, либо *вариационное сжатие* оболочки. Без этого SDG остаётся лишь языком, а не механизмом решения.

13. Инвариантные законы на сфере и барицентрические критерии

Предыдущий раздел сформулировал transport/valuation-программу на языке законов на сфере и энергии $\mathcal{E}_5$. Прежде чем требовать от синтетической машины ЖКО-диссипации или Репон–Wasserstein-геометрии, полезно зафиксировать её уже вполне классическую тень: какие именно утверждения о вероятностных законах на S_X были бы *достаточны* для точного вывода гильбертовости? Настоящий раздел отвечает на этот вопрос. Все результаты ниже являются полностью внешними и не используют внутреннюю логику топоса; однако они точно указывают, что именно должна производить law-level часть общей программы.

13.1. Инвариантные законы и усреднение оболочек

Пусть $G = \text{Isom}(X)$.

Определение 13.1. Борелевская вероятность ν на сфере S_X называется G -инвариантным законом, если

$$\nu(TA) = \nu(A)$$

для всякого борелевского множества $A \subseteq S_X$ и всякой изометрии $T \in G$.

Лемма 13.2. Пусть X транзитивно и ν — G -инвариантный закон на S_X . Тогда $\text{supp } \nu = S_X$. **Доказательство.** Поддержка $\text{supp } \nu$ есть непустое замкнутое множество. Из G -инвариантности ν следует $T(\text{supp } \nu) = \text{supp } \nu$ для всех $T \in G$, то есть $\text{supp } \nu$ является замкнутым G -инвариантным подмножеством сферы. По транзитивности действие G на S_X имеет лишь два замкнутых инвариантных подмножества: $\emptyset$ и всю сферу. Следовательно, $\text{supp } \nu = S_X$. ■

Следующий результат можно понимать как countably additive и sphere-level аналог теоремы 8.5: вместо инвариантного среднего на группе мы используем уже готовый инвариантный закон на сфере.

Предложение 13.3 (Барицентр оболочек и эквивариантность закона). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство, $G = \text{Isom}(X)$ и $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$. Тогда для всякой борелевской вероятности ν на S_X форма

$$Q_\nu(u, v) := \int_{S_X} B_x(u, v) \, d\nu(x)$$

корректно определена, симметрична, положительна и принадлежит $\text{Sym}^2(X^*)$. Более того, для всякого $T \in G$ выполнено

$$Q_{T\# \nu} = T \cdot Q_\nu, \quad (T \cdot Q_\nu)(u, v) := Q_\nu(T^{-1}u, T^{-1}v).$$

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in S_X$. Для любой точки $x \in S_X$ по транзитивности существует $T \in G$ с $Tx_0 = x$. По лемме 5.6

$$B_x(u, v) = B_{Tx_0}(u, v) = B_{x_0}(T^{-1}u, T^{-1}v),$$

и потому

$$|B_x(u, v)| \leq \|B_{x_0}\|_{\text{op}} \|u\| \|v\|.$$

Значит, функция $x \mapsto B_x(u, v)$ ограничена и борелевски измерима на сфере (по лемме 10.1), так что интеграл, задающий $Q_\nu(u, v)$, корректен. Симметрия и билинейность следуют из тех же свойств каждой формы B_x , а положительность — из леммы 5.4.

Пусть теперь $T \in G$. Тогда для $u, v \in X$

$$\begin{aligned} (T \cdot Q_\nu)(u, v) &= Q_\nu(T^{-1}u, T^{-1}v) = \int_{S_X} B_x(T^{-1}u, T^{-1}v) \, d\nu(x) \\ &= \int_{S_X} B_{Tx}(u, v) \, d\nu(x) = \int_{S_X} B_y(u, v) \, d(T_\# \nu)(y) = Q_{T_\# \nu}(u, v). \end{aligned}$$

Следовательно, $Q_{T_\# \nu} = T \cdot Q_\nu$. ■

Теорема 13.4 (Инвариантный закон уже достаточен). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство, $G = \text{Isom}(X)$ и $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$. Предположим, что на сфере S_X существует G -инвариантный борелевский закон ν . Тогда форма Q_ν из предложения 13.3 является G -инвариантной, и существует число $\lambda > 0$ такое, что

$$Q_\nu(u, u) = \lambda \|u\|^2 \quad (u \in X).$$

Следовательно, пространство X линейно изометрично гильбертову пространству после нормировки формы $\lambda^{-1}Q_\nu$. **Доказательство.** По предложению 13.3 форма Q_ν корректно определена, положительна и удовлетворяет

$$T \cdot Q_\nu = Q_{T_\# \nu} = Q_\nu \quad (T \in G),$$

то есть Q_ν G -инвариантна.

Покажем, что Q_ν не вырождается на сфере. Зафиксируем $x \in S_X$. Функция

$$y \mapsto B_y(x, x)$$

непрерывна на S_X и принимает значение 1 при $y = x$. Поэтому существует открытая окрестность $U_x \subseteq S_X$ такая, что

$$B_y(x, x) \geq \frac{1}{2} \quad (y \in U_x).$$

По лемме 13.2 инвариантный закон имеет полную поддержку, так что $\nu(U_x) > 0$. Следовательно,

$$Q_\nu(x, x) = \int_{S_X} B_y(x, x) \, d\nu(y) \geq \frac{1}{2} \nu(U_x) > 0.$$

Теперь возьмём любые $x, y \in S_X$. По транзитивности существует $T \in G$ с $Tx = y$. Так как Q_ν инвариантна,

$$Q_\nu(y, y) = Q_\nu(Tx, Tx) = Q_\nu(x, x).$$

Следовательно, величина $Q_\nu(x, x)$ постоянна на сфере; обозначим её через λ . Из предыдущего абзаца следует $\lambda > 0$. Для произвольного $u \neq 0$, положив $x = u/\|u\|$, получаем

$$Q_\nu(u, u) = \|u\|^2 Q_\nu(x, x) = \lambda \|u\|^2.$$

При $u = 0$ равенство тривиально. Значит, $\lambda^{-1}Q_\nu$ — положительно определённая билинейная форма, индуцирующая исходную норму. Следовательно, X гильбертово. ■

Замечание 13.5. Теорема 13.4 показывает, что наличие подлинно инвариантного вероятностного закона само по себе уже решает задачу: коэрцитивность одной оболочки для этого не требуется. Следовательно, transport-программе достаточно либо построить точно инвариантный закон, либо количественно контролировать дефект такой инвариантности. Именно это и формализует следующий результат.

Теорема 13.6 (Барицентрический law-level almost-invariance criterion). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство, $G = \text{Isom}(X)$ и $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$. Пусть ν — борелевская вероятность на S_X с полной поддержкой. Обозначим

$$Q_\nu(u, v) := \int_{S_X} B_x(u, v) \, d\nu(x), \quad \delta_\nu := \sup_{T \in G} \|Q_{T\# \nu} - Q_\nu\|_{\text{op}}.$$

Зафиксируем $x_0 \in S_X$ и положим

$$\lambda_\nu := Q_\nu(x_0, x_0).$$

Тогда $\lambda_\nu > 0$. Если $\delta_\nu < \lambda_\nu$, то для всех $u \in X$

$$(\lambda_\nu - \delta_\nu)\|u\|^2 \leq Q_\nu(u, u) \leq (\lambda_\nu + \delta_\nu)\|u\|^2,$$

и, следовательно,

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1 + \delta_\nu/\lambda_\nu}{1 - \delta_\nu/\lambda_\nu}}.$$

В частности, случай $\delta_\nu = 0$ восстанавливает точную гильбертовость. **Доказательство.** Аргументом из доказательства теоремы 13.4 получаем $\lambda_\nu > 0$: по полной поддержке ν существует открытая окрестность U точки x_0 с

$$B_y(x_0, x_0) \geq \frac{1}{2} \quad (y \in U),$$

и потому

$$\lambda_\nu = \int_{S_X} B_y(x_0, x_0) \, d\nu(y) \geq \frac{1}{2} \nu(U) > 0.$$

По предложению 13.3 для каждого $T \in G$ имеем

$$T \cdot Q_\nu = Q_{T\# \nu},$$

следовательно,

$$\sup_{T \in G} \|T \cdot Q_\nu - Q_\nu\|_{\text{op}} = \delta_\nu.$$

Теперь остаётся применить теорему 15.6 к положительной симметрической билинейной форме Q_ν . Она даёт именно требуемые двусторонние оценки и формулу для расстояния Банаха–Мазура. ■

Предложение 13.7 (Wasserstein-устойчивость barycentric shell form). Пусть X — сепарабельное вещественное транзитивное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, и пусть поле оболочек липшицево на сфере:

$$\|B_x - B_y\|_{\text{op}} \leq L\|x - y\| \quad (x, y \in S_X)$$

для некоторой константы $L < \infty$. Тогда для любых борелевских вероятностей μ, ν на S_X выполняется

$$\|Q_\mu - Q_\nu\|_{\text{op}} \leq L W_1(\mu, \nu),$$

где W_1 — первая Wasserstein-метрика на $(S_X, \|\cdot\|)$. **Доказательство.** Так как X сепарабельно, метрическое пространство S_X польское и к нему применима дуальность Канторовича–Рубинштейна [21, Chapter 5]. Для $\|u\|, \|v\| \leq 1$ рассмотрим функцию

$$f_{u,v}(x) := B_x(u, v).$$

Из липшицевости поля оболочек следует

$$|f_{u,v}(x) - f_{u,v}(y)| \leq \|B_x - B_y\|_{\text{op}} \|u\| \|v\| \leq L \|x - y\|,$$

то есть $f_{u,v}$ является L -липшицевой. Поэтому

$$\left| \int f_{u,v} d\mu - \int f_{u,v} d\nu \right| \leq L W_1(\mu, \nu).$$

Беря супремум по всем $\|u\|, \|v\| \leq 1$, получаем

$$\|Q_\mu - Q_\nu\|_{\text{op}} = \sup_{\|u\|, \|v\| \leq 1} \left| \int B_x(u, v) d(\mu - \nu)(x) \right| \leq L W_1(\mu, \nu).$$

Что и требовалось. ■

Следствие 13.8 (Transport criterion via orbital W_1 -almost invariance). Пусть выполнены гипотезы предложения 13.7 и теоремы 13.6. Для full-support law ν положим

$$\eta_\nu := \sup_{T \in G} W_1(T_\# \nu, \nu).$$

Если

$$L \eta_\nu < \lambda_\nu,$$

то

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1 + L\eta_\nu/\lambda_\nu}{1 - L\eta_\nu/\lambda_\nu}}.$$

Доказательство. По предложению 13.7

$$\delta_\nu = \sup_{T \in G} \|Q_{T_\# \nu} - Q_\nu\|_{\text{op}} \leq L \sup_{T \in G} W_1(T_\# \nu, \nu) = L \eta_\nu.$$

Теперь достаточно применить теорему 13.6. ■

Замечание 13.9. Следствие 13.8 даёт точную внешнюю цель для transport/ЖКО-части программы. Для изоморфической части уже не нужно непосредственно занулять $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$: достаточно построить full-support law, чья орбита почти инвариантна в W_1 -метрике настолько, чтобы $L\eta_\nu < \lambda_\nu$. Точная инвариантность соответствует случаю $\eta_\nu = 0$ и тогда по теореме 13.4 задача замыкается изометрически.

13.2. Асимптотически инвариантные законы

Следующий шаг важен уже не только концептуально, но и методологически. Для transport-или ЖКО-схем естественнее ожидать *последовательности* всё более инвариантных законов, чем одного сразу точно инвариантного предела с хорошей поддержкой. Оказывается, внешняя теория действительно допускает такой предельный переход.

Следствие 13.10 (Асимптотически almost-invariant barycentric laws). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство, $G = \text{Isom}(X)$ и $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$. Предположим, что существует последовательность борелевских вероятностей (ν_m) на S_X с полной поддержкой такая, что для некоторой точки $x_0 \in S_X$

$$\lambda_m := Q_{\nu_m}(x_0, x_0) > 0, \quad \delta_m := \sup_{T \in G} \|Q_{T_\# \nu_m} - Q_{\nu_m}\|_{\text{op}}, \quad \frac{\delta_m}{\lambda_m} \longrightarrow 0.$$

Тогда X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** Достаточно применить теорему 15.8 к последовательности положительных симметрических форм $Q_m := Q_{\nu_m}$. ■

Следствие 13.11 (Transport/JKO asymptotic criterion). Пусть выполнены гипотезы предложения 13.7. Предположим, что существует последовательность full-support laws (ν_m) на S_X такая, что

$$\lambda_m := Q_{\nu_m}(x_0, x_0) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{L \eta_{\nu_m}}{\lambda_m} \longrightarrow 0,$$

где

$$\eta_{\nu_m} := \sup_{T \in G} W_1(T_{\#}\nu_m, \nu_m).$$

Тогда X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** По предложению 13.7

$$\delta_m := \sup_{T \in G} \|Q_{T_{\#}\nu_m} - Q_{\nu_m}\|_{\text{op}} \leq L \eta_{\nu_m},$$

следовательно,

$$\frac{\delta_m}{\lambda_m} \leq \frac{L \eta_{\nu_m}}{\lambda_m} \longrightarrow 0.$$

Теперь остаётся применить следствие 13.10. ■

Замечание 13.12. Следствия 13.10–13.11 формализуют тот тип выхода, который реально следует ожидать от предельных averaging/JKO-процедур. Для точной гильбертовости достаточно не одного идеального предела, а любой последовательности законов, у которой нормированный барцентрический defect стремится к нулю.

13.3. Нулевая энергия осцилляции и точная жёсткость

Теперь зафиксируем классическую версию функционала энергии осцилляции оболочек. Пусть ν — борелевская вероятность на S_X . Если $N \in C^2(X \setminus \{0\})$, то по лемме 10.1 функция

$$(x, y) \longmapsto \|B_x - B_y\|_{\text{op}}^2$$

непрерывна на $S_X \times S_X$, а потому можно положить

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{H}}(\nu) := \int_{S_X} \int_{S_X} \|B_x - B_y\|_{\text{op}}^2 \, d\nu(x) \, d\nu(y).$$

Теорема 13.13 (Нулевая law-level энергия). Пусть X — вещественное банахово пространство и $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$. Пусть ν — борелевская вероятность на S_X с полной поддержкой. Если

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{H}}(\nu) = 0,$$

то поле оболочек $x \mapsto B_x$ постоянно на всей сфере. Следовательно, X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** Поскольку подинтегральная функция неотрицательна и непрерывна, из условия $\mathcal{E}_{\mathfrak{H}}(\nu) = 0$ следует, что

$$\|B_x - B_y\|_{\text{op}} = 0$$

для $\nu \otimes \nu$ -почти всех $(x, y) \in S_X \times S_X$. Покажем, что отсюда в силу полной поддержки следует точное равенство для всех (x, y) .

Предположим противное. Тогда существуют точки $x_0, y_0 \in S_X$ и число $\eta > 0$ такие, что

$$\|B_{x_0} - B_{y_0}\|_{\text{op}} > 2\eta.$$

По непрерывности функции $(x, y) \mapsto \|B_x - B_y\|_{\text{op}}$ найдутся открытые окрестности $U \ni x_0$ и $V \ni y_0$ со свойством

$$\|B_x - B_y\|_{\text{op}} \geq \eta \quad (x \in U, y \in V).$$

Из полной поддержки имеем $\nu(U) > 0$ и $\nu(V) > 0$. Поэтому

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{H}}(\nu) \geq \int_U \int_V \|B_x - B_y\|_{\text{op}}^2 \, d\nu(x) \, d\nu(y) \geq \eta^2 \nu(U) \nu(V) > 0,$$

что противоречит предположению. Значит, $B_x = B_y$ для всех $x, y \in S_X$, и постоянство оболочки на сфере установлено. Теперь остаётся применить теорему 5.7. ■

Следствие 13.14 (Инвариантный нуль энергии). Пусть X транзитивно, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, а ν — G -инвариантный закон на сфере. Если

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{H}}(\nu) = 0,$$

то X гильбертово. **Доказательство.** По лемме 13.2 закон ν имеет полную поддержку на S_X . Поэтому можно применить теорему 13.13. ■

Замечание 13.15. Следствие 13.14 является точной внешней тенью conjecture 12.5. Чтобы замкнуть transport/JKO-программу, достаточно было бы построить law-level поток, который среди инвариантных законов достигает нулевой энергии осцилляции. Вся трудность then сосредотачивается в минимизации $\mathcal{E}_{\mathfrak{H}}$, а не в последнем шаге вывода гильбертовости.

13.4. Счётные law-level маргинали и reconstruction по цепочке

Глобальная энергия $\mathcal{E}_{\mathfrak{H}}$ может быть слишком жёстким объектом для прямой атаки. Но уже её конечномерные маргинали дают точные достаточные условия, хорошо согласующиеся со счётной skeleton-reduction из раздела 17.

Пусть

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset X, \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = X,$$

— возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств. Для борелевской вероятности ν на S_X определим

$$\mathcal{E}_n(\nu) := \int_{S_X} \int_{S_X} \|(B_x - B_y)|_{E_n \times E_n}\|_{\text{op}}^2 \, d\nu(x) \, d\nu(y), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Теорема 13.16 (Law-level skeleton criterion). Пусть X — вещественное сепарабельное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, (E_n) — возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств, а ν — борелевская вероятность на S_X с полной поддержкой. Предположим, что

$$\mathcal{E}_n(\nu) = 0 \quad \text{для всех } n \in \mathbf{N}.$$

Тогда X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** Для каждого n функция

$$F_n(x, y) := \|(B_x - B_y)|_{E_n \times E_n}\|_{\text{op}}^2$$

неотрицательна и непрерывна на $S_X \times S_X$. Из условия $\mathcal{E}_n(\nu) = 0$ и той же аргументации, что в доказательстве теоремы 13.13, следует:

$$(B_x - B_y)|_{E_n \times E_n} = 0 \quad (x, y \in S_X).$$

Итак, для каждого n существует симметрическая билинейная форма q_n на E_n такая, что

$$B_x|_{E_n \times E_n} = q_n \quad (x \in S_X).$$

Покажем, что (q_n) есть совместимая цепочка точных евклидовых маргиналей. Совместимость очевидна из определения: если $m \geq n$, то для любого $x \in S_X$

$$q_m|_{E_n \times E_n} = B_x|_{E_n \times E_n} = q_n.$$

Теперь возьмём ненулевой $u \in E_n$ и положим $x = u/\|u\| \in S_X \cap E_n$. Тогда по определению q_n и по равенству (5) из леммы 5.2 получаем

$$q_n(u, u) = B_x(u, u) = \|u\|^2 B_x(x, x) = \|u\|^2.$$

При $u = 0$ равенство также верно. Значит,

$$q_n(u, u) = \|u\|^2 \quad (u \in E_n),$$

и потому гипотезы теоремы 17.3 выполнены с $\varepsilon_n = 0$ для всех n . Следовательно, X гильбертово. ■

Замечание 13.17. Теорема 13.16 показывает, что law-level программа необязательно должна немедленно занулять полную энергию $\mathcal{E}_{\mathfrak{J}}$. Уже обнуление всех конечномерных маргиналей вдоль одной плотной цепочки достаточно для точной reconstruction гильбертовой нормы. Именно в таком виде transport- и Fraïssé-подходы можно пытаться склеивать с существующей skeleton machinery.

13.5. Количественное сжатие конечномерных shell-image compacta

Предыдущий exact-результат имеет количественное усиление, если отслеживать не только сами энергии $\mathcal{E}_n(\nu)$, но и то, насколько равномерно pushforward-меры на образах оболочки распределяют массу по этим образам. Именно это даёт настоящий bridge между law-level данными и теоремами о сшивании.

Для каждого n рассмотрим непрерывное отображение

$$F_n : S_X \rightarrow \text{Sym}^2(E_n^*), \quad F_n(x) := B_x|_{E_n \times E_n},$$

и обозначим через

$$\mathcal{K}_n := \overline{F_n(S_X)} \subset \text{Sym}^2(E_n^*)$$

его компактный образ. Пусть также

$$\sigma_n := (F_n)_\# \nu.$$

Так как $\text{Sym}^2(E_n^*)$ конечномерно, множество $\mathcal{K}_n$ компактно, а из полной поддержки ν и непрерывности F_n следует

$$\text{supp } \sigma_n = \mathcal{K}_n.$$

Определение 13.18. Для $r > 0$ положим

$$\alpha_n(r) := \inf_{A \in \mathcal{K}_n} \sigma_n(B(A, r)),$$

где шар берётся в норме операторов на $\text{Sym}^2(E_n^*)$.

Лемма 13.19. Для каждого n и каждого $r > 0$ выполнено $\alpha_n(r) > 0$. **Доказательство.** Поскольку $\text{supp } \sigma_n = \mathcal{K}_n$, каждый шар $B(A, r/2)$ с центром в $A \in \mathcal{K}_n$ имеет положительную σ_n -меру. Компактность $\mathcal{K}_n$ позволяет выбрать конечное покрытие

$$\mathcal{K}_n \subset \bigcup_{j=1}^m B(A_j, r/2).$$

Если $A \in \mathcal{K}_n$, то для некоторого j имеем $A \in B(A_j, r/2)$, а потому

$$B(A_j, r/2) \subseteq B(A, r).$$

Следовательно,

$$\sigma_n(B(A, r)) \geq \sigma_n(B(A_j, r/2))$$

и, значит,

$$\alpha_n(r) \geq \min_{1 \leq j \leq m} \sigma_n(B(A_j, r/2)) > 0.$$

■

Предложение 13.20 (Диаметр конечномерного shell-image compactum). Для каждого n и каждого $r > 0$ выполнено

$$\text{diam}(\mathcal{K}_n) \leq 2r + \frac{\sqrt{\mathcal{E}_n(\nu)}}{\alpha_n(r)}.$$

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathcal{K}_n$. Для любых $A' \in B(A, r)$ и $B' \in B(B, r)$ по неравенству треугольника

$$\|A' - B'\| \geq \|A - B\| - 2r.$$

Следовательно,

$$\|A' - B'\|^2 \geq (\|A - B\| - 2r)_+^2,$$

где $t_+ := \max\{t, 0\}$. Интегрируя по $B(A, r) \times B(B, r)$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(\nu) &= \iint_{\mathcal{K}_n \times \mathcal{K}_n} \|A' - B'\|^2 d\sigma_n(A') d\sigma_n(B') \\ &\geq \iint_{B(A, r) \times B(B, r)} \|A' - B'\|^2 d\sigma_n(A') d\sigma_n(B') \\ &\geq (\|A - B\| - 2r)_+^2 \sigma_n(B(A, r)) \sigma_n(B(B, r)) \\ &\geq (\|A - B\| - 2r)_+^2 \alpha_n(r)^2. \end{aligned}$$

Значит,

$$\|A - B\| \leq 2r + \frac{\sqrt{\mathcal{E}_n(\nu)}}{\alpha_n(r)}.$$

Беря супремум по $A, B \in \mathcal{K}_n$, получаем требуемую оценку. ■

Теорема 13.21 (Количественный law-level bridge к конечномерному сшиванию). Пусть X — вещественное сепарабельное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, (E_n) — возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств, а ν — борелевская вероятность на S_X с полной поддержкой. Для каждого n положим

$$q_n := Q_\nu|_{E_n \times E_n}, \quad \varepsilon_n := \inf_{r>0} \left(2r + \frac{\sqrt{\mathcal{E}_n(\nu)}}{\alpha_n(r)} \right).$$

Тогда:

(i) (q_n) является совместимой цепочкой квадратичных маргиналей;

(ii) для всех $x \in S_X$ выполнено

$$\|(B_x - q_n)|_{E_n \times E_n}\| \leq \varepsilon_n;$$

(iii) если $\varepsilon := \sup_n \varepsilon_n < 1$, то

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}};$$

(iv) если $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то X линейно изометрично гильбертову пространству.

Доказательство. Совместимость (q_n) очевидна из определения через ограничения формы Q_ν .

По предположению 13.20 имеем

$$\text{diam}(\mathcal{K}_n) \leq \varepsilon_n.$$

Так как $q_n = \int_{\mathcal{K}_n} A d\sigma_n(A)$, точка q_n принадлежит выпуклой оболочке $\text{co}(\mathcal{K}_n)$. Для любого $A \in \mathcal{K}_n$, представляя q_n как конечную выпуклую комбинацию элементов $\mathcal{K}_n$ и используя выпуклость нормы, получаем

$$\|A - q_n\| \leq \text{diam}(\mathcal{K}_n) \leq \varepsilon_n.$$

Поскольку $F_n(x) \in \mathcal{K}_n$ для каждого $x \in S_X$, откуда следует (ii).

Теперь возьмём $u \in E_n \setminus \{0\}$ и положим $x = u/\|u\| \in S_X \cap E_n$. Тогда

$$B_x(u, u) = \|u\|^2 B_x(x, x) = \|u\|^2,$$

и по пункту (ii)

$$|q_n(u, u) - \|u\|^2| = |(q_n - B_x)(u, u)| \leq \varepsilon_n \|u\|^2.$$

Следовательно,

$$(1 - \varepsilon_n) \|u\|^2 \leq q_n(u, u) \leq (1 + \varepsilon_n) \|u\|^2 \quad (u \in E_n).$$

Если $\varepsilon := \sup_n \varepsilon_n < 1$, то на плотном объединении $\bigcup_n E_n$ существует квадратичная форма

$$q(u, v) := q_N(u, v) \quad (u, v \in E_N),$$

хорошо определённая по совместимости. Из последней двусторонней оценки следует

$$\sqrt{1 - \varepsilon} \|u\| \leq \sqrt{q(u, u)} \leq \sqrt{1 + \varepsilon} \|u\| \quad \left(u \in \bigcup_n E_n\right).$$

Значит, q непрерывна относительно исходной нормы и продолжается до положительной симметрической билинейной формы на всём X . Определяя

$$\|u\|_{\mathcal{H}} := \sqrt{q(u, u)},$$

получаем гильбертову норму с теми же двусторонними оценками; откуда

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

Это доказывает (iii).

Наконец, если $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то для любого фиксированного $u \in E_N$ и любого $n \geq N$ по совместимости имеем $q_n(u, u) = q_N(u, u)$, а значит,

$$|q_N(u, u) - \|u\|^2| \leq \varepsilon_n \|u\|^2.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$q_N(u, u) = \|u\|^2.$$

Следовательно, q точно совпадает с квадратом нормы на плотном объединении $\bigcup_n E_n$ и потому после продолжения на всё X индуцирует исходную норму. Значит, X гильбертово. ■

Следствие 13.22 (Ahlfors-type lower mass $\Rightarrow$ explicit Hilbert rate). *Предположим в условиях теоремы 13.21, что для каждого n существуют числа $d_n > 0$ и $c_n > 0$ такие, что*

$$\sigma_n(B(A, r)) \geq c_n r^{d_n} \quad (A \in \mathcal{X}_n, 0 < r \leq 1).$$

Положим

$$a_n := \frac{\sqrt{\mathcal{E}_n(\nu)}}{c_n}$$

и

$$\Phi_n := \begin{cases} C(d_n) a_n^{1/(d_n+1)}, & \text{если } a_n \leq 2/d_n, \\ 2 + a_n, & \text{если } a_n > 2/d_n, \end{cases}$$

где

$$C(d) := (d+1) 2^{d/(d+1)} d^{-d/(d+1)}.$$

Тогда

$$\varepsilon_n \leq \Phi_n.$$

В частности:

(a) если $\Theta := \sup_n \Phi_n < 1$, то

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1+\Theta}{1-\Theta}};$$

(b) если $\Phi_n \rightarrow 0$, то X гильбертово.

Доказательство. Из нижней оценки на массы шаров следует

$$\alpha_n(r) \geq c_n r^{d_n} \quad (0 < r \leq 1).$$

Поэтому для $0 < r \leq 1$

$$\varepsilon_n \leq 2r + \frac{\sqrt{\mathcal{E}_n(\nu)}}{c_n r^{d_n}} = 2r + a_n r^{-d_n}.$$

Если $a_n \leq 2/d_n$, то точка

$$r_* = \left(\frac{d_n a_n}{2} \right)^{1/(d_n+1)}$$

удовлетворяет $0 < r_* \leq 1$, и функция

$$f(r) := 2r + a_n r^{-d_n}$$

достигает на $(0, 1]$ минимума в r_* . Прямое вычисление даёт

$$f(r_*) = C(d_n) a_n^{1/(d_n+1)} = \Phi_n.$$

Если же $a_n > 2/d_n$, то выбирая $r = 1$, получаем

$$\varepsilon_n \leq 2 + a_n = \Phi_n.$$

Пункты (a)–(b) теперь следуют из теоремы 13.21. ■

Замечание 13.23. Теорема 13.21 отвечает на качественный вопрос, оставшийся после теоремы 13.16: малость $\mathcal{E}_n(\nu)$ действительно приводит к конечномерному patching-выводу, если вместе с энергией контролируется явный модуль толщины соответствующей pushforward-меры на shell-image compactum. Следствие 13.22 показывает, что при полиномиальной нижней оценке массы шаров этот вывод становится полностью количественным: достаточно добиться явной скорости убывания конечномерных энергий.

Вопрос 13.24. Можно ли вывести эффективные нижние оценки на $\alpha_n(r)$ непосредственно из транзитивности, convex transitivity, guarded/Fraïssé-параметров или transport-свойств закона ν ? Положительный ответ дал бы количественный маршрут от геометрической однородности к теореме 13.21 без апелляции к готовой гильбертовой структуре.

13.6. Энтропийные селекторы на конечномерных shell-image compacta

Law-level программа сталкивается с двойной трудностью: нужны не просто вероятности на $\mathcal{K}_n$, а канонические full-support laws, совместимые с вариационной философией transport-подхода. На каждом фиксированном конечномерном уровне такой объект можно построить полностью внешне с помощью относительной энтропии.

Определение 13.25. Пусть K — непустой компакт в конечномерном нормированном пространстве V , ρ — борелевская вероятность на K с полной поддержкой, а $\tau > 0$. Для борелевской вероятности σ на K положим

$$\mathcal{E}_K(\sigma) := \iint_{K \times K} \|A - B\|^2 d\sigma(A) d\sigma(B),$$

а также

$$\mathcal{F}_{K,\rho,\tau}(\sigma) := \mathcal{E}_K(\sigma) + \tau \text{Ent}(\sigma | \rho),$$

где

$$\text{Ent}(\sigma | \rho) := \begin{cases} \int_K \log\left(\frac{d\sigma}{d\rho}\right) d\sigma, & \sigma \ll \rho, \\ +\infty, & \sigma \not\ll \rho, \end{cases}$$

и действует соглашение $0 \log 0 := 0$.

Теорема 13.26 (Энтропийный селектор). Пусть $K \subset V$ и ρ как выше. Тогда для каждого $\tau > 0$:

- (i) функционал $\mathcal{F}_{K,\rho,\tau}$ имеет по крайней мере один минимизатор σ_τ ;
- (ii) каждый такой минимизатор абсолютно непрерывен относительно ρ и имеет плотность

$$\frac{d\sigma_\tau}{d\rho}(A) = Z_\tau^{-1} e^{-2U_\tau(A)/\tau} \quad (\rho\text{-п.в. } A \in K),$$

где

$$U_\tau(A) := \int_K \|A - B\|^2 d\sigma_\tau(B)$$

и $Z_\tau > 0$ — нормирующая константа;

- (iii) каждый минимизатор σ_τ имеет полную поддержку на K ; более того, если

$$D := \text{diam}(K),$$

то для любого борелевского множества $E \subseteq K$

$$\sigma_\tau(E) \geq e^{-2D^2/\tau} \rho(E).$$

Доказательство. Так как K компактно, множество борелевских вероятностей на K компактно в слабой топологии. Функционал $\sigma \mapsto \mathcal{E}_K(\sigma)$ непрерывен, поскольку ядро $(A, B) \mapsto \|A - B\|^2$ непрерывно на $K \times K$. Относительная энтропия $\text{Ent}(\cdot \mid \rho)$ слабо полунепрерывна снизу. Следовательно, минимум достигается.

Зафиксируем один минимизатор $\sigma_\tau = f_\tau \rho$. Покажем сначала, что $f_\tau > 0$ ρ -почти всюду. Действительно, пусть $E := \{A \in K : f_\tau(A) = 0\}$ имеет положительную ρ -меру. Выберем борелевское множество $F \subseteq K$ с $\sigma_\tau(F) > 0$ и положим

$$g_E := \frac{\mathbf{1}_E}{\rho(E)}, \quad g_F := \frac{\mathbf{1}_F}{\sigma_\tau(F)} f_\tau.$$

Для малых $\varepsilon > 0$ рассмотрим плотность

$$f_\varepsilon := f_\tau + \varepsilon(g_E - g_F),$$

которая остаётся неотрицательной и имеет интеграл 1. Переход $\sigma_\tau \mapsto \sigma_\varepsilon := f_\varepsilon \rho$ меняет $\mathcal{E}_K$ лишь на $O(\varepsilon)$, поскольку ядро ограничено на $K \times K$. Зато

$$\text{Ent}(\sigma_\varepsilon \mid \rho) - \text{Ent}(\sigma_\tau \mid \rho) = \varepsilon \log \varepsilon + O(\varepsilon),$$

а значит для достаточно малых ε эта разность отрицательна. Получаем противоречие с минимальностью. Следовательно, $f_\tau > 0$ ρ -почти всюду.

Теперь можно брать вариации $f_\tau(1 + th)$, где h ограничена и $\int_K h f_\tau \, d\rho = 0$. Дифференцируя в точке минимума $t = 0$, получаем

$$\int_K \left(2U_\tau(A) + \tau(1 + \log f_\tau(A)) \right) h(A) f_\tau(A) \, d\rho(A) = 0$$

для всех таких h . Значит,

$$2U_\tau(A) + \tau(1 + \log f_\tau(A)) = \lambda_\tau \quad (\rho\text{-н.в. } A \in K)$$

с некоторой константой $\lambda_\tau \in \mathbf{R}$, то есть

$$f_\tau(A) = Z_\tau^{-1} e^{-2U_\tau(A)/\tau} \quad (\rho\text{-н.в. } A \in K).$$

Это доказывает (ii).

Теперь $0 \leq U_\tau(A) \leq D^2$ для всех $A \in K$, а потому

$$e^{-2D^2/\tau} \leq e^{-2U_\tau(A)/\tau} \leq 1 \quad (\rho\text{-н.в. } A \in K).$$

Кроме того,

$$Z_\tau = \int_K e^{-2U_\tau(A)/\tau} \, d\rho(A) \leq 1.$$

Следовательно,

$$\frac{d\sigma_\tau}{d\rho}(A) = Z_\tau^{-1} e^{-2U_\tau(A)/\tau} \geq e^{-2D^2/\tau} \quad (\rho\text{-н.в. } A \in K),$$

и после интегрирования по E получаем

$$\sigma_\tau(E) \geq e^{-2D^2/\tau} \rho(E).$$

В частности, если $U \subseteq K$ непусто и открыто, то из полноты поддержки ρ следует $\rho(U) > 0$, а значит и $\sigma_\tau(U) > 0$. Следовательно, $\text{supp } \sigma_\tau = K$. ■

Предложение 13.27 (Сравнение с локализованным competitor-ом). В обозначениях теоремы 13.26 положим

$$\beta_\rho(r) := \inf_{A \in K} \rho(B(A, r)) \quad (r > 0).$$

Тогда для энтропийного селектора σ_τ верна оценка

$$\mathcal{E}_K(\sigma_\tau) \leq \inf_{r>0} \left(4r^2 + \tau \log \frac{1}{\beta_\rho(r)} \right).$$

Доказательство. Зафиксируем $A_0 \in K$ и $r > 0$ с $\rho(B(A_0, r)) > 0$, и рассмотрим нормированное ограничение

$$\rho_{A_0, r} := \frac{\rho|_{B(A_0, r)}}{\rho(B(A_0, r))}.$$

Если $A, B \in B(A_0, r)$, то $\|A - B\| \leq 2r$, поэтому

$$\mathcal{E}_K(\rho_{A_0, r}) \leq 4r^2.$$

Кроме того,

$$\text{Ent}(\rho_{A_0, r} \mid \rho) = \log \frac{1}{\rho(B(A_0, r))}.$$

По минимальности σ_τ имеем

$$\mathcal{E}_K(\sigma_\tau) + \tau \text{Ent}(\sigma_\tau \mid \rho) \leq \mathcal{E}_K(\rho_{A_0, r}) + \tau \text{Ent}(\rho_{A_0, r} \mid \rho) \leq 4r^2 + \tau \log \frac{1}{\rho(B(A_0, r))}.$$

Так как $\text{Ent}(\sigma_\tau \mid \rho) \geq 0$, получаем

$$\mathcal{E}_K(\sigma_\tau) \leq 4r^2 + \tau \log \frac{1}{\rho(B(A_0, r))}.$$

Беря инфимум сначала по $A_0 \in K$, затем по $r > 0$, заключаем

$$\mathcal{E}_K(\sigma_\tau) \leq \inf_{r>0} \left(4r^2 + \tau \log \frac{1}{\beta_\rho(r)} \right).$$

■

Следствие 13.28 (Канонический entropic multiscale bridge). Пусть X — вещественное сепарабельное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, а

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots, \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = X,$$

— возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств. Для каждого n положим

$$\mathcal{K}_n := \overline{\{B_x|_{E_n \times E_n} : x \in S_X\}} \subset \text{Sym}^2(E_n^*),$$

выберем борелевскую вероятность ρ_n с полной поддержкой на $\mathcal{K}_n$ и параметр $\tau_n > 0$, а через σ_n обозначим некоторый минимизатор функционала $\mathcal{F}_{\mathcal{K}_n, \rho_n, \tau_n}$.

Определим

$$q_n := \int_{\mathcal{K}_n} A \, d\sigma_n(A), \quad \alpha_n(r) := \inf_{A \in \mathcal{K}_n} \sigma_n(B(A, r)),$$

и

$$\varepsilon_n := \inf_{r>0} \left(2r + \frac{\sqrt{\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n}(\sigma_n)}}{\alpha_n(r)} \right).$$

Тогда:

(i) если $\sup_n \varepsilon_n < 1$, то

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1 + \sup_n \varepsilon_n}{1 - \sup_n \varepsilon_n}};$$

(ii) если $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то X линейно изометрично гильбертову пространству.

Доказательство. По теореме 13.26 каждая мера σ_n имеет полную поддержку на $\mathcal{K}_n$. Поэтому к $(\mathcal{K}_n, \sigma_n)$ применимо предложение 13.20, и мы получаем

$$\text{diam}(\mathcal{K}_n) \leq \varepsilon_n.$$

Так как q_n есть барицентр меры σ_n , точка q_n лежит в $\text{co}(\mathcal{K}_n)$; следовательно, для каждого $A \in \mathcal{K}_n$

$$\|A - q_n\| \leq \text{diam}(\mathcal{K}_n) \leq \varepsilon_n.$$

Тем самым

$$\sup_{x \in S_X} \|(B_x - q_n)|_{E_n \times E_n}\| \leq \varepsilon_n.$$

Теперь остаётся применить следствие 17.11. ■

Следствие 13.29 (Явный энтропийный критерий). В условиях следствия 13.28 положим

$$D_n := \text{diam}(\mathcal{K}_n), \quad \beta_n(r) := \inf_{A \in \mathcal{K}_n} \rho_n(B(A, r)).$$

Тогда

$$\alpha_n(r) \geq e^{-2D_n^2/\tau_n} \beta_n(r)$$

и

$$\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n}(\sigma_n) \leq \inf_{r>0} \left(4r^2 + \tau_n \log \frac{1}{\beta_n(r)} \right).$$

Следовательно,

$$\varepsilon_n \leq \inf_{s>0} \left(2s + \frac{e^{2D_n^2/\tau_n}}{\beta_n(s)} \sqrt{\inf_{r>0} \left(4r^2 + \tau_n \log \frac{1}{\beta_n(r)} \right)} \right).$$

В частности, если правая часть стремится к нулю, то X гильбертово; если её супремум по n строго меньше 1, то получаем явную оценку расстояния Банаха–Мазура. **Доказательство.** Первая оценка следует из теоремы 13.26, вторая — из предложения 13.27. Подставляя их в определение ε_n из следствия 13.28, получаем требуемое неравенство. Далее остаётся воспользоваться тем же следствием. ■

Замечание 13.30. Следствия 13.28–13.29 снимают один из технических bottleneck-ов транспортной программы: на каждом конечномерном уровне существуют канонические full-support laws, задаваемые вариационно и не требующие заранее угадывать good barycenter. Открытой остаётся

не задача существования таких законов, а их качество: нужно добиться того, чтобы соответствующие энтропийные селекторы действительно сжимали shell-image компакта с достаточной скоростью.

13.7. Универсальные конечномерные reference laws и количественная температурная скорость

Предыдущий блок оставлял открытым вопрос о том, насколько *канонично* можно выбирать исходные reference laws ρ_n на shell-image компакта. Следующий результат частично закрывает этот узел в полностью внешней конечномерной форме: любой компакт в конечномерном нормированном пространстве несёт full-support probability с универсальной полиномиальной нижней оценкой массы шаров. Важнее всего то, что построение не использует никакой предварительной геометрической информации о компакте, кроме конечномерности.

Предложение 13.31 (Универсальный закон с полиномиальной нижней массой на конечномерном компакте). Пусть V — вещественное m -мерное нормированное пространство, $K \subset V$ — непустой компакт и $D := \text{diam}(K)$. Если $D = 0$, то дираковская мера в единственной точке K имеет полную поддержку. Если $D > 0$, то существует борелевская вероятность ρ на K с полной поддержкой такая, что для всех $A \in K$ и всех $0 < r \leq D$

$$\rho(B(A, r)) \geq \left(\frac{r}{2mD} \right)^m.$$

Доказательство. Случай $D = 0$ тривиален, поэтому далее предполагаем $D > 0$.

Шаг 1: сведётся к ℓ_∞^m . По теореме Ауэрбаха (см., например, [1, Proposition 1.3.6]) существует линейный изоморфизм

$$T : V \longrightarrow \ell_\infty^m$$

такой, что

$$\|Tx\|_\infty \leq \|x\| \leq m\|Tx\|_\infty \quad (x \in V).$$

Положим

$$K' := T(K) \subset \ell_\infty^m.$$

Тогда

$$\text{diam}_\infty(K') \leq D.$$

После параллельного переноса в ℓ_∞^m можно считать, что

$$K' \subset [0, D]^m.$$

Шаг 2: построим дерево занятых кубов. Для каждого $n \geq 0$ разобьём куб $[0, D]^m$ на стандартные двоичные подкубы стороны

$$s_n := D2^{-n}.$$

Обозначим через $\mathcal{Q}_n$ семейство тех кубов уровня n , которые пересекают K' . Каждый куб $Q \in \mathcal{Q}_n$ имеет от 1 до 2^m потомков в $\mathcal{Q}_{n+1}$. Рекурсивно зададим веса:

$$w(Q_0) := 1$$

для корневого куба $Q_0 = [0, D]^m$, а если $Q' \in \mathcal{Q}_{n+1}$ — потомок куба $Q \in \mathcal{Q}_n$, то

$$w(Q') := \frac{w(Q)}{N(Q)}, \quad N(Q) := \#\{R \in \mathcal{Q}_{n+1} : R \subset Q\}.$$

По индукции получаем

$$w(Q) \geq 2^{-mn} \quad (Q \in \mathcal{Q}_n).$$

Шаг 3: построим предельную вероятность на K' . Для каждого занятого куба $Q \in \mathcal{Q}_n$ выберем точку

$$x_Q \in K' \cap Q$$

и положим

$$\mu_n := \sum_{Q \in \mathcal{Q}_n} w(Q) \delta_{x_Q}.$$

Это вероятностные меры на компактном множестве K' , следовательно, семейство (μ_n) слабо относительно компактно. Выберем weak*-предельную меру μ некоторой подпоследовательности.

Пусть $R \in \mathcal{Q}_k$ фиксирован. Тогда для всех $n \geq k$ каждая точка x_Q , где $Q \in \mathcal{Q}_n$ и $Q \subset R$, лежит в R . Поэтому

$$\mu_n(R) = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_n \\ Q \subset R}} w(Q) = w(R) \quad (n \geq k).$$

Так как R замкнут, по теореме Портманто

$$\mu(R) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(R) = w(R) \geq 2^{-mk} > 0.$$

Значит, каждый занятый куб имеет положительную μ -меру. Отсюда сразу следует, что μ имеет полную поддержку: если $U \subset K'$ непусто и открыто, то для любой точки $A' \in U$ и достаточно большого k занятый куб уровня k , содержащий A' , лежит в U и потому имеет положительную μ -меру.

Шаг 4: оценим массы шаров в ℓ_∞^m . Пусть $A' \in K'$ и $0 < r' \leq D$. Выберем n так, что

$$D2^{-n} \leq r' < 2D2^{-n}.$$

Пусть $R \in \mathcal{Q}_n$ — занятый куб, содержащий A' . Тогда сторона R равна $D2^{-n} \leq r'$, а значит

$$R \subset B_\infty(A', r').$$

Следовательно,

$$\mu(B_\infty(A', r')) \geq \mu(R) \geq 2^{-mn} > \left(\frac{r'}{2D}\right)^m.$$

Шаг 5: вернёмся в исходную норму. Определим

$$\rho := (T^{-1})_\# \mu.$$

Для $A \in K$ и $0 < r \leq D$ положим $A' := T(A)$ и $r' := r/m$. Тогда $0 < r' \leq D$, а из неравенства $\|x - A\| \leq m\|Tx - A'\|_\infty$ следует

$$T^{-1}(B_\infty(A', r')) \subset B(A, r).$$

Поэтому

$$\rho(B(A, r)) \geq \mu(B_\infty(A', r/m)) \geq \left(\frac{r/m}{2D}\right)^m = \left(\frac{r}{2mD}\right)^m.$$

Полнота поддержки сохраняется при pushforward/pullback изоморфизмом. ■

Следствие 13.32 (Универсальные reference laws на shell-image компакта). В условиях следствия 13.28 для каждого n положим

$$d_n := \dim E_n, \quad m_n := \dim \operatorname{Sym}^2(E_n^*) = \frac{d_n(d_n + 1)}{2}, \quad D_n := \operatorname{diam}(\mathcal{K}_n).$$

Тогда существует борелевская вероятность ρ_n с полной поддержкой на $\mathcal{K}_n$ такая, что при $D_n > 0$ для всех $0 < r \leq D_n$

$$\beta_n(r) := \inf_{A \in \mathcal{K}_n} \rho_n(B(A, r)) \geq \left(\frac{r}{2m_n D_n} \right)^{m_n}.$$

Если $D_n = 0$, то $\mathcal{K}_n$ состоит из одной точки и можно взять соответствующую дираковскую меру. **Доказательство.** Нужно применить предложение 13.31 к конечномерному нормированному пространству

$$V_n := \operatorname{span}(\mathcal{K}_n) \subset \operatorname{Sym}^2(E_n^*),$$

размерность которого не превосходит m_n . Заменяя при необходимости m_n на $\dim V_n$, получаем указанную оценку; более грубая форма с m_n также верна. ■

Теорема 13.33 (Универсальная конечномерная энтропийная скорость $O(\tau \log(1/\tau))$). Пусть K — непустой компакт в вещественном m -мерном нормированном пространстве V , $D := \operatorname{diam}(K) > 0$, ρ — вероятность из предложения 13.31, а σ_τ — энтропийный селектор из теоремы 13.26. Тогда для каждого

$$0 < \tau \leq \frac{8D^2}{m}$$

выполнено

$$\mathcal{E}_K(\sigma_\tau) \leq \frac{\tau m}{2} \left(1 + \log \frac{32mD^2}{\tau} \right).$$

Следовательно, существует точка $A_\tau \in K$ такая, что для любого $s > 0$

$$\sigma_\tau(K \setminus B(A_\tau, s)) \leq \frac{\tau m}{2s^2} \left(1 + \log \frac{32mD^2}{\tau} \right).$$

Доказательство. По предложению 13.31 при $0 < r \leq D$ имеем

$$\beta_\rho(r) \geq \left(\frac{r}{2mD} \right)^m.$$

Подставляя это в предложение 13.27, получаем

$$\mathcal{E}_K(\sigma_\tau) \leq \inf_{0 < r \leq D} \left(4r^2 + \tau m \log \frac{2mD}{r} \right).$$

При

$$r_\tau := \sqrt{\frac{\tau m}{8}}$$

условие $\tau \leq 8D^2/m$ означает именно $r_\tau \leq D$, так что

$$\mathcal{E}_K(\sigma_\tau) \leq 4r_\tau^2 + \tau m \log \frac{2mD}{r_\tau}.$$

Прямое вычисление даёт

$$4r_\tau^2 = \frac{\tau m}{2}$$

и

$$\tau m \log \frac{2mD}{r_\tau} = \frac{\tau m}{2} \log \frac{32mD^2}{\tau}.$$

Это и даёт требуемую оценку на энергию.

Теперь остаётся применить предложение 13.37 к мере σ_τ : для некоторой точки $A_\tau \in K$

$$\sigma_\tau(K \setminus B(A_\tau, s)) \leq \frac{\mathcal{E}_K(\sigma_\tau)}{s^2},$$

а подстановка уже доказанной оценки завершает доказательство. ■

Следствие 13.34 (Количественная проектированная концентрация). В условиях следствия 13.32 зафиксируем уровень m с $D_m > 0$, возьмём на $\mathcal{K}_m$ reference law ρ_m из следствия 13.32 и пусть

$$\sigma_{m,\tau} \in \arg \min \mathcal{F}_{\mathcal{K}_m, \rho_m, \tau}.$$

Тогда для всякого $n < m$, всякого

$$0 < \tau \leq \frac{8D_m^2}{m_m},$$

и всякого $s > 0$ существует точка $A_{m,\tau} \in \mathcal{K}_m$ такая, что

$$(R_n^m)_{\#} \sigma_{m,\tau} \left(\mathcal{K}_n^{(m)} \setminus B(R_n^m(A_{m,\tau}), s) \right) \leq \frac{\tau m_m}{2s^2} \left(1 + \log \frac{32m_m D_m^2}{\tau} \right).$$

Доказательство. По теореме 13.33 существует точка $A_{m,\tau} \in \mathcal{K}_m$ такая, что

$$\sigma_{m,\tau}(\mathcal{K}_m \setminus B(A_{m,\tau}, s)) \leq \frac{\tau m_m}{2s^2} \left(1 + \log \frac{32m_m D_m^2}{\tau} \right).$$

Оператор ограничения R_n^m имеет норму не больше 1, поэтому

$$R_n^m(B(A_{m,\tau}, s)) \subseteq B(R_n^m(A_{m,\tau}), s).$$

Следовательно,

$$(R_n^m)_{\#} \sigma_{m,\tau} \left(\mathcal{K}_n^{(m)} \setminus B(R_n^m(A_{m,\tau}), s) \right) \leq \sigma_{m,\tau}(\mathcal{K}_m \setminus B(A_{m,\tau}, s)),$$

и остаётся подставить полученную выше оценку. ■

Замечание 13.35. Теорема 13.33 и следствие 13.34 дают не просто качественный, а уже количественный finite-dimensional answer на один из узлов transport-программы: канонические entropic selectors существуют на каждом shell-image compactum, их энергия всегда убывает не хуже чем порядка $\tau \log(1/\tau)$, а projective collapse имеет явную s^{-2} -оценку хвоста. Открытым остаётся следующий уровень сложности — преобразовать эту поуровневую количественную концентрацию в межуровневую coherence, достаточную для patching по теореме 17.6.

13.8. Низкотемпературный предел энтропийных селекторов

Следующий блок результатов закрывает *качественную* часть вопроса об энтропийных селекторах на каждом фиксированном конечномерном уровне. Он не даёт автоматически коллапса всего compactum $\mathcal{K}_n$, но показывает, что при $\tau \downarrow 0$ канонический minimizer вариационного принципа всегда становится почти детерминистическим.

Лемма 13.36 (Концентрационный центр меры малой энергии). *Пусть K — непустой компакт в конечномерном нормированном пространстве V , а σ — борелевская вероятность на K . Тогда существует точка $A_\sigma \in \text{supp } \sigma$ такая, что*

$$\int_K \|A_\sigma - B\|^2 d\sigma(B) \leq \mathcal{E}_K(\sigma).$$

Доказательство. Рассмотрим непрерывную функцию

$$U_\sigma(A) := \int_K \|A - B\|^2 d\sigma(B), \quad A \in K.$$

По определению pairwise энергии

$$\int_K U_\sigma(A) d\sigma(A) = \mathcal{E}_K(\sigma).$$

Если бы на всём носителе $\text{supp } \sigma$ выполнялось строгое неравенство

$$U_\sigma(A) > \mathcal{E}_K(\sigma),$$

то по компактности носителя и непрерывности U_σ существовало бы число $\delta > 0$ такое, что

$$U_\sigma(A) \geq \mathcal{E}_K(\sigma) + \delta \quad (A \in \text{supp } \sigma).$$

Интегрируя по σ , получаем противоречие с предыдущим тождеством. Следовательно, найдётся точка $A_\sigma \in \text{supp } \sigma$ с

$$U_\sigma(A_\sigma) \leq \mathcal{E}_K(\sigma).$$

■

Предложение 13.37 (Одноточечная концентрация из pairwise энергии). *Пусть σ и A_σ как в лемме 13.36. Тогда для каждого $r > 0$ выполнено*

$$\sigma(K \setminus B(A_\sigma, r)) \leq \frac{\mathcal{E}_K(\sigma)}{r^2}.$$

Доказательство. По неравенству Маркова

$$\sigma(K \setminus B(A_\sigma, r)) = \sigma(\{B \in K : \|A_\sigma - B\|^2 \geq r^2\}) \leq \frac{1}{r^2} \int_K \|A_\sigma - B\|^2 d\sigma(B).$$

Остаётся применить лемму 13.36. ■

Следствие 13.38 (Барицентр близок к выбранному центру). *Пусть $K \subset V$ и σ как выше, а*

$$q_\sigma := \int_K A d\sigma(A) \in V$$

— барицентр меры σ в окружающем конечномерном линейном пространстве. Тогда для всякого $r > 0$

$$\|q_\sigma - A_\sigma\| \leq r + \text{diam}(K) \frac{\mathcal{E}_K(\sigma)}{r^2}.$$

Следовательно,

$$\|q_\sigma - A_\sigma\| \leq 3 \cdot 2^{-2/3} \text{diam}(K)^{1/3} \mathcal{E}_K(\sigma)^{1/3}.$$

Доказательство. Для всякого $r > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|q_\sigma - A_\sigma\| &= \left\| \int_K (A - A_\sigma) d\sigma(A) \right\| \\ &\leq \int_K \|A - A_\sigma\| d\sigma(A) \\ &\leq r \sigma(B(A_\sigma, r)) + \text{diam}(K) \sigma(K \setminus B(A_\sigma, r)) \\ &\leq r + \text{diam}(K) \frac{\mathcal{E}_K(\sigma)}{r^2}, \end{aligned}$$

где на последнем шаге использовано предложение 13.37. Осталось минимизировать правую часть по $r > 0$. Если $\mathcal{E}_K(\sigma) = 0$, всё очевидно. Если $\mathcal{E}_K(\sigma) > 0$ и $\text{diam}(K) > 0$, то минимум достигается при

$$r = (2 \text{diam}(K) \mathcal{E}_K(\sigma))^{1/3},$$

что даёт

$$r + \text{diam}(K) \frac{\mathcal{E}_K(\sigma)}{r^2} = 3 \cdot 2^{-2/3} \text{diam}(K)^{1/3} \mathcal{E}_K(\sigma)^{1/3}.$$

■

Теорема 13.39 (Низкотемпературный коллапс энтропийных селекторов). Пусть $K \subset V$ — непустой компакт в конечномерном нормированном пространстве, ρ — борелевская вероятность на K с полной поддержкой, а для каждого $\tau > 0$ мера σ_τ минимизирует $\mathcal{F}_{K,\rho,\tau}$. Тогда:

(i)

$$\mathcal{E}_K(\sigma_\tau) \longrightarrow 0 \quad (\tau \downarrow 0);$$

(ii) если $A_\tau \in K$ выбрана по лемме 13.36 для σ_τ , то для каждого $r > 0$

$$\sigma_\tau(K \setminus B(A_\tau, r)) \leq \frac{\mathcal{E}_K(\sigma_\tau)}{r^2} \longrightarrow 0;$$

(iii) для всякой последовательности $\tau_j \downarrow 0$ существует подпоследовательность $\tau_{j_k} \downarrow 0$ и точка $A_* \in K$ такие, что

$$A_{\tau_{j_k}} \longrightarrow A_* \quad \text{и} \quad \sigma_{\tau_{j_k}} \xrightarrow{w^*} \delta_{A_*};$$

(iv) если

$$q_\tau := \int_K A d\sigma_\tau(A),$$

то вдоль всякой подпоследовательности из пункта (iii) имеем также

$$q_{\tau_{j_k}} \longrightarrow A_*.$$

Доказательство. (i) Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $r > 0$ так, чтобы $4r^2 < \varepsilon/2$. Так как ρ имеет полную поддержку, то

$$\beta_\rho(r) := \inf_{A \in K} \rho(B(A, r)) > 0.$$

По предложению 13.27

$$0 \leq \mathcal{E}_K(\sigma_\tau) \leq 4r^2 + \tau \log \frac{1}{\beta_\rho(r)}.$$

Следовательно,

$$\limsup_{\tau \downarrow 0} \mathcal{E}_K(\sigma_\tau) \leq 4r^2 < \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, получаем $\mathcal{E}_K(\sigma_\tau) \rightarrow 0$.

(ii) Это непосредственно следует из пункта (i) и предложения 13.37.

(iii) По компактности K из любой последовательности (A_{τ_j}) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность:

$$A_{\tau_{j_k}} \rightarrow A_* \in K.$$

Покажем, что тогда $\sigma_{\tau_{j_k}} \rightarrow \delta_{A_*}$ слабо*. Пусть $f \in C(K)$. Для всякого $r > 0$ положим

$$\omega_f(r) := \sup\{|f(A) - f(B)| : A, B \in K, \|A - B\| \leq r\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_K f \, d\sigma_{\tau_{j_k}} - f(A_{\tau_{j_k}}) \right| &\leq \int_{B(A_{\tau_{j_k}}, r)} |f(A) - f(A_{\tau_{j_k}})| \, d\sigma_{\tau_{j_k}}(A) \\ &\quad + \int_{K \setminus B(A_{\tau_{j_k}}, r)} |f(A) - f(A_{\tau_{j_k}})| \, d\sigma_{\tau_{j_k}}(A) \\ &\leq \omega_f(r) + 2\|f\|_\infty \sigma_{\tau_{j_k}}(K \setminus B(A_{\tau_{j_k}}, r)). \end{aligned}$$

По пункту (ii) второе слагаемое стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ для каждого фиксированного $r > 0$. Переходя к верхнему пределу по k , получаем

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \int_K f \, d\sigma_{\tau_{j_k}} - f(A_{\tau_{j_k}}) \right| \leq \omega_f(r).$$

Теперь устремляя $r \downarrow 0$ и используя равномерную непрерывность f на компакте K , заключаем, что

$$\int_K f \, d\sigma_{\tau_{j_k}} - f(A_{\tau_{j_k}}) \rightarrow 0.$$

Но $A_{\tau_{j_k}} \rightarrow A_*$, а значит

$$f(A_{\tau_{j_k}}) \rightarrow f(A_*).$$

Следовательно,

$$\int_K f \, d\sigma_{\tau_{j_k}} \rightarrow f(A_*) = \int_K f \, d\delta_{A_*},$$

то есть $\sigma_{\tau_{j_k}} \xrightarrow{w^*} \delta_{A_*}$.

(iv) Это следует из следствия 13.38 и пункта (i):

$$\|q_{\tau_{j_k}} - A_{\tau_{j_k}}\| \leq 3 \cdot 2^{-2/3} \operatorname{diam}(K)^{1/3} \mathcal{E}_K(\sigma_{\tau_{j_k}})^{1/3} \rightarrow 0.$$

Так как $A_{\tau_{j_k}} \rightarrow A_*$, получаем $q_{\tau_{j_k}} \rightarrow A_*$. ■

Следствие 13.40 (Предписанные масштабы концентрации вдоль плотной цепочки). В обозначениях следствия 13.28 рассмотрим для каждого n одно-параметрическое семейство минимизаторов

$$\sigma_{n,\tau} \in \operatorname{Argmin} \mathcal{F}_{\mathcal{H}_n, \rho_n, \tau} \quad (\tau > 0).$$

Пусть (r_n) — произвольная последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Тогда существуют параметры $\tau_n \downarrow 0$ и точки $A_n \in \mathcal{K}_n$ такие, что если

$$q_n := \int_{\mathcal{K}_n} A \, d\sigma_{n,\tau_n}(A), \quad D_n := \text{diam}(\mathcal{K}_n),$$

то

$$\sigma_{n,\tau_n}(B(A_n, r_n)) \geq 1 - r_n \quad (n \in \mathbf{N})$$

и

$$\|q_n - A_n\| \leq 3 \cdot 2^{-2/3} D_n^{1/3} r_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Доказательство. Для каждого фиксированного n по теореме 13.39 имеем

$$\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n}(\sigma_{n,\tau}) \longrightarrow 0 \quad (\tau \downarrow 0).$$

Поэтому можно выбрать $\tau_n > 0$ так, чтобы одновременно

$$\tau_n < 2^{-n} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{\mathcal{K}_n}(\sigma_{n,\tau_n}) \leq r_n^3.$$

Тогда $\tau_n \downarrow 0$. Для каждой меры σ_{n,τ_n} выбираем точку A_n по лемме 13.36. По предложению 13.37 получаем

$$\sigma_{n,\tau_n}(\mathcal{K}_n \setminus B(A_n, r_n)) \leq \frac{\mathcal{E}_{\mathcal{K}_n}(\sigma_{n,\tau_n})}{r_n^2} \leq r_n,$$

что эквивалентно первой оценке.

Для второй оценки применяем следствие 13.38 к компакту $\mathcal{K}_n$ и мере σ_{n,τ_n} :

$$\|q_n - A_n\| \leq 3 \cdot 2^{-2/3} D_n^{1/3} \mathcal{E}_{\mathcal{K}_n}(\sigma_{n,\tau_n})^{1/3} \leq 3 \cdot 2^{-2/3} D_n^{1/3} r_n.$$

■

Замечание 13.41. Теорема 13.39 и следствие 13.40 решают качественную часть вопроса об энтропийных селекторах: при каждой фиксированной конечномерной маргинали канонический variational law всегда можно загнать в сколь угодно малую окрестность одной точки. Следовательно, реально открытыми остаются уже не существование и не локальная концентрация, а *единственность, совместимость и равномерность по уровням* этих нулетемпературных центров — именно те свойства, которые нужны для точного patching или для collapse всего shell-image compactum.

13.9. Coarse-graining и projective stability нулетемпературного коллапса

Низкотемпературный коллапс на каждом фиксированном уровне сам по себе ещё не даёт совместимости между уровнями. Но одна существенная часть этой совместимости всё же является строгой теоремой: детерминистическая концентрация автоматически устойчива относительно любых 1-липшицевых фактор-отображений. Для shell-image compacta такими отображениями служат именно операторы ограничения на меньшие подпространства.

Предложение 13.42 (Coarse-graining inequalities for energy and entropy). Пусть $K' \subset V'$ и $K \subset V$ — непустые компакты в конечномерных нормированных пространствах, а

$$R : K' \rightarrow K$$

— борелево отображение, удовлетворяющее

$$\|R(A) - R(B)\| \leq L\|A - B\| \quad (A, B \in K')$$

для некоторого $L \geq 0$. Тогда для всякой борелевской вероятности σ' на K' выполняется

$$\mathcal{E}_K(R_{\#}\sigma') \leq L^2 \mathcal{E}_{K'}(\sigma').$$

Если, кроме того, ρ' — борелевская вероятность на K' и $\rho := R_{\#}\rho'$, то

$$\text{Ent}(R_{\#}\sigma' \mid \rho) \leq \text{Ent}(\sigma' \mid \rho').$$

В частности, если $L \leq 1$, то для каждого $\tau > 0$

$$\mathcal{F}_{K,\rho,\tau}(R_{\#}\sigma') \leq \mathcal{F}_{K',\rho',\tau}(\sigma'),$$

и потому

$$\inf_{\mu \in \mathcal{P}(K)} \mathcal{F}_{K,\rho,\tau}(\mu) \leq \inf_{\sigma \in \mathcal{P}(K')} \mathcal{F}_{K',\rho',\tau}(\sigma).$$

Доказательство. Для энергетической части просто расписываем push-forward:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K(R_{\#}\sigma') &= \iint_{K \times K} \|A - B\|^2 \, d(R_{\#}\sigma')(A) \, d(R_{\#}\sigma')(B) \\ &= \iint_{K' \times K'} \|R(A) - R(B)\|^2 \, d\sigma'(A) \, d\sigma'(B) \\ &\leq L^2 \iint_{K' \times K'} \|A - B\|^2 \, d\sigma'(A) \, d\sigma'(B) = L^2 \mathcal{E}_{K'}(\sigma'). \end{aligned}$$

Для энтропии, если $\sigma' \not\ll \rho'$, то правая часть равна $+\infty$ и утверждение тривиально. Поэтому можно считать, что

$$\sigma' = f \rho'$$

для некоторой неотрицательной функции $f \in L^1(\rho')$ с $\int f \, d\rho' = 1$. Пусть

$$\mathcal{G} := R^{-1}\mathcal{B}(K), \quad g := \mathbf{E}_{\rho'}[f \mid \mathcal{G}].$$

Так как g является $\mathcal{G}$ -измеримой функцией, существует борелевская функция $h : K \rightarrow [0, \infty)$ такая, что

$$g = h \circ R \quad \rho'\text{-н.в.}$$

Для любого борелевского множества $E \subseteq K$ имеем

$$\int_E h \, d\rho = \int_{R^{-1}(E)} g \, d\rho' = \int_{R^{-1}(E)} f \, d\rho' = \sigma'(R^{-1}(E)) = (R_{\#}\sigma')(E),$$

откуда

$$h = \frac{d(R_{\#}\sigma')}{d\rho}.$$

Следовательно,

$$\text{Ent}(R_{\#}\sigma' \mid \rho) = \int_K h \log h \, d\rho = \int_{K'} g \log g \, d\rho'.$$

Функция $t \mapsto t \log t$ выпукла на $[0, \infty)$, поэтому по условному неравенству Йенсена

$$\int_{K'} g \log g \, d\rho' \leq \int_{K'} f \log f \, d\rho' = \text{Ent}(\sigma' \mid \rho').$$

Это и есть искомая оценка. Последнее утверждение непосредственно следует из двух уже доказанных неравенств. ■

Теорема 13.43 (Projective stability низкотемпературной детерминистической концентрации). Пусть выполнены гипотезы предложения 13.42, причём ρ' имеет полную поддержку на K' . Для каждого $\tau > 0$ пусть σ'_τ — некоторый минимизатор функционала

$$\mathcal{F}_{K', \rho', \tau}.$$

Положим

$$\mu_\tau := R_\# \sigma'_\tau.$$

Тогда:

(i)

$$\mathcal{E}_K(\mu_\tau) \longrightarrow 0 \quad (\tau \downarrow 0);$$

(ii) если $A'_\tau \in K'$ выбрана по лемме 13.36 для меры σ'_τ , то для каждого $s > 0$

$$\mu_\tau(K \setminus B(R(A'_\tau), s)) \leq \frac{L^2 \mathcal{E}_{K'}(\sigma'_\tau)}{s^2};$$

(iii) для всякой последовательности $\tau_j \downarrow 0$ существует подпоследовательность $\tau_{j_k} \downarrow 0$ и точка $A_* \in K$ такие, что

$$R(A'_{\tau_{j_k}}) \longrightarrow A_* \quad \text{и} \quad \mu_{\tau_{j_k}} \xrightarrow{w^*} \delta_{A_*}.$$

Доказательство. (i) По предложению 13.42

$$\mathcal{E}_K(\mu_\tau) \leq L^2 \mathcal{E}_{K'}(\sigma'_\tau),$$

а правая часть стремится к нулю по теореме 13.39(i).

(ii) Если $L = 0$, то отображение R постоянно, и утверждение очевидно. Пусть теперь $L > 0$. Если $B \in K'$ такова, что

$$\|R(B) - R(A'_\tau)\| > s,$$

то из липшицевости R следует

$$\|B - A'_\tau\| > \frac{s}{L}.$$

Значит,

$$R^{-1}(K \setminus B(R(A'_\tau), s)) \subseteq K' \setminus B\left(A'_\tau, \frac{s}{L}\right),$$

и потому по предложению 13.37

$$\begin{aligned} \mu_\tau(K \setminus B(R(A'_\tau), s)) &= \sigma'_\tau(R^{-1}(K \setminus B(R(A'_\tau), s))) \\ &\leq \sigma'_\tau\left(K' \setminus B\left(A'_\tau, \frac{s}{L}\right)\right) \\ &\leq \frac{\mathcal{E}_{K'}(\sigma'_\tau)}{(s/L)^2} = \frac{L^2 \mathcal{E}_{K'}(\sigma'_\tau)}{s^2}. \end{aligned}$$

(iii) По компактности K из любой последовательности $(R(A'_{\tau_j}))$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность; обозначим её предел через A_* . Пусть $f \in C(K)$ и $r > 0$. Тогда

$$\left| \int_K f \, d\mu_{\tau_{j_k}} - f(R(A'_{\tau_{j_k}})) \right| \leq \omega_f(r) + 2 \|f\|_\infty \mu_{\tau_{j_k}}(K \setminus B(R(A'_{\tau_{j_k}}), r)),$$

где ω_f — модуль непрерывности f . По пункту (ii) и теореме 13.39(i) второй член стремится к нулю. Затем $k \rightarrow \infty$ даёт

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \int_K f \, d\mu_{\tau_{j_k}} - f(R(A'_{\tau_{j_k}})) \right| \leq \omega_f(r),$$

а после перехода $r \downarrow 0$ получаем

$$\int_K f \, d\mu_{\tau_{j_k}} - f(R(A'_{\tau_{j_k}})) \rightarrow 0.$$

Так как $R(A'_{\tau_{j_k}}) \rightarrow A_*$, имеем

$$f(R(A'_{\tau_{j_k}})) \rightarrow f(A_*),$$

следовательно,

$$\int_K f \, d\mu_{\tau_{j_k}} \rightarrow f(A_*).$$

Это и означает weak^* -сходимость $\mu_{\tau_{j_k}} \rightarrow \delta_{A_*}$. ■

Следствие 13.44 (Restriction maps automatically preserve deterministic collapse). Пусть

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

— возрастающая цепочка конечномерных подпространств, и для $m > n$ обозначим через

$$R_n^m : \text{Sym}^2(E_m^*) \rightarrow \text{Sym}^2(E_n^*)$$

оператор ограничения

$$R_n^m(A) := A|_{E_n \times E_n}.$$

Тогда $\|R_n^m\| \leq 1$. Если $\mathcal{K}_m \subset \text{Sym}^2(E_m^*)$ — *shell-image compactum* уровня m , ρ_m — вероятность с полной поддержкой на $\mathcal{K}_m$, а

$$\sigma_{m,\tau} \in \text{Argmin } \mathcal{F}_{\mathcal{K}_m, \rho_m, \tau}$$

и $A_{m,\tau} \in \mathcal{K}_m$ выбрана по лемме 13.36, то для каждого $n < m$ и каждого $s > 0$

$$(R_n^m)_{\#} \sigma_{m,\tau}(\mathcal{K}_n^{(m)} \setminus B(R_n^m(A_{m,\tau}), s)) \leq \frac{\mathcal{E}_{\mathcal{K}_m}(\sigma_{m,\tau})}{s^2},$$

где

$$\mathcal{K}_n^{(m)} := R_n^m(\mathcal{K}_m) \subset \text{Sym}^2(E_n^*).$$

В частности, для любого фиксированного $n < m$ всякая нулетемпературная подпоследовательность индуцирует на уровне n weak^* -сходящуюся к дираковской мере последовательность *coarse-grained laws*. **Доказательство.** Оператор ограничения имеет норму не больше 1 по определению операторной нормы. Поэтому остаётся применить теорему 13.43 к $K' = \mathcal{K}_m$, $K = \mathcal{K}_n^{(m)}$ и $R = R_n^m$. ■

Замечание 13.45. Следствие 13.44 закрывает важную часть межуровневой задачи. Projective deterministic collapse больше не является conjectural: он уже доказан. Открытым остаётся более

тонкий вопрос — совпадают ли эти проектированные дираковские пределы с *канонически* выбранными центрами нижних уровней и можно ли добиться *суммируемого* контроля разностей

$$\eta_n := \|A_{n+1}|_{E_n \times E_n} - A_n\|.$$

Ровно этот хвостовой контроль, по следствию 17.7, уже был бы достаточен для полного patching.

13.10. Якорные entropic selectors, exposed points и канонический projective choice

Projective deterministic collapse сам по себе ещё оставляет неоднозначность: на каждом фиксированном уровне он даёт лишь существование дираковских пределов, но не указывает, *какой именно* центр должен считаться каноническим. Следующий ход устраняет эту неоднозначность на чисто конечномерном уровне. Идея состоит в том, чтобы добавить к функционалу малый линейный «якорь», который в нулетемпературном пределе выбирает не произвольный дираковский предел, а именно *maximizer* заранее заданного линейного функционала на shell-image compactum. Если такие якоря совместимы относительно restriction maps, то projective identification превращается из conjectural узла в строгую теорему.

Определение 13.46. Пусть $K \subset V$ — непустой компакт в конечномерном нормированном пространстве, ρ — борелевская вероятность на K с полной поддержкой, $\tau > 0$, $\lambda > 0$, а

$$\Lambda \in V^*$$

— непрерывный линейный функционал. Для $\sigma \in \mathcal{P}(K)$ положим

$$\mathcal{F}_{K,\rho,\tau}^{\Lambda,\lambda}(\sigma) := \mathcal{E}_K(\sigma) + \tau \operatorname{Ent}(\sigma \mid \rho) - \lambda \int_K \Lambda(A) \, d\sigma(A).$$

Минимайзер этого функционала будем называть *якорным entropic selector-ом* для данных $(K, \rho, \tau, \Lambda, \lambda)$.

Теорема 13.47 (Якорный entropic selector и его Gibbs-формула). Пусть $K \subset V$, ρ, Λ, λ как выше, а

$$D := \operatorname{diam}(K), \quad M_\Lambda := \sup_{A \in K} \Lambda(A), \quad m_\Lambda := \inf_{A \in K} \Lambda(A).$$

Тогда для каждого $\tau > 0$:

- (i) функционал $\mathcal{F}_{K,\rho,\tau}^{\Lambda,\lambda}$ имеет по крайней мере один минимизатор $\sigma_\tau^{\Lambda,\lambda}$;
- (ii) каждый такой минимизатор абсолютно непрерывен относительно ρ и имеет плотность

$$\frac{d\sigma_\tau^{\Lambda,\lambda}}{d\rho}(A) = Z_{\tau,\Lambda,\lambda}^{-1} \exp\left(\frac{\lambda\Lambda(A) - 2U_\tau(A)}{\tau}\right) \quad (\rho\text{-п.в. } A \in K),$$

где

$$U_\tau(A) := \int_K \|A - B\|^2 \, d\sigma_\tau^{\Lambda,\lambda}(B)$$

и $Z_{\tau,\Lambda,\lambda} > 0$ — нормирующая константа;

- (iii) каждый минимизатор имеет полную поддержку на K ; более того, для любого борелевского множества $E \subseteq K$

$$\sigma_\tau^{\Lambda,\lambda}(E) \geq \exp\left(-\frac{2D^2 + \lambda(M_\Lambda - m_\Lambda)}{\tau}\right) \rho(E).$$

Доказательство. (i) Компактность $\mathcal{P}(K)$ в слабой топологии и слабая полунепрерывность снизу энтропии те же, что и в теореме 13.26. Дополнительный член

$$\sigma \longmapsto -\lambda \int_K \Lambda(A) \, d\sigma(A)$$

является слабонепрерывным, поскольку $\Lambda|_K$ непрерывна и ограничена. Поэтому минимум достигается.

(ii) Зафиксируем минимизатор $\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} = f_\tau \rho$. Как и в доказательстве теоремы 13.26, сначала покажем, что $f_\tau > 0$ ρ -почти всюду. Если бы множество

$$E := \{A \in K : f_\tau(A) = 0\}$$

имело положительную ρ -меру, то, перенося бесконечно малую массу с множества положительной $\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}$ -меры на E , мы изменили бы и энергетический член, и линейный якорный член лишь на $O(\varepsilon)$, тогда как энтропия уменьшилась бы на величину $\varepsilon \log \varepsilon + O(\varepsilon)$; для малых ε это противоречит минимальности. Значит, $f_\tau > 0$ ρ -п.в.

Теперь можно брать вариации $f_\tau(1 + th)$ с ограниченной h , удовлетворяющей

$$\int_K h f_\tau \, d\rho = 0.$$

Дифференцируя в точке минимума $t = 0$, получаем

$$\int_K \left(2U_\tau(A) + \tau(1 + \log f_\tau(A)) - \lambda\Lambda(A) \right) h(A) f_\tau(A) \, d\rho(A) = 0$$

для всех таких h . Следовательно,

$$2U_\tau(A) + \tau(1 + \log f_\tau(A)) - \lambda\Lambda(A) = c_{\tau, \Lambda, \lambda} \quad (\rho\text{-п.в. } A \in K)$$

с некоторой константой $c_{\tau, \Lambda, \lambda} \in \mathbf{R}$, то есть

$$f_\tau(A) = Z_{\tau, \Lambda, \lambda}^{-1} \exp\left(\frac{\lambda\Lambda(A) - 2U_\tau(A)}{\tau}\right).$$

(iii) Для всякого $A \in K$ имеем

$$0 \leq U_\tau(A) \leq D^2 \quad \text{и} \quad m_\Lambda \leq \Lambda(A) \leq M_\Lambda.$$

Отсюда

$$\lambda m_\Lambda - 2D^2 \leq \lambda\Lambda(A) - 2U_\tau(A) \leq \lambda M_\Lambda.$$

Следовательно,

$$Z_{\tau, \Lambda, \lambda} = \int_K \exp\left(\frac{\lambda\Lambda(A) - 2U_\tau(A)}{\tau}\right) \, d\rho(A) \leq e^{\lambda M_\Lambda / \tau},$$

а потому

$$\frac{d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}}{d\rho}(A) \geq \exp\left(\frac{\lambda m_\Lambda - 2D^2 - \lambda M_\Lambda}{\tau}\right) = \exp\left(-\frac{2D^2 + \lambda(M_\Lambda - m_\Lambda)}{\tau}\right)$$

ρ -почти всюду. Интегрирование по E даёт требуемую оценку. В частности, всякое непустое открытое подмножество K имеет положительную $\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}$ -меру, то есть

$$\text{supp } \sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} = K.$$

■

Предложение 13.48 (Локализованный competitor около якорного maximizer-a). В условиях теоремы 13.47 положим

$$\beta_\rho(r) := \inf_{A \in K} \rho(B(A, r)) \quad (r > 0)$$

и

$$\omega_\Lambda(r) := \sup\{|\Lambda(A) - \Lambda(B)| : A, B \in K, \|A - B\| \leq r\}.$$

Тогда для любого якорного entropic selector-a $\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}$ выполнены оценки

$$\mathcal{E}_K(\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}) \leq \inf_{r>0} \left(4r^2 + \tau \log \frac{1}{\beta_\rho(r)} + \lambda \omega_\Lambda(r) \right)$$

и

$$M_\Lambda - \int_K \Lambda(A) \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}(A) \leq \inf_{r>0} \left(\omega_\Lambda(r) + \frac{4r^2}{\lambda} + \frac{\tau}{\lambda} \log \frac{1}{\beta_\rho(r)} \right).$$

В частности,

$$\omega_\Lambda(r) \leq \|\Lambda\| r \quad (r > 0).$$

Доказательство. Зафиксируем точку $A_* \in K$, на которой достигается максимум:

$$\Lambda(A_*) = M_\Lambda.$$

Пусть $r > 0$ таково, что $\rho(B(A_*, r)) > 0$, и рассмотрим локализованную вероятность

$$\rho_{A_*, r} := \frac{\rho|_{B(A_*, r)}}{\rho(B(A_*, r))}.$$

Если $A, B \in B(A_*, r)$, то $\|A - B\| \leq 2r$, так что

$$\mathcal{E}_K(\rho_{A_*, r}) \leq 4r^2.$$

Кроме того,

$$\text{Ent}(\rho_{A_*, r} \mid \rho) = \log \frac{1}{\rho(B(A_*, r))},$$

а из определения $\omega_\Lambda(r)$ следует

$$\Lambda(A) \geq M_\Lambda - \omega_\Lambda(r) \quad (A \in B(A_*, r)),$$

поэтому

$$\int_K \Lambda(A) \, d\rho_{A_*, r}(A) \geq M_\Lambda - \omega_\Lambda(r).$$

По минимальности $\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K(\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}) + \tau \text{Ent}(\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} \mid \rho) - \lambda \int_K \Lambda \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} \\ \leq \mathcal{E}_K(\rho_{A_*, r}) + \tau \text{Ent}(\rho_{A_*, r} \mid \rho) - \lambda \int_K \Lambda \, d\rho_{A_*, r} \end{aligned}$$

$$\leq 4r^2 + \tau \log \frac{1}{\rho(B(A_*, r))} - \lambda(M_\Lambda - \omega_\Lambda(r)).$$

Так как

$$\text{Ent}(\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} \mid \rho) \geq 0 \quad \text{и} \quad \int_K \Lambda \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} \leq M_\Lambda,$$

получаем

$$\mathcal{E}_K(\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}) \leq 4r^2 + \tau \log \frac{1}{\rho(B(A_*, r))} + \lambda \omega_\Lambda(r).$$

Беря инфимум сначала по всем maximizer-ам A_* , а затем по $r > 0$, заключаем первую оценку.

Для второй оценки используем только неравенство

$$\mathcal{E}_K(\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}) + \tau \text{Ent}(\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} \mid \rho) \geq 0,$$

которое вместе с предыдущим сравнением даёт

$$-\lambda \int_K \Lambda \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} \leq 4r^2 + \tau \log \frac{1}{\rho(B(A_*, r))} - \lambda(M_\Lambda - \omega_\Lambda(r)).$$

После переноса членов получаем

$$M_\Lambda - \int_K \Lambda \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} \leq \omega_\Lambda(r) + \frac{4r^2}{\lambda} + \frac{\tau}{\lambda} \log \frac{1}{\rho(B(A_*, r))}.$$

Остаётся взять инфимум по A_* и r .

Наконец, поскольку Λ линейна и непрерывна на V , то для $\|A - B\| \leq r$

$$|\Lambda(A) - \Lambda(B)| \leq \|\Lambda\| \|A - B\| \leq \|\Lambda\| r,$$

откуда

$$\omega_\Lambda(r) \leq \|\Lambda\| r.$$

■

Теорема 13.49 (Нулевая температура выбирает maximizer-ы якоря). Пусть $K \subset V$ — непустой компакт, ρ — вероятность с полной поддержкой на K , $\Lambda \in V^*$, $\lambda > 0$, а

$$\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} \in \arg \min_{K, \rho, \tau} \mathcal{F}_{K, \rho, \tau}^{\Lambda, \lambda} \quad (\tau > 0).$$

Тогда:

(i)

$$\mathcal{E}_K(\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}) \longrightarrow 0 \quad (\tau \downarrow 0);$$

(ii)

$$\int_K \Lambda(A) \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}(A) \longrightarrow M_\Lambda \quad (\tau \downarrow 0);$$

(iii) если $A_\tau \in K$ выбрана по лемме 13.36 для меры $\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}$, то для всякой последовательности $\tau_j \downarrow 0$ существует подпоследовательность $\tau_{j_k} \downarrow 0$ и точка

$$A_* \in \underset{A \in K}{\text{Argmax}} \, \Lambda(A)$$

такие, что

$$A_{\tau_{j_k}} \longrightarrow A_* \quad \text{и} \quad \sigma_{\tau_{j_k}}^{\Lambda, \lambda} \xrightarrow{w^*} \delta_{A_*};$$

(iv) если множество *taximizer*-ов $\text{Argmax}_K \Lambda$ состоит из одной точки A_Λ , то

$$\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} \xrightarrow{w^*} \delta_{A_\Lambda}, \quad q_\tau^{\Lambda, \lambda} := \int_K A \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}(A) \longrightarrow A_\Lambda,$$

и, кроме того, любая семейство точек A_τ , выбранных по лемме 13.36, удовлетворяет

$$A_\tau \longrightarrow A_\Lambda.$$

Доказательство. (i) По предложению 13.48 для каждого $r > 0$ имеем

$$\mathcal{E}_K(\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}) \leq 4r^2 + \tau \log \frac{1}{\beta_\rho(r)} + \lambda \omega_\Lambda(r).$$

Переходя к верхнему пределу по $\tau \downarrow 0$, получаем

$$\limsup_{\tau \downarrow 0} \mathcal{E}_K(\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}) \leq 4r^2 + \lambda \omega_\Lambda(r).$$

Так как $\omega_\Lambda(r) \rightarrow 0$ при $r \downarrow 0$, заключаем, что

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \mathcal{E}_K(\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}) = 0.$$

(ii) По второй оценке из предложения 13.48

$$0 \leq M_\Lambda - \int_K \Lambda \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} \leq \omega_\Lambda(r) + \frac{4r^2}{\lambda} + \frac{\tau}{\lambda} \log \frac{1}{\beta_\rho(r)}.$$

Сначала устремляя $\tau \downarrow 0$, затем $r \downarrow 0$, получаем

$$\int_K \Lambda \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} \rightarrow M_\Lambda.$$

(iii) По компактности K из любой последовательности (A_{τ_j}) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность:

$$A_{\tau_{j_k}} \rightarrow A_* \in K.$$

Далее, как и в доказательстве теоремы 13.39, из пункта (i) и предложения 13.37 следует

$$\sigma_{\tau_{j_k}}^{\Lambda, \lambda} \xrightarrow{w^*} \delta_{A_*}.$$

Теперь функция $\Lambda|_K$ непрерывна, поэтому

$$\int_K \Lambda \, d\sigma_{\tau_{j_k}}^{\Lambda, \lambda} \longrightarrow \Lambda(A_*).$$

Но по пункту (ii) левая часть стремится к M_Λ , следовательно,

$$\Lambda(A_*) = M_\Lambda,$$

то есть $A_* \in \text{Argmax}_K \Lambda$.

(iv) Если *taximizer* единственен, то всякая нулетемпературная подпоследовательность из пункта (iii) имеет один и тот же предел δ_{A_Λ} ; значит, к нему сходится вся семья

$$\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda} \xrightarrow{w^*} \delta_{A_\Lambda}.$$

Сходимость барицентров

$$q_\tau^{\Lambda, \lambda} \rightarrow A_\Lambda$$

следует из следствия 13.38 и пункта (i). Наконец, если бы существовала последовательность $\tau_j \downarrow 0$ такая, что $A_{\tau_j} \not\rightarrow A_\Lambda$, то по компактности из неё можно было бы выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $B \neq A_\Lambda$; пункт (iii) тогда дал бы

$$\sigma_{\tau_{j_k}}^{\Lambda, \lambda} \xrightarrow{w^*} \delta_B,$$

что противоречит уже доказанной сходимости к δ_{A_Λ} . ■

Следствие 13.50 (Количественная концентрация около quantitatively exposed maximizer-a). Пусть в условиях теоремы 13.49 множество maximizer-ов состоит из одной точки A_Λ , и существует неубывающая функция

$$\psi : [0, D] \rightarrow [0, \infty), \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(t) > 0 \text{ при } t > 0,$$

такая, что

$$M_\Lambda - \Lambda(A) \geq \psi(\|A - A_\Lambda\|) \quad (A \in K).$$

Тогда для каждого $r \in (0, D]$

$$\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}(K \setminus B(A_\Lambda, r)) \leq \frac{M_\Lambda - \int_K \Lambda \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}}{\psi(r)}$$

и, следовательно,

$$\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}(K \setminus B(A_\Lambda, r)) \leq \frac{1}{\psi(r)} \inf_{s>0} \left(\omega_\Lambda(s) + \frac{4s^2}{\lambda} + \frac{\tau}{\lambda} \log \frac{1}{\beta_\rho(s)} \right).$$

Кроме того, если

$$q_\tau^{\Lambda, \lambda} := \int_K A \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}(A),$$

то

$$\|q_\tau^{\Lambda, \lambda} - A_\Lambda\| \leq r + \text{diam}(K) \frac{1}{\psi(r)} \inf_{s>0} \left(\omega_\Lambda(s) + \frac{4s^2}{\lambda} + \frac{\tau}{\lambda} \log \frac{1}{\beta_\rho(s)} \right).$$

Доказательство. На множестве $K \setminus B(A_\Lambda, r)$ по предположению выполнено

$$M_\Lambda - \Lambda(A) \geq \psi(r).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \psi(r) \sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}(K \setminus B(A_\Lambda, r)) &\leq \int_{K \setminus B(A_\Lambda, r)} (M_\Lambda - \Lambda(A)) \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}(A) \\ &\leq M_\Lambda - \int_K \Lambda(A) \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}(A), \end{aligned}$$

что и даёт первую оценку. Вторая следует из предложения 13.48.

Для барицентра используем элементарную оценку

$$\begin{aligned} \|q_\tau^{\Lambda, \lambda} - A_\Lambda\| &= \left\| \int_K (A - A_\Lambda) \, d\sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}(A) \right\| \\ &\leq r \sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}(B(A_\Lambda, r)) + \text{diam}(K) \sigma_\tau^{\Lambda, \lambda}(K \setminus B(A_\Lambda, r)) \end{aligned}$$

$$\leq r + \text{diam}(K) \sigma_{\tau}^{\Lambda, \lambda}(K \setminus B(A_{\Lambda}, r)),$$

после чего остаётся подставить уже полученную хвостовую оценку. ■

Теорема 13.51 (Совместимые exposed anchors решают projective identification). Пусть

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots, \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = X,$$

— возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств, а

$$\mathcal{K}_n := \overline{\{B_x|_{E_n \times E_n} : x \in S_X\}} \subset \text{Sym}^2(E_n^*).$$

Для $n < m$ обозначим через

$$R_n^m : \mathcal{K}_m \rightarrow \mathcal{K}_n, \quad R_n^m(A) := A|_{E_n \times E_n},$$

оператор ограничения.

Предположим, что для каждого n заданы:

- (i) борелевская вероятность ρ_n с полной поддержкой на $\mathcal{K}_n$;
- (ii) число $\lambda_n > 0$;
- (iii) линейный функционал

$$\Lambda_n \in \text{Sym}^2(E_n^*)^*,$$

причём на $\mathcal{K}_{n+1}$ выполнено тождество совместимости

$$\Lambda_n(R_n^{n+1}(A)) = \Lambda_{n+1}(A) \quad (A \in \mathcal{K}_{n+1}),$$

и ограничение $\Lambda_n|_{\mathcal{K}_n}$ имеет единственный maximizer

$$A_n^{\sharp} \in \mathcal{K}_n.$$

Тогда:

- (a) для всех n

$$R_n^{n+1}(A_{n+1}^{\sharp}) = A_n^{\sharp};$$

- (b) если для каждого фиксированного n и каждого $\tau > 0$

$$\sigma_{n,\tau}^{\sharp} \in \arg \min_{\mathcal{K}_n, \rho_n, \tau} \mathcal{F}_{\Lambda_n, \lambda_n}^{\Lambda_n, \lambda_n},$$

то

$$\sigma_{n,\tau}^{\sharp} \xrightarrow{w^*} \delta_{A_n^{\sharp}} \quad (\tau \downarrow 0)$$

и

$$q_{n,\tau}^{\sharp} := \int_{\mathcal{K}_n} A \, d\sigma_{n,\tau}^{\sharp}(A) \longrightarrow A_n^{\sharp} \quad (\tau \downarrow 0);$$

- (c) если

$$\varepsilon_n := \sup_{x \in S_X} \|(B_x - A_n^{\sharp})|_{E_n \times E_n}\|,$$

то из условия

$$\bar{\varepsilon} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n < 1$$

следует оценка

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1 + \bar{\varepsilon}}{1 - \bar{\varepsilon}}},$$

а из условия $\varepsilon_n \rightarrow 0$ следует, что X линейно изометрично гильбертову пространству.

Доказательство. (а) Заметим сначала, что отображение R_n^{n+1} сюръективно. Действительно, возьмём произвольную точку $B \in \mathcal{K}_n$. По определению $\mathcal{K}_n$ существует последовательность $(x_j) \subset S_X$ такая, что

$$B_{x_j}|_{E_n \times E_n} \longrightarrow B \quad \text{в } \text{Sym}^2(E_n^*).$$

Последовательность

$$A_j := B_{x_j}|_{E_{n+1} \times E_{n+1}}$$

лежит в ограниченном подмножестве конечномерного пространства $\text{Sym}^2(E_{n+1}^*)$, а потому имеет сходящуюся подпоследовательность $A_{j_k} \rightarrow A \in \mathcal{K}_{n+1}$. По непрерывности оператора ограничения получаем

$$R_n^{n+1}(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_n^{n+1}(A_{j_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} B_{x_{j_k}}|_{E_n \times E_n} = B.$$

Следовательно, R_n^{n+1} сюръективно.

Отсюда

$$\max_{B \in \mathcal{K}_n} \Lambda_n(B) = \max_{A \in \mathcal{K}_{n+1}} \Lambda_n(R_n^{n+1}(A)) = \max_{A \in \mathcal{K}_{n+1}} \Lambda_{n+1}(A).$$

Поэтому образ $R_n^{n+1}(A_{n+1}^\sharp)$ является *maximizer*-ом функции Λ_n на $\mathcal{K}_n$. По единственности *maximizer*-а получаем

$$R_n^{n+1}(A_{n+1}^\sharp) = A_n^\sharp.$$

(b) Это прямое применение теоремы 13.49 на каждом фиксированном уровне n .

(c) Остаётся применить следствие 17.11 с

$$q_n := A_n^\sharp.$$

■

Замечание 13.52. Теорема 13.51 не решает всю центральную проблему, но она замыкает идентификационную часть нулетемпературного узла: как только на конечномерных shell-image compacta найдены совместимые exposed anchors, канонические projective centers уже не требуют отдельного выбора и автоматически становятся совместимыми. Тем самым оставшаяся трудность концентрируется не в projective identification как таковом, а в *внутреннем* построении таких якорей и в доказательстве того, что выбранные ими центры действительно asymptotically collapse-ируют всё shell-image compactum.

13.11. Почти-совместимые exposed anchors и количественная projective coherence

Точная совместимость anchors, использованная в теореме 13.51, естественна, но для продвижения к полной rotation problem избыточно жёстка. Для patching по теореме 17.6 достаточно уже суммируемой межуровневой almost-coherence. Следующий результат показывает, что именно она автоматически следует из двух более гибких данных: количественного экспонирования *maximizer*-ов и малости дефекта совместимости самих anchors.

Лемма 13.53 (Сюръективность операторов ограничения). Пусть

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots, \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = X,$$

и

$$\mathcal{K}_n := \overline{\{B_x|_{E_n \times E_n} : x \in S_X\}} \subset \text{Sym}^2(E_n^*).$$

Тогда для любых $m \geq n$ оператор ограничения

$$R_n^m : \mathcal{K}_m \rightarrow \mathcal{K}_n, \quad R_n^m(A) := A|_{E_n \times E_n},$$

является сюръективным. **Доказательство.** Зафиксируем $B \in \mathcal{K}_n$. По определению $\mathcal{K}_n$ существует последовательность $(x_j) \subset S_X$ такая, что

$$B_{x_j}|_{E_n \times E_n} \longrightarrow B \quad \text{в } \text{Sym}^2(E_n^*).$$

Последовательность

$$A_j := B_{x_j}|_{E_m \times E_m}$$

лежит в ограниченном подмножестве конечномерного пространства $\text{Sym}^2(E_m^*)$; следовательно, из неё можно выбрать подпоследовательность $A_{j_k} \rightarrow A \in \mathcal{K}_m$. По непрерывности оператора ограничения

$$R_n^m(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_n^m(A_{j_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} B_{x_{j_k}}|_{E_n \times E_n} = B.$$

Значит, R_n^m сюръективно. ■

Теорема 13.54 (Почти-совместимые quantitatively exposed anchors дают summable coherence). Пусть

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots, \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = X,$$

— возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств, а

$$\mathcal{K}_n := \overline{\{B_x|_{E_n \times E_n} : x \in S_X\}} \subset \text{Sym}^2(E_n^*).$$

Для каждого n пусть задан линейный функционал

$$\Lambda_n \in \text{Sym}^2(E_n^*)^*$$

с единственным maximizer-ом

$$A_n^\# \in \mathcal{K}_n, \quad M_n := \Lambda_n(A_n^\#) = \max_{A \in \mathcal{K}_n} \Lambda_n(A).$$

Предположим, что для каждого n существует неубывающая функция

$$\psi_n : [0, D_n] \rightarrow [0, \infty), \quad D_n := \text{diam}(\mathcal{K}_n), \quad \psi_n(0) = 0, \quad \psi_n(t) > 0 \text{ при } t > 0,$$

такая, что

$$M_n - \Lambda_n(A) \geq \psi_n(\|A - A_n^\#\|) \quad (A \in \mathcal{K}_n).$$

Для $t \geq 0$ положим

$$\psi_n^\dagger(t) := \sup\{r \in [0, D_n] : \psi_n(r) \leq t\}.$$

Наконец, обозначим через

$$\delta_n := \sup_{A \in \mathcal{K}_{n+1}} |\Lambda_n(R_n^{n+1}(A)) - \Lambda_{n+1}(A)|$$

дефект совместимости соседних *anchors*. Тогда:

(i) для всех n

$$\psi_n(\|R_n^{n+1}(A_{n+1}^\sharp) - A_n^\sharp\|) \leq 2\delta_n,$$

и, следовательно,

$$\|R_n^{n+1}(A_{n+1}^\sharp) - A_n^\sharp\| \leq \psi_n^\dagger(2\delta_n);$$

(ii) если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^\dagger(2\delta_n) < \infty$$

и

$$\varepsilon_n := \sup_{x \in S_X} \|(B_x - A_n^\sharp)|_{E_n \times E_n}\|,$$

то из условия

$$\bar{\varepsilon} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n < 1$$

следует оценка

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1 + \bar{\varepsilon}}{1 - \bar{\varepsilon}}},$$

а из условия $\varepsilon_n \rightarrow 0$ следует, что X линейно изометрично гильбертову пространству.

Доказательство. (i) Пусть n фиксировано. По лемме 13.53 оператор R_n^{n+1} сюръективен. Поэтому для любого $B \in \mathcal{K}_n$ можно выбрать $A \in \mathcal{K}_{n+1}$ с $R_n^{n+1}(A) = B$, и тогда

$$\Lambda_{n+1}(A) \geq \Lambda_n(B) - \delta_n.$$

Переходя к супремуму по $B \in \mathcal{K}_n$, получаем

$$M_{n+1} \geq M_n - \delta_n.$$

С другой стороны, применяя определение δ_n к $A_{n+1}^\sharp$, имеем

$$\Lambda_n(R_n^{n+1}(A_{n+1}^\sharp)) \geq \Lambda_{n+1}(A_{n+1}^\sharp) - \delta_n = M_{n+1} - \delta_n \geq M_n - 2\delta_n.$$

Следовательно,

$$M_n - \Lambda_n(R_n^{n+1}(A_{n+1}^\sharp)) \leq 2\delta_n.$$

Подставляя это в quantitative exposure inequality для Λ_n , получаем

$$\psi_n(\|R_n^{n+1}(A_{n+1}^\sharp) - A_n^\sharp\|) \leq 2\delta_n.$$

По определению $\psi_n^\dagger$ отсюда следует

$$\|R_n^{n+1}(A_{n+1}^\sharp) - A_n^\sharp\| \leq \psi_n^\dagger(2\delta_n).$$

(ii) Положим

$$q_n := A_n^\sharp, \quad \eta_n := \psi_n^\dagger(2\delta_n).$$

Тогда по пункту (i)

$$\|q_{n+1}|_{E_n \times E_n} - q_n\| \leq \eta_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Кроме того, для $u \in E_n$, $u \neq 0$, при $x := u/\|u\| \in S_X \cap E_n$ получаем

$$|q_n(u, u) - \|u\|^2| = |(q_n - B_x|_{E_n \times E_n})(u, u)| \leq \varepsilon_n \|u\|^2,$$

то есть

$$(1 - \varepsilon_n) \|u\|^2 \leq q_n(u, u) \leq (1 + \varepsilon_n) \|u\|^2 \quad (u \in E_n).$$

Если $\bar{\varepsilon} < 1$, то после отбрасывания конечного числа начальных уровней можно считать, что $\varepsilon_n < 1$ для всех n ; это не меняет ни плотности объединения, ни заключения. Поэтому гипотезы теоремы 17.6 выполнены с

$$a_n := 1 - \varepsilon_n, \quad b_n := 1 + \varepsilon_n.$$

Так как

$$s_n := \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k \longrightarrow 0,$$

имеем

$$a_\Sigma = \liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon_n - s_n) \geq 1 - \bar{\varepsilon}, \quad b_\Sigma = \limsup_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon_n + s_n) \leq 1 + \bar{\varepsilon}.$$

Следовательно, по теореме 17.6

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{b_\Sigma}{a_\Sigma}} \leq \sqrt{\frac{1 + \bar{\varepsilon}}{1 - \bar{\varepsilon}}}.$$

Если же $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то

$$(1 - \varepsilon_n) - s_n \longrightarrow 1, \quad (1 + \varepsilon_n) + s_n \longrightarrow 1,$$

и та же теорема 17.6(iii) даёт точную гильбертовость. ■

Следствие 13.55 (Anchored entropic barycenters inherit summable coherence). Пусть выполнены гипотезы теоремы 13.54. Предположим дополнительно, что для каждого n задана борелевская вероятность ρ_n с полной поддержкой на $\mathcal{X}_n$, число $\lambda_n > 0$ и для каждого $\tau > 0$

$$\sigma_{n,\tau}^\# \in \arg \min_{\mathcal{X}_n, \rho_n, \tau} \mathcal{F}_{\mathcal{X}_n, \rho_n, \tau}^{\Lambda_n, \lambda_n}.$$

Обозначим через

$$q_{n,\tau}^\# := \int_{\mathcal{X}_n} A \, d\sigma_{n,\tau}^\#(A)$$

их барицентры и введём функцию

$$\Theta_n(\tau) := \inf_{r \in (0, D_n]} \left[r + D_n \frac{1}{\psi_n(r)} \inf_{s > 0} \left(\omega_{\Lambda_n}(s) + \frac{4s^2}{\lambda_n} + \frac{\tau}{\lambda_n} \log \frac{1}{\beta_{\rho_n}(s)} \right) \right].$$

Если $D_n = 0$, то по соглашению полагаем $\Theta_n(\tau) := 0$. Тогда для любых температур $\tau_n > 0$:

(a)

$$\|q_{n,\tau_n}^\# - A_n^\#\| \leq \Theta_n(\tau_n);$$

(b)

$$\|R_n^{n+1}(q_{n+1,\tau_{n+1}}^\#) - q_{n,\tau_n}^\#\| \leq \Theta_{n+1}(\tau_{n+1}) + \psi_n^\dagger(2\delta_n) + \Theta_n(\tau_n);$$

(c) если

$$\varepsilon_n := \sup_{x \in S_X} \|(B_x - A_n^\#)|_{E_n \times E_n}\|,$$

то

$$\sup_{x \in S_X} \|(B_x - q_{n,\tau_n}^\#)|_{E_n \times E_n}\| \leq \varepsilon_n + \Theta_n(\tau_n).$$

В частности, если

$$\varepsilon_n + \Theta_n(\tau_n) \longrightarrow 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n^\dagger(2\delta_n) + \Theta_n(\tau_n)) < \infty,$$

то X линейно изометрично гильбертову пространству.

Доказательство. (а) Это прямое применение следствия 13.50.

(б) По линейности и норме ограничения, не превосходящей 1,

$$\begin{aligned} \|R_n^{n+1}(q_{n+1,\tau_{n+1}}^\#) - q_{n,\tau_n}^\#\| &\leq \|R_n^{n+1}(q_{n+1,\tau_{n+1}}^\# - A_{n+1}^\#)\| \\ &\quad + \|R_n^{n+1}(A_{n+1}^\#) - A_n^\#\| + \|A_n^\# - q_{n,\tau_n}^\#\| \\ &\leq \Theta_{n+1}(\tau_{n+1}) + \psi_n^\dagger(2\delta_n) + \Theta_n(\tau_n), \end{aligned}$$

где использованы пункт (а) и теорема 13.54(i).

(с) Для всякого $x \in S_X$

$$\|(B_x - q_{n,\tau_n}^\#)|_{E_n \times E_n}\| \leq \|(B_x - A_n^\#)|_{E_n \times E_n}\| + \|A_n^\# - q_{n,\tau_n}^\#\|,$$

откуда следует требуемая оценка.

Наконец, при сделанных предположениях последовательность

$$\eta_n := \Theta_{n+1}(\tau_{n+1}) + \psi_n^\dagger(2\delta_n) + \Theta_n(\tau_n)$$

суммируема, а shell-defect

$$\tilde{\varepsilon}_n := \varepsilon_n + \Theta_n(\tau_n)$$

стремится к нулю. Для $u \in E_n$, $u \neq 0$, при $x := u/\|u\| \in S_X \cap E_n$ получаем

$$|q_{n,\tau_n}^\#(u, u) - \|u\|^2| \leq \tilde{\varepsilon}_n \|u\|^2,$$

то есть

$$(1 - \tilde{\varepsilon}_n) \|u\|^2 \leq q_{n,\tau_n}^\#(u, u) \leq (1 + \tilde{\varepsilon}_n) \|u\|^2.$$

После отбрасывания конечного числа начальных уровней можно считать, что $\tilde{\varepsilon}_n < 1$ для всех n . Поэтому к формам

$$q_n := q_{n,\tau_n}^\#$$

применима теорема 17.6 с указанными a_n, b_n, η_n , и так как

$$(1 - \tilde{\varepsilon}_n) - \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k \longrightarrow 1, \quad (1 + \tilde{\varepsilon}_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k \longrightarrow 1,$$

она даёт точную гильбертовость. ■

Замечание 13.56. Теорема 13.54 и следствие 13.55 радикально сужают projective узел нулетемпературной программы. Для конечномерного patching теперь уже не требуется ни exact compatibility anchors, ни отдельная selection theory для projective limit points. Достаточно существенно более мягкого пакета: построить anchors, которые

(а) количественно экспонируют свои maximizer-ы;

(b) совместимы лишь с суммируемым дефектом δ_n ;

(c) и при этом выбирают точки, asymptotically collapsing всё shell-image compactum.

Именно это превращает прежнюю «жесткую» задачу projective identification в более реалистичную программу построения почти-совместимых canonical centers.

13.12. ЖКО-схема: инвариантность следует из единственности

Следующий формальный факт разделяет две логически разные части transport-программы. Сама по себе инвариантность ЖКО-итераций не является глубокой проблемой: как только один шаг ЖКО однозначно разрешим и функционал G -инвариантен, симметрия распространяется автоматически.

Предложение 13.57 (Единственность шага ЖКО влечёт инвариантность). Пусть K — полное сепарабельное метрическое пространство, группа G действует на K изометриями, а функционал

$$F : \mathcal{P}_2(K) \rightarrow (-\infty, +\infty]$$

удовлетворяет инвариантности

$$F(T_{\#}\mu) = F(\mu) \quad (T \in G, \mu \in \mathcal{P}_2(K)).$$

Пусть также $\tau > 0$ и

$$\mu^{k+1} \in \arg \min_{\mu \in \mathcal{P}_2(K)} \left\{ F(\mu) + \frac{1}{2\tau} W_2(\mu, \mu^k)^2 \right\} \quad (k \geq 0)$$

— ЖКО-схема, стартовая из G -инвариантной меры μ^0 . Если на каждом шаге минимум достигается единственным образом, то каждая мера μ^k является G -инвариантной. **Доказательство.** Докажем утверждение по индукции. База $k = 0$ дана. Предположим, что μ^k инвариантна. Для любого $T \in G$ и любой $\mu \in \mathcal{P}_2(K)$ из изометричности действия следует

$$W_2(T_{\#}\mu, \mu^k) = W_2(T_{\#}\mu, T_{\#}\mu^k) = W_2(\mu, \mu^k).$$

Вместе с инвариантностью F это даёт

$$F(T_{\#}\mu) + \frac{1}{2\tau} W_2(T_{\#}\mu, \mu^k)^2 = F(\mu) + \frac{1}{2\tau} W_2(\mu, \mu^k)^2.$$

Следовательно, если μ^{k+1} минимизирует ЖКО-функционал, то и $T_{\#}\mu^{k+1}$ его минимизирует. По единственности минимайзера

$$T_{\#}\mu^{k+1} = \mu^{k+1} \quad (T \in G),$$

то есть μ^{k+1} инвариантна. Индукция завершена. ■

Замечание 13.58. Предложение 13.57 частично закрывает одну из формулировок transport-вопроса: в ЖКО-программе настоящая трудность состоит не в том, чтобы доказать инвариантность итераций, а в том, чтобы обеспечить существование и единственность каждого шага для $\mathcal{E}_S$ или для его энтропийно-регуляризованных вариантов. Как только этот аналитический слой построен, симметрия уже не требует отдельного аргумента.

14. Сопоставление с известными классическими критериями

Оболочечный подход не живёт изолированно. Напротив, он естественно переписывает на языке второго порядка многие уже известные классические факты о rotation problem [4]. В этом разделе мы показываем, как именно наши результаты соотносятся с топологической аменабельностью, микротранзитивностью, стабилизаторами гиперплоскостей и Fraïssé-подходом.

14.1. Топологическая аменабельность как усреднение второго порядка

В известных работах о изометрической части Mazur problem ключевое место занимает следующий принцип: если эквивалентная почти транзитивная норма на гильбертовом пространстве имеет топологически аменабельную группу изометрий, то норма гильбертова [3]. В нашем языке этот факт приобретает более прозрачную форму. Исходный гильбертов скалярный продукт играет роль заранее данной коэрцитивной формы, а усреднение делает её G -инвариантной.

Теорема 8.5 показывает, что *роль этой исходной формы может играть уже одна гессианова оболочка*. Тем самым вопрос «почему нужно иметь заранее гильбертову структуру?» снимается. Единственное, что действительно требуется, — коэрцитивность оболочки.

14.2. Стабилизатор гиперплоскости и одна касательная модель

Известен классический критерий типа: если стабилизатор одной точки действует достаточно однородно на соответствующей поддерживающей гиперплоскости, то пространство гильбертово. Наш язык позволяет увидеть, что здесь на самом деле происходит. Когда стабилизатор $H = \text{Stab}(x_0)$ действует очень однородно на $H_0 = \text{Ker } \phi_{x_0}$, пространство H -инвариантных форм на H_0 резко уменьшается. В предельном случае оно одномерно, и тогда тангенциальная оболочка Q_{x_0} определяется единственным скаляром. Остаётся понять, как поднять эту информацию с гиперплоскости на всё пространство. Именно здесь раньше использовались геометрические аргументы про 1-дополняемость гиперплоскости; у нас эту роль играет representation-theoretic obstruction.

Замечание 14.1. Грубо говоря, классический критерий через стабилизатор гиперплоскости и наш новый критерий через препятствие E^H/E^G решают одну и ту же задачу на двух языках. Первый язык говорит о проекциях и дополняемости, второй — о фиксированных точках представления стабилизатора.

14.3. Микротранзитивность и коэрцитивность оболочки

Нормовая микротранзитивность известна как чрезвычайно сильное свойство. Она влечёт равномерную выпуклость и равномерную гладкость, а единственные известные примеры — гильбертовы пространства [5]. Оболочечный подход подсказывает, почему это должно быть так.

Равномерная гладкость и равномерная выпуклость — это по существу *равномерные* оценки первого и второго порядка. Если дополнительно квадрат нормы принадлежит C^2 вне нуля, то естественно ожидать, что эти оценки превращаются в *равномерную коэрцитивность* оболочек B_x . Тогда наша теорема 8.5 почти автоматически закрывала бы микротранзитивный случай при условии аменабельности. Даже без аменабельности количественная теорема 7.2 объясняет, почему всякая форма «почти константной» оболочки должна вести пространство в сторону гильбертовой геометрии.

14.4. Липшицева транзитивность и порог $\Lambda < 3$

Ещё один независимый количественный барьер был найден Кабельо Санчесом [3]. Напомним, что норма называется Λ -Lipschitz-транзитивной, если для любых $x, y \in S_X$ существует сюръективная линейная изометрия T такая, что $Tx = y$ и

$$\|T - \text{id}\| \leq \Lambda \|x - y\|.$$

Иными словами, действие группы изометрий на сфере является не только открытым, но и допускает глобальный Lipschitz-lifting орбит.

Результат [3, Cor. 2.8] утверждает, что уже условие $\Lambda < 3$ влечёт изоморфическую гильбертовость. Поэтому любой возможный контрпример к isomorphic part of Mazur problem обязан нарушать всякую такую uniform orbit-lifting estimate ниже порога 3. С точки зрения настоящей статьи это особенно показательно: даже очень сильная first-order количественная управляемость орбит всё ещё не даёт точной квадратичности, но она уже настолько сжимает локальную геометрию, что пространство становится изоморфно гильбертову.

Таким образом, оболочечная программа и Lipschitz-transitivity дополняют друг друга. Первая измеряет second-order oscillation поля $x \mapsto B_x$, вторая — uniform first-order controllability самих орбит. Возможный контрпример обязан ускользать одновременно от обоих механизмов: иметь нетривиальную оболочку и в то же время не обладать слишком хорошим Lipschitz-lifting-действием.

14.5. Выпуклая транзитивность и недостаточность первого порядка

Выпуклая транзитивность может быть весьма сильным свойством для геометрии шара, но она всё же остаётся по сути first-order или convex-hull феноменом. Оболочка же чувствует строго больше: она контролирует локальную квадратичную геометрию границы шара. Поэтому естественно ожидать, что существуют выпукло транзитивные или почти транзитивные пространства, чьи оболочки остаются нетривиально зависящими от точки. С этой точки зрения текущая работа подтверждает уже сложившуюся интуицию: без транзитивности или без дополнительного второго порядка глобальная евклидова жёсткость не обязана возникать.

14.6. Fraïssé-, ultrahomogeneity- и oligomorphic-подход

Современная литература активно исследует Banach-space analogues Fraïssé-теории, приближительной ультрагомогенности и oligomorphic-феноменов [9, 10, 6]. Эти подходы важны, потому что они переводят проблему больших групп изометрий в язык конечномерных возрастов $\text{Age}(X)$ и частичных изометрий. Однако наша работа показывает, что даже самая сильная конечномерная однородность не обязана напрямую контролировать оболочку.

Действительно, поле B_x живёт на бесконечномерной сфере и зависит от полной второй производной квадрата нормы. Чтобы Fraïssé-подход замкнул rotation problem, ему нужно было бы доказать по крайней мере одно из двух:

- (a) что конечномерная ультрагомогенность уже определяет все значения оболочки по плотному набору направлений;
- (b) что representation-theoretic obstruction считывается из конечномерных возрастов.

На сегодняшний день ни один из этих мостов не построен полностью. Зато наша редукция указывает, что именно следует искать: не просто новые гомогенности, а такие, которые контролируют фиксированные точки в представлении $\text{Sym}^2(X^*)$.

14.7. Теорема Дворецкого и локальная евклидовость

Теорема Дворецкого гарантирует существование почти евклидовых конечномерных секций в широких классах банаховых пространств. Оболочечный подход позволяет переформулировать это так: на многих больших конечномерных срезах второпорядковая геометрия уже *похожа* на гильбертову. Но rotation problem требует намного большего: глобальной константности оболочки на *всей* сфере. Поэтому одного Дворецкого недостаточно. Тем не менее локальная евклидовость вполне может оказаться полезной как сырьё для транспортного усреднения: если на большинстве направлений оболочка почти евклидова, возможно, осцилляция можно сжать до нуля вариационными методами.

14.8. Отношение к асимптотической структуре

Работы, исключаяющие почти транзитивные ренормировки на ℓ_p и ряде других пространств, часто используют информацию об асимптотической структуре, базисах и конечномерных моделях [8]. На языке оболочек это можно интерпретировать так: асимптотика контролирует *какие квадратичные модели вообще могут появляться в крупных масштабах*. Если пространство асимптотически слишком далеко от ℓ_2 , то никакая почти постоянная оболочка невозможна. Следовательно, теорема 7.2 естественно сочетается с этими результатами: малость осцилляции оболочки уже форсирует сильную асимптотическую близость к ℓ_2 .

14.9. Две разные причины гильбертовости

Классическая литература фактически содержит две независимые философии, объясняющие, почему пространство может оказаться гильбертовым.

- (1) **Философия усреднения.** Если есть достаточно симметрий и доступное усреднение (Хаар, аменабельность, инвариантный mean), то можно построить инвариантную квадратичную форму.
- (2) **Философия локальной жёсткости.** Если в каждой точке сферы локальная геометрия настолько ограничена, что допускает только одну возможную вторую форму, то эта форма должна быть глобальной.

Настоящая статья объединяет обе философии. Теорема 8.5 реализует первую, теорема 6.4 и conjecture 12.3 — вторую. Возможно, окончательное решение потребует их гибрида: локальная жёсткость даст коэрцитивность и одномерность пространства фиксированных точек, а law-level усреднение уберёт оставшийся глобальный класс препятствия.

14.10. Почему проблема так долго сопротивлялась

Из сопоставления с классическими критериями вытекает и более общая методологическая мораль. Проблема вращений Мазура столь устойчива потому, что она лежит в точке пересечения сразу четырёх трудностей:

- (i) бесконечномерность убивает компактность группы изометрий;
- (ii) транзитивность даёт огромную симметрию, но не даёт канонической меры;
- (iii) гладкость первого порядка не фиксирует вторую форму;
- (iv) локальная евклидовость в конечных размерностях не автоматически склеивается глобально.

Оболочечный подход полезен именно тем, что он распаковывает эти трудности: первая отвечает за необходимость усреднения, вторая — за однородность поля, третья — за существование и коэрцитивность оболочки, четвёртая — за representation-theoretic obstruction. Благодаря этому разные методы можно впервые синхронизировать в одной схеме.

14.11. Новый взгляд на возможный контрпример

Если сепарабельный негильбертов контрпример существует, то с точки зрения настоящей работы он должен удовлетворять очень жёсткому набору свойств:

- (1) квадрат нормы должен быть по крайней мере достаточно гладок на сфере, иначе Ренон-механизм мог бы потенциально сгладить его;
- (2) поле оболочек должно быть эквивариантным, но не постоянным;
- (3) соответствующий класс в E^H / E^G должен быть нетривиальным;
- (4) никакое аменабельное или transport-подобное усреднение не должно превращать одну оболочку в глобальную форму;
- (5) асимптотическая структура пространства не должна быть слишком близка к ℓ_2 , иначе количественная теорема 7.2 сделала бы контрпример почти гильбертовым.

То есть потенциальный контрпример должен быть не просто «ещё одним транзитивным пространством», а объектом с очень специальной second-order geometry. Уже одно это значительно сужает поле поиска.

15. Аффинно-фиксированная формулировка: weak^* -hull одной оболочки

В теореме 8.5 усреднение по аменабельности строилось *внешне* через инвариантный средний на $\text{LUC}(G)$. Здесь мы даём более жёсткую формулировку той же идеи: проблема локализуется внутри одного канонического компактного выпуклого множества билинейных форм. Это полезно по двум причинам. Во-первых, оно отделяет собственно геометрию поля оболочек от общих вопросов об аменабельности группы. Во-вторых, оно показывает, что для точной гильбертовости на самом деле достаточно *любой* fixed point mechanism на одном очень специальном компактном выпуклом множестве, а не на всех компактных выпуклых G -модулях.

Определение 15.1 (Оболочечный weak^* -hull). Пусть X — вещественное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, $G = \text{Isom}(X)$ и $x_0 \in S_X$. Рассматриваем пространство $\text{Sym}^2(X^*)$ как weak^* -замкнутое подпространство двойственного пространства $(X \hat{\otimes}_\pi X)^*$. Определим

$$\mathcal{K}(x_0) := \overline{\text{co}}^{w^*} \{T \cdot B_{x_0} : T \in G\} \subset \text{Sym}^2(X^*),$$

где действие G на $\text{Sym}^2(X^*)$ задаётся формулой

$$(T \cdot B)(u, v) := B(T^{-1}u, T^{-1}v).$$

Подмножество

$$\text{Fix}_{\mathcal{K}}(x_0) := \mathcal{K}(x_0) \cap \text{Sym}^2(X^*)^G$$

будем называть *оболочечным fixed-point set* в точке x_0 .

Предложение 15.2 (Компактность, инвариантность и наследование коэрцитивности). Пусть выполнены условия определения 15.1. Тогда:

- (i) множество $\mathcal{K}(x_0)$ weak^* -компактно, выпукло и G -инвариантно;
- (ii) если существуют константы $0 < c \leq C < \infty$ такие, что

$$c\|u\|^2 \leq B_{x_0}(u, u) \leq C\|u\|^2 \quad (u \in X),$$

то для всякой формы $Q \in \mathcal{K}(x_0)$ выполнены те же оценки:

$$c\|u\|^2 \leq Q(u, u) \leq C\|u\|^2 \quad (u \in X);$$

(iii) в частности, при коэрцитивности B_{x_0} каждое $Q \in \mathcal{K}(x_0)$ является положительной определённой симметрической билинейной формой, задающей эквивалентную гильбертову норму.

Доказательство. Для каждого $T \in G$ имеем

$$\|T \cdot B_{x_0}\|_{\text{op}} = \|B_{x_0}\|_{\text{op}},$$

поскольку T и T^{-1} изометричны. Значит, орбита $\{T \cdot B_{x_0} : T \in G\}$ ограничена в $(X \hat{\otimes}_{\pi} X)^*$, а потому её weak^* -замыкание выпуклой оболочки компакт по теореме Банаха–Алаоглу. Инвариантность очевидна, так как действие G аффинно и weak^* -непрерывно.

Пусть теперь выполнены оценки коэрцитивности. Для каждой орбитальной точки $Q = T \cdot B_{x_0}$ имеем

$$Q(u, u) = B_{x_0}(T^{-1}u, T^{-1}u),$$

откуда

$$c\|T^{-1}u\|^2 \leq Q(u, u) \leq C\|T^{-1}u\|^2.$$

Так как T — изометрия,

$$\|T^{-1}u\| = \|u\|,$$

и, следовательно,

$$c\|u\|^2 \leq Q(u, u) \leq C\|u\|^2.$$

Переход к конечным выпуклым комбинациям сохраняет эти неравенства по линейности. Наконец, если $Q_i \rightarrow Q$ weak^* , то для каждого фиксированного $u \in X$ имеем

$$Q_i(u, u) \rightarrow Q(u, u),$$

поскольку тензор $u \otimes u$ лежит в преддвойственном пространстве $X \hat{\otimes}_{\pi} X$. Поэтому те же оценки переходят к weak^* -пределу. Это и даёт (ii)–(iii). ■

Теорема 15.3 (Fixed-point criterion в оболочечном hull). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство, для которого $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$. Предположим, что для некоторой точки $x_0 \in S_X$ форма B_{x_0} коэрцитивна на всём X . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) пространство X линейно изометрично гильбертову;
- (2) множество $\text{Fix}_{\mathfrak{H}}(x_0)$ непусто;
- (3) affine action группы $G = \text{Isom}(X)$ на $\text{compact convex set } \mathcal{K}(x_0)$ имеет неподвижную точку.

Доказательство. (2) $\Leftrightarrow$ (3) тавтологично по определению $\text{Fix}_{\mathfrak{H}}(x_0)$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Если X гильбертово, то после нормировки можно считать, что

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$$

для некоторого скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда $N(u) = \langle u, u \rangle$ имеет постоянный гессиан

$$\frac{1}{2}D^2N(x) = \langle \cdot, \cdot \rangle$$

для всех $x \neq 0$. Значит,

$$B_{x_0} = \langle \cdot, \cdot \rangle$$

и эта форма G -инвариантна. Следовательно,

$$B_{x_0} \in \mathcal{K}(x_0) \cap \text{Sym}^2(X^*)^G = \text{Fix}_{\mathfrak{H}}(x_0).$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Возьмём $Q \in \text{Fix}_{\mathfrak{H}}(x_0)$. По предложению 15.2 форма Q положительна и коэрцитивна. Кроме того, Q инвариантна относительно G , так что функция

$$x \mapsto Q(x, x)$$

постоянна на орбитах действия G на S_X . Но действие транзитивно, следовательно, существует число $\lambda > 0$ такое, что

$$Q(x, x) = \lambda \quad (x \in S_X).$$

Для произвольного $u \neq 0$ и $x = u/\|u\|$ получаем

$$Q(u, u) = \|u\|^2 Q(x, x) = \lambda \|u\|^2.$$

Значит, после нормировки $B := \lambda^{-1}Q$ имеем

$$B(u, u) = \|u\|^2 \quad (u \in X).$$

По поляризации исходная норма индуцирована скалярным произведением B , то есть X гильбертово. ■

Следствие 15.4 (Редукция к affine fixed-point problem). При гипотезах теоремы 15.3 для доказательства гильбертовости X достаточно установить, что affine action

$$G \curvearrowright \mathcal{K}(x_0)$$

имеет неподвижную точку. **Доказательство.** Это непосредственно следует из эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (3) в теореме 15.3. ■

Замечание 15.5. Если оболочечная орбита $G \cdot B_{x_0}$ помещается в рефлексивный G -инвариантный модуль симметрических форм, то либо по следствию 8.9, либо через теорему Риль–Нардзевского для affine isometries на weakly compact convex sets [15, 14], действие на соответствующем weak-замыкании выпуклой оболочки имеет неподвижную точку. Тем самым рефлексивная реализация оболочки является уже достаточным внешним механизмом замыкания задачи.

Теорема 15.6 (Количественный almost-fixed-point criterion). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство и $G = \text{Isom}(X)$. Пусть $Q \in \text{Sym}^2(X^*)$ — положительная симметрическая билинейная форма и

$$\delta := \sup_{T \in G} \|T \cdot Q - Q\|_{\text{op}} < \infty.$$

Зафиксируем $x_0 \in S_X$ и обозначим

$$\lambda := Q(x_0, x_0) > 0.$$

Тогда:

(i) для всех $x \in S_X$ выполнено

$$|Q(x, x) - \lambda| \leq \delta;$$

(ii) для всех $u \in X$ имеем

$$(\lambda - \delta)\|u\|^2 \leq Q(u, u) \leq (\lambda + \delta)\|u\|^2;$$

(iii) если $\delta < \lambda$, то норма

$$\|u\|_Q := \sqrt{\lambda^{-1}Q(u, u)}$$

является гильбертовой и удовлетворяет оценкам

$$\sqrt{1 - \delta/\lambda} \|u\| \leq \|u\|_Q \leq \sqrt{1 + \delta/\lambda} \|u\|;$$

(iv) в частности,

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1 + \delta/\lambda}{1 - \delta/\lambda}}.$$

Доказательство. Пусть $x \in S_X$. По транзитивности существует $T \in G$ такое, что $Tx_0 = x$. Тогда

$$Q(x, x) = Q(Tx_0, Tx_0) = (T^{-1} \cdot Q)(x_0, x_0).$$

Следовательно,

$$|Q(x, x) - \lambda| = |((T^{-1} \cdot Q) - Q)(x_0, x_0)| \leq \|T^{-1} \cdot Q - Q\|_{\text{op}} \|x_0\|^2 \leq \delta.$$

Это доказывает (i).

Если $u \neq 0$ и $x = u/\|u\|$, то по однородности квадратичной формы Q

$$Q(u, u) = \|u\|^2 Q(x, x).$$

Применяя (i), получаем

$$(\lambda - \delta)\|u\|^2 \leq Q(u, u) \leq (\lambda + \delta)\|u\|^2.$$

Для $u = 0$ всё очевидно. Итак, доказано (ii).

Если $\delta < \lambda$, то из (ii) следует положительная определённость Q и двусторонние оценки

$$1 - \delta/\lambda \leq \frac{\|u\|_Q^2}{\|u\|^2} \leq 1 + \delta/\lambda \quad (u \neq 0),$$

что эквивалентно утверждению (iii). Пункт (iv) следует немедленно из оценки норм тождественного оператора между $(X, \|\cdot\|)$ и $(X, \|\cdot\|_Q)$. ■

Следствие 15.7 (Нижняя граница на defect of invariance). Пусть $Q \in \text{Sym}^2(X^*)$ положительна и нормирована условием $Q(x_0, x_0) = 1$ в некоторой точке $x_0 \in S_X$. Если

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) > D \geq 1,$$

то

$$\sup_{T \in G} \|T \cdot Q - Q\|_{\text{op}} \geq \frac{D^2 - 1}{D^2 + 1}.$$

Доказательство. Предположим противное:

$$\sup_{T \in G} \|T \cdot Q - Q\|_{\text{op}} < \frac{D^2 - 1}{D^2 + 1}.$$

Тогда по теореме 15.6 имеем

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}} < D,$$

где $\delta = \sup_{T \in G} \|T \cdot Q - Q\|_{\text{op}}$. Получено противоречие. ■

Теорема 15.8 (Асимптотический almost-fixed-point criterion). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство, $G = \text{Isom}(X)$, $x_0 \in S_X$, и пусть $(Q_m)_{m \geq 1} \subset \text{Sym}^2(X^*)$ — последовательность положительных симметрических билинейных форм. Для каждого m обозначим

$$\lambda_m := Q_m(x_0, x_0) > 0, \quad \delta_m := \sup_{T \in G} \|T \cdot Q_m - Q_m\|_{\text{op}}, \quad \rho_m := \frac{\delta_m}{\lambda_m}.$$

Если $\rho_m \rightarrow 0$, то X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** Рассмотрим нормированные формы

$$\hat{Q}_m := \lambda_m^{-1} Q_m.$$

По теореме 15.6 для всех $u \in X$ выполнены оценки

$$(1 - \rho_m) \|u\|^2 \leq \hat{Q}_m(u, u) \leq (1 + \rho_m) \|u\|^2.$$

Следовательно, для каждого фиксированного $u \in X$

$$\hat{Q}_m(u, u) \rightarrow \|u\|^2.$$

Для любых $u, v \in X$ по поляризационной формуле

$$\hat{Q}_m(u, v) = \frac{1}{4} (\hat{Q}_m(u + v, u + v) - \hat{Q}_m(u - v, u - v)),$$

поэтому предел

$$B(u, v) := \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{Q}_m(u, v)$$

существует и равен

$$B(u, v) = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

Как поточечный предел симметрических билинейных форм, B сам является симметрической билинейной формой. Кроме того,

$$B(u, u) = \|u\|^2 \quad (u \in X).$$

Следовательно, исходная норма индуцирована скалярным произведением B , и потому X гильбертово. ■

Замечание 15.9. Теорема 15.8 переводит fixed-point часть программы из точного в предельный режим: для замыкания задачи достаточно построить последовательность всё более инвариантных положительных форм с относительным defect, стремящимся к нулю.

Замечание 15.10. Результат 15.3 принципиально уже, чем общий критерий аменабельности. Он не требует fixed-point property для всех compact convex G -пространств; достаточно одной очень конкретной weak*-компактной выпуклой оболочки, построенной из одной-единственной гессияновой формы B_{x_0} . Поэтому даже если группа $\text{Isom}(X)$ окажется неаменабельной, проблема всё ещё может решиться положительно через существование неподвижной точки именно в $\mathcal{K}(x_0)$.

Замечание 15.11. В этом месте связь с работой Ferenczi–López-Abad об оболочках подпространств становится особенно прозрачной. Их *isometric envelope* отслеживает устойчивые подпространства относительно pointwise limits изометрий, а наше множество $\mathcal{K}(x_0)$ отслеживает устойчивые *квадратичные* данные второго порядка относительно weak*-пределов выпуклых комбинаций орбит одной оболочки. Обе конструкции являются closure mechanisms, но действуют на разных уровнях: одна — на уровне подпространств, другая — на уровне симметрических билинейных форм.

15.1. Конечные спектральные сертификаты для оболочечного препятствия

Точные fixed-point и almost-fixed-point критерии предыдущего подраздела по-прежнему глобальны: в них фигурирует либо вся группа G , либо супремум по всем $T \in G$. Следующий шаг состоит в том, чтобы локализовать этот контроль до *конечного* числа изометрий, если действие на оболочечном модуле имеет конечный спектральный зазор. Это даёт в буквальном смысле конечный сертификат гильбертовости.

Определение 15.12 (Оболочечная каздановская константа). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство, $G = \text{Isom}(X)$, $x_0 \in S_X$ и

$$\mathcal{Y}_{\mathfrak{H}}(x_0) := \overline{\text{span}}\{[T \cdot B_{x_0}] : T \in G\} \subset \text{Sym}^2(X^*)/\text{Sym}^2(X^*)^G,$$

где замыкание берётся в фактор-норме. Для конечного множества $F \subset G$ определим

$$\kappa_{\mathfrak{H}}(F; x_0) := \inf \left\{ \max_{T \in F} \|T \cdot \xi - \xi\| : \xi \in \mathcal{Y}_{\mathfrak{H}}(x_0), \|\xi\| = 1 \right\}.$$

Если $\kappa_{\mathfrak{H}}(F; x_0) > 0$, будем говорить, что F образует *конечный спектральный сертификат* на оболочечном модуле.

Теорема 15.13 (Конечный спектральный критерий для оболочечного препятствия). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство с $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, а $x_0 \in S_X$. Предположим, что существует конечное множество $F \subset G = \text{Isom}(X)$ такое, что

$$\kappa_{\mathfrak{H}}(F; x_0) > 0.$$

Тогда

$$\omega_{\text{rep}}(X, x_0) \leq \frac{1}{\kappa_{\mathfrak{H}}(F; x_0)} \max_{T \in F} \|T \cdot B_{x_0} - B_{x_0}\|_{\text{op}} = \frac{1}{\kappa_{\mathfrak{H}}(F; x_0)} \max_{T \in F} \|B_{Tx_0} - B_{x_0}\|_{\text{op}}.$$

Доказательство. Положим

$$E := \text{Sym}^2(X^*), \quad E^G := \text{Sym}^2(X^*)^G, \quad \xi_0 := [B_{x_0}] \in E/E^G.$$

По определению нормы класса препятствия

$$\|\xi_0\| = \omega_{\text{rep}}(X, x_0).$$

Кроме того, $\xi_0 \in \mathcal{Y}_{\mathfrak{H}}(x_0)$. Если $\xi_0 = 0$, утверждение тривиально. Пусть теперь $\xi_0 \neq 0$. Тогда по определению $\kappa_{\mathfrak{H}}(F; x_0)$

$$\kappa_{\mathfrak{H}}(F; x_0) \|\xi_0\| \leq \max_{T \in F} \|T \cdot \xi_0 - \xi_0\|.$$

Но

$$T \cdot \xi_0 - \xi_0 = [T \cdot B_{x_0} - B_{x_0}],$$

поэтому по свойству фактор-нормы

$$\|T \cdot \xi_0 - \xi_0\| = \|[T \cdot B_{x_0} - B_{x_0}]\| \leq \|T \cdot B_{x_0} - B_{x_0}\|_{\text{op}}.$$

Следовательно,

$$\kappa_{\mathfrak{H}}(F; x_0) \omega_{\text{rep}}(X, x_0) \leq \max_{T \in F} \|T \cdot B_{x_0} - B_{x_0}\|_{\text{op}}.$$

Это и даёт требуемую оценку. Последнее равенство следует из эквивариантности оболочки:

$$T \cdot B_{x_0} = B_{Tx_0}.$$

■

Следствие 15.14 (Точный конечный сертификат). *При гипотезах теоремы 15.13 предположим дополнительно, что*

$$T \cdot B_{x_0} = B_{x_0} \quad (T \in F).$$

Тогда X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** По теореме 15.13

$$\omega_{\text{rep}}(X, x_0) = 0.$$

Теперь применяем следствие 6.9.

■

Следствие 15.15 (Количественный конечный сертификат). *При гипотезах теоремы 15.13 положим*

$$\varepsilon_F := \frac{1}{\kappa_{\mathfrak{H}}(F; x_0)} \max_{T \in F} \|B_{Tx_0} - B_{x_0}\|_{\text{op}}.$$

Если $\varepsilon_F < 1$, то

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_F}{1 - \varepsilon_F}}.$$

Доказательство. Достаточно объединить теорему 15.13 со следствием 6.9.

■

Следствие 15.16 (Усреднённый конечный сертификат). *При гипотезах теоремы 15.13 положим для конечного множества $F = \{T_1, \dots, T_m\}$*

$$M_F \xi := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m T_j \cdot \xi \quad (\xi \in \mathcal{Y}_{\mathfrak{H}}(x_0)).$$

Если

$$\eta_F := 1 - \|M_F|_{\mathcal{Y}_{\mathfrak{H}}(x_0)}\|_{\text{op}} > 0,$$

то

$$\omega_{\text{rep}}(X, x_0) \leq \frac{1}{\eta_F} \max_{T \in F} \|B_{Tx_0} - B_{x_0}\|_{\text{op}}.$$

В частности, если правая часть меньше 1, то пространство X изоморфно гильбертову с явной оценкой Банаха–Мазура, а если она равна нулю, то X гильбертово изометрически. **Доказательство.** Для любого $\xi \in \mathcal{Y}_{\mathfrak{H}}(x_0)$ имеем

$$\eta_F \|\xi\| \leq \|\xi - M_F \xi\| = \left\| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\xi - T_j \cdot \xi) \right\| \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \|\xi - T_j \cdot \xi\| \leq \max_{T \in F} \|\xi - T \cdot \xi\|.$$

Следовательно, $\kappa_5(F; x_0) \geq \eta_F$, и остаётся применить теорему 15.13. ■

Замечание 15.17. Смысл теоремы 15.13 состоит в том, что представленическое препятствие можно пытаться занулять не только глобальными аргументами о неподвижной точке, но и *конечными* сертификатами каздановского типа на одном конкретном факторе второго порядка. В терминах дальнейшей программы это резко сужает поиск: достаточно либо построить конечное оболочечное множество Каздана F , либо показать, что для естественного кандидата F значения оболочки уже совпадают (или почти совпадают) на конечном числе орбитальных точек Tx_0 .

16. Инфинитезимальные генераторы и дифференциальное уравнение оболочки

Предыдущие разделы описывали поле оболочек *глобально* через действие всей группы изометрий. Теперь мы переходим к его инфинитезимальному аналогу. Это место особенно важно для синтетической программы: именно здесь внешняя теория впервые начинает напоминать объект внутренней логики SDG, где глобальные группы заменяются микролинейными семействами инфинитезимальных симметрий.

Определение 16.1 (Ограниченные инфинитезимальные изометрии). Пусть X — банахово пространство. Обозначим через

$$\mathfrak{g}_b(X) := \{A \in L(X) : e^{tA} \in \text{Isom}(X) \text{ для всех } t \in \mathbf{R}\}$$

множество всех *ограниченных инфинитезимальных изометрий*. Для $x \in S_X$ положим

$$\mathfrak{h}_x := \{A \in \mathfrak{g}_b(X) : Ax = 0\},$$

это *ограниченная изотропическая алгебра* в точке x .

Лемма 16.2 (Инфинитезимальная касательность). Пусть $N(x) = \|x\|^2 \in C^1(X \setminus \{0\})$, $x \in S_X$ и $A \in \mathfrak{g}_b(X)$. Тогда

$$\phi_x(Ax) = 0.$$

В частности, $Ax \in H_x = \text{Ker } \phi_x$. **Доказательство.** Так как e^{tA} состоит из изометрий, функция

$$t \mapsto N(e^{tA}x) = \|e^{tA}x\|^2 = \|x\|^2$$

постоянна. Дифференцируя в нуле, получаем

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(e^{tA}x) = DN(x)[Ax] = 2\phi_x(Ax).$$

Следовательно, $\phi_x(Ax) = 0$. ■

Теорема 16.3 (Инфинитезимальное транспортное уравнение). Пусть $N(x) = \|x\|^2 \in C^3(X \setminus \{0\})$. Тогда поле оболочек

$$x \mapsto B_x = \frac{1}{2}D^2N(x)$$

принадлежит классу C^1 на сфере, и для всяких $x \in S_X$, $A \in \mathfrak{g}_b(X)$, $u, v \in X$ выполнено тождество

$$DB_x[Ax](u, v) + B_x(Au, v) + B_x(u, Av) = 0.$$

Доказательство. Положим $T_t = e^{tA}$. По определению $\mathfrak{g}_b(X)$ имеем $T_t \in \text{Isom}(X)$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Из эквивариантности оболочки (лемма 5.6) следует

$$B_{T_t x}(T_t u, T_t v) = B_x(u, v) \quad (t \in \mathbf{R}).$$

Левая часть является C^1 -функцией по t , поскольку $x \mapsto B_x$ класса C^1 , а $t \mapsto T_t$ гладка в операторной норме. Дифференцируя при $t = 0$, получаем

$$DB_x[\dot{T}_0 x](u, v) + B_x(\dot{T}_0 u, v) + B_x(u, \dot{T}_0 v) = 0.$$

Но $\dot{T}_0 = A$, откуда и следует

$$DB_x[Ax](u, v) + B_x(Au, v) + B_x(u, Av) = 0.$$

■

Следствие 16.4 (Изотропическая skew-symmetry). Пусть выполнены гипотезы теоремы 16.3. Тогда для всяких $x \in S_X$, $A \in \mathfrak{h}_x$ и $u, v \in X$ имеем

$$B_x(Au, v) + B_x(u, Av) = 0.$$

В частности, оператор A сохраняет гиперплоскость H_x и является Q_x -skew-symmetric на H_x , то есть

$$Q_x(Ah, k) + Q_x(h, Ak) = 0 \quad (h, k \in H_x).$$

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{h}_x$, то $Ax = 0$. Подставляя это в теорему 16.3, получаем

$$DB_x[0](u, v) + B_x(Au, v) + B_x(u, Av) = 0.$$

Поскольку производная по нулевому направлению равна нулю, остаётся

$$B_x(Au, v) + B_x(u, Av) = 0.$$

Теперь пусть $h \in H_x$. Тогда

$$\phi_x(Ah) = B_x(x, Ah) = -B_x(Ax, h) = 0,$$

следовательно, $Ah \in H_x$. Ограничив предыдущее равенство на $H_x \times H_x$ и используя разложение из леммы 5.9, получаем skew-symmetry относительно Q_x . ■

Теорема 16.5 (Генераторный критерий гильбертовости). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, а $x_0 \in S_X$ таково, что форма $B_0 := B_{x_0}$ коэрцитивна на всём X . Предположим, что существует подмножество $\mathcal{A} \subset \mathfrak{g}_b(X)$ со свойствами:

- (i) подгруппа $G_0 \leq \text{Isom}(X)$, порождённая семейством $\{e^{tA} : A \in \mathcal{A}, t \in \mathbf{R}\}$, SOT-плотна в $G = \text{Isom}(X)$;
- (ii) для каждого $A \in \mathcal{A}$ выполнено

$$B_0(Au, v) + B_0(u, Av) = 0 \quad (u, v \in X).$$

Тогда X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** Фиксируем $A \in \mathcal{A}$ и рассмотрим

$$f_{u,v}(t) := B_0(e^{tA}u, e^{tA}v).$$

Тогда

$$f'_{u,v}(t) = B_0(Ae^{tA}u, e^{tA}v) + B_0(e^{tA}u, Ae^{tA}v).$$

По предположению (ii) правая часть тождественно равна нулю, значит,

$$f_{u,v}(t) \equiv f_{u,v}(0) = B_0(u, v).$$

Следовательно,

$$B_0(e^{tA}u, e^{tA}v) = B_0(u, v) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

то есть каждая одно-параметрическая группа e^{tA} сохраняет B_0 . Поэтому вся порождённая ими подгруппа G_0 также сохраняет B_0 . По SOT-плотности и непрерывности отображения

$$T \mapsto B_0(Tu, Tv)$$

на G заключаем, что B_0 инвариантна относительно всей группы G .

Теперь функция $x \mapsto B_0(x, x)$ постоянна на сфере S_X по транзитивности действия G . Обозначим её постоянное значение через $\lambda > 0$. Тогда для любого $u \neq 0$ и $x = u/\|u\|$ имеем

$$B_0(u, u) = \|u\|^2 B_0(x, x) = \lambda \|u\|^2.$$

После деления на λ получаем скалярное произведение, индуцирующее исходную норму. Следовательно, X гильбертово. ■

Теорема 16.6 (Локальный порождающий критерий через инфинитезимальные симметрии). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^3(X \setminus \{0\})$, и пусть $x_0 \in S_X$. Предположим, что существует подмножество $\mathcal{A} \subset \mathfrak{g}_b(X)$ такое, что

(i) замыкание линейной оболочки

$$\overline{\text{span}}\{Ax_0 : A \in \mathcal{A}\}$$

совпадает с касательной гиперплоскостью H_{x_0} ;

(ii) для каждого $A \in \mathcal{A}$ выполнено

$$B_{x_0}(Au, v) + B_{x_0}(u, Av) = 0 \quad (u, v \in X).$$

Тогда X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** По теореме 16.3 для каждого $A \in \mathcal{A}$ и любых $u, v \in X$ имеем

$$DB_{x_0}[Ax_0](u, v) + B_{x_0}(Au, v) + B_{x_0}(u, Av) = 0.$$

В силу условия (ii) отсюда следует

$$DB_{x_0}[Ax_0](u, v) = 0 \quad (A \in \mathcal{A}, u, v \in X).$$

Значит, линейный оператор

$$DB_{x_0} : H_{x_0} \longrightarrow \text{Sym}^2(X^*)$$

обращается в нуль на плотном подпространстве $\text{span}\{Ax_0 : A \in \mathcal{A}\}$. По непрерывности он тождественно равен нулю на всём H_{x_0} .

Теперь возьмём произвольную точку $x \in S_X$. По транзитивности существует $T \in G = \text{Isom}(X)$ с $Tx_0 = x$. Для каждого $A \in \mathcal{A}$ положим

$$A^T := TAT^{-1}.$$

Тогда $A^T \in \mathfrak{g}_b(X)$, поскольку

$$e^{tA^T} = T e^{tA} T^{-1} \in G \quad (t \in \mathbf{R}).$$

Кроме того,

$$A^T x = T(Ax_0),$$

так что

$$\overline{\text{span}}\{A^T x : A \in \mathcal{A}\} = T(\overline{\text{span}}\{Ax_0 : A \in \mathcal{A}\}) = T(H_{x_0}) = H_x.$$

Здесь последнее равенство следует из эквивариантности поддерживающего функционала и проектора на касательную гиперплоскость.

Так как $B_x = T \cdot B_{x_0}$, для каждого $A \in \mathcal{A}$ и любых $u, v \in X$ имеем

$$\begin{aligned} B_x(A^T u, v) + B_x(u, A^T v) &= B_{x_0}(AT^{-1}u, T^{-1}v) + B_{x_0}(T^{-1}u, AT^{-1}v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Применяя снова теорему 16.3, получаем

$$DB_x[A^T x] = 0 \quad (A \in \mathcal{A}),$$

а потому по плотности также

$$DB_x[h] = 0 \quad (h \in H_x).$$

Итак, производная поля оболочек вдоль любого касательного направления на сфере равна нулю.

Если $\dim X = 1$, утверждение тривиально. Пусть теперь $\dim X \geq 2$. Тогда единичная сфера S_X линейно связна кусочно- C^1 : для $x, y \in S_X$ и $y \neq -x$ достаточно нормировать отрезок $(1-t)x + ty$, а в случае $y = -x$ выбрать $z \in S_X \setminus \{\pm x\}$ и соединить x с z , а затем z с $-x$ тем же способом. Для любой кусочно- C^1 -кривой $\gamma : [0, 1] \rightarrow S_X$ имеем $\gamma'(t) \in H_{\gamma(t)}$ почти всюду, поэтому

$$\frac{d}{dt} B_{\gamma(t)} = DB_{\gamma(t)}[\gamma'(t)] = 0$$

почти всюду. Следовательно, $B_{\gamma(t)}$ постоянно вдоль γ . Так как любые две точки сферы можно соединить такой кривой, поле $x \mapsto B_x$ постоянно на всей сфере.

Теперь применяем теорему 5.7 и заключаем, что норма в X индуцирована скалярным произведением. ■

Следствие 16.7 (Версия с линейным right inverse). При гипотезах теоремы 16.6 предположим, что существует линейный оператор

$$J : H_{x_0} \rightarrow \mathfrak{g}_b(X)$$

такой, что

$$J(h)x_0 = h \quad (h \in H_{x_0})$$

и

$$B_{x_0}(J(h)u, v) + B_{x_0}(u, J(h)v) = 0 \quad (h \in H_{x_0}, u, v \in X).$$

Тогда X гильбертово. **Доказательство.** Достаточно применить теорему 16.6 к семейству $\mathcal{A} = J(H_{x_0})$. ■

Замечание 16.8. Теорема 16.6 принципиально усиливает теорему 16.5. Для неё не нужна ни SOT-плотность порождённой подгруппы, ни глобальная инвариантность одной формы B_0 . Достаточно

чисто локального факта: в одной точке сферы должна существовать достаточно богатая система инфинитезимальных симметрий, каждая из которых уже сохраняет оболочку первого порядка. После этого transport-уравнение автоматически распространяет нулевую производную на всю сферу.

Замечание 16.9. Теорема 16.5 показывает, что для замыкания задачи достаточно иногда вовсе не иметь fixed point theorem и не строить глобальное усреднение. Хватает доказать, что одна оболочка B_0 является скалярным первым интегралом всех инфинитезимальных симметрий, порождающих плотную часть группы изометрий. Во внутреннем языке SDG это именно условие

$$\mathcal{L}_\xi \tilde{B} = 0$$

для всех инфинитезимальных изометрических полей ξ .

17. Совместимые конечномерные маргинали и асимптотическое сшивание

В современной литературе по Mazur problem и по Fraïssé-геометрии бесконечномерных пространств важнейшую роль играют конечномерные подпространства, их возрасты $Age(X)$ и совместимость частичных изометрий. Настоящий раздел сначала формулирует patching-механизм в его естественном виде — через совместимые конечномерные квадратичные формы, — а затем показывает, что в сепарабельном случае предварительная совместимость не является первичным барьером: она может быть извлечена диагональной компактностью из любой достаточно хорошо контролируемой последовательности конечномерных евклидовых приближений.

Определение 17.1 (Совместимая цепочка квадратичных маргиналей). Пусть X — сепарабельное банахово пространство и

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset X, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ плотно в } X,$$

— возрастающая цепочка конечномерных подпространств. Семейство положительных квадратичных форм

$$q_n : E_n \times E_n \rightarrow \mathbf{R}$$

называется *совместимой цепочкой маргиналей*, если

$$q_{n+1}|_{E_n \times E_n} = q_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Теорема 17.2 (Количественное сшивание). Пусть X — сепарабельное банахово пространство, (E_n) — возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств и (q_n) — совместимая цепочка маргиналей. Предположим, что существует число $0 \leq \varepsilon < 1$ такое, что для всех n и всех $u \in E_n$ выполнено

$$(1 - \varepsilon)q_n(u, u) \leq \|u\|^2 \leq (1 + \varepsilon)q_n(u, u).$$

Тогда существует гильбертова норма $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ на X со свойством

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \|u\| \leq \|u\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon}} \|u\| \quad (u \in X).$$

В частности,

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}.$$

Доказательство. Шаг 1: определим квадратичную форму на плотном объединении. Если $u, v \in \bigcup_n E_n$, выбираем N так, чтобы $u, v \in E_N$, и кладем

$$q(u, v) := q_N(u, v).$$

По совместимости это определение корректно.

Шаг 2: получим двусторонние оценки. Для любого $u \in \bigcup_n E_n$, выбрав N с $u \in E_N$, имеем

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \|u\|^2 \leq q(u, u) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \|u\|^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \|u\| \leq \sqrt{q(u, u)} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \|u\|.$$

Это означает, что норма

$$\|u\|_q := \sqrt{q(u, u)}$$

эквивалентна исходной на $\bigcup_n E_n$.

Шаг 3: продолжим q на всё пространство. Эквивалентность норм показывает, что q непрерывна относительно исходной нормы на плотном подпространстве $\bigcup_n E_n$. Поэтому она единственным образом продолжается до непрерывной симметрической положительной билинейной формы на всём X , которую мы по-прежнему обозначаем q . Определим

$$\|u\|_{\mathcal{H}} := \sqrt{q(u, u)}.$$

Полученные в шаге 2 оценки переходят к пределу и остаются верными для всех $u \in X$.

Шаг 4: интерпретация через расстояние Банаха–Мазура непосредственна: тождественный оператор

$$I : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$$

и его обратный имеют нормы не больше $(1-\varepsilon)^{-1/2}$ и $(1+\varepsilon)^{1/2}$ соответственно, откуда

$$\|I\| \|I^{-1}\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

■

Теорема 17.3 (Асимптотически точное сшивание). Пусть X — сепарабельное банахово пространство, (E_n) — возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств и (q_n) — совместимая цепочка маргиналей. Предположим, что существует последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ такая, что для всех n и всех $u \in E_n$

$$(1 - \varepsilon_n)q_n(u, u) \leq \|u\|^2 \leq (1 + \varepsilon_n)q_n(u, u).$$

Тогда X линейно изометрично гильбертову пространству. **Доказательство.** Пусть $u \in E_n$. Тогда для каждого $m \geq n$ по совместимости имеем $q_m(u, u) = q_n(u, u)$, а потому

$$(1 - \varepsilon_m)q_n(u, u) \leq \|u\|^2 \leq (1 + \varepsilon_m)q_n(u, u).$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$q_n(u, u) = \|u\|^2.$$

Итак, на плотном объединении $\bigcup_n E_n$ существует положительная квадратичная форма q , точно совпадающая с квадратом нормы. По поляризации она задаёт скалярное произведение на этом объединении. Поскольку

$$q(u, u) = \|u\|^2$$

и исходная норма полна, скалярное произведение продолжается по непрерывности на всё пространство X , индуцируя исходную норму. Значит, X гильбертово. ■

Теорема 17.4 (Критерий через совместимые центры shell-image компакта). Пусть X — сепарабельное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, а (E_n) — возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств. Для каждого n положим

$$K_n := \{B_x|_{E_n \times E_n} : x \in S_X\} \subset \text{Sym}^2(E_n^*).$$

Предположим, что существует совместимая цепочка квадратичных форм (q_n) и числа $\varepsilon_n \geq 0$ такие, что

$$\sup_{A \in K_n} \|A - q_n\|_{\text{op}} \leq \varepsilon_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Тогда:

(i) если $\varepsilon := \sup_n \varepsilon_n < 1$, то

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}};$$

(ii) если $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то X линейно изометрично гильбертову пространству.

Доказательство. Пусть $u \in E_n$, $u \neq 0$, и положим $x := u/\|u\| \in S_X$. Тогда форма

$$A_x := B_x|_{E_n \times E_n}$$

лежит в K_n , и по предположению

$$|q_n(u, u) - A_x(u, u)| \leq \varepsilon_n \|u\|^2.$$

Но

$$A_x(u, u) = B_x(u, u) = \|u\|^2 B_x(x, x) = \|u\|^2,$$

так как по лемме 5.2 имеем $B_x(x, x) = 1$. Следовательно,

$$(1 - \varepsilon_n) \|u\|^2 \leq q_n(u, u) \leq (1 + \varepsilon_n) \|u\|^2 \quad (u \in E_n).$$

Если $\varepsilon := \sup_n \varepsilon_n < 1$, то на плотном объединении $\bigcup_n E_n$ форма q , задаваемая совместимостью маргиналей, удовлетворяет оценкам

$$\sqrt{1 - \varepsilon} \|u\| \leq \sqrt{q(u, u)} \leq \sqrt{1 + \varepsilon} \|u\|.$$

Продолжая q по непрерывности на всё X , получаем гильбертову норму с требуемой оценкой расстояния Банаха–Мазура.

Если же $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то для фиксированного $u \in E_N$ и всякого $n \geq N$ имеем

$$q_N(u, u) = q_n(u, u),$$

а значит,

$$(1 - \varepsilon_n) \|u\|^2 \leq q_N(u, u) \leq (1 + \varepsilon_n) \|u\|^2.$$

Переходя к пределу по n , получаем $q_N(u, u) = \|u\|^2$. Следовательно, совместимая форма q на плотном объединении точно совпадает с квадратом нормы и после непрерывного продолжения делает X гильбертовым. ■

Замечание 17.5. Теорема 17.4 выделяет чисто детерминированный интерфейс между shell-image геометрией и конечномерным сшиванием. Однако сама предварительная совместимость выбранных центров не является фундаментально независимой трудностью: следующий шаг показывает, что в сепарабельном пространстве она извлекается автоматически диагональной компактностью, как только на каждом конечномерном уровне имеется какая-нибудь достаточно хорошая евклидова аппроксимация.

17.1. Суммируемая почти-совместимость: patching с явным tail-control

Диагональная компактность показывает, что *полная* предварительная совместимость не нужна вовсе. Между этими двумя крайностями — exact compatibility и complete compatibility-free extraction — лежит естественный промежуточный режим: формы на соседних уровнях уже почти согласованы, причём межуровневой дефект суммируем. Именно такой тип выхода особенно естественен для канонических shell-centers, возникающих из нулетемпературных селекторов.

Теорема 17.6 (Суммируемое сшивание с явным хвостовым контролем). Пусть X — сепарабельное банахово пространство,

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots, \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = X,$$

и для каждого n дана положительная симметрическая билинейная форма

$$q_n : E_n \times E_n \rightarrow \mathbf{R}.$$

Предположим, что существуют числа $0 < a_n \leq b_n < \infty$ и последовательность $(\eta_n)_{n \geq 1}$ неотрицательных чисел с

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n < \infty$$

такие, что

$$a_n \|u\|^2 \leq q_n(u, u) \leq b_n \|u\|^2 \quad (u \in E_n)$$

и

$$\|q_{n+1}|_{E_n \times E_n} - q_n\| \leq \eta_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Положим

$$s_n := \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k, \quad a_{\Sigma} := \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n - s_n), \quad b_{\Sigma} := \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n + s_n).$$

Тогда:

- (i) существует совместимая цепочка положительных квадратичных форм (p_n) на (E_n) такая, что

$$\|p_n - q_n\| \leq s_n \quad (n \in \mathbf{N});$$

- (ii) если $a_{\Sigma} > 0$ и $b_{\Sigma} < \infty$, то

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{b_{\Sigma}}{a_{\Sigma}}};$$

(iii) если

$$a_n - s_n \longrightarrow 1 \quad \text{и} \quad b_n + s_n \longrightarrow 1,$$

то X линейно изометрично гильбертову пространству.

Доказательство. Шаг 1: построим совместимый предел на каждом фиксированном уровне. Пусть $j \in \mathbf{N}$ и $m > n \geq j$. Тогда

$$\begin{aligned} \|q_m|_{E_j \times E_j} - q_n|_{E_j \times E_j}\| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|q_{k+1}|_{E_j \times E_j} - q_k|_{E_j \times E_j}\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|q_{k+1}|_{E_k \times E_k} - q_k\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \eta_k. \end{aligned}$$

Следовательно, последовательность $(q_n|_{E_j \times E_j})_{n \geq j}$ является фундаментальной в конечномерном пространстве $\text{Sym}^2(E_j^*)$. Обозначим её предел через

$$p_j \in \text{Sym}^2(E_j^*).$$

Из той же телескопической оценки сразу следует

$$\|p_j - q_n|_{E_j \times E_j}\| \leq s_n \quad (n \geq j).$$

В частности,

$$\|p_n - q_n\| \leq s_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Шаг 2: проверим совместимость пределов. Поскольку оператор ограничения непрерывен,

$$p_{j+1}|_{E_j \times E_j} = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n|_{E_j \times E_j} = p_j.$$

Значит, (p_n) — совместимая цепочка маргиналей.

Шаг 3: передадим в предел двусторонние оценки. Для $u \in E_n$ из оценки $\|p_n - q_n\| \leq s_n$ получаем

$$|p_n(u, u) - q_n(u, u)| \leq s_n \|u\|^2,$$

а потому

$$(a_n - s_n) \|u\|^2 \leq p_n(u, u) \leq (b_n + s_n) \|u\|^2 \quad (u \in E_n).$$

Теперь фиксируем j и $u \in E_j$. Для каждого $n \geq j$ по совместимости имеем

$$p_j(u, u) = p_n(u, u),$$

следовательно,

$$(a_n - s_n) \|u\|^2 \leq p_j(u, u) \leq (b_n + s_n) \|u\|^2.$$

Переходя к $\liminf / \limsup$ по n , получаем

$$a_\Sigma \|u\|^2 \leq p_j(u, u) \leq b_\Sigma \|u\|^2 \quad (u \in E_j).$$

Шаг 4: построим глобальную форму. Совместимость (p_n) позволяет определить на плотном объединении $\bigcup_n E_n$ положительную билинейную форму

$$p(u, v) := p_n(u, v) \quad (u, v \in E_n),$$

и по предыдущему шагу

$$a_\Sigma \|u\|^2 \leq p(u, u) \leq b_\Sigma \|u\|^2 \quad \left(u \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

Если $a_\Sigma > 0$ и $b_\Sigma < \infty$, форма p задаёт на плотном объединении норму, эквивалентную исходной, и потому единственным образом продолжается на всё пространство. Полученная гильбертова норма удовлетворяет

$$\sqrt{a_\Sigma} \|u\| \leq \sqrt{p(u, u)} \leq \sqrt{b_\Sigma} \|u\| \quad (u \in X),$$

откуда

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{b_\Sigma}{a_\Sigma}}.$$

Это доказывает пункт (ii).

Шаг 5: точный предел. Если $a_n - s_n \rightarrow 1$ и $b_n + s_n \rightarrow 1$, то из оценки шага 3 следует

$$p_j(u, u) = \|u\|^2 \quad (u \in E_j),$$

а значит, форма p на плотном объединении совпадает с квадратом нормы. По поляризации она задаёт скалярное произведение, которое по полноте X продолжается на всё пространство и индуцирует исходную норму. Следовательно, X гильбертово. ■

Следствие 17.7 (Суммируемо согласованные shell-аппроксиманты уже достаточны). Пусть X — сепарабельное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, а

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots, \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = X,$$

— возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств. Для каждого n положим

$$K_n := \{B_x|_{E_n \times E_n} : x \in S_X\} \subset \text{Sym}^2(E_n^*),$$

и выберем форму $A_n \in \text{Sym}^2(E_n^*)$ так, что

$$\delta_n := \sup_{A \in K_n} \|A - A_n\| < \infty, \quad \eta_n := \|A_{n+1}|_{E_n \times E_n} - A_n\|.$$

Предположим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n < \infty.$$

Положим $s_n := \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k$ и

$$\Theta := \limsup_{n \rightarrow \infty} (\delta_n + s_n).$$

Тогда:

(i) если $\Theta < 1$, то

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1+\Theta}{1-\Theta}};$$

(ii) если

$$\delta_n + s_n \longrightarrow 0,$$

то X линейно изометрично гильбертову пространству.

Доказательство. Положим $q_n := A_n$. Для $u \in E_n$, $u \neq 0$, берём

$$x := \frac{u}{\|u\|} \in S_X$$

и рассматриваем форму

$$A_x := B_x|_{E_n \times E_n} \in K_n.$$

Тогда

$$|A_n(u, u) - A_x(u, u)| \leq \delta_n \|u\|^2.$$

Но по лемме 5.2

$$A_x(u, u) = B_x(u, u) = \|u\|^2 B_x(x, x) = \|u\|^2,$$

следовательно,

$$(1 - \delta_n) \|u\|^2 \leq A_n(u, u) \leq (1 + \delta_n) \|u\|^2 \quad (u \in E_n).$$

Теперь к последовательности (q_n) применима теорема 17.6 с

$$a_n = 1 - \delta_n, \quad b_n = 1 + \delta_n.$$

Тогда

$$a_n - s_n = 1 - (\delta_n + s_n), \quad b_n + s_n = 1 + (\delta_n + s_n),$$

и обе заявленные части следуют непосредственно из пунктов (ii) и (iii) теоремы 17.6. ■

Замечание 17.8. Следствие 17.7 резко уточняет конечномерный узел. Чтобы замкнуть задачу, уже не требуется exact compatibility центров на каждом уровне. Достаточно добиться суммируемой межуровневой несовместимости и исчезающего поуровневого shell-defect. Именно такой тип выхода естественно согласуется с нулетемпературными центрами, выбираемыми энтропийно: projective stability их концентрации доказывается в разделе 12, а оставшаяся трудность сводится к количественному контролю хвоста $\sum_{k \geq n} \eta_k$.

17.2. Диагональная компактность: совместимость извлекается автоматически

Совместимые цепочки удобны для изложения patching-механизма, но не являются единственным форматом, в котором может появиться конечномерная евклидизация. Следующая теорема показывает, что достаточно любой последовательности положительных квадратичных форм на возрастающей плотной цепочке подпространств, если их сравнение с исходной нормой достаточно хорошо контролируется. Совместимая цепочка затем восстанавливается после факта посредством диагонального извлечения в конечномерных пространствах $\text{Sym}^2(E_n^*)$.

Теорема 17.9 (Диагональная компактность и patching без предварительной совместимости). Пусть X — сепарабельное банахово пространство,

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ плотно в } X,$$

и пусть для каждого n дана положительная симметрическая билинейная форма

$$q_n : E_n \times E_n \rightarrow \mathbf{R}.$$

Предположим, что существуют числа $0 < a_n \leq b_n < \infty$ такие, что

$$a_n \|u\|^2 \leq q_n(u, u) \leq b_n \|u\|^2 \quad (u \in E_n).$$

Обозначим

$$a_* := \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b_* := \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Тогда:

(i) если $a_* > 0$ и $b_* < \infty$, то

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{b_*}{a_*}};$$

(ii) если $a_n \rightarrow 1$ и $b_n \rightarrow 1$, то X линейно изометрично гильбертову пространству.

Доказательство. Шаг 1: извлечём совместимую цепочку по диагонали. Зафиксируем $\eta > 0$ так, чтобы $0 < \eta < a_*$. Тогда существует N такое, что для всех $n \geq N$

$$a_n \geq a_* - \eta, \quad b_n \leq b_* + \eta.$$

Пусть $j \in \mathbf{N}$ фиксировано. Для всех $n \geq \max\{j, N\}$ ограничение

$$q_n|_{E_j \times E_j} \in \text{Sym}^2(E_j^*)$$

определено. Поскольку q_n положительна, по неравенству Коши–Буняковского для положительных форм имеем

$$|q_n(u, v)| \leq \sqrt{q_n(u, u) q_n(v, v)} \leq (b_* + \eta) \|u\| \|v\| \quad (u, v \in E_j).$$

Следовательно, семейство $\{q_n|_{E_j \times E_j} : n \geq \max\{j, N\}\}$ ограничено в конечномерном пространстве $\text{Sym}^2(E_j^*)$ и потому относительно компактно. Диагональным процессом выбираем подпоследовательность (n_k) такую, что для каждого j

$$q_{n_k}|_{E_j \times E_j} \longrightarrow p_j \quad \text{в } \text{Sym}^2(E_j^*).$$

По непрерывности оператора ограничения

$$p_{j+1}|_{E_j \times E_j} = p_j,$$

то есть (p_j) является совместимой цепочкой квадратичных маргиналей.

Шаг 2: передадим в предел двусторонние оценки. Для $u \in E_j$ и больших k имеем $u \in E_{n_k}$, а потому

$$(a_* - \eta) \|u\|^2 \leq a_{n_k} \|u\|^2 \leq q_{n_k}(u, u) \leq b_{n_k} \|u\|^2 \leq (b_* + \eta) \|u\|^2.$$

Переходя к пределу по k , получаем

$$(a_* - \eta) \|u\|^2 \leq p_j(u, u) \leq (b_* + \eta) \|u\|^2 \quad (u \in E_j).$$

Шаг 3: построим глобальную гильбертову норму. Совместимость (p_j) позволяет определить на плотном объединении $\bigcup_j E_j$ положительную квадратичную форму p по правилу

$$p(u, v) := p_j(u, v) \quad (u, v \in E_j),$$

что корректно по совместимости. Из предыдущего шага следует

$$(a_* - \eta) \|u\|^2 \leq p(u, u) \leq (b_* + \eta) \|u\|^2 \quad (u \in \bigcup_j E_j).$$

Следовательно, норма

$$\|u\|_{p, \eta} := \sqrt{p(u, u)}$$

эквивалентна исходной на плотном подпространстве и потому продолжается на всё X . Для продолженной нормы сохраняются оценки

$$\sqrt{a_* - \eta} \|u\| \leq \|u\|_{p, \eta} \leq \sqrt{b_* + \eta} \|u\| \quad (u \in X).$$

Отсюда

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{b_* + \eta}{a_* - \eta}}.$$

Так как $\eta > 0$ произвольно, получаем (i).

Шаг 4: точный предел. Предположим теперь, что $a_n \rightarrow 1$ и $b_n \rightarrow 1$. Тем же диагональным аргументом строим совместимую цепочку (p_j) как предел некоторой подпоследовательности. Для $u \in E_j$ и больших k имеем

$$a_{n_k} \|u\|^2 \leq p_{n_k}(u, u) \leq b_{n_k} \|u\|^2.$$

Переходя к пределу и используя $a_{n_k} \rightarrow 1$, $b_{n_k} \rightarrow 1$, получаем

$$p_j(u, u) = \|u\|^2 \quad (u \in E_j).$$

Следовательно, форма p на плотном объединении точно совпадает с квадратом нормы. По поляризации она задаёт скалярное произведение, которое по полноте X продолжается на всё пространство и индуцирует исходную норму. Значит, X гильбертово. ■

Следствие 17.10 (Плотная асимптотическая евклидизация уже достаточна). Пусть X — сепарабельное банахово пространство, (E_n) — возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств и для каждого n задан линейный изоморфизм

$$T_n : E_n \rightarrow \ell_2^{\dim E_n}.$$

Обозначим

$$D_n := \|T_n\| \|T_n^{-1}\|.$$

Тогда

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} D_n.$$

В частности, если $D_n \rightarrow 1$, то X линейно изометрично гильбертову пространству. Доказательство. Домножим T_n на положительный скаляр

$$c_n := \sqrt{\frac{\|T_n^{-1}\|}{\|T_n\|}}$$

и положим $S_n := c_n T_n$. Тогда

$$\|S_n\| = \|S_n^{-1}\| = \sqrt{\|T_n\| \|T_n^{-1}\|} = \sqrt{D_n}.$$

Определим на E_n билинейную форму

$$q_n(u, v) := \langle S_n u, S_n v \rangle_{\ell_2}.$$

Тогда для всех $u \in E_n$

$$D_n^{-1} \|u\|^2 \leq q_n(u, u) \leq D_n \|u\|^2.$$

Остаётся применить теорему 17.9. ■

Следствие 17.11 (Критерий через shell-image компакта без предварительной совместимости). Пусть X — сепарабельное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, а (E_n) — возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств. Для каждого n положим

$$K_n := \{B_x|_{E_n \times E_n} : x \in S_X\} \subset \text{Sym}^2(E_n^*).$$

Предположим, что для каждого n существует положительная квадратичная форма

$$q_n : E_n \times E_n \rightarrow \mathbf{R}$$

и число $\varepsilon_n \geq 0$ такие, что

$$\sup_{A \in K_n} \|A - q_n\|_{\text{op}} \leq \varepsilon_n.$$

Тогда:

(i) если $\bar{\varepsilon} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n < 1$, то

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1 + \bar{\varepsilon}}{1 - \bar{\varepsilon}}};$$

(ii) если $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то X линейно изометрично гильбертову пространству.

Доказательство. Пусть $u \in E_n$, $u \neq 0$, и положим $x := u / \|u\| \in S_X$. Тогда форма

$$A_x := B_x|_{E_n \times E_n}$$

лежит в K_n , и потому

$$|q_n(u, u) - A_x(u, u)| \leq \varepsilon_n \|u\|^2.$$

Но

$$A_x(u, u) = B_x(u, u) = \|u\|^2 B_x(x, x) = \|u\|^2$$

по лемме 5.2. Следовательно,

$$(1 - \varepsilon_n) \|u\|^2 \leq q_n(u, u) \leq (1 + \varepsilon_n) \|u\|^2 \quad (u \in E_n).$$

Теперь достаточно применить теорему 17.9 с $a_n = 1 - \varepsilon_n$ и $b_n = 1 + \varepsilon_n$. ■

Следствие 17.12 (Мультишкальный law-level criterion). Пусть X — вещественное сепарабельное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, а (E_n) — возрастающая плотная

цепочка конечномерных подпространств. Для каждого n пусть ν_n — борелевская вероятность на S_X с полной поддержкой. Положим

$$F_n(x) := B_x|_{E_n \times E_n}, \quad \sigma_n := (F_n)_\# \nu_n, \quad K_n := F_n(S_X) \subset \text{Sym}^2(E_n^*),$$

и определим

$$\alpha_n(r) := \inf_{A \in K_n} \sigma_n(B(A, r)), \quad \mathcal{E}_n(\nu_n) := \iint_{K_n \times K_n} \|A - B\|^2 d\sigma_n(A) d\sigma_n(B).$$

Пусть

$$\varepsilon_n := \inf_{r>0} \left(2r + \frac{\sqrt{\mathcal{E}_n(\nu_n)}}{\alpha_n(r)} \right).$$

Тогда:

(i) если $\bar{\varepsilon} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n < 1$, то

$$d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H}) \leq \sqrt{\frac{1 + \bar{\varepsilon}}{1 - \bar{\varepsilon}}};$$

(ii) если $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то X линейно изометрично гильбертову пространству.

Доказательство. Для каждого n положим

$$q_n := Q_{\nu_n}|_{E_n \times E_n}.$$

Ровно тот же аргумент, что и в доказательстве теоремы 13.21, но применённый отдельно к каждому уровню n , даёт оценку

$$\sup_{x \in S_X} \|(B_x - q_n)|_{E_n \times E_n}\|_{\text{op}} \leq \varepsilon_n.$$

Следовательно, гипотезы следствия 17.11 выполнены, и остаётся сослаться на него. ■

Следствие 17.13 (Счётная skeleton-reduction). Для положительного решения Mazur rotation problem достаточно доказать следующее утверждение: в каждом сепарабельном транзитивном банаховом пространстве X существует возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств (E_n) и положительные квадратичные формы

$$q_n : E_n \times E_n \rightarrow \mathbf{R}$$

такие, что

$$\sup_{u \in S_{E_n}} |q_n(u, u) - 1| \rightarrow 0.$$

Эквивалентно, достаточно построить по некоторой плотной цепочке (E_n) асимптотическую евклидизацию

$$d_{\text{BM}}(E_n, \ell_2^{\dim E_n}) \rightarrow 1.$$

Доказательство. Первая формулировка есть частный случай теоремы 17.9. Для второй применим следствие 17.10. Обратное направление получается, если рассмотреть евклидовы формы, задаваемые соответствующими изоморфизмами $E_n \rightarrow \ell_2^{\dim E_n}$. ■

Замечание 17.14. Следствие 17.13 радикально упрощает конечномерный слой программы: предварительная совместимость больше не является отдельным препятствием. Настоящая задача состоит в том, чтобы добиться асимптотической евклидизации по одной плотной цепочке или, в обобщённом языке, заставить поуровневые shell-аппроксиманты иметь исчезающий дефект. Именно в таком виде проблема естественно стыкуется с envelope-, Fraïssé-, almost-Fraïssé- и guarded-Fraïssé-подходами [9, 10, 6]: возраст $\text{Age}(X)$ уже контролирует конечномерные типы, а диагональная компактность берёт на себя последующее сшивание.

Замечание 17.15. Сравнение с теоремой 7.2 полезно концептуально. Теорема 7.2 даёт глобальную аппроксимацию одной формой B и сразу заключает, что всё пространство близко к гильбертову. Теоремы 17.2–17.4 показывают, как действует явно заданная совместимость. Теорема 17.9 идёт ещё дальше: даже если конечномерные евклидовы структуры изначально никак не согласованы между собой, в сепарабельном случае их всё равно можно стянуть к совместимому пределу диагональным извлечением.

18. Порог $2 \rightarrow 3$: критерий трёхточечного продолжения

Открытая проблема вращений Мазура — это, по существу, задача о том, достаточно ли двухточечной глобальной однородности для евклидовости. В этом разделе мы фиксируем порог, на котором ответ уже становится положительным. Формулировка исключительно проста и естественна в линейно-банаховой форме: как только к транзитивности добавляется возможность *переставлять пару равнодлинных векторов, фиксируя нуль*, пространство немедленно становится гильбертовым.

Предложение 18.1 (Критерий парного flip). Пусть X — вещественное нормированное пространство. Предположим, что для любых $x, y \in X$ с $\|x\| = \|y\|$ существует сюръективная линейная изометрия T такая, что

$$Tx = y, \quad Ty = x.$$

Тогда норма в X индуцирована скалярным произведением. **Доказательство.** Возьмём произвольные $x, y \in X$ с $\|x\| = \|y\|$ и соответствующую изометрию T . Для любых вещественных α, β имеем

$$\|\alpha x + \beta y\| = \|T(\alpha x + \beta y)\| = \|\alpha y + \beta x\| = \|\beta x + \alpha y\|.$$

Тем самым выполнено классическое условие Фиккена [12]: если для любых двух равнодлинных векторов x, y и любых вещественных α, β выполняется

$$\|\alpha x + \beta y\| = \|\beta x + \alpha y\|,$$

то норма возникает из скалярного произведения. Следовательно, X является пространством с внутренним произведением. ■

Теорема 18.2 (Критерий трёхточечного продолжения). Пусть X — вещественное банахово пространство. Предположим, что всякая изометрия между любыми двумя трёхточечными подмножествами X продолжается до сюръективной аффинной изометрии всего пространства. Тогда X гильбертово. **Доказательство.** Пусть $x, y \in X$ и $\|x\| = \|y\|$. Рассмотрим трёхточечные множества

$$Y = \{0, x, y\}, \quad Y' = \{0, y, x\}.$$

Отображение $f : Y \rightarrow Y'$, заданное правилом

$$f(0) = 0, \quad f(x) = y, \quad f(y) = x,$$

является изометрией: расстояния от нуля совпадают по условию $\|x\| = \|y\|$, а расстояние между x и y сохраняется тривиально, поскольку

$$\|x - y\| = \|y - x\|.$$

По предположению f продолжается до сюръективной аффинной изометрии $\tilde{f} : X \rightarrow X$. Так как $\tilde{f}(0) = 0$, по теореме Мазура–Улама отображение $\tilde{f}$ линейно. Следовательно, для любых равнодлинных x, y существует сюръективная линейная изометрия, меняющая их местами. По предложению 18.1 пространство X гильбертово. ■

Следствие 18.3 (Сильная 3-точечная однородность уже достаточна). Если вещественное банахово пространство сильно 3-точечно однородно, то оно гильбертово. **Доказательство.** Сильная 3-точечная однородность именно и означает, что всякая изометрия между подмножествами мощности не более 3 продолжается до сюръективной изометрии всего пространства. Поэтому применима теорема 18.2. ■

Замечание 18.4. Этот результат концептуально фиксирует точный порог сложности и согласуется с современной метрической формулировкой Damase–Khare [7]. Для $n \geq 3$ сильная n -точечная однородность уже форсирует внутреннее произведение; для $n = 2$ мы получаем именно problem of Mazur rotations. Поэтому открытым остаётся не общий «гомогенный» случай, а один-единственный переход

$$2\text{-точечность} \implies ? \text{ 3-точечность}.$$

Второпорядковое поле оболочек $x \mapsto B_x$ следует понимать как аналитическую тень именно этого разрыва.

Замечание 18.5. Смежный и более метрический взгляд недавно был развит Дамасе–Харе [7], которые показали, что strong n -point homogeneity при любом $n \geq 3$ характеризует нормы, порождённые внутренним произведением. Теорема 18.2 подчёркивает, что в линейном банаховом контексте ключевой механизм здесь предельно прост: возможность реализовывать *flip* двух равнодлинных векторов через третью фиксированную точку.

19. Профиль возможного контрпримера: что обязательно должно сломаться

После предыдущих разделов можно уже довольно жёстко описать, каким *обязан* быть любой гипотетический негильбертов контрпример к Mazur rotation problem. Этот раздел не содержит новых внешних гипотез; он просто собирает следствия ранее доказанных теорем. Такая «отрицательная геометрия» полезна не меньше положительных критериев: она показывает, какие свойства больше нельзя пытаться совместить в одном пространстве.

Предложение 19.1 (Антипортрет негильбертова транзитивного пространства). Пусть X — вещественное транзитивное банахово пространство, $N(x) = \|x\|^2 \in C^2(X \setminus \{0\})$, и существует $x_0 \in S_X$, для которого оболочка B_{x_0} коэрцитивна на всём X . Предположим, что X не линейно изометрично гильбертову пространству. Тогда:

- (i) $\text{Fix}_S(x_0) = \emptyset$;
- (ii) для всякой положительной формы $Q \in \text{Sym}^2(X^*)$ с нормировкой $Q(x_0, x_0) = 1$ и любого числа $D < d_{\text{BM}}(X, \mathcal{H})$ выполнено

$$\sup_{T \in G} \|T \cdot Q - Q\|_{\text{op}} \geq \frac{D^2 - 1}{D^2 + 1};$$

(iii) не существует возрастающей плотной цепочки конечномерных подпространств (E_n) и совместимой цепочки квадратичных форм (q_n) , удовлетворяющих гипотезам теоремы 17.3;

(iv) пространство X не обладает свойством трёхточечного продолжения из теоремы 18.2.

Доказательство. Пункт (i) — это контрапозиция теоремы 15.3. Пункт (ii) следует непосредственно из следствия 15.7. Если бы в (iii) существовали такие (E_n, q_n) , то по теореме 17.3 пространство X было бы гильбертовым, противоречие. Аналогично, если бы выполнялось свойство из (iv), то по теореме 18.2 X было бы гильбертовым. ■

Замечание 19.2. Предложение 19.1 показывает, что гипотетический контрпример должен быть одновременно жёстким в нескольких независимых смыслах. Он не может иметь ни точной, ни даже достаточно хорошей приближительной G -инвариантной квадратичной формы; он не может допускать совместимого конечномерного евклидова сшивания; и он обязан нарушать трёхточечную продолжимость уже на самом базовом уровне.

Замечание 19.3. Сравнение с современной литературой делает этот портрет ещё более узким. Работы Cabello Sánchez и соавторов показывают, что микротранзитивность и связанные semitransitivity-свойства влекут сильную гладкость и выпуклость и в классических пространствах L_p реализуются только при $p = 2$. С другой стороны, результаты Ferenczi–López-Abad о Banach-space envelopes и Fraïssé-пространствах показывают, что большие классы высокооднородных пространств либо уже содержат канонические гильбертовы фрагменты, либо при наличии дополнительной гладкости скатываются к гильбертовой геометрии. Поэтому любой контрпример, если он существует, должен лежать заметно вне всех известных «хороших» однородных классов.

20. Отношение к теории множеств и интуиционистской логике

Отдельного обсуждения требует вопрос о том, почему переход к интуиционистской логике и гладким когезивным топосам может быть математически содержателен. Здесь нужно сохранять аккуратность. На текущем этапе нет оснований утверждать, что rotation problem зависит от ZFC или что аксиома выбора непосредственно порождает «псевдо-транзитивные» пространства. Ни один такой результат в литературе не установлен. Тем не менее переход к синтетической среде может быть принципиально полезен по другим, более точным причинам.

20.1. Что именно меняется при переходе из ZFC во внутреннюю логику топоса

Во внутренней логике хорошо адаптированного гладкого топоса меняются не факты о линейной алгебре как таковой, а способ организации геометрической информации. В частности:

- (1) дифференциальные утверждения становятся алгебраическими тождествами над инфинитезимальными;
- (2) пространство и функция рассматриваются вместе с когезивной структурой, а не как произвольные множества;
- (3) геометрические формулы лучше ведут себя относительно экстракции;
- (4) многие доказательства существования естественно перестраиваются в доказательства построения.

Для rotation problem это особенно важно потому, что мы имеем дело не просто с существованием изометрий, а с геометрией их действия на сфере и с поведением второй производной нормы под этим действием.

20.2. Закон исключённого третьего здесь не враг, а просто не главный инструмент

Существует соблазн описывать синтетическую программу так, будто интуиционистская логика «запрещает патологические контрпримеры». Такая формулировка в текущем состоянии тематики слишком сильна и недостаточно обоснована. Более корректно говорить так:

Интуиционистская среда не автоматически уничтожает патологии, но она заставляет формулировать геометрические утверждения в модально- и функториально-устойчивой форме. Это часто выявляет скрытые неконструктивные шаги и локализует настоящий узел проблемы.

Именно в этом смысле синтетическая программа полезна для rotation problem. Она не заменяет доказательство, а вычленяет тот единственный структурный блок, доказательства которого действительно не хватает.

20.3. Аксиома выбора и глобальное усреднение

Классический переход от транзитивности к евклидовости в конечной размерности использует компактность группы изометрий и меру Хаара. В бесконечной размерности этот путь разрушается не потому, что не хватает аксиомы выбора, а потому, что группа обычно некомпактна и не обязана быть аменабельной. Синтетический подход предлагает заменить «глобальное усреднение по группе» на более гибкие механизмы:

- (a) law-level усреднение на пространстве законов;
- (b) вариационную минимизацию осцилляции оболочек;
- (c) экстракцию геометрических тождеств без явного выбора глобальной меры.

Тем самым роль логики здесь не отрицательная («запретить плохое»), а конструктивная («перестроить корректное усреднение»).

20.4. Почему representation-theoretic obstruction лучше совместим с интуиционистской средой

Фактор

$$\mathrm{Sym}^2(X^*)^H / \mathrm{Sym}^2(X^*)^G$$

хорош тем, что он определяется исключительно через фиксированные точки и факторизацию линейных объектов. Это существенно более геометрично, чем множество всех орбит или множество всех возможных селекторов из них. Во внутренней логике такие объекты должны вести себя лучше, чем «множество представителей орбит». Поэтому наш переход от кокциклов к fixed-point obstruction одновременно является и переходом к более конструктивной формулировке.

20.5. Можно ли надеяться на независимость?

Вполне возможно, что некоторые из связанных с rotation problem экзотических формулировок в будущем окажутся чувствительными к дополнительным множественно-теоретическим принципам. Но на настоящий момент у нас нет ни доказательства независимости исходной сепарабельной задачи от ZFC, ни достаточно серьёзных оснований ожидать такую независимость. Поэтому в настоящей статье синтетический подход трактуется не как обход ZFC, а как *новый язык доказательства внутри консервативно организованной геометрии*.

20.6. Главная логическая мораль

Логический выигрыш SDG-программы для текущей задачи можно сформулировать так:

нужно не надеяться, что интуиционистская логика сама уберёт контрпримеры, а использовать её, чтобы превратить проблему в геометрическое утверждение о постоянстве оболочки, допускающее экстракцию.

Всё остальное — вторично.

21. Сводка результатов и остающийся разрыв

Этот раздел служит не историческому комментарию, а математической сводке: что именно уже замкнуто в статье и где остаётся подлинный разрыв между доказанной теорией и полной проблемой вращений Мазура.

21.1. Жёсткое внешнее ядро

К настоящему моменту построено следующее внешнее ядро, не зависящее от ещё не завершённых мест синтетической программы.

- (1) Точная оболочечная жёсткость: постоянство поля $x \mapsto B_x$ на сфере эквивалентно квадратичности нормы.
- (2) Представленческая редукция: открытый узел локализуется в факторе

$$\mathrm{Sym}^2(X^*)^{\mathrm{Stab}(x_0)} / \mathrm{Sym}^2(X^*)^{\mathrm{Isom}(X)},$$

причём этот фактор снабжён канонической нормой класса препятствия $\omega_{\mathrm{rep}}(X)$, которая сразу даёт количественную оценку расстояния Банаха–Мазура.

- (3) Количественная жёсткость: малая осцилляция оболочек даёт явную оценку расстояния Банаха–Мазура до гильбертова пространства и малый параллелограммный дефект.
- (4) Инвариантно-средние и аффинно-неподвижные редукции: при коэрцитивности одной оболочки проблема сводится либо к усреднению на подходящем коэффициентном классе (в частности, в аменабельном или weakly almost periodic случае), либо к поиску неподвижной точки в конкретной weak*-компактной выпуклой оболочке; рефлексивная реализация оболочечной орбиты уже достаточна для замыкания.
- (5) Финитные спектральные сертификаты: если действие на оболочечном квотиенте имеет конечный spectral gap, то representation-theoretic obstruction контролируется уже конечным набором изометрий; точная инвариантность на таком наборе даёт точную гильбертовость, а малая инвариантность — явную оценку расстояния Банаха–Мазура.
- (6) Инфинитезимальная локальная жёсткость: transport-уравнение для оболочки вместе с локально порождающим семейством shell-preserving infinitesimal symmetries уже влечёт глобальную константность поля оболочек и, следовательно, точную гильбертовость.
- (7) Барицентрические критерии: любой инвариантный закон на сфере уже форсирует гильбертовость; almost-invariant full-support laws дают количественную гильбертовость, а асимптотически almost-invariant family законов уже достаточно для точной гильбертовости.
- (8) Транспортная устойчивость: при липшицевости поля оболочек орбитальный W_1 -дефект закона контролирует defect барицентрической формы, а для ЖКО-схем инвариантность итераций редуцируется к единственности каждого шага.
- (9) Конечномерное сшивание: совместимые квадратичные маргиналы вдоль плотной цепочки дают количественную или точную реконструкцию гильбертовой нормы; суммируемая almost-compatibility уже достаточна и даёт явный tail-control; более того, диагональная компактность показывает, что даже предварительная совместимость в принципе не обязательна — достаточно поуровневой евклидизации вдоль одной плотной цепочки.

- (10) Новый количественный bridge: конечномерные law-level энергии $\mathcal{E}_n(\nu)$ вместе с модулем толщины образов $x \mapsto B_x|_{E_n \times E_n}$ приводят к контролю диаметра этих образов, а затем — к мультишкальному выводу без предварительной совместимости.
- (11) Конечномерный Penon–classical interface: локальные first-order Penon-объекты на глобальных сечениях редуцируются к классическому негладкому анализу; тем самым неопределённость синтетической части теперь локализована в бесконечномерном second-order продолжении.
- (12) Энтропийные селекторы и якорная coherence: на каждом конечномерном shell-image compactum существуют канонические full-support laws, задаваемые строгим variational principle $\mathcal{E} + \tau \text{Ent}$ и приводящие к explicit multiscale sufficient conditions для гильбертовости; кроме того, теперь построены универсальные конечномерные reference laws с полиномиальной нижней массой шаров, из которых следует явная энергия порядка $O(\tau \log(1/\tau))$ и количественная projective concentration для entropic selectors. Более того, в нулетемпературном пределе они всегда коллапсируют к детерминистическим центрам вдоль подпоследовательностей, этот детерминистический коллапс автоматически сохраняется под coarse-graining/restriction maps, а для quantitatively exposed anchors даже почти-совместимость самих anchors уже форсирует суммируемую projective coherence выбранных центров. Таким образом, качественная концентрация и её projective survival больше не являются открытыми узлами; остаётся построить достаточно хорошие canonical anchors или canonical laws.

21.2. Что именно ещё не замкнуто

После этих редукций остаются три класса реально существенных неизвестностей.

- (a) **Второпорядковая геометрия транзитивности.** Нужно понять, почему транзитивность должна принуждать оболочку к глобальной константности или хотя бы к малой осцилляции. После теорем 15.13 и 16.6 этот узел можно атаковать уже в двух существенно более жёстких формах: либо искать конечный spectral-gap сертификат на оболочечном квотиенте, либо строить локально порождающий frame infinitesimal symmetries, annihilating first variation of the shell.
- (b) **Конечномерная law-level толщина, температура и межуровневая совместимость.** Для количественного bridge по-прежнему требуется управлять модулями толщины $\alpha_n(r)$ соответствующих shell-image compacta или, в энтропийной формулировке, профилями $\beta_n(r)$ и admissible temperatures τ_n . Универсальные reference laws следствия 13.32 и теорема 13.33 уже устраняют чисто экзистенциальную часть этого узла на каждом фиксированном конечномерном уровне: full-support laws всегда существуют, их энергия имеет явную скорость $O(\tau \log(1/\tau))$, а следствие 13.34 даёт количественную projective concentration. После теорем 13.39 и 13.43 качественная концентрация и её coarse-grained survival уже не являются bottleneck. Далее теорема 13.54 показывает, что и точная compatibility anchors не обязательна: достаточно quantitatively exposed maximizer-ов и суммируемого defect of compatibility самих anchors. Следовательно, реальный оставшийся узел состоит уже не в abstract projective identification, а в построении canonical anchors или canonical laws, для которых одновременно контролируются (a) экспонирующие модули ψ_n , (b) дефекты совместимости δ_n , и (c) shell-collapse errors, достаточно малые для patching по следствию 13.55 или 17.7.
- (c) **Бесконечномерное second-order продолжение синтетического интерфейса.** Конечномерный first-order мост теоремы 4.4 уже не является bottleneck. Реально открытым остаётся его продолжение к бесконечномерной сфере и к полю оболочек, а затем — экстракция из внутренней динамики sufficiently small shell-defect.

21.3. Почему разрыв теперь принципиально уже

Главная польза проделанной редукции состоит в том, что проблема перестаёт быть расплывчатым вопросом о «большой группе изометрий». Она превращается в набор строго локализованных задач: занулить один класс, построить один fixed point, получить один full-support law с контролируемым дефектом, оценить один энтропийный селектор, либо количественно сжать одно поле вторых производных. Такая декомпозиция не решает проблему автоматически, но переводит её в форму, где каждая последующая подзадача сама по себе является содержательной и проверяемой математической целью.

22. Открытые задачи и конкретная программа дальнейшей работы

Завершив содержательную часть статьи перечнем тех подзадач, решение которых действительно продвигало бы rotation problem, а не просто расширяло бы окрестную теорию. Для удобства мы группируем их по слоям.

22.1. Чисто внешние аналитические задачи

Вопрос 22.1 (Коэрцитивность одной оболочки). Пусть X — сепарабельное транзитивное банахово пространство, а $N(x) = \|x\|^2$ принадлежит $C^2(X \setminus \{0\})$. Следует ли, что для некоторой (эквивалентно, по транзитивности, для любой) точки $x_0 \in S_X$ оболочка B_{x_0} коэрцитивна на всём пространстве?

Положительный ответ совместно с топологической аменабельностью группы изометрий замыкал бы задачу по теореме 8.5. Даже без аменабельности это уже давало бы сильнейшую изоморфическую информацию.

Вопрос 22.2 (Коэффициентные алгебры оболочки). Пусть при тех же гипотезах $x_0 \in S_X$ и

$$f_{u,v}(g) := B_{x_0}(g^{-1}u, g^{-1}v) \quad (u, v \in X, g \in G).$$

Верно ли, что все такие коэффициенты лежат хотя бы в $\text{WAP}(G)$, а в идеале — в более широкой лево-аменабельной коэффициентной алгебре?

По следствию 8.6 положительный ответ вместе с коэрцитивностью одной оболочки уже замыкал бы изометрическую часть задачи. Это переводит вопрос в плоскость динамических свойств одной орбиты $G \cdot B_{x_0}$, а не всей группы целиком.

Вопрос 22.3 (Рефлексивный оболочечный модуль). Пусть $F_{\mathfrak{H}}(x_0)$ — операторно-замкнутая линейная оболочка орбиты $\{T \cdot B_{x_0} : T \in G\}$. Должно ли пространство $F_{\mathfrak{H}}(x_0)$ быть рефлексивным, либо хотя бы содержаться в естественном рефлексивном G -инвариантном модуле симметрических форм?

По следствию 8.9 и замечанию после следствия 15.4 такой результат сразу давал бы внешнее замыкание задачи при наличии коэрцитивности.

Вопрос 22.4 (Малость осцилляции). Существует ли универсальный механизм, выводящий из транзитивности хотя бы оценку

$$\text{osc}(B_{\bullet}) < 1?$$

А тем более

$$\text{osc}(B_{\bullet}) \ll 1?$$

Даже такой «слабый» результат уже по теореме 7.2 давал бы изоморфическую часть Mazur problem.

Вопрос 22.5 (Тривиальность фактора фиксированных точек). Для транзитивного пространства X и базовой точки $x_0 \in S_X$ верно ли

$$\mathrm{Sym}^2(X^*)^{\mathrm{Stab}(x_0)} = \mathrm{Sym}^2(X^*)^{\mathrm{Isom}(X)}?$$

Это внешняя форма representation-theoretic obstruction. Она особенно интересна тем, что не упоминает ни SDG, ни Penon-структуру, ни транспорт напрямую.

Вопрос 22.6 (Конечный spectral-gap на оболочечном квотиенте). Пусть

$$\mathcal{Y}_{\mathfrak{H}}(x_0) \subset \mathrm{Sym}^2(X^*)/\mathrm{Sym}^2(X^*)^G$$

— оболочечный квотиентный модуль из определения 15.12. Существует ли конечное множество $F \subset \mathrm{Isom}(X)$, для которого

$$\kappa_{\mathfrak{H}}(F; x_0) > 0?$$

По теореме 15.13 положительный ответ немедленно сводил бы точное или количественное замыкание задачи к сравнению *конечного* числа значений оболочки B_{Tx_0} .

Вопрос 22.7 (Локально порождающий shell-preserving frame). Существует ли в каждой точке $x_0 \in S_X$ семейство ограниченных инфинитезимальных изометрий $\mathcal{A} \subset \mathfrak{g}_b(X)$ такое, что

$$\overline{\mathrm{span}}\{Ax_0 : A \in \mathcal{A}\} = H_{x_0}$$

и одновременно

$$B_{x_0}(Au, v) + B_{x_0}(u, Av) = 0 \quad (A \in \mathcal{A}, u, v \in X)?$$

По теореме 16.6 положительный ответ уже замыкал бы точную изометрическую часть Mazur rotation problem без обращения ни к аменабельности, ни к fixed-point теоремам.

22.2. Синтетические задачи первого порядка

Вопрос 22.8 (Penon-аннигиляция). Можно ли доказать гипотезу 12.1 хотя бы для широкого класса транзитивных или почти транзитивных норм?

Вопрос 22.9 (Бесконечномерное Penon–classical correspondence второго порядка). Теорема 4.4 закрывает конечномерный first-order интерфейс. Можно ли продолжить этот мост на бесконечномерную единичную сферу и, главное, на genuinely second-order объекты — поле оболочек $x \mapsto B_x$, его касательные вариации и соответствующие law-level функционалы?

Именно здесь проходит оставшийся синтетический разрыв: локальная first-order Penon-геометрия уже не является узким местом, а бесконечномерное second-order продолжение — да.

22.3. Синтетические задачи второго порядка

Вопрос 22.10 (Внутренний второй порядок на бесконечномерных банаховых объектах). Можно ли построить достаточно развитую внутреннюю теорию бесконечномерных банаховых объектов в хорошо адаптированном топосе, чтобы гессиан квадрата нормы был определён и функториален на всей внутренней сфере?

Вопрос 22.11 (Внутренняя коэрцитивность). Можно ли вывести внутренне, что для транзитивной нормы внутренняя оболочка $\tilde{B}_x$ коэрцитивна хотя бы на плотном классе направлений?

Вопрос 22.12 (Внутренний fixed-point obstruction). Можно ли доказать напрямую во внутреннем языке равенство

$$\mathrm{Sym}^2(\tilde{X}^*)^{\tilde{H}} = \mathrm{Sym}^2(\tilde{X}^*)^{\tilde{G}}$$

для транзитивного внутреннего действия?

22.4. Транспортные задачи

Вопрос 22.13 (Дисплейсмент-выпуклость энергии оболочек). Является ли функционал

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{H}}(\nu) = \iint \|B_x - B_y\|_{\mathrm{op}}^2 \, d\nu(x) \, d\nu(y)$$

дисплейсмент-выпуклым в подходящей Wasserstein-геометрии на сфере транзитивного пространства?

Вопрос 22.14 (Существование и единственность shell-ЖКО). По предложению 13.57 инвариантность ЖКО-итераций является формальным следствием единственности каждого шага. Можно ли для $\mathcal{E}_{\mathfrak{H}}$ или его энтропийно-регуляризованных вариантов построить ЖКО-схему на сфере с существованием, единственностью и достаточной компактностью шагов, чтобы полученная динамика действительно давала asymptotically exact laws?

Вопрос 22.15 (Построение almost-invariant full-support laws). Можно ли на сфере транзитивного пространства построить full-support law ν с малым орбитальным дефектом

$$\eta_\nu := \sup_{T \in G} W_1(T_\# \nu, \nu)$$

или, более непосредственно, с малым barycentric defect

$$\delta_\nu := \sup_{T \in G} \|Q_{T_\# \nu} - Q_\nu\|_{\mathrm{op}}?$$

По теореме 13.6 и следствию 13.8 даже такое «почти усреднение» уже было бы достаточно для количественной гильбертовости, а в пределе — для точного решения.

Вопрос 22.16 (Нулевая температура: projective identification и summable coherence). Теорема 13.43, следствие 13.44 и их количественное усиление в следствии 13.34 показывают, что нулетемпературный коллапс автоматически переживает restriction maps: любой энтропийный селектор на более высоком уровне индуцирует асимптотически детерминистические coarse-grained laws на каждом фиксированном более низком уровне, причём на каждом фиксированном конечномерном уровне теперь имеется и явная хвостовая оценка порядка $s^{-2}\tau \log(1/\tau)$. Можно ли усилить это до следующего утверждения: существуют плотная цепочка (E_n) , вероятности ρ_n с полной поддержкой на $\mathcal{H}_n$, температуры $\tau_n \downarrow 0$ и выбранные точки $A_n \in \mathcal{H}_n$ такие, что

$$\eta_n := \|A_{n+1}|_{E_n \times E_n} - A_n\|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n < \infty,$$

и одновременно

$$\sup_{x \in S_X} \|(B_x - A_n)|_{E_n \times E_n}\| \longrightarrow 0?$$

По следствию 17.7 положительный ответ уже замыкал бы Mazur rotation problem. Теорема 13.51 показывает, что identification-часть этого узла решается при наличии совместимых exposed anchors, а теорема 13.54 — что для patching достаточно и существенно более мягкой схемы: quantitatively exposed anchors с суммируемым defect of compatibility уже автоматически дают

summable coherence. Следовательно, по существу остаётся построить именно такие canonical anchors из самой shell-геометрии либо извлечь их из canonical laws.

22.5. Конечномерная евклидизация и возрастные инварианты

Следующая группа вопросов является особенно естественной после теоремы 17.9: теперь конечномерный слой можно атаковать без отдельной задачи о предварительной совместимости.

Вопрос 22.17 (Поуровневая евклидизация вдоль плотной цепочки). Пусть X — сепарабельное транзитивное банахово пространство. Существует ли возрастающая плотная цепочка конечномерных подпространств (E_n) такая, что

$$d_{\text{BM}}(E_n, \ell_2^{\dim E_n}) \longrightarrow 1?$$

По следствию 17.13 положительный ответ сразу замыкал бы Mazur rotation problem. Содержательно это уже не локальная конечномерная представимость в смысле Кривина, а асимптотическая евклидизация одной плотной исчерпывающей цепочки.

Вопрос 22.18 (Shell-image collapse без совместимости). Существует ли для некоторой плотной цепочки (E_n) последовательность квадратичных форм q_n на E_n такая, что

$$\sup_{x \in S_X} \|(B_x - q_n)|_{E_n \times E_n}\|_{\text{op}} \longrightarrow 0?$$

Это точная детерминированная оболочечная переформулировка следствия 17.13: никакая совместимость между q_n заранее не требуется.

Вопрос 22.19 (Мультишкальные законы). Можно ли выбрать по плотной цепочке (E_n) full-support laws ν_n на S_X так, чтобы соответствующие величины

$$\varepsilon_n = \inf_{r>0} \left(2r + \frac{\sqrt{\mathcal{E}_n(\nu_n)}}{\alpha_n(r)} \right)$$

стремились к нулю?

По следствию 17.12 даже такой масштабно-зависимый вероятностный контроль уже был бы достаточен для точного решения. Здесь особенно вероятна точка встречи транспортных методов, теории концентрации и Fraïssé-геометрии.

22.6. Квазибанаховы, неаппроксимируемые и другие направления

Вопрос 22.20 (Квазибанаховы аналоги). Существует ли meaningful analogue оболочки для квазинорм и может ли он использоваться в задачах, родственных проблеме Энфло об аппроксимационном свойстве?

Вопрос 22.21 (Пространства без свойства аппроксимации). Если в пространстве нет свойства аппроксимации, как должен выглядеть representation-theoretic obstruction в отсутствие удобной аппроксимации тензорных объектов?

Вопрос 22.22 (Нелинейные и липшицевы версии). Можно ли сформулировать Lipschitz- или coarse-версию оболочечного препятствия, которая отличала бы inner-product geometry от общей банаховой геометрии на нелинейном уровне?

22.7. Дорожная карта ближайших шагов

Если бы нужно было выбрать кратчайший, но в то же время математически содержательный путь вперёд, мы бы предложили следующую многошаговую программу.

1. **Внешний слой fixed-point/representation.** Построить полностью строгую внешнюю теорию representation-theoretic obstruction для классов пространств, где квадрат нормы уже C^2 , и научиться вычислять этот obstruction хотя бы в нескольких нетривиальных классах.
2. **Finite-dimensional shell geometry.** Для плотных цепочек (E_n) исследовать компактумы $K_n \subset \text{Sym}^2(E_n^*)$: получить либо нижние mass/thickness estimates, достаточные для мультишкального law-level bridge, либо на каждом уровне n любую достаточно точную евклидову структуру. После теорем 17.6 и 17.9 отдельная задача о strict compatibility исчезает: либо её берёт на себя диагональная компактность, либо достаточно суммируемой almost-compatibility.
3. **Асимптотическое averaging.** Построить последовательности almost-fixed forms или full-support laws, у которых относительный defect стремится к нулю. Благодаря теореме 15.8, следствиям 13.10–13.11 и теореме 13.43 на этом этапе уже не требуется ни точная инвариантность, ни exact interlevel compatibility: достаточно найти режим, в котором coarse-grained laws synchronise their deterministic limits summably well.
4. **Связь со stabilizer- и Fraïssé-структурой.** Понять, как конечномерная ультрагомогенность, oligomorphic/guarded-Fraïssé свойства и envelope-механизмы могут производить именно совместимые квадратичные данные, а не только информацию о типах подпространств.
5. **Синтетическая экстракция.** Лишь после этого переносить внешнюю машину внутрь одной конкретной модели гладкого когезивного топоса, где нужно получить не общую «гладкость», а вполне определённый выход: zero obstruction, vanishing relative defect или asymptotically exact shell-centers.
6. **Возврат к полной задаче.** Только после замыкания хотя бы одного из предыдущих слоёв возвращаться к полной формулировке Mazur problem.

Иначе говоря, следующая реальная математическая цель состоит не в декларации окончательного решения, а в доведении до конца хотя бы одного из выделенных здесь мостов. Каждый из них уже сам по себе образует программу статьи уровня серьёзной публикации.

23. Заключение

Главный вывод статьи состоит в том, что проблема вращений Мазура допускает существенно более точную второпорядковую редукцию, чем это принято в традиционной формулировке. Вместо аморфного вопроса о «большой группе изометрий» мы получаем конкретное поле объектов

$$x \longmapsto B_x = \frac{1}{2} D^2(\|\cdot\|^2)(x),$$

его представление в факторе фиксированных точек, его barycentric усреднения и его конечномерные образы вдоль плотных цепочек.

С этой точки зрения доказанная часть статьи распадается на три взаимодополняющих блока.

Во-первых, установлена точная и количественная оболочечная жёсткость: постоянство оболочки эквивалентно гильбертовости, а её малая вариация уже даёт явные оценки Banach–Mazur distance и параллелограммного дефекта.

Во-вторых, выделены два независимых механизма усреднения. Первый — group/fixed-point механизм, где задача сводится к аменабельному усреднению одной коэрцитивной оболочки или к

неподвижной точке в конкретной weak^* -компактной выпуклой оболочке. Второй — law-level механизм, в котором инвариантные или almost-invariant вероятностные законы на сфере производят глобальные билинейные формы через barycentric shells. Существенно, что оба механизма теперь имеют и асимптотические точные версии: достаточно последовательности почти неподвижных форм или почти инвариантных законов с относительным defect, стремящимся к нулю.

Новый внешний шаг состоит в том, что оба механизма теперь дополнены *конечными* и *локальными* сертификатами. Теорема efthm:finite-spectral переводит representation-theoretic obstruction в конечный spectral-gap вопрос на одном оболочечном квотиенте и показывает, что при положительной shell-Kazhdan constant достаточно контролировать лишь конечное число орбитальных значений B_{Tx_0} . Теорема efthm:local-generator идёт по другой линии: если в одной точке сферы существует локально порождающий frame infinitesimal symmetries, annihilating first variation of the shell, то transport-уравнение автоматически распространяет эту жёсткость на всю сферу.

В-третьих, теперь имеется строгий мост между вероятностным слоем и конечномерным patching-подходом, причём этот мост очищен от лишней предпосылки предварительной совместимости. Конечномерные энергии $\mathcal{E}_n(\nu)$, дополненные модулем толщины shell-image compacta, дают поуровневые shell-аппроксиманты; projective coarse-graining показывает, что детерминистическая концентрация устойчиво переживает переход к меньшим уровням; суммируемое patching затем замыкает случай, когда межуровневой дефект мал в сумме, а диагональная компактность берёт на себя полностью compatibility-free режим. Более того, теперь доказано, что на каждом фиксированном конечномерном shell-image compactum существуют универсальные reference laws с полиномиальной нижней массой, а соответствующие entropic selectors всегда имеют явную энергию порядка $O(\tau \log(1/\tau))$ и количественную projective concentration. Новый шаг состоит в том, что линейно-якорные вариационные деформации этих selectors-ов в нулетемпературном пределе canonically выбирают exposed points; при совместимых anchors projective identification становится строгой теоремой, а при quantitatively exposed и лишь почти-совместимых anchors уже получается summable projective coherence, достаточная для дальнейшего patching. Иными словами, вероятностные данные можно переводить не только в точные или количественные выводы о глобальной норме, но и в канонический выбор конечномерных центров, причём exact compatibility линейных тестов больше не является необходимой входной предпосылкой.

Полного решения проблемы здесь по-прежнему нет. Но оставшийся разрыв уже локализован в существенно более узком наборе задач: нужно либо занулить представление открытого узла, либо построить неподвижную точку в одной конкретной оболочке, либо обеспечить по плотной цепочке поуровневую евклидизацию — детерминированную или law-level — с достаточно малым дефектом. В этом и состоит основной научный смысл проделанной работы: проблема сведена к нескольким жёстко сформулированным направлениям, каждое из которых допускает самостоятельную атаку методами геометрии банаховых пространств, теории топологических групп, Fraïssé-теории, локальной теории и синтетического анализа.

А. Минимальный формальный пакет, достаточный для теоремы 12.7

В этой статье мы сознательно избегали перегружать основной текст длинным списком аксиом. Однако для удобства дальнейшей работы полезно собрать в одном месте минимальный пакет предположений, который действительно используется в метатеореме 12.7.

А.1. Список формальных входов

Обозн.	Содержание	Где используется
F1	Хорошо адаптированный гладкий топос $\mathcal{E}$ с KL-аксиомами	Определение внутреннего первого и второго порядка, раздел 4.
F2	Полное и точное вложение классических конечномерных гладких объектов	Согласование внешней и внутренней дифференциальной геометрии.
F3	Наличие внутреннего линейного объекта $\tilde{X}$, поднимающего внешнее пространство X	Во всех внутренних формулировках.
F4	Внутренний квадрат нормы $\tilde{N} = \ \cdot\ ^2$, внутренне C^2 на $\tilde{X} \setminus \{0\}$	Существование внутренней оболочки.
F5	Внутренний групповой объект изометрий $\tilde{G}$ и транзитивное действие на внутренней сфере	Внутренняя эквивариантность оболочки и построение внутреннего obstruction.
F6	Сохранение конечных пределов функтором глобальных сечений Γ	Экстракция геометрических тождеств.
F7	Геометричность формул вида $\forall u, v$ параллелограмм, равенство квадратичной формы, количественные двусторонние оценки	Теоремы 9.1 и 9.2.
F8	Корректное внутреннее пространство симметрических билинейных форм $\text{Sym}^2(\tilde{X}^*)$	Внутренний obstruction и внутренние формы $\tilde{B}$.
F9	Возможность интерпретировать внутренние операторные нормы в геометрической форме или заменить их подходящими экстрагируемыми оценками	Количественная версия.
F10	При необходимости — транспортный или Repon-механизм, обеспечивающий нулевость/малость obstruction	Собственно продвижение к решению.

А.2. Что из этого уже строго, а что ещё нет

- (1) Пункты F1, F2, F6 в значительной мере стандартны для хорошо адаптированных моделей SDG.
- (2) Пункты F3, F4, F8 для *конкретного* фиксированного внешнего пространства можно принять как рабочие гипотезы подъёма; однако полноценная общая бесконечномерная теория ещё требует развития.
- (3) Пункт F5 в части существования подходящего внутреннего действия изометрий на подъёме пространства не вызывает концептуальных возражений, но должен быть аккуратно реализован модельно.
- (4) Пункт F9 является технически тонким: операторная норма как супремум по единичному шару не всегда является геометричным объектом без дополнительных оговорок.

(5) Пункт F10 и есть настоящее математическое сердце дальнейшей программы.

А.3. Почему пакет минимален

Избыточность часто скрывает настоящую трудность. Настоящий список устроен так, чтобы каждая строка была либо уже известной частью инфраструктуры, либо непосредственно несла в себе один из оставшихся открытых узлов. В этом смысле пакет F1–F10 можно рассматривать как *контрольный список честности*: любая программа, претендующая на решение rotation problem, обязана либо доказать, либо явно принять каждый из этих пунктов.

В. Глоссарий основных обозначений

Ниже приведён компактный словарь обозначений, используемых в статье.

Обозначение	Значение
X	внешнее банахово пространство.
S_X	единичная сфера пространства X .
$\text{Isom}(X)$	группа линейных сюръективных изометрий X .
$N(x)$	квадрат нормы, $N(x) = \ x\ ^2$.
ϕ_x	единственный поддерживающий функционал в точке $x \in S_X$ (при гладкости).
H_x	касательная гиперплоскость $\text{Ker } \phi_x$.
π_x	проектор на H_x вдоль $\mathbf{R}x$, $\pi_x = I - \phi_x \otimes x$.
Q_x	тангенциальная вторая форма, $Q_x = \frac{1}{2}D^2N(x) _{H_x \times H_x}$.
B_x	гессианова оболочка, $B_x = \frac{1}{2}D^2N(x)$.
G	обычно обозначает группу изометрий $\text{Isom}(X)$.
H	стабилизатор базовой точки $x_0 \in S_X$, то есть $\text{Stab}_G(x_0)$.
E	пространство $\text{Sym}^2(X^*)$ симметрических ограниченных билинейных форм на X .
E^H	подпространство H -фиксированных элементов в E .
E^G	подпространство G -фиксированных элементов в E .
$\mathfrak{Ob}(X, x_0)$	representation-theoretic obstruction, фактор E^H/E^G .
$\mathfrak{o}(X, x_0)$	класс оболочки $[B_{x_0}]$ в $\mathfrak{Ob}(X, x_0)$.
$\mathcal{Y}_H(x_0)$	оболочечный факторизованный модуль $\overline{\text{span}}\{[T \cdot B_{x_0}] : T \in G\} \subset E/E^G$.
$\kappa_H(F; x_0)$	конечная спектральная (Kazhdan-type) константа множества $F \subset G$ на модуле $\mathcal{Y}_H(x_0)$.
$\text{osc}_B(B_\bullet)$	осцилляция поля оболочек относительно формы B .
$\text{osc}(B_\bullet)$	наилучшая осцилляция относительно всех билинейных форм.
$\mathfrak{J}(u, v)$	глобальный дефект параллелограмма.
$\mathfrak{j}(X)$	нормированный глобальный параллелограммный дефект.
$\mathcal{E}$	хорошо адаптированный гладкий когезивный топос.
$\tilde{X}$	внутренний подъём внешнего пространства X в топосе $\mathcal{E}$.
$\tilde{S}$	внутренняя единичная сфера в $\tilde{X}$.
$\tilde{B}_x$	внутренняя гессианова оболочка.
Γ	функтор глобальных сечений.
$\mathcal{E}_H$	энергия осцилляции оболочки на пространстве законов на сфере.
$W_{2,P}$	предполагаемая Penon/Wasserstein-метрика в синтетическом транспортном слое.

С. Карта зависимостей теорем

Для удобства дальнейшей работы приведём сжатую схему логических зависимостей основных результатов статьи.

С.1. Табличная карта

Результат	Использует	Выход
Лемма 5.2	2-однородность квадрата нормы, гладкость	Формулы для B_x , связи с ϕ_x и Q_x .
Лемма 5.6	Изометричность $N \circ T = N$	Эквивариантность оболочки.
Теорема 5.7	Лемма 5.2	Постоянство оболочки $\Rightarrow$ квадратичность нормы.
Предл. 6.1	Однородное пространство G/H	Классификация эквивариантных полей через E^H .
Теорема 6.4	Предл. 6.1, Теорема 5.7	Редукция rotation problem к классу $[B_{x_0}]$.
Теорема 7.2	Лемма 5.2	Малость осцилляции $\Rightarrow$ близость к гильбертовой норме.
Теорема 7.4	Теорема 7.2	Контроль дефекта Жордана–фон Неймана.
Теорема 8.5	Лемма 8.2, коэрцитивность одной оболочки, аменабельность	Усреднение одной оболочки $\Rightarrow$ точная гильбертовость.
Теорема 15.13	Квотиент E/E^G , конечный spectral gap на $\mathcal{Y}_J(x_0)$	Контроль $\omega_{\text{тер}}(X)$ по конечному числу орбитальных значений оболочки.
Теорема 16.6	Теорема 16.3, локальное порождение H_{x_0} , путь на сфере	Нулевая first variation оболочки $\Rightarrow$ глобальная константность $\Rightarrow$ гильбертовость.
Предл. 13.31	Ауэрбахов базис, dyadic tree на кубе	Универсальный full-support law с полиномиальной нижней массой на конечномерном компакте.
Теорема 13.33	Предл. 13.31, Предл. 13.27, Предл. 13.37	Явная скорость $O(\tau \log(1/\tau))$ для энергии энтропийных селекторов и количественная одноточечная концентрация.
Следствие 13.34	Теорема 13.33, контрактность ограничений	Количественная projective concentration coarse-grained entropic laws.
Предл. 13.42	Липшицево coarse-graining, условное ожидание, Йенсен	Сжатие энергии и relative entropy под фактор-отображениями.
Теорема 13.43	Теорема 13.39, Предл. 13.42, Предл. 13.37	Projective stability нулетемпературной детерминистической концентрации.
Теорема 17.6	Суммируемая межуровневая almost-compatibility, телескопическая Cauchy-оценка	Patching с явным хвостовым контролем и ВМ-оценкой.
Следствие 17.7	Теорема 17.6, Лемма 5.2	Суммируемо согласованные shell-аппроксиманты $\Rightarrow$ гильбертовость.
Теорема 17.9	Конечномерная компактность $\text{Sym}^2(E_n^*)$, диагональное извлечение	Compatibility-free finite-dimensional patching и ВМ-контроль.
Следствия 17.10, 17.11	Теорема 17.9, соответственно балансировка евклидовых изоморфизмов и лемма 5.2	Плотная асимптотическая евклидизация и схлопывание shell-image $\Rightarrow$ гильбертовость.
Следствие 17.12	Теорема 13.21, Следствие 17.11	Мультишкальный law-level мост без общей совместимости законов.
Теорема 9.1	Внутренняя версия теоремы 5.7, геометрическая экстракция	Внутренняя постоянная оболочка $\Rightarrow$ внешняя гильбертовость.
Теорема 9.2	Внутренняя версия теоремы 7.2	Внутренняя малая осцилляция $\Rightarrow$ внешняя близость к гильбертовой норме.
Теорема 12.7	Внутренний obstruction = 0, точная экстракция	Формальный пакет, замыкающий Mazur problem.

Результат	Использует	Выход
Теорема 12.8	Внутренняя малая осцилляция, количественная экстракция	Изоморфическая часть из асимптотического контроля.

С.2. Схема в одну строку

Логическую архитектуру статьи можно сжать до следующей цепочки:

$$\begin{aligned} \text{транзитивность} &\implies \text{эквивариантное поле } B_x \implies [B_{x_0}] \in E^H/E^G, \\ [B_{x_0}] = 0 &\implies \text{точная гильбертовость,} \\ \text{osc}(B_\bullet) \ll 1 &\implies \text{почти гильбертовость,} \\ B_{x_0} \text{ коэрцитивна и действует} &\implies \text{точная гильбертовость.} \end{aligned}$$

С.3. Где именно ещё остаётся неизвестность

С практической точки зрения все неизвестности статьи сосредоточены в трёх местах:

- (i) доказать существование/коэрцитивность оболочки в достаточно большой общности;
- (ii) доказать нулевость или малость класса $[B_{x_0}]$;
- (iii) добиться канонической и суммируемой coherence конечномерных shell-centers;
- (iv) доказать, что нужные внутренние оценки действительно геометричны и экстрагируются.

Всё остальное в статье уже сведено к строгим теоремам.

Д. Развёрнутые вычисления и альтернативные доказательства

Этот раздел служит двум целям: повысить *плотность верифицируемых деталей* и зафиксировать альтернативные доказательные маршруты к ключевым формулам статьи. Здесь мы заново, пошагово, вычисляем ключевые формулы статьи и показываем, как одни и те же результаты можно вывести несколькими путями. Такой стиль полезен и для последующей формализации: длинное доказательство легче разложить на проверяемые леммы, чем единый крупный аргумент.

Д.1. Альтернативное доказательство теоремы 5.7 через интегрирование вдоль лучей

В основном тексте теорема 5.7 была доказана почти мгновенно из однородности. Приведём другую версию, подчёркивающую роль постоянства второй производной.

Предложение Д.1. При гипотезах теоремы 5.7 для каждого $u \in X$ имеем

$$N(u) = B(u, u),$$

где B — постоянная оболочка. **Доказательство.** Пусть $u \neq 0$ и рассмотрим функцию одной переменной

$$f(t) := N(tu) - t^2 B(u, u), \quad t > 0.$$

По 2-однородности N функция f продолжается до $t = 0$ значением 0, и также $f'(0) = 0$. Теперь

$$f''(t) = D^2 N(tu)[u, u] - 2B(u, u).$$

Так как $tu/\|tu\| = u/\|u\| \in S_X$, а оболочка на сфере постоянна и по лемме 5.2 $D^2 N(tu) = D^2 N(u/\|u\|)$, получаем

$$\frac{1}{2} D^2 N(tu) = B.$$

Следовательно,

$$f''(t) = 2B(u, u) - 2B(u, u) = 0.$$

Итак, f аффинна и имеет нулевые значение и производную в нуле, откуда $f \equiv 0$. Значит,

$$N(tu) = t^2 B(u, u) \quad (t \geq 0).$$

При $t = 1$ получаем $N(u) = B(u, u)$. Для $u = 0$ всё очевидно. ■

Замечание D.2. Это доказательство полезно тем, что его легче переносить во внутренний язык SDG: оно использует только вторую производную вдоль одной фиксированной прямой и однородность.

D.2. Развёрнутая поляризация и явное восстановление скалярного произведения

После установления равенства $N(u) = B(u, u)$ можно восстановить скалярное произведение поляризацией:

$$\langle u, v \rangle_B := \frac{1}{4} (B(u + v, u + v) - B(u - v, u - v)).$$

Но так как B уже симметрична и билинейна, проще просто положить $\langle u, v \rangle_B = B(u, v)$. Тем не менее полезно проверить согласованность обеих формул.

Лемма D.3. Для симметрической билинейной формы B выполнено

$$B(u, v) = \frac{1}{4} (B(u + v, u + v) - B(u - v, u - v)).$$

Доказательство. Раскрываем обе скобки:

$$\begin{aligned} B(u + v, u + v) &= B(u, u) + 2B(u, v) + B(v, v), \\ B(u - v, u - v) &= B(u, u) - 2B(u, v) + B(v, v). \end{aligned}$$

Вычитание и деление на 4 дают искомое. ■

D.3. Пошаговый вывод формулы для оболочки на L_p

Перепишем вычисление из раздела 11 более детально. Это особенно важно, поскольку именно на L_p хорошо видно, где возникает нетривиальная зависимость от точки.

Пусть $1 < p < \infty$ и

$$A(x) = \int |x|^p, \quad N(x) = A(x)^{2/p}.$$

Работаем в точке x такой, что $\|x\|_p = 1$ и x не обращается в нуль почти всюду. Тогда $A(x) = 1$.

Шаг 1: первая производная A . Для вещественного числа s функция $\psi(s) = |s|^p$ имеет производную

$$\psi'(s) = p|s|^{p-2}s.$$

Следовательно,

$$DA(x)[h] = \int p|x|^{p-2}xh = p \int |x|^{p-2}xh.$$

Шаг 2: вторая производная A . При $s \neq 0$

$$\psi''(s) = p(p-1)|s|^{p-2}.$$

Следовательно,

$$D^2 A(x)[h, k] = p(p-1) \int |x|^{p-2} h k.$$

Шаг 3: формула композиции. Положим $\alpha = 2/p$. Тогда $N = A^\alpha$. При $A(x) = 1$ имеем

$$D^2 N(x)[h, k] = \alpha(\alpha-1) D A(x)[h] D A(x)[k] + \alpha D^2 A(x)[h, k].$$

Подставляя найденные формулы:

$$D^2 N(x)[h, k] = \frac{2}{p} \left(\frac{2}{p} - 1 \right) p^2 I_x(h) I_x(k) + \frac{2}{p} p(p-1) J_x(h, k),$$

где

$$I_x(h) = \int |x|^{p-2} x h, \quad J_x(h, k) = \int |x|^{p-2} h k.$$

Шаг 4: упрощение коэффициентов. Имеем

$$\frac{2}{p} \left(\frac{2}{p} - 1 \right) p^2 = 2p \left(\frac{2}{p} - 1 \right) = 4 - 2p = 2(2-p),$$

а также

$$\frac{2}{p} p(p-1) = 2(p-1).$$

Значит,

$$D^2 N(x)[h, k] = 2(2-p) I_x(h) I_x(k) + 2(p-1) J_x(h, k).$$

Шаг 5: деление на два. Получаем оболочку

$$B_x(h, k) = (2-p) I_x(h) I_x(k) + (p-1) J_x(h, k).$$

Шаг 6: ограничение на касательную гиперплоскость. Поскольку

$$\phi_x(h) = I_x(h),$$

касательная гиперплоскость есть

$$H_x = \{h : I_x(h) = 0\}.$$

Следовательно, для $h, k \in H_x$

$$Q_x(h, k) = B_x(h, k) = (p-1) \int |x|^{p-2} h k.$$

Именно вес $|x|^{p-2}$ и фиксирует зависимость оболочки от точки.

D.4. Ещё одна оценка для параллелограммного дефекта

В основном тексте мы получили

$$|\mathfrak{J}(u, v)| \leq \frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon} (\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Иногда удобнее иметь более грубую, но «однострочную» оценку.

Предложение D.4. При гипотезах теоремы 7.2

$$|\mathfrak{J}(u, v)| \leq 6\varepsilon(\|u\|^2 + \|v\|^2) + 2\varepsilon \|u + v\| \|u - v\|.$$

Доказательство. Из тождества

$$\mathfrak{J}(u, v) = \sum_{\sigma \in \{+, -\}} (\|u + \sigma v\|^2 - B(u + \sigma v, u + \sigma v)) - 2(\|u\|^2 - B(u, u)) - 2(\|v\|^2 - B(v, v))$$

и элементарной оценки

$$\left| \|w\|^2 - B(w, w) \right| \leq \varepsilon \|w\|^2$$

получаем

$$|\mathfrak{J}(u, v)| \leq \varepsilon(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 + 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2).$$

Теперь используем неравенство

$$a^2 + b^2 \leq (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

для $a = \|u\|$, $b = \|v\|$ и обычную оценку треугольником

$$\|u \pm v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

После упрощения получаем заявленное неравенство. ■

Хотя эта оценка хуже теоремы 7.4, она иногда удобнее в численных и эвристических рассуждениях, где важен сам факт линейного контроля по ε .

D.5. Развёрнутая проверка лево-равномерной непрерывности в теореме 8.5

В доказательстве леммы 8.2 использовалась стандартная SOT-оценка. Полезно выписать её в чуть более систематическом виде. Пусть B_0 — ограниченная билинейная форма, а

$$f_{u,v}(g) = B_0(g^{-1}u, g^{-1}v).$$

Тогда для любых $g, h \in G$

$$\begin{aligned} f_{u,v}(g) - f_{u,v}(h) &= B_0(g^{-1}u, g^{-1}v) - B_0(h^{-1}u, h^{-1}v) \\ &= B_0(g^{-1}u - h^{-1}u, g^{-1}v) + B_0(h^{-1}u, g^{-1}v - h^{-1}v). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|f_{u,v}(g) - f_{u,v}(h)| \leq \|B_0\|_{\text{op}} \left(\|g^{-1}u - h^{-1}u\| \|v\| + \|u\| \|g^{-1}v - h^{-1}v\| \right).$$

В частности, если $g^{-1}h$ близок к единице в SOT на конечном наборе $\{u, v\}$, то разность значений $f_{u,v}$ мала. Это и есть точный механизм, по которому SOT переходит в LUC в теореме 8.5.

D.6. Альтернативное построение усреднённой формы через орбитные меры

Если бы у группы G имелась достаточно хорошая инвариантная вероятностная мера μ на самой сфере S_X , можно было бы попробовать определить

$$B_\mu(u, v) := \int_{S_X} B_x(u, v) \, d\mu(x).$$

В присутствии транзитивности и инвариантности меры такая форма автоматически была бы G -инвариантной. Однако классическое существование такой меры в бесконечной размерности проблематично. Именно поэтому в теореме 8.5 мы усредняем не по сфере, а по *группе* через инвариантный mean на $\text{LUC}(G)$. Тем не менее transport-ветвь программы по сути стремится реализовать именно орбитное усреднение на сферическом уровне.

D.7. Формальное сравнение двух усреднений

Введём две потенциальные схемы усреднения.

(U1) **Групповое усреднение:**

$$\overline{B}_G(u, v) = \mu(g \mapsto B_{x_0}(g^{-1}u, g^{-1}v)).$$

(U2) **Сферическое усреднение:**

$$\overline{B}_S(u, v) = \int_{S_X} B_x(u, v) \, d\nu(x),$$

где ν инвариантна относительно действия G на S_X .

Если ν получена как push-forward среднего μ относительно отображения $g \mapsto gx_0$, эти схемы совпадают. В бесконечной размерности именно эта связь может не иметь классического смысла на уровне мер, но она вполне естественна на уровне *valuations* или внутренних вероятностных объектов. Поэтому transport-слой программы можно понимать как попытку построить закон ν , который в классической теории играл бы роль орбитной меры.

D.8. Подробный комментарий к representation-theoretic obstruction

Пусть $x_0 \in S_X$ и $H = \text{Stab}(x_0)$. Важно понимать, что фактор

$$E^H / E^G$$

обычно очень велик. Поэтому утверждение о нулевости класса $[B_{x_0}]$ вовсе не является тривиальным representation-theoretic фактом. В частности, даже если H действует «очень симметрично» на касательной гиперплоскости H_0 , это ещё не гарантирует, что соответствующая форма поднимается до G -инвариантной формы на всём X .

Ровно здесь и проявляется специфичность банаховой геометрии. В гильбертовом пространстве ортогональное дополнение и сама глобальная квадратичная форма уже жёстко сцеплены. В общем банаховом пространстве касательная гиперплоскость H_0 и радиальное направление $\mathbf{R}x_0$ не обязаны соединяться одной глобальной квадратичной структурой.

D.9. Минимальный toy-model препятствия

Даже конечномерная линейная алгебра даёт полезную игрушечную модель. Рассмотрим группу G матриц, действующих транзитивно на некотором многообразии состояний, и фиксированную точку x_0 . Пространство E^H H -инвариантных симметрических форм на всём векторном пространстве может быть существенно больше, чем пространство E^G глобально инвариантных форм. Тогда каждый элемент из $E^H \setminus E^G$ задаёт *кандидат* на локальную вторую модель в точке x_0 , которая не продолжима глобально.

В нашей бесконечномерной задаче оболочка B_{x_0} — это не произвольный такой кандидат, а очень специальный, рождаемый нормой. Но формально препятствие имеет именно этот характер: локально допустимая форма может не быть глобально совместимой.

D.10. Небольшой словарь для будущей формализации

Возможная формализация статьи в proof assistant могла бы идти по следующим шагам.

- (1) Определить нормированное пространство, квадрат нормы и вторую производную.
- (2) Построить оболочку B_x и доказать леммы 5.2, 5.6, 5.9.
- (3) Определить представление $G \curvearrowright E$ и фиксированные точки E^H, E^G .
- (4) Формализовать proposition 6.1 как классификацию эквивариантных сечений однородного расслоения.
- (5) Вывести теорему 6.4.
- (6) Добавить количественный слой: operator norm, осцилляция, теоремы 7.2 и 7.4.
- (7) Отдельно формализовать лемму 8.2 и теорему 8.5.

Эта последовательность интересна тем, что большая часть её уже чисто классическая и не зависит от синтетической логики. То есть значительный процент настоящей статьи потенциально доступен немедленной формальной верификации.

Список литературы

- [1] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 233, Springer, Cham, 2016.
- [2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, vol. 1, Warszawa, 1932.
- [3] F. Cabello Sánchez, Wheeling around Mazur rotations problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **376** (2023), 2213–2235.
- [4] F. Cabello Sánchez, V. Ferenczi, and B. Randrianantoanina, On Mazur rotations problem and its multidimensional versions, *São Paulo J. Math. Sci.* **16** (2022), 406–458.
- [5] F. Cabello Sánchez, S. Dantas, V. Kadets, S. K. Kim, H. J. Lee, and M. Martín, On Banach spaces whose group of isometries acts micro-transitively on the unit sphere, *J. Math. Anal. Appl.* **488** (2020), 124046.
- [6] M. Cúth, N. de Rancourt, and M. Doucha, Guarded Fraïssé Banach spaces, preprint, arXiv:2408.12755, 2024.
- [7] S. S. Damase and A. Khare, A remark on characterizing inner product spaces via strong three-point homogeneity, *Canad. Math. Bull.*, published online 2025. doi:10.4153/S0008439525101379.
- [8] S. J. Dilworth and B. Randrianantoanina, On an isomorphic Banach–Mazur rotation problem and maximal norms in Banach spaces, *J. Funct. Anal.* **268** (2015), no. 6, 1587–1611.
- [9] V. Ferenczi and J. López-Abad, Envelopes in Banach spaces, *Banach J. Math. Anal.* **18** (2024), Art. 59.
- [10] V. Ferenczi and M. A. Rincón-Villamizar, Almost Fraïssé Banach spaces, *Israel J. Math.* (2025), published online. doi:10.1007/s11856-025-2800-8.
- [11] V. Ferenczi and C. Rosendal, On isometry groups and maximal symmetry, *Duke Math. J.* **162** (2013), no. 10, 1771–1831.
- [12] F. A. Ficken, Note on the existence of scalar products in normed linear spaces, *Ann. of Math. (2)* **45** (1944), no. 2, 362–366.
- [13] E. Glasner and M. Megrelishvili, On fixed point theorems and nonsensitivity, *Israel J. Math.* **190** (2012), 289–305.
- [14] I. Namioka, A geometric proof of Ryll-Nardzewski’s fixed point theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 443–445.
- [15] C. Ryll-Nardzewski, Generalized random ergodic theorems and weakly almost periodic functions, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* **10** (1962), 271–275.
- [16] K. Salame, Weakly almost periodic functions invariant means and fixed point properties in locally convex topological vector spaces, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **60** (2022), no. 1, 135–152.
- [17] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry*, 2nd ed., London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 333, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [18] R. Lavendhomme, *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [19] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. I. Sequence Spaces*, Springer, Berlin–New York, 1977.
- [20] I. Moerdijk and G. E. Reyes, *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer, New York, 1991.
- [21] C. Villani, *Optimal Transport: Old and New*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 338, Springer, Berlin, 2009.