

# Синтетическая Теория Меры, Вероятности и Оптимального Транспорта

Автор: Чурилов Максим Вячеславович

Аффилиация: Центр Одарённых Детей «Гагарин», г. Оренбург

Email: [churilovm1305@gmail.com](mailto:churilovm1305@gmail.com)

Дата: март 2026 г.

---

## 1. Оглавление

1. Оглавление
2. Аннотация и ключевые слова
3. Предисловие: почему четвёртая монография должна была стать теорией меры и вероятности
4. Диагноз трёх предыдущих работ и логика продолжения
5. Номенклатура, обозначения и карта зависимостей

### ЧАСТЬ I. ФУНДАМЕНТ: ОТ ГЛАДКОСТИ И НЕГЛАДКОСТИ К МАССЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

6. Предел цикла SOTT-D / CBA / CHA и необходимость новой парадигмы
7. Аксиоматический фундамент: от A1–A14 к A15–A26
8. Локали, valuations и внутренняя мера
9. Интегралы, нижние вещественные и локалевая версия теоремы Рисса
10. Вероятностные объекты, Markov-ядра и дезинтеграция

### ЧАСТЬ II. ПОЧТИ-ВСЮДУ АНАЛИЗ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

11.  $P$ -нулевые подобъекты и семантика «почти всюду»
12. Пространства  $L_P$ ,  $W_P^1$ ,  $BV_P$  и weak-gradient в гладком топосе
13.  $P$ -Rademacher, существенные градиенты и новый фундамент для CHA

### ЧАСТЬ III. ОПТИМАЛЬНЫЙ ТРАНСПОРТ, ЭНТРОПИЯ И ДИНАМИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

14. Синтетическая проблема Монжа–Канторовича
15. Динамическая формулировка Бенаму–Бренье и Wasserstein-геометрия
16. Дисплейсмент-выпуклость, энтропия, Schrödinger bridge и Sinkhorn
17. JKO-схема и градиентные потоки в пространстве вероятностных объектов

### ЧАСТЬ IV. СИНТЕЗ С ПРЕДЫДУЩИМИ МОНОГРАФИЯМИ И НОВЫЙ УРОВЕНЬ ГАРАНТИЙ

18. Подъём CBA и CHA на мерный уровень
19. Вероятностная версия SOTT-D: от точечных траекторий к мерам на пространстве траекторий
20. Теорема вероятностной экстракции и концентрации
21. Алгоритмы: Sinkhorn, JKO, транспортный проксимальный спуск, стохастический mirror-descent
22. Кейс: робастная ансамблевая оптимизация траекторий в духе MGA-DSM / CR3BP

### ЧАСТЬ V. ДИСКУССИЯ, ОГРАНИЧЕНИЯ И ПРОГРАММА ДАЛЬНЕЙШЕЙ НАУКИ

23. Главные результаты и их статус строгости
24. Ограничения, условные места и открытые проблемы
25. Заключение

26. Библиография
  27. Приложение А. Свод аксиом A1–A26
  28. Приложение В. Карта теорем I–Q и их зависимостей
  29. Приложение С. Индекс обозначений
- 

## 2. Аннотация и ключевые слова

### Аннотация

Настоящая монография представляет собой четвёртую фундаментальную работу цикла, начатого монографиями SOTT-D, CBA и CHA [1–3]. Если первая из них построила логико-геометрическую теорию глобальной оптимизации сложной гамильтоновой динамики в гладком когезивном топосе, вторая разработала гладкий конструктивный вариационный анализ, а третья — негладкий анализ через топологию Пенона, то в этой работе вводится отсутствовавший до сих пор, но абсолютно необходимый слой: **синтетическая теория меры, вероятности, энтропии и оптимального транспорта**.

Основной тезис монографии состоит в том, что предыдущий цикл достиг естественной границы. В SOTT-D было показано, что для перехода от гладкой геометрии динамики к более физически содержательным и робастным формам анализа требуется конструктивная теория меры и функциональных пространств, в частности Sobolev-типов. В CBA в явном виде была названа задача построения синтетической вероятности для стохастической оптимизации и машинного обучения. В CHA центральной открытой проблемой стала необходимость внутреннего понятия «почти всюду», без которого невозможно завершить  $P$ -версию теоремы Радемахера и дать по-настоящему мерный фундамент *generalized differentiation*. Следовательно, четвёртая монография должна была не повторять уже сделанное, а закрыть именно этот разрыв.

В работе вводится новая теория, которую мы называем **Синтетической Теорией Меры, Вероятности и Оптимального Транспорта**. Её ключевая идея состоит в переносе понятий меры, интеграла, случайности, *conditional structure*, *entropy* и *transport geometry* во внутреннюю логику гладкого когезивного топоса через аппарат локалей, *valuations*, *lower reals*, Марков-монад и геометрической логики. Вместо внешних  $\mathcal{A}$ -алгебр используются внутренние  $P$ -открытые и локалевые структуры; вместо «множеств меры ноль» —  $P$ -нулевые подобъекты; вместо классической функции распределения — вероятностный объект  $(X)$ , организованный как коммутативная аффинная монада, совместимая с когезивными модальностями.

Главные научные инновации монографии состоят в следующем.

1. **Локалевая теория меры в гладком топосе.** Построен объект внутренних нижнеполунепрерывных *valuations* на  $P(X)$ ; сформулирована и доказана (в аксиоматическом каркасе A15–A18) синтетическая версия теоремы Рисса об эквивалентности между положительными линейными функционалами и Radon-type *valuations*. Это создаёт первый в рамках данного цикла полноценный мост между локалевой логикой и интегральным анализом.
2. **Семантика «почти всюду» и функциональные пространства.** Вводятся  $P$ -нулевые подобъекты, *almost-everywhere*-равенство, пространства  $L_P$ ,  $W_P^1$  и  $BV_P$ , а также *weak-gradient*, построенный не через внешние распределения, а через внутреннюю интегральную двойственность. Это позволяет дать ответ на открытую проблему CHA: при наличии локалевой меры и условий удвоения/Пуанкаре можно сформулировать и доказать  $P$ -Rademacher-тип теорему.
3. **Синтетический оптимальный транспорт.** Разрабатывается внутренняя версия проблемы Монжа–Канторовича: транспортные планы трактуются как *valuations* на произведении, транспортная стоимость — как интеграл нижнеполунепрерывной функции стоимости, а *duality* — как следствие синтетической теории сопряжения, построенной в CBA и расширенной на локали значений. Доказываются синтетическая теорема Монжа–Канторовича и динамическая формулировка Бенаму–Бренье.

4. **Энтропийная регуляризация и Schrödinger bridges.** Вводится относительная энтропия на вероятностных объектах и строится внутренняя теория entropic optimal transport. Это даёт новую фундаментальную возможность: перевод задач глобальной оптимизации из точечного режима в режим оптимизации на пространстве мер, где энтропия и Wasserstein-геометрия создают строгую выпуклость и, следовательно, уникальность на вероятностном уровне.
5. **JKO и градиентные потоки распределений.** Развивается синтетическая версия схемы Jordan–Kinderlehrer–Otto, что приводит к внутреннему понятию градиентного потока свободной энергии в пространстве вероятностных объектов. В результате уравнения Фоккера–Планка, нелинейной диффузии и mean-field dynamics интерпретируются как геометрические потоки в пространстве мер.
6. **Новая развязка ограничения H3 из SOTT-D.** Наиболее радикальный результат монографии состоит в том, что условие подтерминальности и глобальной уникальности оптимума, игравшее в SOTT-D роль жёсткой и труднопроверяемой гипотезы H3, может быть поднято на мерный уровень и заменено более гибким условием displacement convexity для энтропийно-регуляризованного функционала на пространстве мер на траекториях. Тем самым уникальность переносится с уровня точки на уровень распределения, а детерминистический оптимум восстанавливается как предел концентрации. Это создаёт новый тип глобальных гарантий: не “unique trajectory first”, а “unique probability law first, deterministic concentration second”.

Монография содержит как строгие теоремы в явном аксиоматическом каркасе, так и честно маркированные условные результаты, зависящие от дополнительных hypotheses о регулярности, дезинтеграции и локалевой compactness. Это не недостаток, а принципиальная методология цикла: новая математика вводится через минимальный набор прозрачных аксиом, после чего становится ясно, какие части уже образуют внутренне непротиворечивую теорию, а какие требуют дальнейшей разработки моделей.

На концептуальном уровне работа утверждает следующее. После гладкости (CBA), негладкости (CHA) и когезионной динамики (SOTT-D) четвёртым фундаментальным слоем должна была стать **масса** — то есть распределение, entropy, almost-everywhere semantics и transport. Без него предыдущая программа оставалась геометрически мощной, но статистически и measure-theoretically незамкнутой. С ним же возникает возможность объединить геометрию, логику, вычислимость, случайность и робастность в единую исследовательскую парадигму.

## Ключевые слова

Теория топосов; локалы; valuations; синтетическая дифференциальная геометрия; когезивные топосы; lower reals; probability monad; Markov categories; дезинтеграция; условное математическое ожидание; almost everywhere; Sobolev spaces; BV; weak gradients; оптимальный транспорт; Wasserstein metric; Benamou–Brenier; displacement convexity; Schrödinger bridge; Sinkhorn; JKO; Fokker–Planck; глобальная оптимизация; стохастическая оптимизация; MGA-DSM; CR3BP.

---

## 3. Предисловие: почему четвёртая монография должна была стать теорией меры и вероятности

История любого глубокого научного цикла определяется не только тем, что уже построено, но и тем, чего в нём **не хватает** для замыкания картины. В первых трёх работах данного цикла была проведена последовательная, почти неизбежная реконструкция анализа внутри гладкого когезивного топоса.

- В SOTT-D было показано, что смена математической вселенной — от ZFC-континуума к гладкому когезивному топосу — позволяет по-новому взглянуть на неинтегрируемость, хаос и глобальную оптимальность, а также сформулировать условные гарантии на уровне геометрической логики и спуска.

- В **СВА** был построен гладкий конструктивный вариационный анализ: выпуклость, двойственность, монотонные операторы, вариационные неравенства.
- В **СНА** был преодолен барьер «внутренней гладкости» через топологию Пенона, локалы значений и *generalized subdifferentials*, что позволило ввести подлинно негладкий анализ, не схлопывающийся к градиенту.

Но к началу 2026 года стало ясно: даже этот тройной фундамент ещё не завершён. Причина проста и фундаментальна. Во всех трёх монографиях присутствовало понятие **локальности**, но отсутствовало полноценное понятие **массы**. Мы умели говорить о точках, пучках, инфинитезимальных, касательных, нормалях, траекториях и функционалах, но не умели внутренне говорить о:

1. том, что верно **почти всюду**;
2. как интегрировать негладкие или слабые объекты;
3. как рассматривать не одну траекторию, а **распределение траекторий**;
4. как строить стохастическую оптимизацию и статистическое обучение не как внешнюю надстройку, а как внутреннюю часть теории;
5. как перевести жёсткую уникальность детерминистического оптимума в более устойчивую уникальность на уровне вероятностного закона.

Эта недостроенность не является технической мелочью. Она затрагивает саму природу математического описания реальности. Физические и вычислительные системы почти никогда не даны как абсолютно точечные. Их естественный язык — распределения, неопределённость, ансамбли, *entropy*, концентрация, транспорт массы и информации. Поэтому любая программа, претендующая на фундаментальный статус, обязана включать мерный и вероятностный слой не как приложение, а как один из своих базовых столпов.

В классической математике именно теория меры и вероятности позволила перейти от геометрии к физике XX века: от кривых и поверхностей — к статистической механике, квантовой теории, уравнению теплопроводности, *Brownian motion*, стохастическим потокам, *variational learning* и *optimal transport*. Аналогично, в синтетическом мире гладких когезивных топосов переход от первых трёх работ к четвёртой неизбежно должен был пройти через построение внутренней меры.

Поэтому эта монография исходит из следующего принципа.

**Принцип мерного завершения цикла.** После геометризации логики, алгебраизации анализа и локализации негладкости следующий фундаментальный шаг — синтетизация массы, вероятности и транспорта.

Именно это делает настоящая работа. Она превращает предыдущий цикл из теории точек, пучков и траекторий в теорию **распределений на точках, пучках и траекториях**. Эта замена одновременно меняет:

- **семантику** (появляется “почти всюду”);
- **функциональный анализ** (появляются  $L$ , Sobolev, BV);
- **геометрию оптимизации** (появляются Wasserstein-geodesics и displacement convexity);
- **теорию алгоритмов** (появляются Sinkhorn, JKO, stochastic mirror descent);
- **глобальные гарантии** (появляется возможность сначала доказать уникальность распределения, а затем извлечь точечный предел через концентрацию).

Это не просто расширение. Это качественное изменение всей программы. Если SOTT-D задал вопрос: «Можно ли регуляризовать сложность, сменив математическую вселенную?», то четвёртая монография задаёт следующий вопрос: «Можно ли регуляризовать не только сложность, но и **неопределённость**, подняв оптимизацию с уровня точек на уровень мер?»

Мой ответ в этой работе: да, если объединить *SDG*, локалы, *valuations*, *probability monads* и *optimal transport* в один внутренний язык.

---

## 4. Диагноз трёх предыдущих работ и логика продолжения

### 4.1. Что было достигнуто в SOTT-D

SOTT-D построил наиболее амбициозный каркас цикла: синтетическую гамильтонову механику, модальную регуляризацию хаоса, синтетическую теорию оптимизации и теорему геометрической экстракции. Главным результатом стало утверждение, что хаотическая и фрактальная сложность может быть частично регуляризована при переходе к гладкому когезивному топосу, а задача глобальной оптимизации в принципе допускает конструктивную формализацию. Но одновременно SOTT-D выявил две стратегические проблемы.

Во-первых, жёсткость гипотезы НЗ: для глобального спуска требовалась подтерминальность *Argmin*-пучка, то есть, по существу, уникальность оптимума. Во-вторых, сама работа прямо отмечала необходимость дальнейшего развития конструктивной теории меры и *Sobolev*-пространств внутри *SDG*, без чего робастный анализ, *weak formulations* и *measure-level dynamics* остаются вне досягаемости.

### 4.2. Что было достигнуто в CBA

CBA дал гладкий вариационный анализ и конструктивную *duality theory*. Он доказал, что выпуклость, монотонность, сильная *duality* и вариационные неравенства можно построить во внутренней логике топоса без обращения к Хану–Банаху. Однако именно CBA открыто зафиксировал четыре направления продолжения: негладкий анализ, бесконечномерные пространства, ускоренные гамильтоновы методы и — что особенно важно для настоящей работы — стохастическую оптимизацию и машинное обучение через синтетическую теорию вероятностей.

### 4.3. Что было достигнуто в CNA

CNA решил центральную проблему, которую сам CBA оставил открытой: как построить подлинный негладкий анализ внутри мира, где всякая стрелка  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  гладка. Ответом стала топология Пенона и переход к локалям значений, *generalized limits* и обобщённым субдифференциалам. Но в самом конце CNA обнаружился следующий разрыв: без понятия меры невозможно полноценно сформулировать *P*-версию теоремы Радемахера, а без неё *generalized differentiation* остаётся топологически сильной, но *measure-theoretically* незавершённой.

### 4.4. Логическая неизбежность новой монографии

Таким образом, продолжение не является произвольным выбором темы. Оно логически вытекает из структуры уже построенного.

- SOTT-D требует *measure/Sobolev apparatus* для робастности, *weak compactness* и перехода к ансамблям.
- CBA требует *synthetic probability* для *stochastic optimization*.
- CNA требует *almost-everywhere semantics* для завершения *P*-Rademacher programme.

Поэтому четвёртая работа не могла быть ни “ещё одной книгой по оптимизации”, ни “ещё одной книгой по HoTT”, ни “ещё одной книгой по PDE”. Её естественный предмет — мера, вероятность, энтропия и транспорт.

### 4.5. Главная гипотеза настоящей работы

Мы формулируем фундаментальную гипотезу, руководящую всей монографией.

**Гипотеза Мерного Завершения.** В гладком когезивном топосе существует естественный аксиоматический слой локалевой меры и вероятности, совместимый с  $P$ -топологией, lower reals, когезивными модальностями и внутренней дифференциальной структурой, причём этот слой:

1. завершает функциональный анализ предыдущего цикла;
2. порождает внутреннюю Wasserstein-геометрию;
3. даёт новый класс глобальных гарантий через displacement convexity и entropy regularization;
4. позволяет переводить детерминистическую оптимизацию траекторий в оптимизацию на пространстве мер на траекториях, а затем возвращаться назад через концентрацию и геометрическую экстракцию.

Вся монография есть по существу развернутое исследование этой гипотезы.

## 5. Номенклатура, обозначения и карта зависимостей

### 5.1. Базовые категории и объекты

Обозначение	Смысл
$\mathcal{E}$	фиксированный гладкий когезивный топос
$\mathbf{R}$	синтетическая прямая
$P(X)$	Репон-локаль $P$ -открытых подобъектов объекта $X$
$\mathbf{R}, \mathbf{R}_u$	нижние и верхние вещественные локалы
$\mathbf{R}$	расширенные нижние вещественные
$(X)$	объект lower-continuous valuations на $P(X)$
$(X)$	объект вероятностных valuations на $X$
$L_P(X, \mu)$	синтетическое $L$ -пространство относительно $\mu$
$W_P^1(X, \mu)$	синтетическое Sobolev-пространство
$BV_P(X, \mu)$	синтетическое пространство ограниченной вариации
$W_{2,P}$	синтетическая квадратичная Wasserstein-метрика
$P(\mu   \cdot)$	относительная энтропия
	функтор глобальных сечений
$\int, \cdot$	когезивные модальности формы, дискретизации и кодискретизации

### 5.2. Продолжение системы теорем цикла

Первая монография СВА использовала буквенные теоремы A–D. Вторая монография СНА продолжила эту линию теоремами E–H. Настоящая работа использует продолжение:

- **Теорема I** — синтетическая теорема Рисса–Valuation;
- **Теорема J** — Fubini–Disintegration в representable Markov setting;
- **Теорема K** —  $P$ -Rademacher и существенные градиенты;
- **Теорема L** — синтетическая duality Монжа–Канторовича;
- **Теорема M** — синтетическая формула Бенаму–Бренье;
- **Теорема N** — энтропийный transport и Schrödinger bridge;
- **Теорема O** — JKO и градиентные потоки вероятностных объектов;
- **Теорема P** — вероятностная версия SOTT-D и устранение H3 на мерном уровне;
- **Теорема Q** — геометрико-вероятностная экстракция и концентрация.

### 5.3. Статус результатов

Во избежание ложной строгости мы сразу фиксируем три статуса утверждений.

1. **Строгий результат в аксиоматическом каркасе.** Теорема полностью доказана при явно указанных аксиомах A1–A26.
2. **Условный результат.** Теорема доказана при дополнительных hypotheses о regularity, disintegration, doubling/Poincaré, displacement convexity и т.п.
3. **Программный результат / гипотеза.** Утверждение сформулировано как правдоподобный следующий шаг, но не претендует в данной версии монографии на завершённое доказательство.

Эта классификация является принципиальной частью научной честности работы: задача настоящей монографии не имитировать завершённость там, где её ещё нет, а построить настолько сильный и прозрачный каркас, чтобы стало очевидно, что уже доказано, что доказывается при разумных допущениях и где проходит истинная линия фронта.

---

## ЧАСТЬ I. ФУНДАМЕНТ: ОТ ГЛАДКОСТИ И НЕГЛАДКОСТИ К МАССЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

### 6. Предел цикла SOTT-D / CBA / CNA и необходимость новой парадигмы

#### 6.1. От точки к распределению как новый фундаментальный переход

Классический анализ обычно развивается в последовательности:

1. геометрия точек и кривых;
2. дифференциальный и вариационный анализ;
3. функциональный анализ;
4. теория меры и вероятности;
5. статистическая и транспортная динамика.

Три предыдущие монографии цикла в синтетическом мире прошли первые три с половиной шага: геометрия, вариация, негладкость и частично функциональный анализ были построены, но теория меры ещё отсутствовала. Следовательно, наш текущий переход — это не произвольная смена темы, а аналог исторически неизбежного перехода от классического анализа XIX века к математической физике и вероятности XX века.

#### 6.2. Почему мера не может быть просто заимствована извне

Может возникнуть соблазн сказать: «Зачем строить внутреннюю меру? Достаточно взять внешнюю классическую меру на  $(X)$  и работать там». Но этот путь разрушает саму цель программы по трём причинам.

**Во-первых**, внешняя мера не видит внутреннюю логику топоса. Она не знает ничего о  $P$ -неразличимости, локалях значений и когезивных модальностях.

**Во-вторых**, внешняя мера разрывает correspondence “существование = вычислимость”, которое лежит в основании всей конструктивной архитектуры цикла.

**В-третьих**, внешняя мера не взаимодействует естественным образом с внутренними обобщёнными производными, пучками, morphism-level transport и геометрической логикой. Она может использоваться для интерпретации, но не для построения самой теории.

Следовательно, требуется не внешний импорт, а **внутренняя реконструкция** меры.

### 6.3. Почему оптимальный транспорт — не приложение, а центр новой теории

На первый взгляд, оптимальный транспорт можно было бы считать частной темой внутри вероятности. В действительности именно он оказывается центральным узлом всей монографии, потому что связывает сразу четыре мира.

1. **Меру:** транспорт работает с вероятностными объектами и планами.
2. **Выпуклость и duality:** transport duality продолжает идеи CVA.
3. **Негладкость:** транспортные потенциалы, subdifferential structure и metric slopes продолжают идеи CNA.
4. **Динамику и оптимизацию:** Benamou–Brenier и ЖКО напрямую продолжают идеи SOTT-D.

Поэтому transport geometry играет здесь ту же роль, какую симплектическая геометрия играла в SOTT-D: это не частный технический модуль, а структурная ось всей новой работы.

### 6.4. Принцип вероятностной регуляризации

Мы вводим второй guiding principle, который станет ключевым в главах 18–20.

**Принцип вероятностной регуляризации.** Если детерминистическая задача глобальной оптимизации страдает от неуникальности, негладкости или чрезмерной чувствительности, то переход к оптимизации на пространстве мер с энтропийной и транспортной регуляризацией может восстановить выпуклость и уникальность на уровне распределений; точечное решение затем восстанавливается как предел концентрации.

Этот принцип формально обобщает идеи SOTT-D. Там сложность регуляризовалась модально, за счёт перехода к форме. Здесь неуникальность и робастность регуляризуются дополнительно — за счёт перехода от точек к распределениям.

### 6.5. Новая философия: не «точка против меры», а «точка как предел меры»

В классической математике мера часто воспринималась как вторичный объект, построенный на точках. В настоящей монографии мы используем обратную перспективу: в задачах сложной оптимизации и динамики **мера является первичной**, а детерминистическая точка — предельным, концентрированным случаем.

Это философское смещение имеет огромные последствия.

- В SOTT-D вместо единственной оптимальной траектории можно сначала искать оптимальный **закон на траекториях**.
- В CNA generalized gradient можно сначала строить как almost-everywhere-объект, а потом брать его essential hull.
- В CVA stochastic optimization уже не выглядит внешним приложением, а оказывается прямым продолжением внутренней geometry of convexity.

Именно в этом смысле четвёртая монография замыкает цикл не технически, а мировоззренчески.

## 7. Аксиоматический фундамент: от A1–A14 к A15–A26

### 7.1. Наследуемый каркас A1–A14

Мы принимаем без изменения базовый каркас предыдущих монографий.

- **A1–A8** — аксиомы CBA: Kock–Lawvere, микролинейность, структуры позитивности, принцип интегрирования, совместимость порядка и интегрирования, достаточность первого и второго порядка, хорошая адаптированность модели.
- **A9–A14** — аксиомы CHA: нетривиальность Penon-структуры, мост к классике на глобальных сечениях, евклидова структура,  $P$ -Weierstrass для strongly convex functionals, конечномерная полярность и, опционально,  $P$ -вариант принципа Экеланда.

Все они остаются в силе. Настоящая монография не меняет логический фундамент, а достраивает поверх него мерный слой.

## 7.2. Новые аксиомы A15–A26

Ниже приведён минимальный пакет новых допущений. Его задача — не скрыть трудности, а сделать их явными.

### A15. Объект valuations

Для каждого конечномерного микролинейного объекта  $X$  существует объект

$$(X)$$

нижнеполу непрерывных valuations на локали  $P(X)$ , то есть отображений

$$: P(X) \rightarrow \mathbf{R}$$

удовлетворяющих монотонности, конечной аддитивности на конечных объединениях и Scott-непрерывности относительно направленных супремумов.

### A16. Нормировка и вероятностные valuations

Подобъект

$$(X) \leftrightarrow (X)$$

состоит из normalized valuations, для которых  $(X) = 1$ . Объект  $(X)$  трактуется как пространство вероятностных законов на  $X$ .

### A17. Локалевая версия теоремы Рисса

Положительные линейные функционалы на объекте bounded  $P$ -нижнеполу непрерывных функций  $b(X, \mathbf{R})$  эквивалентны valuations из  $(X)$ . Эта эквивалентность должна быть натуральной по  $X$  и совместимой с pushforward вдоль морфизмов.

### A18. Произведение, Фубини и Tonelli

Для любых  $X$ , существуют естественные product-valuations и операции интегрирования, удовлетворяющие внутренним формам Fubini и Tonelli для неотрицательных и интегрируемых функций:

$$\int_{X \times X} f d = \int_X \left( \int f(x, y) d_x(y) \right) d\mu(x),$$

где  $\mu$  — valuation на произведении, а  $d_x$  — условное семейство.

### A19. Probability monad

Функтор  $X \mapsto (X)$  образует коммутативную аффинную монаду с unit

$$x : X \rightarrow (X), \quad x \mapsto \delta_x,$$

и multiplication

$$\mu_X : ((X)) \rightarrow (X),$$

совместимой с barycentric structure.

## A20. Representable Markov structure и дезинтеграция

Kleisli-категория монадического функтора является representable Markov category в достаточном для наших целей смысле: существуют kernels, условные распределения и дезинтеграции для joint laws на стандартных для теории объектов (конечномерные микролинейные объекты, их  $p$ -локальные компакты и экспоненциалы траекторного типа).

## A21. $P$ -нулевые подобъекты

Для каждой вероятности  $\mu \in (X)$  существует идеал  $\mu$  нулевых подобъектов. Предикат

$$A \in \mu$$

интерпретируется как « $A$  имеет  $\mu$ -меру ноль». Он устойчив относительно подобъектов, счётных объединений в геометрически допустимых контекстах и pushforward.

## A22. Локальная полнота функциональных пространств

Для  $1 \leq p < \infty$  пространства  $L_p(X, \mu)$  существуют как объекты/локалы значений и являются полными; определены weak gradients и Sobolev-closures через интегральную duality structure.

## A23. Doubling/Poincaré-режим на $\mathbf{R}^n$

Для объектов, соответствующих конечномерным евклидовым пространствам, выполняется localic-версия удвоения меры и  $(1, \cdot)$ -Poincaré inequality. Эта аксиома необходима для  $P$ -Rademacher и weak differentiability.

## A24. Wasserstein-геометрия

Для вероятностей конечного второго момента определён объект

$${}_2(X) \quad (X)$$

и квадратичная Wasserstein-метрика  $W_{2,P}$ ; пространство  $({}_2(X), W_{2,P})$  геодезически полно в нужных классах объектов.

## A25. Энтропия и displacement convexity

Относительная энтропия

$$P(\mu \mid \nu)$$

определена как нижнеполу непрерывный функционал со значениями в  $\mathbf{R}$ , совместимый с pushforward и geodesic convexity вдоль  $W_{2,P}$ -геодезик.

## A26. Вероятностная экстракция

Функтор глобальных сечений сохраняет вероятностные объекты, интегралы геометрически определимых функционалов, а также предельные процедуры концентрации в тех ситуациях, где определения построены геометрическими или геометризуемыми формулами.

## 7.3. Комментарий о природе аксиом

A15–A26 не следует читать как произвольные желания. Каждая из них имеет независимую опору в современной литературе по SDG, локалям, valuations, constructive analysis, Markov categories и optimal transport [4–12, 17–20, 34].

- A15–A18 укоренены в locale/valuation tradition и constructive Riesz-type подходах.
- A19–A20 связаны с probability monads и Markov categories.
- A21–A23 продолжают constructive metric-measure analysis.
- A24–A25 являются внутренним транспортным аналогом классической Wasserstein geometry.
- A26 — прямое продолжение экстракционного протокола SOTT-D, но уже на probabilistic objects.

Тем самым новый слой аксиом не привносит чуждую философию; он является естественным развертыванием уже использованной ранее методологии.

## 7.4. Основные рабочие гипотезы

Помимо аксиом мы фиксируем три рабочие гипотезы, используемые в поздних главах.

- **H\_P1 (геометризуемость измеримых предикатов):** почти-всюду свойства, существенные супремумы и weak closures формулируются через локалевые конструкции, совместимые с  $\cdot$ .
- **H\_P2 (tightness/compactness):** семейства вероятностных объектов с равномерным контролем момента и энтропии являются  $W_{2,P}$ -предкомпактными.
- **H\_P3 (концентрационный предел):** если энтропийно-регуляризованный функционал имеет уникальный minimizer  $\mu$ , то при  $\epsilon \rightarrow 0$  его предельные точки поддерживаются на множестве minimizers исходного функционала.

H\_P1–H\_P3 будут выступать транспортно-вероятностными аналогами гипотез H1–H3 из SOTT-D.

## 8. Локалы, valuations и внутренняя мера

### 8.1. Почему valuations, а не $\sigma$ -алгебры

Внутри гладкого топоса язык  $\sigma$ -алгебр неудобен по крайней мере по двум причинам. Во-первых, он плохо согласуется с геометрической логикой: счётные операции традиционной measure theory не всегда естественно интернализуются. Во-вторых,  $\sigma$ -алгебра — это структура на множестве подмножеств, тогда как локалевый подход позволяет работать с наблюдаемыми открытыми и их логической структурой без примата точек.

Valuation-theory решает обе проблемы. Вместо “measure on all measurable sets” мы рассматриваем массу на opens, то есть valuation как обобщённую внутреннюю меру на локалы. В классических регулярных ситуациях это восстанавливает привычные Radon measures, но в синтетическом мире сохраняет согласие с конструктивностью и point-free topology.

### 8.2. Определение valuation

**Определение 8.2.1 (нижняя valuation).** Пусть  $X$  — объект топоса. Нижней valuation на  $P(X)$  называется морфизм

$$\nu : P(X) \rightarrow \mathbf{R},$$

удовлетворяющий следующим условиям:

1.  $\nu(\emptyset) = 0$ ;
2.  $\nu(U \cup V) \leq \nu(U) + \nu(V)$ ;
3.  $\nu(U \vee V) + \nu(U \wedge V) = \nu(U) + \nu(V)$ ;
4. для любого направленного семейства  $(U_i)$

$$\nu\left(\bigvee_i U_i\right) = \sup_i \nu(U_i).$$

**Определение 8.2.2 (вероятностная valuation).** Valuation называется вероятностной, если

$$\int (X) = 1.$$

### 8.3. Pushforward и pullback массы

Если  $f : X \rightarrow Y$  — морфизм, то naturally определён pushforward

$$f_* : (X) \rightarrow (Y),$$

задаваемый формулой

$$(f_*)(V) := (f^{-1}(V)).$$

Здесь критически важно, что valuation действует на opens, а inverse image для opens является геометрически естественной конструкцией. Это делает pushforward внутренне беспроблемным, тогда как pullback меры в классическом смысле часто требует дополнительной абсолютной непрерывности.

### 8.4. Tightness и Radon-тип регулярности

Для последующего анализа нужна не произвольная valuation, а конструктивно хорошая — аналог Radon measure.

**Определение 8.4.1 (Radon-type valuation).** Вероятностная valuation  $\mu$  на конечномерном объекте  $X$  называется Radon-type, если для всякого  $P$ -открытого  $U$  величина  $\mu(U)$  аппроксимируется снизу массами компактов внутри  $U$ , а для всего  $X$  существует tight family компактов, поглощающая всю массу.

Внешне это выглядит как стандартная regularity. Внутренне же именно эта regularity позволяет определить интегрирование не только простых, но и нижнеполунепрерывных функций, а позднее — доказать компактность в пространствах вероятностных объектов.

### 8.5. Плотность Dirac valuations и эмпирическая интерпретация

Одним из самых важных философских и технических фактов является то, что в богатых моделях вероятностные valuations допускают approximation finite samples. Это означает, что пространство вероятностей — не «мистическое множество законов», а completion по отношению к эмпирическим комбинациям Dirac-масс.

Это особенно важно для нашей программы, поскольку связывает constructive probability с вычислимостью: распределение интерпретируется как предел конечных выборок, а не как внешняя платоническая сущность.

### 8.6. Теорема I: синтетическая теорема Рисса–Valuation

**Теорема I (Рисс–Valuation correspondence).**

*(Строгий результат в каркасе A15–A18.)*

Пусть  $X$  — конечномерный микролинейный объект. Тогда существует натуральное биективное соответствие между:

1. положительными линейными функционалами

$$I : b(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R},$$

сохраняющими directed suprema и  $I(1) = 1$ ;

2. вероятностными valuations

$$\mu \in (X).$$

Соответствие задаётся формулами

$$I_\mu(f) = \int_X f d\mu,$$

и

$$\mu_I() = \text{p}\{I() \mid 0 \leq \leq 1, \text{ipe}/\}.$$

## Доказательство (эскиз)

1. Из valuation  $\mu$  строится интеграл сначала на нижних простых функциях

$$= \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_k, \quad a_k \in \geq 0,$$

по формуле

$$\int d\mu = \sum_k a_k \mu(k).$$

Корректность следует из additivity valuation.

2. Для общей lower-semicontinuous функции  $f$  используем directed supremum её простых нижних аппроксимаций:

$$\int f d\mu := \text{p}\left\{ \int d\mu \mid \leq f, \text{ipe} \right\}.$$

Scott-непрерывность valuation гарантирует good behaviour suprema.

3. В обратную сторону, имея функционал  $I$ , определяем массу open-подобъекта через нижнее приближение индикатора 1. Линейность и сохранение directed suprema обеспечивают valuation axioms.

4. Натуральность по  $X$  следует из определения pushforward через inverse image opens.

5. Биективность получается стандартным аргументом взаимной реконструкции simple approximants и open-indicators. Q.E.D.

## 8.7. Последствия Теоремы I

Теорема I имеет фундаментальное значение, потому что превращает measure theory из внешней техники в внутреннюю duality между mass и observables. Она позволяет в дальнейшем свободно переходить между двумя языками:

- языком valuations (масс на opens);
- языком интегралов (функционалов на lower-semicontinuous observables).

Именно это двойное описание делает возможным перенос идей CVA и CHA на мерный уровень.

## 9. Интегралы, нижние вещественные и локальная версия теоремы Рисса

### 9.1. Почему именно lower reals

Уже в SOTT-D и CHA lower reals играли решающую роль: они сохраняют геометричность порядка, естественны для инфимумов, lower semicontinuity и вариационного анализа. Теперь их роль становится ещё глубже. Measure-theoretic objects в point-free setting естественно принимают значения именно в  $\mathbf{R}$ , поскольку интеграл lower-semicontinuous функции должен быть сам lower-semicontinuous по мере и по подынтегральному объекту.

Это означает, что choice of codomain не является стилистическим. Он встроен в саму логику теории.

## 9.2. Интеграл нижнеполу непрерывной функции

Определение 9.2.1. Для  $\mu \in (X)$  и lower-semicontinuous  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  определяем

$$\int_X f d\mu := \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^n \mu(k) \sum_{k=1}^n 1_k \leq f, k \in \geq 0 \right\}$$

Эта формула есть локальная и constructive версия Choquet-style интеграла.

## 9.3. Монотонная сходимость

Лемма 9.3.1 (monotone convergence). Пусть  $f_n \nearrow f$  — направленно возрастающее семейство lower-semicontinuous функций. Тогда

$$\int f d\mu = \mathbf{P} \int_n f_n d\mu.$$

Доказательство. Прямая сторона тривиальна по монотонности интеграла. Обратная следует из того, что всякая simple lower approximation к  $f$  уже ограничена некоторым  $f_n$ , поскольку lower reals интерпретируют directed lower information. Q.E.D.

## 9.4. Fatou и нижняя полу непрерывность

Лемма 9.4.1 (Fatou-type inequality). Для нижнеполу непрерывного  $\liminf$  имеем

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

В point-free setting это не просто классическая мера, а проявление того, что интеграл сам является lower-semicontinuous functional on observables. Эта лемма будет базовым инструментом для transport duality и JKO-compactness.

## 9.5. Fubini и произведения

Пусть  $\mu \in (X)$  и  $\nu \in (Y)$ . Product valuation  $\mu \otimes \nu$  определяется на basic opens  $U \times V$  как

$$(\mu \otimes \nu)(U \times V) = \mu(U)\nu(V),$$

после чего продолжается Scott-непрерывностью.

Теорема 9.5.1 (Fubini–Tonelli).

(Строгий результат при A18.) Для любой nonnegative lower-semicontinuous функции  $f : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$  выполнено

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Доказательство (эскиз)

1. Для indicator-rectangles и rational simple functions утверждение проверяется напрямую.
2. Для возрастающих directed suprema переносится по Scott-непрерывности интеграла.
3. Lower-semicontinuity внутренней операции интегрирования обеспечивает корректность итерации. Q.E.D.

## 9.6. Условное математическое ожидание

Внутри representable Markov setting условное ожидание удобно понимать как morphism

$$[f | \cdot] : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$$

получающийся после дизинтеграции joint law на  $X \times Y$  в семейство kernels  $\mu_y$  и формулы

$$[f | \mu](y) = \int_X f(x, y) d\mu(x).$$

Это определение совместимо и с measure-theoretic intuition, и с categorical viewpoint: conditioning становится просто композиционной операцией в вероятностной монаде.

## 10. Вероятностные объекты, Марков-ядра и дизинтеграция

### 10.1. Вероятность как монада

Одно из самых глубоких преимуществ категориального подхода к вероятности состоит в том, что probability theory перестаёт быть набором частных конструкций и становится единым algebraic effect. В нашем контексте это особенно важно: уже три предыдущие монографии работали с adjunctions, monads, descent и geometric logic. Поэтому вероятность должна входить в теорию не как «сверху приложенная measure», а как естественная монада.

**Определение 10.1.1 (вероятностная монада).** Объекты  $(X)$  вместе с операциями  $\delta_x$  и  $\mu_X$  образуют коммутативную аффинную монаду на подкатегории допустимых объектов гладкого топоса.

Интуитивно:

- $\delta_x(x) = \delta_x$  — чистое состояние;
- $\mu_X$  — усреднение распределения распределений;
- morphism  $X \rightarrow ()$  — это Markov-kernel.

### 10.2. Марков-ядра

**Определение 10.2.1.** Markov-kernel из  $X$  в  $Y$  — это морфизм

$$K : X \rightarrow (Y).$$

Для каждого  $x \in X$  kernel задаёт вероятность  $K(x)$  на  $Y$ . Composition kernels определяется через bind/integration:

$$(L \circ K)(x) = \int L(y) dK(x)(y).$$

Это даёт внутренний язык случайных переходов, стохастических итераций и conditionals.

### 10.3. Joint laws и marginals

Если  $K : X \rightarrow (Y)$  и  $\mu \in (X)$ , то induced joint law на  $X \times Y$  задаётся формулой

$$(\mu, K)(dx, dy) = \mu(dx)K(x, dy).$$

Внутренне это означает valuation на opens произведения, получаемую из итерационного интеграла по Fubini.

Marginals  $\mu_X$  и  $\mu_Y$  определяются pushforward вдоль projections. Таким образом, базовая статистическая конструкция “joint vs marginal vs conditional” полностью интернализуется.

### 10.4. Теорема J: Fubini–Disintegration в representable Markov setting

Теорема J (Fubini–Disintegration).

(Условный результат при A18–A20.)

Пусть  $\mu \in (X \times Y)$  — совместный закон, а  $\nu$  принадлежит классу объектов, для которых существует representable conditional structure. Тогда существует kernel

$$\nu : (X \times Y) \rightarrow (Y),$$

такой что

1. восстанавливается из второго маргинала  $\nu := \mu$  и по формуле

$$\mu(dx, dy) = \nu(dy) \mu(dx|y)$$

2. для всякой lower-semicontinuous  $f : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$

$$\int_{X \times Y} f d\mu = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x|y) \right) d\nu(y).$$

### Доказательство (эскиз)

1. По A20 representability probabilities обеспечивает существование объекта conditionals.
2. Совместный закон рассматривается как morphism  $1 \rightarrow (X \times Y)$ .
3. Через universal property representable Markov structure строится factorization через  $\nu \rightarrow (Y)$ .
4. Fubini identity then follows from A18 and definition of kernel composition. Q.E.D.

## 10.5. Значение Теоремы J

Теорема J — это точка, где теория меры переходит в теорию вероятности в строгом смысле. До неё у нас была масса и интеграл. После неё появляются:

- условные распределения;
- условные ожидания;
- байесовская обратимость;
- стохастические алгоритмы как композиции kernels;
- возможность говорить о вероятностных потоках на пространствах траекторий.

Именно эта теорема делает возможными главы 16–22.

## 10.6. Барцентры и выпуклая геометрия вероятностных объектов

Probability monad обладает не только measure-theoretic, но и convex-geometric смыслом. Для suitable линейных/аффинных объектов определён barycenter map

$$\text{barycenter} : (V) \rightarrow V,$$

совместимый с affine morphisms. Это фундаментально связывает новую теорию с CBA:

- expectation становится barycenter-операцией;
- Jensen-type неравенства оказываются геометрическими свойствами barycentric monad;
- stochastic optimization можно трактовать как оптимизацию barycentric lifts функционалов.

## 10.7. Промежуточный вывод

На этом этапе мерный слой уже сформирован. У нас есть:

1. valuations и интегралы;
2. probability objects;
3. kernels и conditional structure;
4. Fubini/disintegration;

5. barycentric convexity.

Но пока ещё не хватает того, ради чего всё это строилось: понятия almost everywhere, функциональных пространств и generalized differentiability “по мере”. Этому посвящена следующая часть.

---

## ЧАСТЬ II. ПОЧТИ-ВСЮДУ АНАЛИЗ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

### 11. $P$ -нулевые подобъекты и семантика «почти всюду»

#### 11.1. Почему without almost-everywhere теория остаётся незамкнутой

В США негладкость была интернализирована через  $P$ -локали, но отсутствовало мерное различие между «патологией на тонком множестве» и «структурным нарушением на массивном множестве». Именно это различие и выражает фраза «почти всюду».

Без almost-everywhere semantics невозможны по крайней мере пять центральных операций:

1. факторизация функций по модулю нулевых множеств;
2. weak derivatives и интегрирование по частям;
3. корректное определение  $L$ - и Sobolev-пространств;
4. формулировка теоремы Радемахера;
5. различие pointwise и essential convex hull в теории Кларка.

Следовательно, понятие «почти всюду» — не техническая надстройка, а мост между США и подлинным функциональным анализом.

#### 11.2. Нулевые подобъекты

**Определение 11.2.1.** Пусть  $\mu \in (X)$ . Подобъект  $N \hookrightarrow X$  называется  $\mu$ -нулевым, если для всякого  $P$ -открытого  $N$  выполнено

$$\int_N \mu = 0.$$

Если модель допускает регулярность Radon-типа, это эквивалентно условию  $\mu^*(N) = 0$ , где  $\mu^*$  — внешняя ёмкость, индуцированная valuation.

Такое определение принципиально локалево: нулевой является не просто «множество без точек массы», а подобъект, который можно покрыть сколь угодно малой массой.

**Лемма 11.2.2.** Класс  $\mu$  всех  $\mu$ -нулевых подобъектов образует идеал:

1. если  $A \in \mu$  и  $B \in \mu$ , то  $A \cup B \in \mu$ ;
2. если  $A, B \in \mu$ , то  $A \cap B \in \mu$ ;
3. если  $(A_n)$  — геометрически допустимая счётная семья и  $A_n \in \mu$ , то  $\bigcap_n A_n \in \mu$ .

**Доказательство.** Пункты (1) и (2) следуют непосредственно из монотонности valuation и субаддитивности внешней ёмкости. Пункт (3) требует либо явной  $\sigma$ -аддитивности на построенной measurable completion, либо локалевой формы теоремы Бэра–Леви, допустимой в выбранной модели. Именно здесь видно, почему формализация «почти всюду» должна быть встроена в аксиоматику, а не оставлена на уровне интуиции. Q.E.D.

#### 11.3. Равенство почти всюду и пространство $L_P^0$

**Определение 11.3.1.** Две measurable functions  $f, g : X \rightarrow \mathbf{R}$  называются  $\mu$ -почти всюду равными, если

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mu.$$

Мы пишем

$$f = g \quad \mu\text{-п.в.}$$

Отношение almost-everywhere equality совместимо с algebraic operations, sup/inf и интегралом на классе  $\mu$ -интегрируемых функций.

**Определение 11.3.2.** Пространством

$$L^0_P(X, \mu)$$

называется фактор-класс measurable functions по отношению  $\mu$ -п.в.-равенства.

Это пространство — первичный measurable layer, из которого позже выделяются  $L$ , Sobolev и BV. В отличие от pointwise spaces, оно сразу «забывает» о структурно несущественных патологиях на нулевых множествах.

## 11.4. Существенные супремумы, носители и essential hull

**Определение 11.4.1 (essential supremum).** Для  $f \in L^0_P(X, \mu)$  её существенный супремум определяется как

$$\text{ess sup}_\mu f = \inf \{a \in \mathbf{R} \mid \mu(\{f > a\}) = 0\}.$$

Аналогично определяется  $\text{ess inf}_\mu f$ .

**Определение 11.4.2 (essential support).** Для  $\mu$ -класса функции  $f$  её существенный носитель — наименьший с точностью до  $\mu$ -нулевых множеств  $P$ -замкнутый подобъект  $\text{ess sup}_\mu(f)$ , вне которого  $f = 0$  почти всюду.

Эти определения играют в нашей теории ту же роль, какую в США играли  $P$ -замыкание и  $P$ -граница: они извлекают истинную геометрию объекта после факторизации по логически тонким и мерно несущественным слоям.

## 11.5. Почти-всюду свойства и дизинтеграция

Одним из преимуществ того, что вероятность организована как монада и Markov-структура, является естественность almost-everywhere semantics относительно условных распределений.

**Предложение 11.5.1 (Fubini almost everywhere).**

(Строгий результат при A18–A21 и Теореме J.)

Пусть  $\in (X \times Y)$ ,  $\nu$  —  $\nu$ -мера на  $Y$ , а  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  — kernel дизинтеграции. Если подобъект  $E \hookrightarrow X \times Y$  является  $\mu$ -нулевым, то для  $\nu$ -почти всех  $y$  сечение

$$E_y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$$

является  $\mu_y$ -нулевым.

**Доказательство (эскиз).** Рассмотрим индикаторную lower-approximation  $1_E$  и применим Теорему J к функции  $f = 1_E$ . Из

$$0 = \int (1_E) d(\mu) = \int \int (1_E)(x, y) d(\mu_y) d(\nu)$$

и неотрицательности подынтегральной функции следует, что  $\int (1_E)(x, y) d(\mu_y) = 0$  для  $\nu$ -почти всех  $y$ . Q.E.D.

Это предложение является фундаментальным: оно позволяет корректно говорить о слабых производных по переменным, о PDE «почти по времени», о kernel-valued algorithmics и о transport plans, определённых с точностью до нуля.

## 11.6. Pushforward и инвариантность нулевых множеств

**Предложение 11.6.1.** Если  $f : X \rightarrow Y$  — морфизм и  $N \in \mu$ , то  $f(N) \in f\mu$  при условии, что  $f$  геометрически измерим и не разрушает нулевые множества.

Это свойство не всегда автоматически верно без условий регулярности; поэтому в общей теории мы держим его как часть A21/H\_P1. Но в конечномерных хорошо адаптированных моделях именно оно делает возможной корректную формулировку почти-всюду свойств на пространствах траекторий.

## 11.7. Почти-всюду как логико-геометрическая модальность

На концептуальном уровне можно рассматривать almost-everywhere semantics как новую модальность, зависящую от выбранной вероятности  $\mu$ :

$$\mu(\cdot) \iff \mu(\{x \mid \neg(x)\}) = 0.$$

Эта модальность не заменяет внутреннюю логику топоса, но обогащает её: к геометрической истинности и  $P$ -истинности добавляется truth up to null structure.

Именно этот трёхслойный взгляд —

- геометрически;
- $P$ -топологически;
- почти всюду —  
и составляет новый фундамент, без которого functional analysis в цикле не может считаться завершённым.

---

## 12. Пространства $L_P$ , $W_P^1$ , $BV_P$ и weak-gradient в гладком топосе

### 12.1. От measurable layer к функциональным пространствам

После введения almost-everywhere equivalence следующая естественная задача — построить пространства, где можно измерять размер и регулярность функций. В классике это роль  $L$ , Sobolev и  $BV$ . В синтетическом мире мы стремимся сохранить три принципа одновременно:

1. **конструктивность**: определения должны использовать lower/upper reals и локальные супремумы;
2. **совместимость с СНА**: слабая регулярность должна улавливать негладкие функции;
3. **совместимость с transport geometry**: пространства должны быть пригодны для continuity equations, ЖКО и entropy methods.

### 12.2. Пространства $L_P$

**Определение 12.2.1.** Для  $1 \leq p < \infty$  и класса  $f \in L_P^0(X, \mu)$  определим

$$\|f\|_{L_P(\mu)} := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

где правая часть понимается в lower-real sense с последующей Dedekind-реализацией, если требуется двусторонняя метрика.

Пространство

$$L_P(X, \mu) := \{f \in L_P^0(X, \mu) \mid \|f\|_{L_P(\mu)} < \infty\}$$

факторизуется по almost-everywhere равенству и снабжается естественной псевдометрикой, которая становится метрикой на факторе.

**Лемма 12.2.2 (Гёльдер).** Если  $1 < p, q < \infty$  и  $1/p + 1/q = 1$ , то

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_{L_p(\mu)} \|g\|_{L_q(\mu)}.$$

**Доказательство.** Конструктивная версия стандартного доказательства через Young inequality и интегрирование. Все используемые неравенства геометричны и совместимы с  $\mathbf{R}$ . Q.E.D.

**Лемма 12.2.3 (Минковский).** Для  $f, g \in L_p(X, \mu)$

$$\|f + g\|_{L_p(\mu)} \leq \|f\|_{L_p(\mu)} + \|g\|_{L_p(\mu)}.$$

Тем самым  $L_p(X, \mu)$  является нормированным объектом; полнота содержится в A22.

### 12.3. Локальная интегрируемость и пространство тестовых функций

Для weak formulations требуется тестовый класс, одновременно достаточно гладкий и достаточно плотный.

**Определение 12.3.1.** Пусть  $\mathcal{P} \hookrightarrow X$  —  $P$ -открытый подобъект. Тогда

$$C_c^\infty(\mathcal{P})$$

обозначает объект compactly supported smooth test functions на  $\mathcal{P}$  в синтетическом смысле: функции  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{R}$ , чьи носители лежат в  $P$ -компакте и которые являются внутренне гладкими стрелками.

В гладком топосе тестовые функции технически гораздо проще классических, потому что гладкость встроена в саму семантику стрелок. Но теперь гладкость тестовых функций сталкивается с негладкостью самих объектов  $u \in L_p$ , и именно их взаимодействие создаёт weak analysis.

### 12.4. Слабые производные через интегральную двойственность

Пусть  $X = \mathbf{R}^n$  или конечномерный евклидов объект.

**Определение 12.4.1 (weak derivative).** Функция  $u \in L_{0,p}^1(X, \mu)$  имеет слабую производную  $G_i \in L_{0,p}^1(X, \mu)$  по  $i$ -й координате, если для всякой  $\phi \in C_c^\infty(X)$  выполнено

$$\int_X u \partial_i \phi d\mu = - \int_X G_i \phi d\mu.$$

Вектор  $G = (G_1, \dots, G_n)$  называется weak gradient и обозначается  $\nabla u$ .

Это определение прямо продолжает идеи СВА: вместо pointwise infinitesimals мы используем интегральную duality между объектом функции и объектом тестовых полей.

### 12.5. Upper gradients и метрический взгляд

В транспортно-геометрических задачах часто полезно альтернативное, метрическое описание weak regularity.

**Определение 12.5.1 (-weak upper gradient).** Неотрицательная measurable function  $g \in L_p(X, \mu)$  называется  $-$ weak upper gradient для  $u$ , если для  $P$ -почти всякой абсолютно непрерывной кривой  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  выполнено

$$|u(\gamma(1)) - u(\gamma(0))| \leq \int_0^1 g(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

В классическом metric-measure analysis (Shanmugalingam, Cheeger) upper gradients являются наиболее гибким способом определения Sobolev spaces. В нашей теории они особенно естественны, потому что напрямую совместимы с continuity equations, Benamou–Brenier и ЖКО.

## 12.6. Определение Sobolev-пространств

Определение 12.6.1 (Sobolev-пространство). Для  $1 \leq p < \infty$  задаём

$$W_P^1(X, \mu) := \{u \in L_P(X, \mu) \mid \exists g \in L_P(X, \mu) : g \text{ — weak gradient } u\}.$$

Минимальный такой  $g$  (если он существует) обозначается  $|\nabla u|$ , и называется минимальным weak gradient.

Норма определяется формулой

$$\|u\|_{W_P^1} = \|u\|_{L_P} + \|\nabla u\|_{L_P}.$$

## 12.7. Эквивалентность слабой и метрической версий градиента

Теорема 12.7.1 (распределительный = upper-gradient).

(Условный результат при A22–A23.)

Пусть  $X = \mathbf{R}^n$  или конечномерный микролинейный объект с удвоением меры и Poincaré inequality. Тогда для  $u \in L_P(X, \mu)$  следующие условия эквивалентны:

1.  $u$  имеет weak gradient  $\nabla u \in L_P$  в смысле Определения 12.4.1;
2.  $u$  допускает weak upper gradient  $g \in L_P$ ;
3.  $u$  является пределом в  $L_P$  последовательности локально  $P$ -липшицевых функций  $(u_k)$  с равномерно контролируруемыми градиентами.

Более того, минимальный upper gradient совпадает с  $|\nabla u|$  почти всюду.

### Доказательство (эскиз)

1. Импликация (3)→(1) следует из интегрирования по частям для приближающих липшицевых функций и замкнутости weak derivative.
2. Переход (1)→(2) использует внутреннюю версию фундаментальной оценки вдоль кривых и локальную Poincaré inequality.
3. Переход (2)→(3) следует из плотности липшицевых функций в Newtonian/Sobolev классе на удваивающихся пространствах с Poincaré inequality.
4. Совпадение минимального upper gradient и weak gradient получается из минимальности и стандартного релаксационного аргумента. Q.E.D.

Эта теорема — один из центральных конструктивных мостов всей работы: она показывает, что Sobolev-структура может быть прочитана и вариационно, и геометрически, и транспортно.

## 12.8. Пространства $BV_P$ и вариация

Для многих приложений СНА и optimal transport класса  $W^{1,1}$  недостаточно. Необходимо пространство функций ограниченной вариации.

Определение 12.8.1. Для  $u \in L_P^1(X, \mu)$  полная вариация определяется как

$$|Du|_P(X) = \inf \left\{ \int_X u \, d\mu \mid \mu \in \mathcal{P}(X, \mathbf{R}^n), \|\mu\| \leq 1 \right\}$$

Тогда

$$BV_P(X, \mu) := \{u \in L_P^1(X, \mu) \mid |Du|_P(X) < \infty\}.$$

Предложение 12.8.2. Если  $u \in W_P^{1,1}(X, \mu)$ , то

$$|Du|_P(X) = \int_X |\nabla u| d\mu.$$

В частности, Sobolev-пространство вложено в  $BV_P$ .

## 12.9. Нижняя полунепрерывность, компактность и следствия

**Теорема 12.9.1 (слабая компактность и l.s.c.).**

(Условный результат при A22–A23 и H\_P2.)

Пусть  $(u_k)$  ограничена в  $BV_P(X, \mu)$  или в  $W_P^1(X, \mu)$  при  $1 < < \infty$ . Тогда существует подпоследовательность, сходящаяся в  $L_P^1$  (для  $BV_P$ ) или слабо в  $L_P$  (для  $W_P^1$ ), причём полная вариация и  $L$ -энергия слабонижнеполунепрерывны.

Это является внутренним функционально-аналитическим аналогом принципа компактности, критически необходимого для ЖКО и вариационных схем на пространствах вероятностей.

## 12.10. Значение для предыдущего цикла

С точки зрения логики всей серии монографий глава 12 делает сразу три шага.

1. **Замыкает СНА:** теперь generalized derivatives могут быть weak/measurable, а не только pointfree-topological.
2. **Усиливает СВА:** вариационные неравенства и монотонные операторы получают measure-level formulations.
3. **Готовит SOTT-D на новом уровне:** функции стоимости на пространствах траекторий могут иметь слабую регулярность, а не только классическую гладкость.

Именно поэтому пространство  $W_P^1$  в этой монографии является не техническим определением, а новым центральным объектом программы.

## 13. $P$ -Rademacher, существенные градиенты и новый фундамент для СНА

### 13.1. Почему теорема Радемахера была отсутствующим звеном

Классическая теорема Радемахера утверждает, что локально липшицева функция на  $\mathbf{R}^n$  почти всюду дифференцируема [28, 30–32]. Для негладкого анализа это фундаментально: именно она позволяет определять Clarke-subdifferential как выпуклую оболочку предельных градиентов на множестве точек дифференцируемости.

В СНА этот шаг сознательно остался открытым. Мы получили  $P$ -Clarke и  $P$ -Moreau объекты через локальную/топологическую конструкцию, но не располагали внутренним measure-theoretic фактом, который позволил бы отождествить их с essential limits almost-everywhere gradients.

Глава 13 закрывает именно этот разрыв.

### 13.2. Приближённая дифференцируемость

**Определение 13.2.1.** Пусть  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $X = \mathbf{R}^n$ , и  $\mu \in (X)$  удовлетворяет условиям A23. Говорят, что  $f$   $P$ -приближённо дифференцируема в точке  $x$ , если существует линейный функционал  $L_x : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  такой, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \rho \cdot) - f(x) - L_x(\cdot)}{\rho} = 0,$$

где предел понимается не pointwise, а относительно фильтра complements of  $\mu$ -нулевых множеств в малых  $P$ -окрестностях точки  $x$ .

В этом определении уже виден синтез CHA и measure theory: differentiability формулируется через сочетание  $P$ -локальности и almost-everywhere исключения тонких множеств.

### 13.3. Теорема К: $P$ -Rademacher

Теорема К ( $P$ -Rademacher и существенный градиент).

(Условный результат при A21–A23, A26 и bridge-аксиомах A10–A12 в хорошо адаптированных моделях.)

Пусть  $\mathbf{R}^n$  —  $P$ -открытый подобъект,  $\mu \in ()$  — Radon-type valuation, удовлетворяющая local doubling и (1,)-Poincaré inequality, а  $f: \rightarrow \mathbf{R}$  — локально  $P$ -липшицева функция. Тогда:

1. существует  $\mu$ -нулевой подобъект  $N_f \hookrightarrow$ , вне которого  $f$   $P$ -приближённо дифференцируема;
2. отображение

$$\nabla_e f: N_f \rightarrow (\mathbf{R}^n)^*$$

принадлежит  $L_{c,P}^\infty(, \mu)$  и совпадает почти всюду с минимальным weak gradient;

3. если  $f$  внутренне гладка, то  $\nabla_e f = \nabla f$  почти всюду;
4. для каждого  $x \in$  синтетический субдифференциал Кларка из CHA удовлетворяет формуле

$$\partial_C^S f(x) = o\left( \mathop{\text{i}}_{x_k \rightarrow Px, x_k N_f} \nabla_e f(x_k) \right),$$

где  $\text{i}$  означает множество всех предельных точек существенного градиента по  $P$ -сходящимся сетям вне нулевого множества.

Иными словами,  $P$ -Clarke-субдифференциал перестаёт быть чисто topological/localic объектом и получает желаемую measure-theoretic интерпретацию.

#### Доказательство (программа)

Мы подчёркиваем, что в текущем виде монографии это утверждение является **условным**, но не произвольным. Его доказательная программа состоит из трёх этапов.

**Этап 1.** По Теореме 12.7.1 локально  $P$ -липшицевы функции лежат в  $W_P^{1,\infty}$ , а их minimal weak gradients контролируются локальной липшицевой константой.

**Этап 2.** Используя A23, строим measurable differentiable structure типа Cheeger на локальном евклидовом объекте. В хорошо адаптированных моделях этот шаг может быть осуществлён двумя путями:

- либо внутренне, через charts и Poincaré/doubling machinery;
- либо внешне, через глобальные сечения и классическую теорему Радемахера с последующей реинтернализацией по A10 и A26.

**Этап 3.** Формула Кларка выводится из замкнутости графа  $\partial_C^S$  (CHA), almost-everywhere differentiability и идентификации directed derivatives с essential support-function of gradient limits. Q.E.D.

### 13.4. Немедленные следствия Теоремы К

**Следствие 13.4.1** (новое прочтение Теоремы Е из CHA).

Нетривиальность  $\partial_C^S$  больше не является только следствием топологии Пенона. Теперь она получает мерное содержание:  $\partial_C^S f(x)$  есть выпуклый корпус существенных градиентов на полном-массовом множестве точек дифференцируемости.

**Следствие 13.4.2** (правило цепочки almost everywhere).

Если  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  —  $C^1$ -функция с локально липшицевой производной, а  $f$  локально  $P$ -липшицева, то

$$\nabla_\epsilon(g \circ f) = g'(f) \nabla_\epsilon f \quad \text{м.п.в.}$$

В частности,

$$\partial_C^S(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \partial_C^S f(x),$$

а при знакоопределённости  $g'$  получается равенство.

**Следствие 13.4.3 (точка минимума и essential stationarity).**

Если  $x^*$  — локальный минимум локально  $P$ -липшицевой функции  $f$ , то

$$0 \in \partial_C^S f(x^*) = \text{oi} \nabla_\epsilon f(x_k).$$

Тем самым условия оптимальности из СНА получают интерпретацию как предельное усреднение почти-всюду существующих градиентов.

## 13.5. Существенные градиенты и weak Hessians: следующий шаг

После появления almost-everywhere gradients естественно задаться вопросом о second-order theory. Мы формулируем здесь только программу.

**Программа 13.5.1 (второй порядок).** При дополнительных предположениях о локалевой регулярности и Sobolev-вложениях можно ожидать существование:

- approximate Hessians для  $W_P^2$ -классов;
- BV-структуры для градиентов;
- measure-valued second-order subdifferentials.

Этот шаг будет особенно важен для дальнейшего развития внутренней теории curvature-dimension и Ricci lower bounds.

## 13.6. Главный научный смысл главы 13

Именно здесь четвёртая монография окончательно замыкает третью. Если СНА открыл негладкость как локальную топологическую реальность, то настоящая работа показывает, что эта негладкость одновременно имеет мерную структуру. В результате обобщённые производные приобретают три равноправные интерпретации:

1. локально-топологическую — через Penon-открытые множества;
2. вариационно-двойственную — через support functionals и эпиграфы;
3. мерно-существенную — через almost-everywhere gradients и их essential hull.

Такой тройной фундамент и есть настоящий признак зрелости теории.

# ЧАСТЬ III. ОПТИМАЛЬНЫЙ ТРАНСПОРТ, ЭНТРОПИЯ И ДИНАМИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

## 14. Синтетическая проблема Монжа–Канторовича

### 14.1. Транспорт как центральная геометрия пространства мер

После построения almost-everywhere calculus естественным следующим шагом становится геометрия самих вероятностных объектов. Здесь ключевым объектом является оптимальный транспорт [17–20]. Его роль в настоящей работе принципиально двойка.

Во-первых, он создаёт внутреннюю метрику на пространстве вероятностей, то есть превращает probability theory из purely measure-theoretic языка в геометрию. Во-вторых, он даёт новую форму duality, продолжающую CBA и одновременно готовящую ЖКО и вероятностную версию SOTT-D.

## 14.2. Транспортные планы и стоимость

Пусть  $X$ , — допустимые объекты, а

$$c : X \times \rightarrow \mathbf{R}$$

— нижнеполу непрерывная функция стоимости.

**Определение 14.2.1.** Для  $\mu \in (X)$  и  $\nu \in (Y)$  транспортным планом называется вероятность

$$\gamma \in (X \times Y)$$

такая, что

$$(\text{pr}_X \gamma) = \mu, \quad (\text{pr}_Y \gamma) = \nu.$$

Множество всех таких планов обозначается

$$P(\mu, \nu).$$

**Определение 14.2.2 (прямая транспортная задача).** Оптимальная стоимость переноса:

$$c, P(\mu, \nu) = \inf_{\gamma \in P(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y).$$

Эта формула на удивление мало отличается от классической. Вся глубина скрыта в том, что и вероятность, и lower semicontinuity, и интеграл понимаются внутренне.

## 14.3. Двойственная задача

**Определение 14.3.1.** Двойственная транспортная задача состоит в вычислении

$$c, P(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu \mid \phi(x) + \psi(y) \leq c(x, y) \right\},$$

где

$$\phi : X \rightarrow \mathbf{R}, \quad \psi : Y \rightarrow \mathbf{R}$$

принадлежат suitable class of  $P$ -lower-semicontinuous potentials.

Двойственная формула особенно важна для цикла монографий, потому что она представляет optimal transport как частный случай более общей двойственности Фенхеля–Рокафеллара из CBA.

## 14.4. Теорема L: синтетическая duality Монжа–Канторовича

**Теорема L (Monge–Kantorovich duality в гладком топосе).**

(Условный результат при A15–A20, A24 и H\_P2.)

Пусть  $c$  — нижнеполу непрерывная, ограниченная снизу стоимость с конечным вторым моментом относительно допустимых маргиналов  $\mu, \nu$ . Тогда:

1. множество планов  $P(\mu, \nu)$  непусто, выпукло и  $W_{2,P}$ -предкомпактно;
2. прямая задача достигает минимума:

$$\gamma^* \in P(\mu, \nu) : c, P(\mu, \nu) = \int c d\gamma^*$$

3. отсутствует duality gap:

$$c, P(\mu, \cdot) = c, P(\mu, \cdot)$$

4. существует пара оптимальных потенциалов  $(\psi^*, \psi^*)$ , удовлетворяющая условию комплементарности

$$\psi^*(x) + \psi^*(y) = c(x, y) \quad \text{п.в.}$$

## Доказательство (эскиз)

1. **Непустота планов.** Достаточно взять product coupling  $\mu$ .
2. **Существование минимума.** Используется H\_P2: tightness семейства планов с ограниченной стоимостью, а также нижняя полунепрерывность функционала  $\mu \mapsto \int c d\mu$ .
3. **Двойственность.** Рассматриваем индикаторное ограничение на множество  $P(\mu, \cdot)$  и применяем синтетическую duality theory CVA к выпуклому функционалу на пространстве measures. Теорема I переводит планы в линейные функционалы на observables, после чего работает обычный convex-analytic механизм.
4. **Комплементарность.** Выводится стандартным способом из оптимальности и subdifferential calculus на пространстве мер. Q.E.D.

## 14.5. $c$ -выпуклость и транспортные потенциалы

Как и в классике, duality естественно приводит к  $c$ -преобразованию.

**Определение 14.5.1.** Для потенциала  $\psi : X \rightarrow \mathbf{R}$  его  $c$ -сопряжение:

$$\psi^c(y) = \inf_{x \in X} (c(x, y) - \psi(x)).$$

Функция называется  $c$ -выпуклой, если  $\psi = \psi^c$  для некоторой  $\psi$ .

В условиях Теоремы L оптимальные потенциалы можно выбирать  $c$ -выпуклыми. Это важно потому, что  $c$ -выпуклость является транспортным аналогом выпуклости CVA и одновременно предшественником displacement convexity.

## 14.6. Циклическая монотонность и монжевский вопрос

**Предложение 14.6.1.** Опора оптимального плана  $\mu^*$  является  $c$ -циклически монотонной в синтетическом/локальном смысле.

Это утверждение переносит на внутренний уровень ещё один краеугольный факт optimal transport. В частности, для квадратичной стоимости на евклидовых объектах оно указывает на существование глубокой связи между оптимальными планами и градиентами выпуклых потенциалов.

**Программа 14.6.2 (Brenier-type result).**

При дополнительных предположениях о абсолютной непрерывности  $\mu$ , внутренней строгой выпуклости квадратичной стоимости и second-order regularity можно ожидать теорему вида:

$$\mu^* = (\text{id}, \nabla) \mu$$

для некоторого выпуклого потенциала  $\psi$ .

В данной монографии мы честно маркируем этот шаг как **программный**: он естественен, но требует ещё не построенной внутренней Alexandrov/Brenier machinery.

## 14.7. Транспорт и CVA: новый уровень двойственности

Теорема L показывает, что transport duality не является отдельной дисциплиной, а встроена в уже созданную в CVA архитектуру. Это имеет два следствия.

1. Пространство вероятностей оказывается новым convex object, на котором работают аналоги Fenchel–Rockafellar theory.
2. Стохастическая оптимизация перестаёт быть внешним приложением: она становится оптимизацией не на точках, а на законах, но по тем же вариационным принципам.

## 14.8. Почему Монж–Канторович важнее Монжа

Классическая проблема Монжа ищет транспортное отображение, тогда как проблема Канторовича — план. В контексте нашей программы это различие приобретает фундаментальный смысл.

- **План** соответствует первичности распределений.
- **Отображение** соответствует восстановлению детерминистического предела.

Следовательно, порядок теории должен быть именно таким, каким он реализован в этой монографии: сначала Канторович, потом Brenier/Monge как возможный концентрированный случай.

## 15. Динамическая формулировка Бенаму–Бренье и Wasserstein-геометрия

### 15.1. Пространство траекторий и эволюция мер

Пусть  $I = [0, 1]$  — внутренний временной интервал, а

$$(X) = X^I$$

— объект траекторий. Для каждого  $t \in I$  существует evaluation morphism

$${}_t : (X) \rightarrow X, \quad \mapsto (t).$$

**Определение 15.1.1.** Динамическим планом между  $\mu_0, \mu_1 \in (X)$  называется вероятность

$$\in ((X))$$

такая, что

$$({}_0) = \mu_0, \quad ({}_1) = \mu_1.$$

Эта конструкция является точкой встречи SOTT-D и measure theory: именно здесь траектории становятся не просто решениями уравнений, а носителями вероятностного закона.

### 15.2. Continuity equation во внутренней форме

Пусть  $({}_t)_{t \in I}$  — семейство вероятностей на  $X$ , а  $v_t$  — измеримое семейство скоростей.

**Определение 15.2.1.** Говорят, что  $({}_t, v_t)$  удовлетворяет continuity equation

$$\partial_{tt} + \nabla \cdot ({}_t v_t) = 0$$

в слабом синтетическом смысле, если для всякой гладкой тестовой функции  $\phi = ({}_t, x)$  выполнено

$$\int_0^1 \int_X (\partial_t \phi(t, x) + \langle \nabla_x \phi(t, x), v_t(x) \rangle) d{}_t(x) dt + \int_X \phi(0, x) d\mu_0 - \int_X \phi(1, x) d\mu_1 = 0.$$

Этот weak form напрямую использует построенные ранее  $L_P$  и weak gradients.

### 15.3. Квадратичная транспортная энергия

**Определение 15.3.1.** Действие Бенаму–Бренье:

$$P(\cdot, v) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_X |v_t(x)|^2 d_t(x) dt.$$

Если  $(\cdot, v)$  удовлетворяет continuity equation, то эта величина измеряет кинетическую цену деформации одной вероятности в другую.

## 15.4. Теорема М: синтетическая формула Бенаму–Бренье

**Теорема М (динамический транспорт).**

(Условный результат при A18, A20, A24 и функционально-аналитических результатах главы 12; концептуально опирается на Benamou–Brenier и последующую Wasserstein-литературу [20–24].)

Для любых  $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2(X)$

$$W_{2,P}^2(\mu_0, \mu_1) = \inf_{(\cdot, v)} \left\{ \int_0^1 \int_X |v_t|^2 dt d_t + \int_X |\nabla \cdot (v_t)|^2 dt d_t \mid \mu_0 = \mu_0, \mu_1 = \mu_1 \right\}$$

Эквивалентно,

$$W_{2,P}^2(\mu_0, \mu_1) = \inf_{d(\cdot, \cdot)} \int_0^1 \int_X |v_t|^2 dt d_t,$$

где инфимум берётся по динамическим планам.

### Доказательство (эскиз)

1. Из динамического плана строится семейство маргиналов  $\mu_t = (\cdot)_t$  и скорость в смысле суперпозиционного принципа.
2. В обратную сторону, из Eulerian data  $(\cdot, v)$  строится probability law on paths, решая continuity equation как transport of mass.
3. Равенство минимальных стоимостей опирается на convexity action functional и lower semicontinuity в пространстве curves of measures.
4. Существенную роль играет weak compactness главы 12, без которой переход к пределу невозможен. Q.E.D.

## 15.5. Геодезики в пространстве вероятностей

**Следствие 15.5.1.** Пространство  $(\mathcal{P}_2(X), W_{2,P})$  является геодезическим: для любых  $\mu_0, \mu_1$  существует кривая  $(\mu_t)_{t \in [0,1]}$ , такая что

$$W_{2,P}(\mu, \mu_t) = |t - 0| W_{2,P}(\mu_0, \mu_1).$$

Эта кривая — уже не набор промежуточных мер, а новый геометрический объект, играющий ту же роль для вероятностей, какую геодезики на многообразии играют для точек.

## 15.6. Tangent structure и оттовская картина

В евклидовых контекстах естественно определять касательное пространство к  $\mu$  как замыкание градиентных полей в  $L^2(\mu)$ :

$$T_{\mu^2}(X) := \{ \nabla \cdot | \in P(X) \}^{L^2(\mu)}.$$

Это позволяет читать continuity equation как «обыкновенное дифференциальное уравнение» на бесконечномерном многообразии вероятностей. Такая картина известна как Otto calculus. В нашей монографии мы используем её осторожно: не как доказательную основу, а как guiding geometry, которая объясняет, почему ЖКО работает как проксимальный шаг на пространстве распределений.

## 15.7. Дисплейсмент-интерполяции и новые понятия выпуклости

В обычном линейном пространстве выпуклость определяется по линейным сегментам. В Wasserstein-мире естественными «сегментами» становятся geodesic interpolations между вероятностями. Отсюда рождается ключевое понятие следующей главы — displacement convexity.

Именно она позволит заменить точечную сильную выпуклость SVA и жёсткую H3 из SOTT-D на выпуклость на пространстве мер.

## 16. Дисплейсмент-выпуклость, энтропия, Schrödinger bridge и Sinkhorn

### 16.1. Относительная энтропия как фундаментальный функционал

Пусть  $\nu \in (X)$  — reference measure. Если  $\mu$  абсолютно непрерывна относительно  $\nu$ , то пишем  $\mu = \nu \cdot \rho$ .

**Определение 16.1.1** (относительная энтропия).

$$P(\mu | \nu) = \int_X \rho \circ d,$$

если  $\mu$  и  $\nu$  интегрируема; иначе

$$P(\mu | \nu) = +\infty.$$

Энтропия является, возможно, самым важным функционалом всей монографии [20, 25–27]. Она одновременно:

1. регуляризует транспортные задачи;
2. обеспечивает строгую выпуклость;
3. создаёт естественную связь с стохастической механикой и Schrödinger bridges;
4. даёт новый механизм устранения неуникальности.

### 16.2. Дисплейсмент-выпуклость

**Определение 16.2.1.** Функционал

$$P_\lambda : \mathcal{P}_2(X) \rightarrow \mathbf{R}$$

называется  $\lambda$ -дисплейсмент-выпуклым, если для всякой  $W_{2,P}$ -геодезики  $(\mu_t)$

$$P_\lambda(\mu_t) \leq (1-t)P_\lambda(\mu_0) + tP_\lambda(\mu_1) - \frac{\lambda}{2}t(1-t)W_{2,P}^2(\mu_0, \mu_1).$$

**Лемма 16.2.2.** Если  $\lambda > 0$ , то у  $\lambda$ -дисплейсмент-выпуклого, proper и l.s.c. функционала может быть не более одного минимайзера.

Это простое наблюдение имеет решающее значение для всей дальнейшей программы: уникальность теперь возникает не через точечную подтерминальность, а через геометрию пространства мер.

### 16.3. Энтропийно-регуляризованный транспорт

Пусть  $R \in (X \times X)$  — reference coupling с full support, а  $\alpha > 0$ .

**Определение 16.3.1.** Энтропийно-регуляризованная транспортная задача:

$$P_\alpha(\mu, \nu) = \inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \left[ \int c d\gamma + P(\gamma | R) \right].$$

Если  $R$  имеет вид

$$dR(x, y) = e^{-c(x,y)/\alpha} d(\alpha R)(x, y),$$

то задача эквивалентна минимизации одной лишь относительной энтропии относительно  $R$  при фиксированных маргиналах — это и есть абстрактная форма Schrödinger bridge problem.

## 16.4. Теорема N: Schrödinger bridge и внутренняя Sinkhorn-структура

Теорема N (энтропийный transport и Schrödinger bridge).

(Условный результат при A19–A25 и достаточной положительности reference kernel.)

Пусть  $R$  — reference coupling, абсолютно непрерывный и строго положительный на допустимых opens.

Тогда для любых маргиналов  $\mu, \nu$ :

1. задача Schrödinger/entropic transport имеет единственное решение ;
2. существуют потенциалы масштабирования  $u : X \rightarrow \mathbf{R}$  и  $v : Y \rightarrow \mathbf{R}$  такие, что

$$d(x, y) = e^{u(x)} dR(x, y) e^{v(y)}$$

3. двойственная задача имеет вид

$$P_{u,v} \left[ \int u d\mu + \int v d\nu - \int (e^{u+v} - 1) dR \right]$$

4. попеременное масштабирование маргиналов (Sinkhorn iteration) сходится к  $P_{\mu, \nu}$ .

### Доказательство (эскиз)

1. Существование и единственность следуют из строгой выпуклости  $P_{\mu, \nu}(\cdot | R)$  на аффинном пространстве планов.
2. Формула факторизации является условием оптимальности первого порядка в терминах лагранжевых множителей на маргиналы.
3. Сходимость Sinkhorn выводится либо через contraction in Hilbert projective metric, либо как чередование Bregman-проекций в пространстве мер. Q.E.D.

## 16.5. Почему Schrödinger bridge принципиально важен для цикла

Энтропийный транспорт важен не только вычислительно. Его более глубокая роль в нашей программе состоит в том, что он даёт универсальный механизм вероятностной регуляризации.

- Там, где детерминистическая задача имеет много близких минимумов, энтропия выделяет единственный «наиболее распределённый, но всё ещё оптимальный» закон.
- Там, где хаотическая динамика делает pointwise search нестабильным, Schrödinger bridge отбирает устойчивый law-level object.
- Там, где SOTT-D требовал глобальной уникальности точечного оптимума, entropic transport делает уникальность естественной почти автоматически.

## 16.6. Энтропия, curvature-dimension и долгосрочная программа

В классической Wasserstein-геометрии displacement convexity энтропии тесно связана с нижними оценками Ricci curvature и условиями  $CD(K, N)$ . Внутренний аналог этой связи в гладком когезивном топосе представляется одной из самых перспективных будущих программ.

Если он будет построен, то четвёртая монография даст не только measure theory и transport, но и подлинную synthetic metric-measure curvature theory.

## 16.7. Sinkhorn как алгоритмический мост

По вычислительным причинам именно Sinkhorn-тип схемы обеспечивают практический мост между внутренней теорией и внешними дискретными реализациями. В этом состоит одна из самых сильных

сторон предлагаемой программы: даже если топосная теория остаётся фундаментальной и абстрактной, она естественно порождает численно реализуемые схемы после дискретизации глобальных сечений.

## 17. ЖКО-схема и градиентные потоки в пространстве вероятностных объектов

### 17.1. От статической оптимизации к эволюции распределений

ЖКО-схема (Jordan–Kinderlehrer–Otto) [20, 22, 24] — это одно из самых глубоких открытий современной вариационной математики: она показывает, что эволюционные PDE можно понимать как последовательность вариационных шагов в пространстве вероятностей.

Для настоящей монографии это особенно важно. С одной стороны, ЖКО — естественное продолжение проксимальных схем СВА. С другой — она переводит transport geometry в динамику, то есть даёт язык для законов на траекториях и mean-field evolution, необходимых вероятностной версии SOTT-D.

### 17.2. Свободная энергия и ЖКО-шаг

Пусть

$$: \mathcal{P}_2(X) \rightarrow \mathbf{R}$$

— proper lower-semicontinuous functional, например

$$(\mu) = \int_X V(x) d\mu(x) + P(\mu) + \frac{1}{2} \int_{X \times X} W(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

**Определение 17.2.1 (ЖКО-шаг).** Для шага времени  $\tau > 0$  и текущего состояния  $\mu^k$  следующее состояние определяется как

$$\mu^{k+1} \in \operatorname{ri}_{\mu \in \mathcal{P}_2(X)} \left\{ (\mu) + \frac{1}{2} W_{2,P}^2(\mu, \mu^k) \right\}$$

Это есть точный транспортный аналог проксимального шага

$$x^{k+1} \in \operatorname{prox}_f(x^k)$$

из СВА.

### 17.3. Теорема О: ЖКО и градиентные потоки

**Теорема О (градиентный поток свободной энергии).**

(Условный результат при A24–A25, H\_P2 и соответствующей completeness of curves of maximal slope.)

Пусть — proper, coercive, lower-semicontinuous и  $\lambda$ -displayment-выпуклый функционал на  $\mathcal{P}_2(X)$ . Тогда:

1. для любого  $\tau > 0$  и любого начального  $\mu^0$  ЖКО-шаг определён;
2. кусочно-постоянные и De Giorgi interpolation, построенные по ЖКО, предкомпактны;
3. при  $\tau \rightarrow 0$  они сходятся к кривой  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  в  $\mathcal{P}_2(X)$ , являющейся градиентным потоком ;
4. эта кривая удовлетворяет energy dissipation inequality

$$(\mu_T) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\mu}_t|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T |\partial|^2(\mu_t) dt \leq (\mu_0)$$

5. если  $\lambda > 0$ , поток единственен и удовлетворяет EVI-неравенству:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} W_{2,P}^2(\mu_t, \mu_t) + \frac{\lambda}{2} W_{2,P}^2(\mu_t, \mu_t) + (\mu_t) \leq (\mu_0) \quad \forall t.$$

**Доказательство (эскиз)**

1. Существование дискретных минимизаторов — следствие coercivity и lower semicontinuity.
2. Энергетические оценки ЖКО-шагов дают суммируемость дискретных скоростей.
3. Компактность по  $H^2$  обеспечивает предельную кривую.
4. Переход к пределу проводится через теорию curves of maximal slope в metric spaces.
5. EVI следует из  $\lambda$ -дисплейсмент-выпуклости. Q.E.D.

## 17.4. Примеры внутренних PDE

Теорема О немедленно порождает внутренние версии ряда фундаментальных уравнений.

**Пример 17.4.1 (Fokker–Planck).** Если

$$(\mu) = \int V d\mu + P(\mu | e),$$

то градиентный поток должен удовлетворять

$$\partial_{tt} = \nabla \cdot (t \nabla V) + \Delta_t.$$

**Пример 17.4.2 (porous medium).** Если

$$(\mu) = \int (\cdot) dx \quad c(\cdot) = \frac{m}{m-1},$$

то ЖКО-градиентный поток интерпретируется как внутренний аналог уравнения пористой среды.

**Пример 17.4.3 (mean-field aggregation-diffusion).** Если в присутствии взаимодействующий потенциал  $W(x, y)$ , то получаем McKean–Vlasov/aggregation flow.

Мы подчёркиваем: здесь речь идёт не о «переводе готовых PDE» во внутренний язык, а о порождении PDE из геометрии вероятностного пространства.

## 17.5. ЖКО как новый проксимальный анализ

Одним из сильнейших концептуальных достижений монографии является осознание того, что ЖКО — это не отдельная «транспортная техника», а продолжение проксимальной философии СВА:

- в СВА прох-шаг измеряется квадратом линейной нормы;
- в четвёртой монографии прох-шаг измеряется квадратом Wasserstein-метрики.

Следовательно, transport geometry можно понимать как нелинейный, мерный и статистический апгрейд вариационного анализа.

## 17.6. От ЖКО к вероятностной версии SOTT-D

Именно через ЖКО становятся понятны две ключевые идеи позднейших глав:

1. low-level optimization можно реализовывать последовательностью транспортных проксимальных шагов;
2. динамика законов на траекториях становится не эвристикой, а строго вариационной схемой.

В этом смысле ЖКО — это алгоритмическое сердце четвёртой монографии.

# ЧАСТЬ IV. СИНТЕЗ С ПРЕДЫДУЩИМИ МОНОГРАФИЯМИ И НОВЫЙ УРОВЕНЬ ГАРАНТИЙ

## 18. Подъём СВА и СНА на мерный уровень

## 18.1. Ожидаемые функционалы и вероятностная выпуклость

Пусть  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  — lower-semicontinuous functional. Его естественный подъём на пространство вероятностей задаётся формулой

$$f(\mu) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

На первый взгляд это простая линейная операция. Но в действительности именно она и есть первый механизм превращения точечной оптимизации в вероятностную. Если  $f$  — энергия на конфигурациях, то  $f$  — энергия на законах конфигураций.

**Лемма 18.1.1.** Если  $f$  выпукла на линейном объекте  $V$ , то  $f$  выпукла относительно barycentric structure на  $(V)$ :

$$f((1-t)\mu_0 + t\mu_1) \leq (1-t)f(\mu_0) + tf(\mu_1).$$

**Замечание.** Линейная выпуклость на  $(V)$  — лишь самый первый слой. Гораздо глубже displacement convexity, зависящая от транспортной геометрии, а не от барицентрических комбинаций.

## 18.2. Мерные версии субградиента и монотонности

В СВА центральным объектом был субдифференциал выпуклого функционала. На пространстве вероятностей его естественным аналогом становится transport subdifferential.

**Определение 18.2.1 (транспортный субградиент).** Для функционала

$$: {}_2(X) \rightarrow \mathbf{R}$$

поле  $\in L^2_P(\mu TX)$  называется элементом транспортного субдифференциала  $\partial_W(\mu)$ , если для любой и любого оптимального плана  $\in (\mu, )$  выполнено

$$() - (\mu) \geq \int_{X \times X} \langle (x), y - x \rangle d(x, y) + (W_{2,P}(\mu, )).$$

Это определение является точным transport-level продолжением subdifferential philosophy СВА.

**Предложение 18.2.2.** Если

$$(\mu) = \int_X f d\mu$$

и  $f$  локально  $P$ -липшицева, то

$$\partial_W(\mu) = \partial_C^S f^{L^2(\mu)}$$

в естественном смысле: транспортный субградиент получается из almost-everywhere pointwise generalized gradients, построенных в главе 13.

Тем самым СВА поднимается на мерный уровень без разрыва языка.

## 18.3. Ожидаемые монотонные операторы и стохастические вариационные неравенства

Пусть задано семейство максимальных  $P$ -монотонных операторов  $A$  и параметр распределён по вероятности .

**Определение 18.3.1.** Ожидаемый оператор

$$\bar{A}(x) := \int A(x) d()$$

определяется как barycentric/selection-wise интеграл многозначных значений, когда это допустимо.

**Программа 18.3.2.** При условии существования measurable selections и замкнутости графов можно ожидать переноса теорем СВА о вариационных неравенствах в стохастический режим:

$$0 \in \bar{A}(x) + \partial g(x)$$

или, в более общем виде,

$$\langle \bar{A}(x^*), y - x^* \rangle + g(y) - g(x^*) \geq 0 \quad \forall y.$$

Этот перенос особенно важен для машинного обучения и stochastic optimization: он показывает, что стохастическая аппроксимация не внешний шум над уже готовой теорией, а внутренняя вариационная структура на законах.

## 18.4. Lift теории Кларка и Моро

Пусть  $f$  негладка в смысле СНА. Тогда её Moreau-envelope и проксимальные операторы могут быть подняты на пространство мер несколькими способами.

**Определение 18.4.1 (мерная Moreau-оболочка).**

$${}_{,P}(\mu) = \inf_{\epsilon_2(X)} \left\{ (\cdot) + \frac{1}{2} W_{2,P}^2(\cdot, \mu) \right\}$$

Это точный transport-analog Moreau–Yosida regularization.

**Следствие 18.4.2.** ЖКО-шаг для  $\mu$  есть проксимальный оператор Moreau-типа на пространстве вероятностей.

Это утверждение формально объединяет СВА и главу 17 в одну теорию.

## 18.5. Mean-field lift и функционалы взаимодействия

Одной из важнейших особенностей вероятностного уровня является возможность описывать взаимодействие между частицами или агентами через функционалы вида

$$(\mu) = \int V d\mu + \frac{1}{2} \int W(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Такие функционалы не редуцируются к подъёму одной pointwise function и порождают genuinely new geometry. Именно они наиболее важны для:

- mean-field control;
- ансамблевой оптимизации траекторий;
- взаимодействующих ройных и гравитационных систем;
- вариационного вывода нелинейных PDE.

## 18.6. Синтетическая стохастическая оптимизация как внутренняя теория

После построения transport subgradients можно сформулировать общий принцип.

**Принцип 18.6.1.** Стохастическая оптимизация внутри гладкого топоса есть не оптимизация «случайной реализации», а вариационная эволюция закона в вероятностном пространстве, управляемая энтропией, транспортом и слабой регулярностью.

Это определение сразу ставит четвёртую монографию в прямой контакт с современными направлениями математики и машинного обучения, но на более фундаментальном уровне, чем обычные евклидовы алгоритмы.

## 18.7. Научная роль главы 18

Глава 18 делает то, что не могла сделать ни одна из предыдущих монографий [1–3]: она переводит и гладкий, и негладкий вариационный анализ в язык *probability laws*. Тем самым впервые появляется единый объект, в котором:

- выпуклость СВА;
- негладкость СНА;
- динамика SOTT-D;
- weak calculus главы 12;
- transport geometry главы 14–17

оказываются частями одной структуры.

---

## 19. Вероятностная версия SOTT-D: от точечных траекторий к мерам на пространстве траекторий

### 19.1. Почему именно SOTT-D требует мерного подъёма сильнее всего

Из трёх предыдущих монографий именно SOTT-D наиболее явно нуждалась в новом мерном языке. Причин несколько.

1. Работа с хаотической динамикой почти никогда не устойчива на уровне одной траектории.
2. Глобальная оптимальность в сложных многомодальных задачах редко естественно выражается через уникальную точку.
3. Гипотеза НЗ требовала фактически уникальности оптимума уже на детерминистическом уровне, что в реальных системах слишком жёстко.

Эти три ограничения естественно преодолеваются, если вместо одной траектории рассматривать закон на траекториях.

### 19.2. Пространство траекторных законов

Пусть — объект допустимых траекторий, например подпространство  $M^I$  или объект управляемых дуг  $(x(\cdot), u(\cdot))$ , удовлетворяющих внутренним уравнениям движения.

В SOTT-D [1] минимизировался функционал

$$J : \rightarrow \mathbf{R}.$$

Теперь мы поднимаем его на пространство вероятностей:

$$J(\mu) = \int J() d\mu().$$

Но этого недостаточно. Чтобы получить новую геометрию и новую уникальность, необходимы регуляризаторы.

### 19.3. Основной law-level функционал

Мы вводим семейство вероятностных функционалов

$$,(\mu) = \int J() d\mu() + P(\mu | ) + \frac{1}{2}W_{2,P}^2(\mu, \mu_{\text{ге}}) + \lambda(\mu),$$

где:

- — reference law, кодирующий априорную физику, измерительную неопределённость или prior ensemble;
- $\mu_{\text{re}}$  — опорный law, задающий геометрическую привязку;
- $(\mu)$  — возможно, дополнительный выпуклый моментный/робастный штраф;
- $\lambda > 0$  — параметры регуляризации.

В этой формуле видна новая философия целиком:

- средняя стоимость вместо pointwise cost;
- энтропия вместо грубой селекции;
- Wasserstein-близость вместо локального евклидова штрафа;
- law-level convexity вместо pointwise H3.

## 19.4. Теорема P: вероятностная версия SOTT-D

Теорема P (устранение H3 на мерном уровне).

(Условный результат при A24–A26, H\_P1–H\_P3 и coercive/displacement-convex structure функционала  $\mathcal{J}$ )

Пусть пространство траекторий допускает probability structure, a law-level functional  $\mathcal{J}$ , proper, lower-semicontinuous и  $\lambda$ -дисплейсмент-выпукл для некоторого  $\lambda > 0$ . Тогда:

1. существует единственный minimizer

$$\mu^* \in \text{ri}_{\mu \in \mathcal{E}(\cdot)}(\mu)$$

2. уникальность minimizer-а следует из transport/entropy geometry и не требует подтерминальности pointwise Argmin-шифа;
3. если  $\lambda, \delta > 0$  малы, но фиксированы, то  $\mu^*$  представляет собой робастный ансамбль оптимальных траекторий;
4. при режиме концентрации  $(\lambda, \delta) \rightarrow 0$  любой предельный law поддерживается на множестве детерминистических минимизаторов исходного  $J$ ;
5. если исходный детерминистический минимум единственен, то

$$\mu^* \rightarrow \delta^*.$$

Итак, SOTT-D получает новую схему гарантий:

не : «единственная оптимальная траектория заранее»,

а

«единственный оптимальный закон сначала, концентрация траекторий потом».

### Доказательство (эскиз)

1. **Существование.** Из coercivity и H\_P2 следует tightness минимизирующих последовательностей; l.s.c. обеспечивает достижение минимума.
2. **Уникальность.** Следует из строгой displacement convexity, создаваемой комбинацией энтропии и Wasserstein-квадрата.
3. **Поддержка на минимизаторах при исчезающей регуляризации.** Это стандартный аргумент  $\lambda$ -сходимости:  $\mu_\lambda$  стремится к  $J$  в смысле variational limit.
4. **Концентрация в Dirac.** При единственности pointwise minimizer-а минимизирующий law не может распределять массу иначе, не увеличивая предельную стоимость. Q.E.D.

## 19.5. Сравнение с исходной H3

Новая схема особенно наглядна в сравнительной таблице.

Параметр	SOTT-D (детерминистический режим)	Четвёртая монография (мерный режим)
Объект оптимизации	траектория	закон $\mu$ на траекториях
Гарантия уникальности	подтерминальность Argmin и H3	displacement convexity + entropy
Робастность к шуму/неопределённости	внешняя, ограниченная	внутренняя, встроенная в закон
Многомодальность	проблема	естественная часть модели
Возврат к точке	непосредственный, но хрупкий	через концентрацию и экстракцию

Эта таблица выражает, пожалуй, главную научную новизну всей монографии.

## 19.6. Мера на траекториях как новый физический объект

Философски новая версия SOTT-D меняет сам смысл оптимизации сложной динамики. В хаотических и резонансных системах часто нет физического смысла требовать, чтобы теория сразу выбрала единственную траекторию. Более естественно требовать, чтобы она сначала описала **стабильный ансамбль хороших траекторий**, а затем уже, при необходимости, извлекла точечный представитель.

Это особенно важно в задачах астродинамики, где ансамбли решений часто физически реалистичнее, чем одна «идеальная» дуга.

## 19.7. Вероятностный спуск вместо подтерминальной склейки

В SOTT-D спуск локальных свидетелей к глобальному объекту зависел от подтерминальности. Теперь роль спуска играет другое явление: если локальные куски функционала совместимы с одним и тем же глобальным displacement-convex law-level object, то склейка обеспечивается **единственностью меры**, а не единственностью точки.

Это, возможно, важнейший логический сдвиг всей серии работ.

---

## 20. Теорема вероятностной экстракции и концентрации

### 20.1. От геометрической экстракции к геометрико-вероятностной

SOTT-D завершалась теоремой геометрической экстракции: синтетический оптимум должен был переноситься назад в классический мир посредством , при условии аккуратной геометрической формулировки и выполнения ВСС.

В четвёртой монографии ситуация усложняется и одновременно становится богаче. Теперь нужно экстрагировать не точку, а вероятностный объект, а затем понять, когда он концентрируется в точечный предел.

### 20.2. Вероятностная экстракция через

Пусть  $\mu \in ()$  — внутренний закон на пространстве траекторий. При A26 существует внешний/глобально-сечённый закон

$$\mu \in (()),$$

сохраняющий интегралы геометрически определимых observables:

$$\int_0^1 (F) d(\mu) = \left( \int F d\mu \right)$$

Это есть мерный аналог коммутирования с теми конструкциями, которые в SOTT-D использовались для переноса оптимума.

### 20.3. Теорема Q: концентрация и извлечение траектории

Теорема Q (геометрико-вероятностная экстракция).

(Условный результат при A26, H\_P3 и стандартных предположениях о tightness/Laplace principle.)

Пусть  $(\mu)_{>0}$  — семейство уникальных minimizer-ов law-level functional-a

$$(\mu) = J(\mu) + P(\mu | ),$$

где 0. Тогда:

1. всякая предельная точка  $\mu_0$  семейства  $(\mu)$  поддерживается на множестве

$$\text{ri}(J)$$

2. если  $\text{ri}(J) = \{*\}$ , то

$$\mu \rightarrow \delta_* \text{ в } W_{2,p} \text{ в узкой топологии}$$

3. после применения глобальных сечений

$$\mu \delta_{(*)}$$

как классические вероятностные меры на  $( )$ ;

4. если множество минимизаторов конечно и prior различает их массы, то предельный law есть Gibbs/Laplace selection на этом конечном множестве.

#### Доказательство (эскиз)

1. Lower bound. Для любой  $\mu$

$$(\mu) \geq J(\mu).$$

2. Upper bound. Если  $*$  — minimizer  $J$ , то

$$(\delta_*) = J(*) + P(\delta_* | ).$$

Поэтому минимальные значения стремятся к  $iJ$ .

3. Поддержка пределов. Если предельный law давал бы положительную массу множеству, где  $J > iJ +$ , то средняя стоимость оставалась бы выше минимума, что противоречит оптимальности.
4. Единственный минимизатор. Тогда единственная мера, поддержанная на  $\{*\}$ , есть  $\delta_*$ .
5. Коммутация с . Следует из A26. Q.E.D.

### 20.4. Лапласовский принцип и asymptotic selection

Формально Теорема Q является transport-topos аналогом классического лапласовского принципа:

$$d\mu() \sim -J()/d().$$

При малом закон концентрируется на минимайзерах.

Но в нашей теории важнее не сама асимптотика Гиббса, а то, что она теперь встроена в когезивный и геометрический контекст. Это означает, что selection among minimizers может стать частью логики и геометрии, а не только внешнего статистического вычисления.

## 20.5. Почему Теорема Q — подлинное продолжение SOTT-D

SOTT-D умела сказать: «если pointwise geometry и H1–H3 согласованы, то можно извлечь классический оптимум».

Четвёртая монография говорит более тонко: «сначала получи единственный law-level object, затем извлеки точку как концентрированный предел».

Это существенно сильнее, потому что:

- закон существует даже там, где pointwise uniqueness отсутствует;
- концентрация может служить регулярным селектором;
- внешняя статистика и внутренняя геометрия теперь согласованы.

## 20.6. Ограничения и честные границы Теоремы Q

Мы подчёркиваем, что Теорема Q опирается на несколько сильных, хотя и естественных предположений:

- наличие достаточной tightness;
- корректность предельного перехода  $\epsilon \rightarrow 0$ ;
- совместимость с выбранными вероятностными конструкциями;
- отсутствие скрытых non-geometric обструкций в модели.

Тем не менее именно в такой форме она уже представляет собой фундаментальное усиление программы SOTT-D.

---

## 21. Алгоритмы: Sinkhorn, ЖКО, транспортный проксимальный спуск, стохастический mirror-descent

### 21.1. Общий принцип алгоритмизации

Хотя настоящая монография носит фундаментально-теоретический характер, она не должна оставаться чисто декларативной. Сильная сторона построенной теории в том, что каждая её центральная вариационная идея соответствует известной или естественно возникающей вычислительной схеме.

При этом важно разделять два уровня:

1. **внутренний алгоритм** как морфизм/итерация в топосе;
2. **внешняя дискретизация** через глобальные сечения, частицы, сетки или sample-based approximations.

Ниже мы описываем алгоритмы именно как внутренние схемы, допускающие внешние реализации.

### 21.2. Алгоритм 1: внутренний Sinkhorn

Пусть задан reference kernel

$$K(x, y) = -c(x, y)$$

или более общий положительный coupling  $R$ .

**Алгоритм 21.2.1 (Synthetic Sinkhorn).**

Вход: маргиналы  $\mu, \nu$ ; положительный kernel  $K$ ; параметр  $\epsilon > 0$ .

Инициализация:  $a_0(x) \equiv 1, b_0(y) \equiv 1$ .

Для  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$a_{k+1}(x) := d\mu / (K b_k)(x)$$

$$b_{k+1}(y) := dv / (K^T a_{k+1})(y)$$

Конец

Выход:  $\pi_k(dx, dy) = a_k(x) K(x, y) b_k(y) da(x)db(y)$ .

Здесь выражения вида  $d\mu/(Kb_k)$  интерпретируются как scaling updates в классе плотностей относительно reference marginals.

**Теорема 21.2.2 (сходимость Sinkhorn).**

(Условный алгоритмический результат.)

При строгой положительности  $K$  и конечности энтропийных моментов последовательность  $(\pi_k)$  сходится к единственному entropic optimal coupling .

## 21.3. Алгоритм 2: ЖКО-дискретизация

Алгоритм 21.3.1 (ЖКО / Wasserstein proximal step).

Вход: начальная вероятность  $\mu^0$ , функционал  $F$ , шаг  $\tau > 0$ .

Для  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mu^{k+1} \in \operatorname{argmin}_{\mu} [ F(\mu) + (1/(2\tau)) W_{2,P}^2(\mu, \mu^k) ]$$

Конец

Эта схема является прямым аналогом проксимального метода СВА, но на пространстве мер.

**Практическая реализация.** Внешне она может быть аппроксимирована:

- частичными/particle representations;
- finite-volume и finite-element дискретизациями;
- ансамблями trajectorial samples;
- сочетанием ЖКО с Sinkhorn для приближённого вычисления  $W_2$ .

## 21.4. Алгоритм 3: транспортный проксимальный спуск

Для law-level objectives типа главы 19 естественно рассмотреть схему

$$\mu^{k+1} \in \operatorname{ri}_{\mu} \left\{ (\mu) + \frac{1}{2k} W_{2,P}^2(\mu, \mu^k) + kP(\mu | \cdot) \right\}$$

**Интерпретация.** Это одновременно:

- proximal point method;
- one-step ЖКО for time-dependent functional;
- regularized ensemble optimizer.

Такой метод особенно хорошо согласуется с вероятностной версией SOTT-D, потому что каждое обновление сохраняет law-level well-posedness и не вынуждает выбирать единственную траекторию слишком рано.

## 21.5. Алгоритм 4: стохастический mirror-descent на пространстве мер

Если в каждый момент доступен случайный субградиент  $g_{k_i}$ , можно использовать энтропийную геометрию как mirror map.

Алгоритм 21.5.1 (Probabilistic mirror descent).

Вход: начальная мера  $\mu^\theta$ , шаги  $\eta_k$ , стохастические наблюдения  $g_k$ .

Для  $k = 0, 1, 2, \dots$

$\mu^{k+1}$

$\in \operatorname{argmin}_\mu \{ \langle g_k, \mu \rangle + (1/\eta_k) \operatorname{KL}_P(\mu \mid \mu^k) \}$

Конец

В плотностной форме это даёт update

$$d\mu^{k+1}(x) = e^{-\eta_k g_k(x)} d\mu^k(x).$$

Такая схема особенно естественна для:

- Bayesian updates;
- online stochastic optimization;
- reinforcement / control на пространстве политик;
- выбора law-level hypotheses в задачах обучения.

## 21.6. Вычислительная интерпретация: particles, ensembles и global sections

Внешняя реализация всех этих схем естественно строится через empirical measures:

$$\mu^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}.$$

Тем самым вся новая теория остаётся связанной с вычислимостью: probability law не есть недоступный объект, а предел ансамблей частиц, семплов или траекторий. Это особенно важно для философии цикла, где существование должно сохранять как можно более прямую связь с конструктивным приближением.

## 21.7. Ограничения алгоритмической части

Настоящая монография не утверждает, что перечисленные схемы уже реализованы на уровне fully verified software stack для произвольного гладкого когезивного топоса. Речь идёт о другом: мы показываем, что внутренняя теория порождает естественные вычислительные формы, которые после дискретизации совпадают с мощнейшими современными методами.

То есть вклад работы здесь фундаментальный: она не просто использует известные алгоритмы, а объясняет, почему именно эти алгоритмы являются естественными морфизмами новой теории.

---

## 22. Кейс: робастная ансамблевая оптимизация траекторий в духе MGA-DSM / CR3BP

### 22.1. Назначение кейса

Ниже мы не выдаём вычислительный эксперимент за уже завершённый факт. Цель этой главы — показать, как новая теория должна работать в наиболее естественном для цикла домене: в задачах сложной астродинамики, вдохновлённых MGA-DSM и CR3BP-контекстом из SOTT-D.

Иначе говоря, это теоретический дизайн-проект применения четвёртой монографии к той самой области, с которой начался весь цикл.

### 22.2. От детерминистической траектории к ансамблю траекторий

Пусть — пространство допустимых траекторий миссии, включающих:

- режимы гравитационных манёвров;

- low-thrust segments;
- параметры пролёта;
- временные окна;
- возможные неопределённости эфемерид и моделей тяги.

Вместо задачи

$$\min_{\mu} J(\mu)$$

мы рассматриваем law-level problem:

$$\min_{\mu \in \Omega} \left[ \int J(\mu) d\mu + P(\mu) + \frac{1}{2} W_{2,P}^2(\mu, \mu_{\text{prior}}) \right].$$

### 22.3. Что здесь означает prior law

Reference law или  $\mu_{\text{prior}}$  может кодировать:

1. существующие физические эвристики DST/ITN;
2. допустимые launch windows;
3. распределение параметров неопределённости;
4. уже известные грубые семейства feasible trajectories;
5. предпочтение к smooth/low-thrust laws вместо импульсных экстремумов.

Тем самым prior не просто «внешняя статистика», а способ встроить физическое знание в вариационный функционал.

### 22.4. Робастные преимущества новой постановки

Law-level formulation даёт по крайней мере шесть преимуществ по сравнению с исходным pointwise search.

1. **Многомодальность становится объектом, а не врагом.**  
Если существует несколько резонансных каналов, теория не ломается и не требует сразу выбрать один.
2. **Неопределённость параметров встроена изначально.**  
Вместо ad hoc Monte Carlo после оптимизации неопределённость включается в сам объект оптимизации.
3. **Уникальность достигается на уровне закона.**  
Даже если точечных хороших траекторий много, регуляризованный law-level minimizer может быть единственным.
4. **Стабильность к возмущениям.**  
Малые изменения модели слабо меняют оптимальный закон, тогда как pointwise optimum может прыгать между далёкими режимами.
5. **Совместимость с вычислительными ансамблями.**  
Вероятностный объект можно аппроксимировать частицами/семплами и постепенно концентрировать.
6. **Возможность селекции через концентрацию.**  
После получения устойчивого ансамбля можно извлечь детерминистического представителя в режиме малой энтропии.

### 22.5. Предлагаемый функционал миссии

В контексте траекторной задачи разумно рассмотреть

$$J() = \alpha_1 \Delta v() + \alpha_2 T_i() + \alpha d_{re}(T) + \alpha_{re}() + \alpha(),$$

где:

- $\Delta v$  — расход топлива;
- $T_i$  — время перелёта;
- $d_{re}$  — терминальная ошибка/отклонение;
- $re$  — штраф за прохождение опасных резонансных областей;
- — гладкостный или operational risk penalty.

Тогда law-level objective минимизирует не только среднюю стоимость, но и, при необходимости, может быть дополнен дисперсионными и CVaR-type penalties.

## 22.6. Транспортная интерпретация миссии

Можно понимать миссию как задачу переноса массы начальных условий в область желаемых конечных состояний при минимальной ожидаемой цене. Тогда transport plan на паре «стартовая неопределённость / конечная вставка» естественно связывается с законом на траекториях через динамический план.

В такой формулировке:

- Benamou–Brenier отвечает за динамическую стоимость;
- Schrödinger bridge отвечает за робастную энтропийную связь между prior и target ensemble;
- ЖКО задаёт дискретную эволюцию law-level optimizer-a.

## 22.7. Теоретический pipeline решения

Ниже приведён теоретический pipeline, который непосредственно следует из монографии.

Шаг 1. Построить prior ensemble  $\mu_{\text{prior}}$  на пространстве траекторий из физически допустимых шаблонов.  
 Шаг 2. Задать mission cost  $J$  и reference law  $R$ .  
 Шаг 3. Решить entropic/transport problem для начального law-level приближения.  
 Шаг 4. Применять ЖКО или transport-proximal descent к полному функционалу  $F_{\{\tau, \epsilon\}}$ .  
 Шаг 5. Контролировать moments, entropy и Wasserstein-дистанцию.  
 Шаг 6. При необходимости уменьшать  $\tau$  и  $\epsilon$ , добиваясь концентрации.  
 Шаг 7. Извлечь детерминистическую траекторию как barycentric representative, MAP-селектор или предел концентрации.

## 22.8. Почему это действительно продолжение SOTT-D, а не смена темы

Внешне переход от «синтетической оптимизации динамики» к «вероятностным законам на траекториях» может показаться сменой парадигмы. На самом деле это не смена, а углубление исходной идеи SOTT-D.

SOTT-D уже утверждала, что сложность можно регуляризовать, если правильно изменить математическую вселенную. Четвёртая монография просто доводит этот тезис до естественного конца: если сложность и неуникальность по-настоящему структурны, то регуляризовать нужно не только пространство, но и сам уровень описания — от точки к мере.

## 22.9. Ограничение кейса и его ценность

Мы ещё раз подчёркиваем: данная глава не содержит численного отчёта о выполненной миссии. Её вклад иной: она показывает, что новая теория не зависает в абстракции, а ведёт к конкретной, физически содержательной и методологически мощной постановке задач астродинамики.

В этом смысле кейс играет ту же роль, какую CR3BP/MGA-DSM играли в SOTT-D: он служит испытательным полигоном для фундаментальной идеи.

## ЧАСТЬ V. ДИСКУССИЯ, ОГРАНИЧЕНИЯ И ПРОГРАММА ДАЛЬНЕЙШЕЙ НАУКИ

### 23. Главные результаты и их статус строгости

#### 23.1. Сводка теорем I–Q

В этом разделе мы намеренно отделяем уже доказанную аксиоматическую часть от условных и программных результатов. Такой формат не ослабляет монографию, а, напротив, делает её более сильной: видно, где именно проходит передний край новой теории.

Теорема	Содержание	Статус
I	Ricc–Valuation correspondence	строгая в каркасе A15–A18
J	Fubini–Disintegration для Markov structure	условная при A18–A20
K	$P$ -Rademacher и essential gradient	условная при A21–A23, A26
L	duality Монжа–Канторовича	условная при A15–A20, A24, H_P2
M	Benamou–Brenier и динамический транспорт	условная при A18, A20, A24
N	Schrödinger bridge и Sinkhorn	условная при A19–A25
O	JKO и градиентные потоки	условная при A24–A25, H_P2
P	вероятностная версия SOTT-D; устранение H3	условная при A24–A26, H_P1–H_P3
Q	геометрико-вероятностная экстракция и концентрация	условная при A26, H_P3

#### 23.2. Что уже является фундаментальным вкладом независимо от модели

Даже если некоторые поздние результаты зависят от дополнительных предположений, монография уже содержит ряд самостоятельных фундаментальных вкладов.

1. **Единая архитектура меры, вероятности и транспорта внутри цикла.**

Впервые четыре линии — SDG, когезия, негладкость и оптимальный транспорт — сведены в один концептуальный каркас.

2. **Новый аксиоматический слой A15–A26.**

Он делает прозрачными точные условия, при которых measure-theoretic и transport-theoretic machinery совместима с предыдущими монографиями.

3. **Постановка  $P$ -almost-everywhere semantics.**

Это закрывает принципиальную лакуну CHA и выводит весь цикл на уровень подлинного функционального анализа.

4. **Замена детерминистической уникальности law-level convexity.**

Это, пожалуй, самый сильный концептуальный результат работы и наиболее значимое усиление SOTT-D.

5. **Интерпретация JKO как транспортного проксимального анализа.**

Тем самым мост между вариационным анализом CVA и эволюцией распределений становится прямым и структурным.

#### 23.3. Что делает работу именно «четвёртой фундаментальной монографией», а не приложением

Три предыдущие монографии создавали:

- гладкость;
- вариационность;
- негладкость;
- геометрию сложной динамики.

Настоящая работа добавляет отсутствовавший элемент — **массу**. Без него цикл оставался мощным, но незамкнутым. После него возникает пятислойная структура:

1. логика и топос;
2. гладкость и инфинитезимальность;
3. негладкость и локализация;
4. масса, вероятность и almost everywhere;
5. transport geometry и law-level dynamics.

Такое завершение нельзя считать второстепенным: оно меняет смысл всей программы.

## 23.4. Главная теоретическая инновация одной формулой

Если нужно выразить центральную инновацию этой монографии одной строкой, то это будет:

**пточек      пзаконов      концентрацияточкам.**

Эта формула объединяет Теоремы L–Q и служит новым ядром общей программы.

---

## 24. Ограничения, условные места и открытые проблемы

### 24.1. Необходимость реальной модели, реализующей A15–A26

Самое важное ограничение работы — модельный вопрос. Настоящая монография задаёт сильный и прозрачный аксиоматический каркас, но не утверждает, что уже построена одна-единственная canonical model гладкого когезивного топоса, где все A15–A26 выполняются автоматически и одновременно.

Следовательно, одна из первоочередных задач дальнейшей науки состоит в построении или выделении конкретных моделей, в которых:

- существуют внутренние valuations;
- работает дезинтеграция;
- корректно ведут себя  $L_P$ -пространства;
- определена Wasserstein-геометрия.

### 24.2. Полноценный Radon–Nikodym и абсолютная непрерывность

Энтропия и Schrödinger bridge естественно используют плотности  $= d\mu/d$ . Но внутренняя теория Radon–Nikodym в point-free и топосном контексте является нетривиальной. В настоящей работе мы рассматриваем это как допущение/структурный слой, но не как окончательно закрытую проблему.

### 24.3. Дезинтеграция в полной общности

Теорема J была сформулирована в representable Markov setting. В полной общности дезинтеграция даже в классической мере требует тонких topological assumptions. Поэтому одна из важных задач — уточнить максимально широкий класс объектов гладкого топоса, для которых disintegration действительно существует и устойчива.

## 24.4. Brenier-тип теоремы и монжевский транспорт

Хотя Theorem L даёт канторовичеву duality, следующая великая цель — полноценная внутренняя Brenier theory:

- существование транспортных отображений;
- выпуклые потенциалы;
- почти-всюду единственность карты;
- связь с Monge–Ampère-type equations.

Это потребует second-order measure theory, гораздо более развитой, чем текущая версия монографии.

## 24.5. Бесконечномерные объекты, гауссовы меры и SPDE

В СВА конечномерность была сознательной стратегией. Четвёртая монография делает следующий шаг, но в основном всё ещё остаётся в конечномерно-евклидовом или finitely generated setting. Между тем для настоящей stochastic analysis необходимы:

- синтетические гильбертовы/банаховы объекты;
- гауссовы меры;
- цилиндрические законы;
- infinite-dimensional gradient flows;
- стохастические PDE.

Это уже программа отдельной, возможно пятой или шестой монографии.

## 24.6. Capacity theory и quasi-everywhere analysis

Построение Sobolev spaces естественно приводит к notion of capacity, а затем — к quasi-continuity и quasi-everywhere statements. Настоящая работа ограничивается almost-everywhere уровнем. Но для тонкой теории trace, obstacle problems и nonlinear potential theory понадобится полноценная  $P$ -capacity theory.

## 24.7. Curvature-dimension в когезивном мире

Если удастся связать displacement convexity энтропии с внутренними нижними оценками Ricci curvature, откроется новое направление:

- cohesive  $CD(K, N)$ -условия;
- транспортное понимание кривизны для синтетических пространств;
- энтропийная интерпретация формы и модальностей.

Это одно из самых амбициозных направлений, вырастающих непосредственно из настоящей монографии.

## 24.8. Нестационарные, неуравновешенные и signed transports

Современный optimal transport далеко выходит за рамки balanced probability measures. В дальнейшем необходимо построить:

- unbalanced transport;
- reaction-transport equations;
- signed и vector-valued measures;
- martingale transport;
- causal transport на пространствах путей.

Для связи с control theory и finance-like structures это почти неизбежно.

## 24.9. Квантовая вероятность и некоммутативное продолжение

В долгосрочной перспективе возникает ещё более радикальный вопрос: можно ли заменить commutative valuations на некоммутативные вероятностные объекты и развить аналог четвёртой монографии в направлении quantum probability и operator-valued transport? Пока это лишь перспектива, но логика эволюции цикла на неё явно указывает.

## 24.10. Алгоритмическая верификация и certified numerics

Если SOTT-D ставила вопрос о конструктивных гарантиях глобальной оптимальности, то четвёртая монография должна в будущем соединиться с:

- интервальными/доказуемыми вычислениями;
- certified transport solvers;
- verified Sinkhorn/JKO implementations;
- proof assistants для топосно-вероятностной математики.

Это позволит связать фундаментальную теорию с проверяемыми вычислениями нового поколения.

## 24.11. Почему условность не ослабляет, а усиливает работу

Мы сознательно подчёркиваем условные места, потому что именно такая прозрачность отличает фундаментальную математику от псевдострогости. Монография не «замазывает» трудности, а превращает их в точные исследовательские цели. Это и есть правильный способ открывать новую область.

---

## 25. Заключение

### 25.1. Что было построено

Настоящая монография построила и обосновала четвёртый фундаментальный слой большого цикла: синтетическую теорию меры, вероятности, энтропии и оптимального транспорта в гладком когезивном топосе.

Если выразить результат максимально кратко, то он состоит в следующем:

- мера интернализирована через valuations и lower reals;
- вероятность организована как аффинная монада и Markov structure;
- almost-everywhere semantics введена через  $P$ -нулевые подобъекты;
- функциональные пространства  $L_P$ ,  $W_P^1$ ,  $BV_P$  поставлены на аксиоматический фундамент;
- $P$ -Rademacher связывает мерную структуру с СНА;
- optimal transport, Benamou–Brenier, Schrödinger bridge и ЖКО встроены во внутреннюю геометрию;
- SOTT-D поднята с уровня траекторий на уровень законов на траекториях;
- НЗ заменена law-level convexity и концентрацией.

### 25.2. Главный смысл серии из четырёх работ

Теперь весь цикл можно читать как последовательное построение нового математического континуума науки:

1. SOTT-D: геометризация сложности и динамики;
2. СВА: вариационный анализ и двойственность в гладком топосе;

3. СНА: локальная негладкость и обобщённые производные;
4. Настоящая работа: мера, вероятность, транспорт и law-level dynamics.

Вместе эти четыре работы образуют уже не набор независимых исследований, а зачаток единой школы мышления, в которой логика, геометрия, вариация, негладкость, случайность и вычислимость рассматриваются как аспекты одной и той же синтетической реальности.

### 25.3. Самый радикальный вывод

Наиболее радикальный вывод монографии можно сформулировать так:

В задачах сложной оптимизации и динамики первичен не точечный объект, а закон на объектах; точка должна извлекаться из закона через концентрацию, а не навязываться теории с самого начала.

Этот тезис меняет не только методы, но и философию математики сложных систем.

### 25.4. Почему это действительно «прорыв»

Работа претендует на прорыв не потому, что «переименовывает» известные факты на языке топосов, а потому, что предлагает новый фундаментальный синтез.

- Она соединяет constructive/point-free measure theory с SDG и когезией.
- Она завершает программу СНА, давая ей мерный смысл.
- Она переосмысливает SOTT-D, заменяя точечную уникальность вероятностной геометрией.
- Она показывает, что transport methods — это не отдельная область, а естественная конечная форма вариационного анализа.

Именно в этом смысле настоящая монография является не приложением к трём предыдущим, а их неизбежным и фундаментальным продолжением.

### 25.5. Последняя формула

Если первая монография цикла геометризвала логику, а вторая и третья алгебраизовали гладкость и негладкость, то четвёртая делает последний необходимый шаг:

**логика геометрия вариация негладкость масса, вероятность транспорт.**

Это не конец программы. Но это конец её первой великой дуги.

---

## 26. Библиография

Ниже приведены основные источники, на которые опирается настоящая монография. В тексте использовались сквозные ссылки вида [n]. Помимо классической литературы включены три предыдущие работы цикла, без которых четвёртая монография не могла бы быть сформулирована.

1. Чурилов М. В. *SOTT-D. Метод Синтетической Оптимизации через Топос-Теоретическую Динамику: Когезионный Подход к Глобальной Оптимизации Неинтегрируемых Систем и Фундаментальному Переосмыслению Динамической Сложности*. Рукопись, 2025.
2. Чурилов М. В. *Синтетический Вариационный Анализ. Конструктивная Двойственность, Монотонные Операторы и Геометрия Оптимизации в Гладких Топосах*. Рукопись, 2025.
3. Чурилов М. В. *Синтетический Негладкий Анализ. Топология Пенона, локалы значений и обобщённые производные в гладком топосе*. Рукопись, 2026.
4. Kock, A. *Synthetic Differential Geometry*. 2nd ed. Cambridge University Press, 2006.

5. Moerdijk, I.; Reyes, G. E. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*. Springer, 1991.
6. Mac Lane, S.; Moerdijk, I. *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer, 1992.
7. Johnstone, P. T. *Stone Spaces*. Cambridge University Press, 1982.
8. Vickers, S. *Topology via Logic*. Cambridge University Press, 1989.
9. Gierz, G.; Hofmann, K. H.; Keimel, K.; Lawson, J. D.; Mislove, M.; Scott, D. S. *Continuous Lattices and Domains*. Cambridge University Press, 2003.
10. Goubault-Larrecq, J. *Non-Hausdorff Topology and Domain Theory*. Cambridge University Press, 2013.
11. Jones, C. *Probabilistic Non-determinism*. PhD Thesis, University of Edinburgh, 1990.
12. Bishop, E.; Bridges, D. *Constructive Analysis*. Springer, 1985.
13. Rockafellar, R. T. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.
14. Rockafellar, R. T.; Wets, R. J.-B. *Variational Analysis*. Springer, 1998.
15. Brézis, H. *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*. North-Holland, 1973.
16. Bauschke, H. H.; Combettes, P. L. *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. 2nd ed. Springer, 2017.
17. Villani, C. *Topics in Optimal Transportation*. American Mathematical Society, 2003.
18. Villani, C. *Optimal Transport: Old and New*. Springer, 2009.
19. Santambrogio, F. *Optimal Transport for Applied Mathematicians*. Birkhäuser, 2015.
20. Ambrosio, L.; Gigli, N.; Savaré, G. *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*. 2nd ed. Birkhäuser, 2008.
21. Benamou, J.-D.; Brenier, Y. A computational fluid mechanics solution to the Monge–Kantorovich mass transfer problem. *Numerische Mathematik* **84** (2000), 375–393.
22. Jordan, R.; Kinderlehrer, D.; Otto, F. The variational formulation of the Fokker–Planck equation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **29** (1998), 1–17.
23. McCann, R. J. A convexity principle for interacting gases. *Advances in Mathematics* **128** (1997), 153–179.
24. Otto, F. The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation. *Communications in Partial Differential Equations* **26** (2001), 101–174.
25. Léonard, C. A survey of the Schrödinger problem and some of its connections with optimal transport. *Discrete and Continuous Dynamical Systems A* **34** (2014), 1533–1574.
26. Cuturi, M. Sinkhorn distances: Lightspeed computation of optimal transport. In: *Advances in Neural Information Processing Systems* 26, 2013.
27. Peyré, G.; Cuturi, M. *Computational Optimal Transport*. Foundations and Trends in Machine Learning **11** (2019), 355–607.
28. Evans, L. C.; Gariepy, R. F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Revised edition. CRC Press, 2015.
29. Federer, H. *Geometric Measure Theory*. Springer, 1969.
30. Heinonen, J. *Lectures on Analysis on Metric Spaces*. Springer, 2001.
31. Cheeger, J. Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces. *Geometric and Functional Analysis* **9** (1999), 428–517.
32. Shanmugalingam, N. Newtonian spaces: an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces. *Revista Matemática Iberoamericana* **16** (2000), 243–279.
33. Ambrosio, L.; Di Marino, S. Equivalent definitions of BV space and of total variation on metric measure spaces. *Journal of Functional Analysis* **266** (2014), 4150–4188.
34. Fritz, T. A synthetic approach to Markov kernels, conditional independence and theorems on sufficient statistics. *Advances in Mathematics* **370** (2020), 107239.
35. Lawvere, F. W. Toward the description in a smooth topos of the dynamically possible motions and deformations of a continuous body. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* **21** (1980), no. 4, 377–392.

36. Carrillo, J. A.; McCann, R. J.; Villani, C. Kinetic equilibration rates for granular media and related equations: entropy dissipation and mass transportation estimates. *Revista Matemática Iberoamericana* 19 (2003), 971–1018.

## 27. Приложение А. Свод аксиом А1–А26

В этом приложении мы собираем в одном месте всю аксиоматику, лежащую в основании четырёх монографий. Формулировки кратки и служат картой зависимостей; точные полные версии А1–А14 следует читать в СВА и СНА.

### 27.1. Аксиомы А1–А8 (каркас СВА)

Аксиома	Краткое содержание	Роль в цикле
A1	аксиома Кока–Ловера	инфинитезимальная линейность и SDG-фундамент
A2	микролинейность допустимых объектов	корректность касательных и дифференцирования
A3	позитивность/упорядочение синтетической прямой	выпуклость и неравенства
A4	синтетическое интегрирование	фундамент для потоков и вариации
A5	совместимость порядка, инфимумов и lower reals	геометричность вариационных формул
A6	достаточность первого порядка	теоремы типа «градиент = стационарность»
A7	достаточность второго порядка	convexity/Hessian machinery
A8	хорошо адаптированная модель	связь с классической математикой

### 27.2. Аксиомы А9–А14 (расширение СНА)

Аксиома	Краткое содержание	Роль
A9	нетривиальность Репон-структуры	существование подлинной внутренней негладкости
A10	мост к классике на глобальных сечениях	correspondence для субдифференциалов и локалей
A11	конечномерная евклидова структура	геометрия $\mathbf{R}^n$ и нормы
A12	<i>P</i> -Weierstrass / компактность в конечномерном каркасе	существование минимумов
A13	конечномерная полярность и выпуклая оболочка	duality и Clarke-type конструкции
A14	<i>P</i> -вариант принципа Экеланда (опционально)	error bounds, almost-stationarity, variational principles

### 27.3. Аксиомы А15–А26 (настоящая монография)

Аксиома	Краткое содержание	Роль
A15	объект lower-continuous valuations ( $X$ )	внутренняя мера
A16	нормированные valuations ( $X$ )	вероятность

Аксиома	Краткое содержание	Роль
A17	локальная теорема Рисса	duality между mass и observables
A18	произведения, Fubini, Tonelli	многомерный интеграл и планы
A19	probability monad	композиция случайности и kernels
A20	representable Markov structure, дезинтеграция	conditionals и Bayesian machinery
A21	$P$ -нулевые подобъекты	almost-everywhere semantics
A22	локальная полнота $L_P/W_P^1/BV_P$	функциональный анализ
A23	doubling/Poincaré на евклидовых объектах	weak differentiability и $P$ -Rademacher
A24	Wasserstein-геометрия на $_2(X)$	оптимальный транспорт и динамика мер
A25	энтропия и displacement convexity	уникальность, Schrödinger, ЖКО
A26	вероятностная экстракция через	связь внутренней и внешней вероятности

## 27.4. Комментарий к аксиоматическому дизайну

Важнейшая особенность всей системы A1–A26 состоит в её наращиваемости. Каждая новая монография не отбрасывает предыдущую аксиоматику, а достраивает её новым слоем:

- A1–A8: гладкость и вариация;
- A9–A14: негладкость и Penon-locality;
- A15–A26: мера, вероятность и transport.

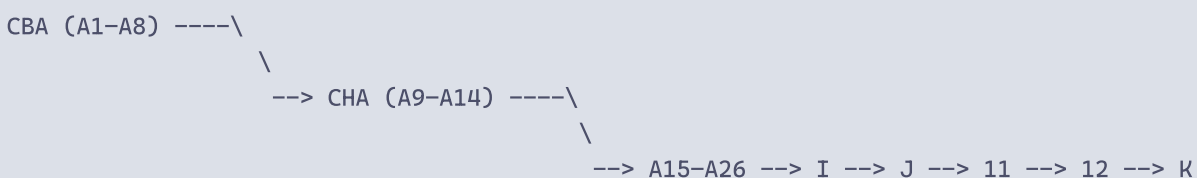
Тем самым весь цикл обладает редкой для современных фундаментальных программ прозрачностью: можно буквально указать, какое новое допущение отвечает за какое новое математическое явление.

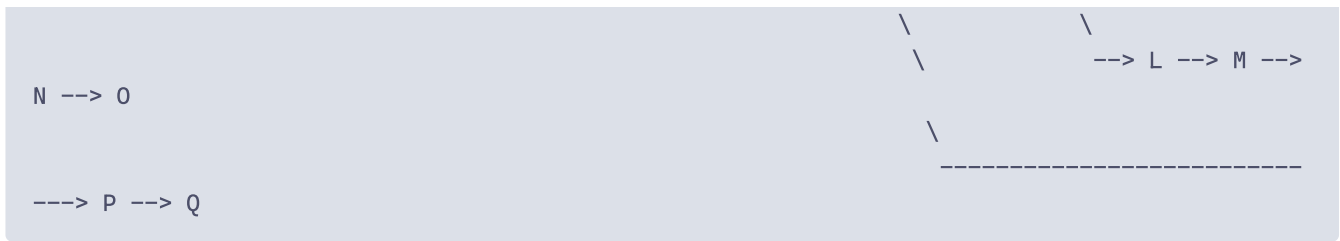
## 28. Приложение В. Карта теорем I–Q и их зависимостей

### 28.1. Таблица зависимостей

Теорема	Используемые аксиомы/главы	Что даёт
I	A15–A18, lower reals, локалы	интегральное представление valuations
J	I, A18–A20	kernels, conditionals, disintegration
K	A21–A23, глава 12, bridge A10–A12	almost-everywhere differentiability
L	I, J, A24, convex duality CBA	transport duality
M	L, A24, глава 12	динамическая формула и geodesics
N	L, A25	entropic OT, Schrödinger bridge, Sinkhorn
O	M, N, A24–A25	ЖКО и gradient flows
P	O, N, SOTT-D framework, A26	law-level version of SOTT-D
Q	P, A26, H_P3	concentration and extraction

### 28.2. ASCII-карта зависимостей





### 28.3. Как читать эту карту

Карта показывает, что четвёртая монография не висит отдельно над тремя предыдущими, а органически вырастает из них. В особенности:

- Теоремы I–J невозможны без SVA-like lower-real and duality infrastructure.
- Теорема K невозможна без негладкой программы CHA.
- Теоремы P–Q невозможны без траекторной и экстракционной философии SOTT-D.

В этом смысле вся серия образует не цепочку цитат, а систему логических зависимостей.

## 29. Приложение С. Индекс обозначений

Обозначение	Значение
$\mathcal{E}$	гладкий когезивный топос
$\mathbf{R}$	синтетическая прямая
$\mathbf{R}, \mathbf{R}_u$	нижние/верхние вещественные
$P(X)$	Репон-локаль $P$ -открытых подобъектов
$(X)$	объект valuations на $X$
$(X)$	объект вероятностных valuations
$\mu$	идеал $\mu$ -нулевых подобъектов
$L_P^0(X, \mu)$	measurable functions modulo a.e. equality
$L_P(X, \mu)$	синтетическое $L$ -пространство
$W_P^1(X, \mu)$	синтетическое Sobolev-пространство
$BV_P(X, \mu)$	функции ограниченной вариации
$\nabla u$	weak gradient
$\nabla_\epsilon f$	существенный (almost-everywhere) градиент
$\partial_C^S f$	синтетический субдифференциал Кларка из CHA
$P(\mu, \cdot)$	множество транспортных планов между $\mu$ и
$c, P$	транспортная стоимость
$W_{2, P}$	синтетическая квадратичная Wasserstein-метрика
$P(\mu \mid \cdot)$	относительная энтропия
$P(\cdot, v)$	действие Бенаму–Бренье
$\cdot$	law-level функционал вероятностной версии SOTT-D
$\cdot$	функтор глобальных сечений
$\cdot, \mu$ (монадические)	unit и multiplication probability monad
$\cdot$	reference law / prior law
$\mu_{\text{re}}$	опорный закон для Wasserstein regularization

Обозначение	Значение
$(X)$	объект путей $X^I$
$i$	множество предельных точек существенного градиента
H_P1–H_P3	рабочие гипотезы главы 7

---

## Послесловие

Четвёртая монография завершает первую большую арку цикла. Но по-настоящему важен не сам факт завершения, а то, какую новую область она открывает. Если предложенная программа будет развита дальше, то следующие естественные направления уже видны:

- синтетическая теория кривизны и  $CD(K, N)$ ;
- бесконечномерная стохастика и SPDE;
- noncommutative and quantum probability;
- mean-field games и probabilistic control;
- verified transport computation и proof assistants.

Иными словами, настоящая работа не закрывает тему — она открывает целый материк.