Доказательство ГИПОТЕЗЫ КОЛЛАТЦА

Автор: Трушников Владимир Владимирович

Март, 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ КОЛЛАТЦА

Ключевые слова: Алгоритм; натуральное число; Гипотеза Коллатца; сиракузская последовательность.

Key words: Algorithm; natural number; Collatz conjecture; Syracuse sequence.

Аннотация: В статье представлено доказательство двух независимых, одно от другого, утверждений, подтверждающих гипотезу Коллатца: не существует последовательностей Коллатца закольцованных, основанное на свойствах десятичных дробей, и действиях с ними, и утверждения, что не существует последовательностей бесконечных.

В рамках доказательства гипотезы изложена концепция успешного решения, а также зеркальная концепция, отражающая тенденцию любого натурального, следующего по алгоритму Коллатца, неизбежно сворачиваться в единицу. Раскрыт механизм действия алгоритма, в результате которого число изменяет направление своего движения. Проведён анализ возможных сценариев непрерывного роста. Показано влияние чётности порядкового номера числа в закономерном ряде «одиночных» первого множества на его поведение в очередном шаге в любой последовательности Коллатца.

Abstract: The article presents a proof of two independent statements confirming the Collatz conjecture: there are no circular Collatz sequences, based on the properties of decimal fractions and operations with them, and the statement that there are no infinite sequences.

As part of the proof of the hypothesis, the concept of a successful solution is presented, as well as a mirror concept reflecting the tendency of any natural number following the Collatz algorithm to inevitably collapse into a unit.

The mechanism of the algorithm, as a result of which the number changes the direction of its movement, is revealed.

An analysis of possible scenarios for continuous growth was conducted.

The influence of the parity of the ordinal number of a number in the regular series of "singles" of the first set on its behavior in the next step in any Collatz sequence is shown.

УДК 511.12; УДК 511.13

Актуальность: Гипотеза находится в списке нерешённых проблем математики.

Цель: Доказать гипотезу.

ВВЕДЕНИЕ: Гипотеза Коллатца, известная также как «3X+1»-гипотеза или как сиракузская последовательность, относится к алгоритмам управления натуральными числами, утверждает, что с какого бы числа, целого и положительного, мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, мы в итоге придём к единице.

Какой интерес был у Лотара Коллатца заниматься вообще алгоритмами, подобными «3X+1». Вероятно были и другие, но именно алгоритм «3X+1» стал проблемой. При этом, с начальными числами из натурального ряда такими, как 1, 2, 3 … 1 000 ... 1 000 000 … и т.д., очевидно проблем не было. Они были проверены простым перебором. Нет сомнений в том, что Коллатц исследуя простые алгоритмы, искал ответы на волнующие его вопросы далеко за пределами чистой математики. Многие закономерные процессы в физическом мире, какими бы сложными они не были на первый взгляд, содержат внутри себя повторяющиеся простые алгоритмы. Формула алгоритма напрямую не содержит параметра времени, но, сам факт последовательных действий, в результате которых происходят необратимые изменения - очередное число никогда не повторяет предыдущее, наводит на определённые философские размышления.

Удивительная по своей простоте формулировки гипотеза привлекает к себе внимание. Существует множество попыток её доказательства от простых до невероятно сложных, но пока не признанных математическим сообществом. Исследователи всегда отмечают одну особенность в доказательстве гипотезы; добившись определённых результатов, сделав очередной шаг в доказательстве они сталкиваются с новой проблемой. Доказательство постоянно ускользает. Создаётся иллюзия недосягаемости поставленной цели.

В 2019 появилось сообщение, отмеченное в [1], что Теренс Тао с помощью теории вероятностей доказал, что почти все орбиты Коллатца ограничены любой функцией, уходящей в бесконечность. В рецензии на эту работу, журнал Quanta Magazine написал, что «это один из самых значительных результатов по гипотезе Коллатца, достигнутых за последние десятилетия».

Сам Теренс Тао позднее говорил, что изначально в своём доказательстве он не рассчитывал поставить точку. А целью было сделать ещё один шаг в том, чтобы приблизиться к доказательству. «Почти» доказать также будет, пусть временным, но утешением.

Много работ, к сожалению, остаются в тени. Тем не менее, среди этих многих, своей доступностью и информативностью выделяется [2], по теме, как важный вклад в поиске пути решения гипотезы. Видеоролик, длительностью около 20 минут, на первый взгляд является развлекательным научно-популярным контентом канала Vert Dider, размещённый на площадке Yutube, но представленная в нём информация, да ещё в великолепном изложении ведущего Дерека Мюллера, является в буквальном смысле руководством к действию, способствует в том, чтобы приобщить и других к поиску ответов на поставленные гипотезой вопросы.

С большим Уважением и огромной благодарностью к несравненному Дереку Мюллеру.

Во всех известных, но непризнанных доказательствах гипотезы Коллатца, остаются нерешёнными два принципиальных вопроса:

1) Не доказано и не опровергнуто существование в последовательностях Коллатца фрагментов, замкнутых в кольцо.

2) Не доказано и не опровергнуто существование последовательностей, уходящих в бесконечность;

Из этих нерешённых вопросов выделим два утверждения, те, которые подтверждают гипотезу. Если они будут доказаны: доказывать какое-либо другое уже не имеет смысла. Выводы построенные на других утверждениях всегда будут вызывать сомнения, если не будут доказаны эти:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных

УТВЕРЖДЕНИЕ 2: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей, уходящих в бесконечность.

ЧАСТЬ 1.

1.1 Концепция успешного решения в последовательности Коллатца.

Уже самые первые шаги в исследовании алгоритма Коллатца интуитивно приводят нас к концепции успешного решения. Интуиция подсказывает, что если число постоянно меняет направление своего движения, а для этого формулой алгоритма созданы все условия, попадание в успешное решение с большой вероятностью становится неизбежно. Тем более, что оказаться в успешном решении можно как при движении назад, так и при движении вперёд.

Если в алгоритме Коллатца последовательность завершается 1, то перед тем как к ней прийти мы обязательно выйдем на одно из значений из ряда 2^n. Для ряда 2^n выполним действия обратные алгоритму «3Х+1», тем самым выясним, при достижении каких значений 2^n алгоритм завершается 1. Оказывается не при всех, а только с чётным показателем степени. Результаты сведены в таблицу обратных преобразований ряда 2^{2n} по алгоритму Коллатца (Табл. 1)

N	2^{2n}	2^{2n}-1	$\frac{2^{2n}-1}{3}$
1	4	3	1
2	16	15	5
3	64	63	21
4	256	255	85
5	1024	1023	341
6	4096	4095	1365
И т.д.	...	...	...

Таблица1. Таблица обратных преобразований ряда 2^{2n} по алгоритму Коллатца.

Существует бесконечное количество значений натурального ряда, определяемые формулой:

$$\frac{2^{2n}-1}{3} \qquad (1)$$

которые в итоге приводят к значению 2^{2n} и сворачиванию числа в 1.

Будем называть эти значения, и маршруты к ним приводящие, **успешными решениями алгоритма**. Можно показать, что делитель 3 в приведённой формуле не является помехой для нашего вывода, т.е. число 2^{2n}-1 при всех n≥1 кратно 3. Решения для соседних чисел различаются между собой значением:

$$\frac{2^{2(n+1)}-1}{3} - \frac{2^{2n}-1}{3} = 2^{2n} \qquad (2)$$

Это значит, зная решение для предыдущего числа n, решение для следующего n+1 можно определить по формуле:

$$\frac{2^{2n}-1}{3} + 2^{2n} = \frac{2^{2(n+1)}-1}{3} \qquad (3)$$

И так далее, до бесконечности. Куда бы мы не двигались, вперёд-назад, мы всегда будем находиться между двух, тех или иных, успешных решений алгоритма. И хотя нам уже достаточно утверждения, что количество успешных решений бесконечное множество, мы всегда можем его усилить. Например, каждое значение натурального ряда, определяемое (1) можно дополнительно умножить на 2^n. Например, число 5 умножить на 2^n, число 7 умножить на 2^n. Каждое число, из уже известных, ранее пройденных и завершённых единицей маршрутов, умножить на 2^n. Тогда мы должны удивляться уже не тому, что каждое число по алгоритму Коллатца завершается единицей, а почему вообще существуют числа с большими маршрутами. Оказавшись в значении успешного решения, число должно немедленно свернуться в единицу. Ответ находим простой. Во первых: множество чисел сворачивается действительно быстро, во вторых: каждый длинный маршрут составлен из уже известных, ранее пройденных и завершённых единицей маршрутов.

Предположим, между успешными решениями всё же существуют значения, не относящиеся к успешным. Сколько их. Определённо, должно быть ограниченное количество, значит мы простым перебором неизбежно их преодолеем. Тогда каждое новое число на пути алгоритма становится очередным шагом к цели. Успешное решение алгоритма - это просто один из очередных шагов. Как только мы окажемся на одном из ранее пройденных и завершённых единицей маршрутов, можно считать завершённым и текущий.

Формула (3X+1)/2 производит движение вперёд, в сторону увеличения текущего числа, а формула (3X+1)/2n, где n>1, назад, в сторону его уменьшения. Действие +1 в алгоритме «3X+1» гарантирует его непрерывность, способствует непрерывности движения числа к успешному решению. Для того, чтобы этот процесс движения не прерывался также необходимо, чтобы каждое очередное число последовательности отличалось от любого из предыдущих, иначе: будет образовано так называемое кольцо – бесконечное чередование одного и того же фрагмента последовательности.

В концепции успешного решения не рассматривается бесконечным непрерывное движение только вперёд, так как периодическое возвращение назад также неотъемлемая часть алгоритма. Однако, в этой концепции есть одно слабое место: с увеличением натурального, значения 2^{2n} в последовательности встречаются реже, а интервалы между ними, соответственно, увеличиваются. Это приводит к тому, что процесс движения к успешному решению становится неопределённо затянутым, если не сказать бесконечным.

Тем не менее, фактом является то, что успешных решений в гипотезе Коллатца бесконечное множество, и мы всегда находимся между двух, тех или иных успешных решений. В любом случае, мы всегда находимся на пути к успешному решению. Тем более, что возможность оказаться в успешном решении не зависит от того, в каком направлении происходит движение.

1.2 Обоснование возможности существования закольцованного фрагмента в последовательности Коллатца.

В условиях, когда число периодически возвращается: существование в последовательности Коллатца закольцованного фрагмента становится также логично, как и попадание в успешное решение.

1.3 Цикл 4-2-1:

Так называемый цикл 4-2-1, часто упоминаемый в связи с гипотезой Коллатца, по определению не является кольцом. Алгоритм «3X+1», или «3n+1» – гипотеза: есть сокращённое название гипотезы Коллатца, сокращённая запись алгоритма, а полный алгоритм перехода из одного состояния в другое, от одного нечётного к другому нечётному, включает ещё и деление на два, в общем виде выражается формулой (4):

$$X_{n+1} = \frac{3X_n+1}{2^m} \qquad (4)$$

Здесь: X_n- исходное (или предыдущее) нечётное,
X_{n+1} - очередное нечётное,
m – количество делений на два до очередного нечётного.

Запись алгоритма в виде формулы (4) предполагает начинать именно с нечётного. С какого бы числа, целого и положительного, мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, мы в итоге придём к единице.

Известны и другие формулировки гипотезы, не меняющие её сути. Например такая: Берём любое натуральное число; “Если оно чётное, разделим его на два, а если нечётное, то умножаем на три и прибавляем единицу; Над полученным числом выполняем те же действия, и так далее. Какое бы начальное число мы ни взяли, рано или поздно мы получим единицу”.

Прибавляем единицу, только для того, из нечётного сделать чётное, чтобы можно было его делить на 2 и процесс не прекращался. Утверждается, что эта простая формулировка понятна практически всем здравомыслящим людям. После того, как мы пришли к единице алгоритм завершается, точка.

Кольцом может называться бесконечное чередование одного и того же фрагмента последовательности, состоящая из нескольких нечётных. не позволяющая прийти к единице. Фраза “С какого бы числа, целого и положительного, мы не начали…” - между строк содержит смысл, в котором имеется в виду, что несомненно, это число должно быть натуральное и оно должно быть больше единицы и больше известного проверенного. С этого - только начинается ГИПОТЕЗА.

1.4 Доказательство УТВЕРЖДЕНИЯ 1: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных.

Пусть X_0 = 107 число произвольной последовательности. Предположим оно является исходным числом закольцованного фрагмента.
Отследим маршрут исходного числа этого предположительно закольцованного фрагмента.

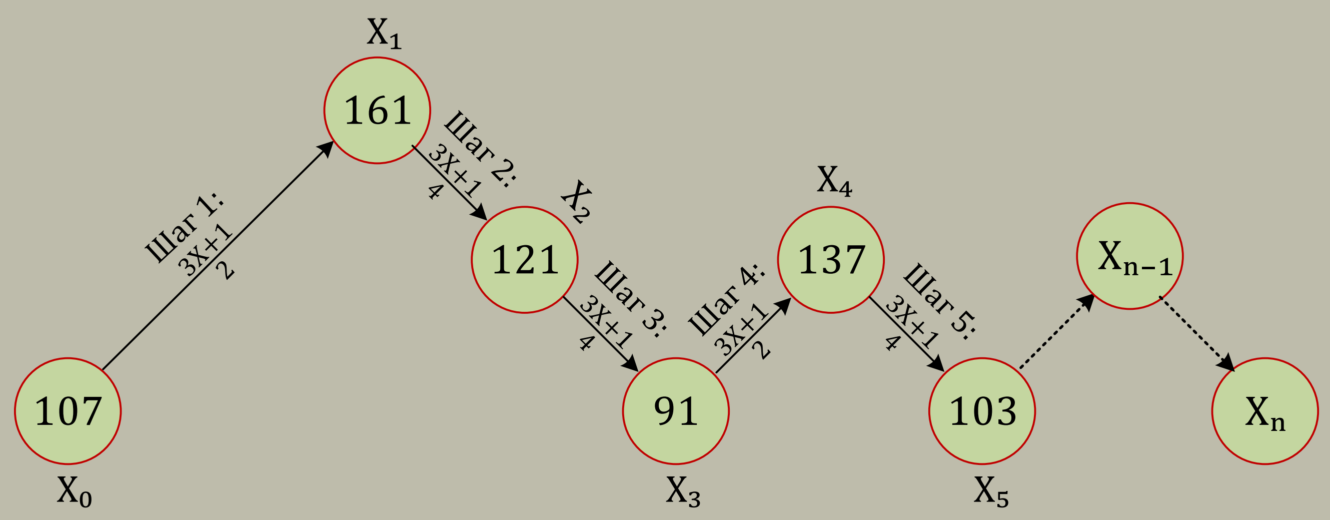


Рис.1 Маршрут числа 107 по алгоритму Коллатца

Шаг 1 (вперёд):

$$X_1 = \frac{3X_0+1}{2} \quad \Rightarrow \quad X_1 = \frac{3 \cdot 107+1}{2} = 161 \qquad (5.1)$$

С другой стороны переход от X_0=107 к числу X_1=161 можно выразить через коэффициент K_1

$$X_1 = K_1 \cdot X_0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{X_1}{X_0} \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{161}{107} \approx 1{,}50467 \qquad (5.2)$$

Аналогично в других шагах.

Шаг 2 (назад):

$$X_2 = \frac{3X_1+1}{4} \quad \Rightarrow \quad X_2 = \frac{3 \cdot 161+1}{4} = 121 \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{121}{161} \approx 0{,}75155 \qquad (6)$$

Шаг 3 (назад):

$$X_3 = \frac{3X_2+1}{4} \quad \Rightarrow \quad X_3 = \frac{3 \cdot 121+1}{4} = 91 \quad \Rightarrow \quad K_3 = \frac{91}{121} \approx 0{,}75206 \qquad (7)$$

Шаг 4 (вперёд):

$$X_4 = \frac{3X_3+1}{2} \quad \Rightarrow \quad X_4 = \frac{3 \cdot 91+1}{2} = 137 \quad \Rightarrow \quad K_4 = \frac{137}{91} \approx 1{,}50549 \qquad (8)$$

Шаг 5 (назад):

$$X_5 = \frac{3X_4+1}{4} \quad \Rightarrow \quad X_5 = \frac{3 \cdot 137+1}{4} = 103 \quad \Rightarrow \quad K_5 = \frac{103}{137} \approx 0{,}75182 \qquad (9)$$

И так далее. В любом шаге любой последовательности мы всегда имеем дробный переходный коэффициент от одного нечётного к другому нечётному. При этом, в шаге (вперёд), когда делитель равен 2 переходный коэффициент больше единицы. В шаге (назад), когда делитель равен 2^n, где n>1 переходный коэффициент всегда меньше единицы.
Произведение двух или нескольких дробных, часть из которых меньше, а другая больше единицы, допускает возможность стать равным единице.

Если представленный на Рис.1 фрагмент последовательности является закольцованным, значит одно из его очередных чисел равно исходному.
Переход от исходного к этому очередному можно выразить через произведение промежуточных коэффициентов (11).

$$X_n = (K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \ldots K_n') \, X_0 = \left(\frac{\cancel{X_1}}{X_0} \cdot \frac{\cancel{X_2}}{\cancel{X_1}} \cdot \frac{\cancel{X_3}}{\cancel{X_2}} \cdots \frac{X_n}{\cancel{X_{n-1}}} \right) X_0 \qquad (10)$$

Откуда следует:

$$X_n = K_n \cdot X_0 \qquad \text{при } X_n = X_0 \quad \Rightarrow \quad K_n = \frac{X_n}{X_0} = 1 \qquad (11)$$

Если одно из очередных равно исходному X_0 (или одному из предыдущих), значит переходный коэффициент К между ними равен единице.

Если одно из очередных равно исходному X_0 (или одному из предыдущих), значит переходный коэффициент K между ними равен единице.

Докажем, что:

$$K_n = \frac{X_n}{X_0} \neq 1 \tag{12}$$

Для доказательства будем использовать аксиому, основанную на свойствах сложения десятичных дробей.

Аксиома: Сложение двух дробных в десятичном виде с одинаковым количеством знаков после запятой не всегда дают натуральное. Но, если натуральное является результатом сложения двух дробных слагаемых, то количество знаков после запятой в этих слагаемых всегда одинаково.

Соответственно, невозможно получить натуральное сложением двух дробных с разным количеством знаков после запятой: результатом такого сложения всегда будет дробное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В результате действия алгоритма, число всякий раз меняется. Представим структуру новообразованного натурального числа в рассматриваемой последовательности с исходным 107 суммой двух слагаемых: дробной части $k_n X_0$, пропорциональной исходному и вещественного остатка «r_n» от целого натурального, т.е.:

$$X_n \in \{X_0 \ldots\} = k_n \cdot X_0 + r_n \tag{13}$$

В формуле (13) запись вида: $X_n \in \{X_0 \ldots\}$ следует читать как число X_n, принадлежащее последовательности Коллатца с исходным X_0.
В свою очередь (13) перейдёт в (14)

$$X_n \in \{X_0 \ldots\} = k_n \cdot X_0 + \frac{r_n}{X_0} \cdot X_0 = \left(k_n + \frac{r_n}{X_0}\right) \cdot X_0 \tag{14}$$

Учитывая, что $X_n = K_n \cdot X_0$, следует (15)

$$K_n = \left(k_n + \frac{r_n}{X_0}\right) \tag{15}$$

Итак, исходное число последовательности, изображённой на Рис.1: $X_0 = 107$

Шаг 1 (вперёд):

$$X_1 \in \{107 \ldots\} = \frac{3X_0+1}{2} = 1{,}5 \cdot X_0 + 0{,}5 \tag{16.1}$$

$$X_1 \in \{107 \ldots\} = 1{,}5\, X_0 + \frac{0{,}5}{X_0}\, X_0 = \left(1{,}5 + \frac{0{,}5}{X_0}\right) X_0 \tag{16.2}$$

Шаг 2 (назад):

$$X_2 \in \{107 \ldots\} = \frac{3X_1+1}{4} = 0{,}75 \cdot X_1 + 0{,}25 \tag{17.1}$$

Учитывая (16.2)

$$X_2 \in \{107 \ldots\} = 0{,}75 \cdot \left(1{,}5 + \frac{0{,}5}{X_0}\right) X_0 + \frac{0{,}25}{X_0}\, X_0 \tag{17.2}$$

$$X_2 \in \{107 \ldots\} = \left(0{,}75 \cdot \left(1{,}5 + \frac{0{,}5}{X_0}\right) + \frac{0{,}25}{X_0}\right) X_0 \tag{17.3}$$

$$X_2 \in \{107 \ldots\} = \left(1{,}125 + \frac{0{,}625}{X_0}\right) X_0 \tag{17.4}$$

Шаг 3 (назад):

$$X_3 \in \{107 \ldots\} = \frac{3X_2+1}{4} = 0{,}75 \cdot X_2 + 0{,}25 \tag{18.1}$$

Учитывая (17.4)

$$X_3 \in \{107 \ldots\} = 0{,}75 \cdot \left(1{,}125 + \frac{0{,}625}{X_0}\right) X_0 + \frac{0{,}25}{X_0}\, X_0 \tag{18.2}$$

$$X_3 \in \{107 \ldots\} = \left(0{,}75 \cdot \left(1{,}125 + \frac{0{,}625}{X_0}\right) + \frac{0{,}25}{X_0}\right) X_0 \tag{18.3}$$

$$X_3 \in \{107 \ldots\} = \left(0{,}84375 + \frac{0{,}71875}{X_0}\right) X_0 \tag{18.4}$$

И так далее. Аналогичным образом получим формулы остальных чисел последовательности $X_n \in \{107 \ldots\}$, изображённой на Рис.1.

Сведём результаты вычислений в отдельный ряд формул:

$$\nearrow\frac{3X+1}{2}\qquad X_1\in\{107\ldots\}=\left(1{,}5+\frac{0{,}5}{X_0}\right)X_0\ =161 \tag{19}$$

$$\searrow\frac{3X+1}{4}\qquad X_2\in\{107\ldots\}=\left(1{,}125+\frac{0{,}625}{X_0}\right)X_0=121 \tag{20}$$

$$\searrow\frac{3X+1}{4}\qquad X_3\in\{107\ldots\}=\left(0{,}84375+\frac{0{,}71875}{X_0}\right)X_0=91 \tag{21}$$

$$\nearrow\frac{3X+1}{2}\qquad X_4\in\{107\ldots\}=\left(1{,}265625+\frac{1{,}578125}{X_0}\right)X_0=137 \tag{22}$$

$$\searrow\frac{3X+1}{4}\qquad X_5\in\{107\ldots\}=\left(0{,}94921875+\frac{1{,}43359375}{X_0}\right)X_0=103 \tag{23}$$

Переходный коэффициент K_n от исходного X_0 к любому очередному в последовательности очередных определяется суммой слагаемых, находящихся в круглых скобках, в соответствии с (14):

$$K_n=\frac{X_n\in\{X_0\ \ldots\}}{X_0}\ =\left(k_n+\frac{r_n}{X_0}\right) \tag{24}$$

ВЫВОД: Каждый очередной шаг делением на 2^n вносит изменения в структуру слагаемых переходного коэффициента K_n: увеличивает в них количество знаков после запятой. При этом количество знаков после запятой в дробном коэффициенте «k_n» и вещественном остатке «r_n» при делении их на одно и тоже 2^n увеличивается одинаково, так, что в любом шаге любой последовательности между ними всегда соблюдается паритет. Но, учитывая, что вещественное «r_n» в одном из слагаемых коэффициента K_n дополнительно делится на нечётное натуральное X_0, это слагаемое становится дробным с большим количеством знаков после запятой.

Переходный коэффициент K_n, полученный в результате суммы двух слагаемых с разным количеством знаков после запятой не является натуральным, значит и равным единице он также не может быть.

$$K_n=\frac{X_n}{X_0}\neq 1\qquad\Rightarrow\qquad X_n\neq X_0 \tag{25}$$

Что и требовалось доказать.

Причина, по которой переходный коэффициент от одного «нечётного» к другому «нечётному» всегда дробный, обусловлена существованием вещественного «r≠0» в формуле натурального из-за наличия +1 в формуле алгоритма Коллатца. Роль вещественного «r≠0» в (13) заключается в том, чтобы восстанавливать дробную часть формулы «нечётного» до натурального целого.

В алгоритме Коллатца нет повторений. Из факта существования положительного вещественного в формуле очередного следует более общий вывод: не только алгоритм Коллатца «3X+1» с приращением «+1», но и любой другой подобный алгоритм (26):

$$X_{n+1}=\frac{3X_n+d}{2^m} \tag{26}$$

где d=1, 3, 5, 7 … и т.д., не имеет возможности образования в своей последовательности так называемого кольца: бесконечного чередования одного и того же фрагмента последовательности, состоящего из нескольких «нечётных».

Единственное исключение для них, не позволяющее завершиться в единице - цикл, по определению не являющийся кольцом, когда d⇒d.

В общем случае, алгоритм с положительным нечётным приращением «d» завершается либо в единице, либо в этом самом приращении «d». Алгоритм Коллатца здесь не исключение, и является частным случаем: (d=1)⇒(d=1).

Если $X_n=d$, то:

$$X_{n+1}=\frac{3d+d}{2^m}=\frac{4d}{2^m}=d\qquad\Rightarrow\qquad d\Rightarrow d \tag{27}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1, что в последовательности Коллатца не существует закольцованных фрагментов - **ДОКАЗАНО**.

ЧАСТЬ 2.

2.1. МНОЖЕСТВО НЕЧЁТНЫХ КОЛЛАТЦА

Перед нами бесконечный ряд нечётных (Рис.2):

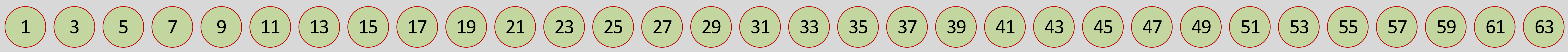


Рис.2 Ряд натуральных чисел

Представим путь нечётного числа к следующему нечётному. Умножаем на 3, прибавляем 1: получаем чётное (Рис.3):

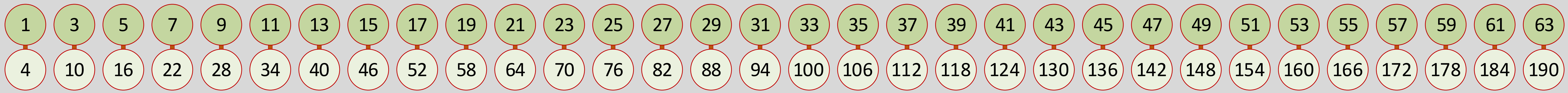


Рис.3 Ряд промежуточных чётных в алгоритме Коллатца

В половине случаев деление на 2 нас тут же вернёт к нечётному (Рис.4):

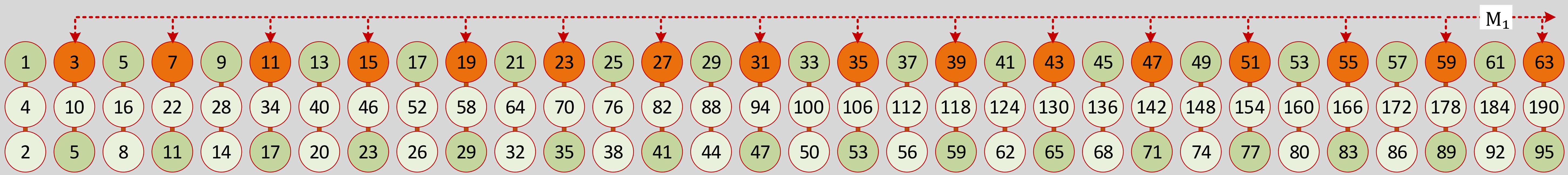


Рис.4 Первое множество Коллатца

Но каждое 4-е число, делить придётся дважды т.е. на 4.

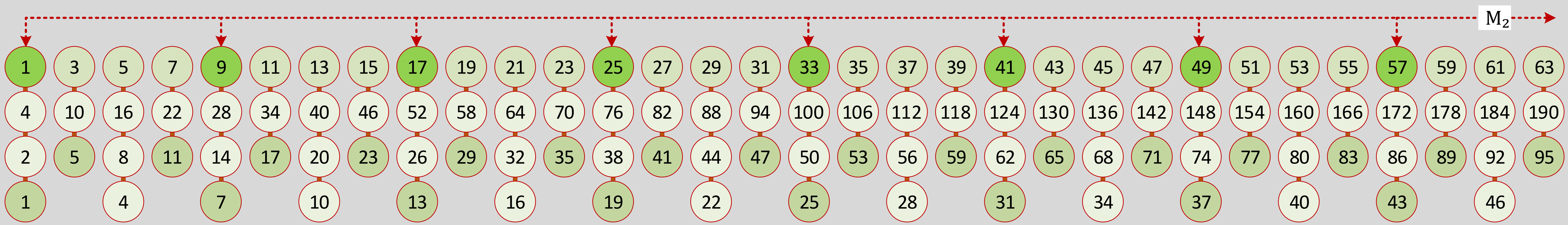


Рис.5 Второе множество Коллатца

Каждое 8-е число, делить придётся на 8, чтобы получить следующее нечётное:

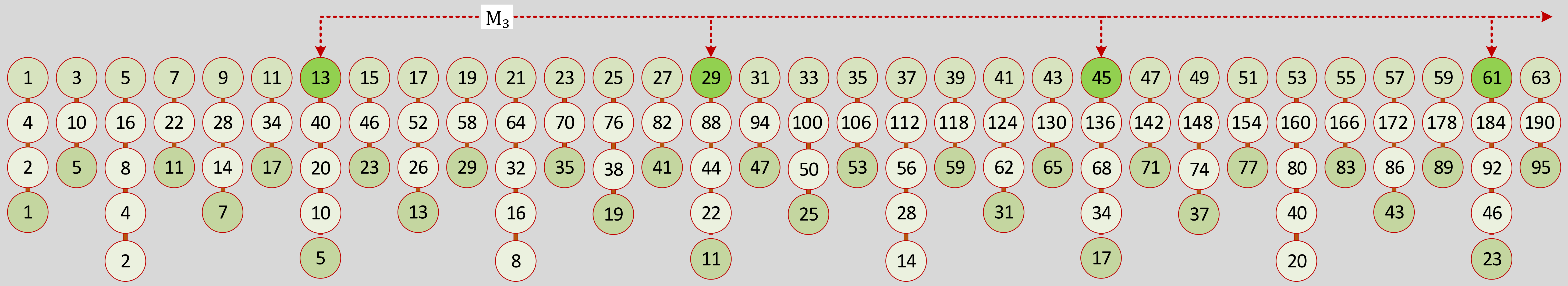


Рис.6 Третье множество Коллатца

Каждое 16-е на 16, и т.д

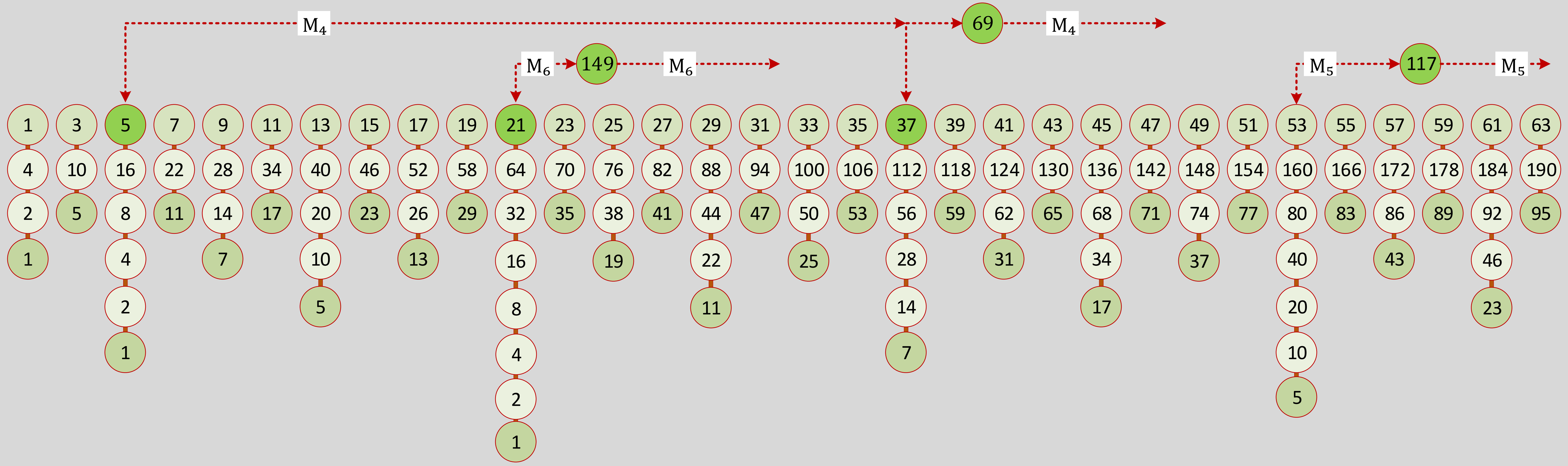


Рис.7 Четвёртое, пятое, шестое и далее другие множества Коллатца

“Взяв среднее геометрическое:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{8}}\cdot\left(\frac{3}{16}\right)^{\frac{1}{16}}\ \cdots\ \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \approx \frac{3}{4} < 1 \qquad (28)$$

мы увидим, что в среднем, чтобы добраться от одного нечётного числа к другому, нужно умножить его примерно на 3/4, что меньше единицы. При больших значениях нечётного единицей в алгоритме можно пренебречь. Выходит, чисто статистически, последовательности «3Х+1» уменьшаются чаще, чем растут”. Ведущий видеоролика [2] в своих рассуждениях использовал идею такого наглядного представления структуры натурального ряда для вывода статистической формулы (28), а получив её, переключился развивать мысль в другом направлении. Демонстрируя визуальные эффекты сложения параллельных потоков в один общий, прекрасно понимая, что представленные картины по прежнему остаются частным случаем общего вопроса, поставленного гипотезой Коллатца.

Нам потребуется выполнить ещё один маленький шаг, и мы **сможем увидеть механизм действия алгоритма, в результате которого число изменяет направление своего движения,** будет понятно, почему следуя одному и тому же алгоритму, с одним и тем же делителем в знаменателе формулы алгоритма, число может “неожиданно” изменить направление своего движения.

Введем новые понятия:
Множество нечётных Коллатца;
Производительность числа в алгоритме Коллатца;
Работа числа выполненная по алгоритму Коллатца.

МНОЖЕСТВО НЕЧЁТНЫХ КОЛЛАТЦА:
Обозначение: **Mm,** где **«m»-** порядковый номер множества

Назовём ряд нечётных [3, 7, 11, 15 …} – **1-м множеством** Коллатца, далее по тексту просто первым множеством или М1. Первым оно называется по признаку, того, что чётные полученные в результате действия алгоритма «3Х+1» приходится делить 1 раз на 2, чтобы получить очередное нечётное. Позиции нечётного числа $(M_1)_a$ в М1 продвигают очередное всегда вперёд, в сторону его увеличения. Каждое очередное число 1-го множества отличается от предыдущего на 4, и описывается формулой (29):

$$(M_1)_a \in M1 = 4a\text{-}1 \qquad (29)$$

Где: a =[1,2,3… } – порядковый номер числа $(M_1)_a$ в М1; индекс 1 при $(M_1)_a$ указывает на принадлежность числа к М1.
Назовём ряд нечётных [1, 9, 17, 25 …} – **2-м множеством** Коллатца, обозначим его М2 . Вторым оно называется по признаку, того, что чётные полученные в результате действия алгоритма «3Х+1» приходится делить 2 раза на 2, чтобы получить очередное нечётное. Позиции нечётного числа $(M_2)_a$ в М2 продвигают число в сторону его уменьшения. Каждое очередное число 2-го множества отличается от предыдущего уже на 8, и описывается формулой (30):

$$(M_2)_a \in M2 = 8a\text{-}7 \qquad (30)$$

Где a =[1,2,3… } – порядковый номер числа $(M_2)_a$ в М2; индекс 2 при $(M_2)_a$ указывает на принадлежность числа к М2.

Назовём ряд нечётных [13, 29, 45, 61 …} – **3-м множеством** Коллатца. По аналогии с первым и вторым множеством, обозначим его М3. Позиции нечётного числа $(M_3)_a$ в М3 продвигают число также в сторону его уменьшения. Каждое очередное число 3-го множества отличается от предыдущего на 16, и описывается формулой (31):

$$(M_3)_a \in M3 = 16a\text{-}3 \tag{31}$$

где a =[1,2,3… } – порядковый номер числа $(M_3)_a$ в М3; индекс 3 при $(M_3)_a$ указывает на принадлежность числа к М3.

И так далее. У каждого множества своя формула числа, которая в общем виде выглядит, как (32):

$$(M_m)_a \in M_m = 2^{m+1}a - C_m \tag{32}$$

Где: m = [1,2,3…} – порядковый номер множества;
a = [1,2,3…} – порядковый номер числа принадлежащего множеству;
2^{m+1} - первая константа множества Коллатца (период).
C_m - вторая константа множества Коллатца.

$$C_m = 2^{m+1} - (M_m)_1 \tag{33}$$

Где: $(M_m)_1$ - начальное число множества Mm.

Формула (32) применима, когда известно начальное число $(M_m)_1$. В таблице 2 приведен вариант определения числа $(M_m)_a$ с использованием предыдущего, уже известного, значения C_{m-2}. Так мы последовательно можем легко составить таблицу формул для всех интересующих нас множеств от M_1 до M_m

Порядковый номер: m	$(M_m)_a \in M_m$	Начальное $(M_m)_{a=1}$
1	$(M_1)_a = 4a\text{-}1$	3
3	$(M_3)_a = 16a\text{-}3$	13
5	$(M_5)_a = 64a\text{-}11$	53
7	$(M_7)_a = 256a\text{-}43$	213
9	$(M_9)_a = 1024a\text{-}171$	853
...	...	...
m-нечётное	$(M_m)_a = 2^{m+1}a - (C_{m-2}+2^{m-2})$	$2^{m+1} - C_m$

Порядковый номер: m	$(M_m)_a \in M_m$	Начальное $(M_m)_{a=1}$
2	$(M_2)_a = 8a\text{-}7$	1
4	$(M_4)_a = 32a\text{-}27$	5
6	$(M_6)_a = 128a\text{-}107$	21
8	$(M_8)_a = 512a\text{-}427$	85
10	$(M_{10})_a = 2048a\text{-}1707$	341
...	...	...
m-чётное	$(M_m)_a = 2^{m+1}a - (C_{m-2}+2^{m-2}5)$	$2^{m+1} - C_m$

Таблица 2. Таблицы определения произвольного значения $(M_m)_a$ с использованием предыдущего значения C_{m-2}

Подводя итог описаниям основных характеристик множеств, отметим следующий факт: множество М1, единственное из всех, следующим ходом увеличивает значение числа, все остальные M_m -множества его уменьшают.

ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ЧИСЛА В АЛГОРИТМЕ КОЛЛАТЦА
Обозначение: **W**
Определение: Производительностью числа в алгоритме Коллатца называется количество единиц пройденных нечётным при исполнении алгоритма «3Х+1» за один полный шаг. В последовательности Коллатца не существует времени. Единицей отсчёта событий является шаг алгоритма. Значение производительности определяется модулем разности между очередным нечётным и исходным.

РАБОТА ЧИСЛА В АЛГОРИТМЕ КОЛЛАТЦА
Обозначение: **A**
Определение: Работа числа выполненная по алгоритму Коллатца - есть количество единиц пройденных нечётным при исполнении алгоритма «3Х+1» за несколько последовательных шагов в пределах одного множества, в пределах интервала последовательности, или всей последовательности. Значение работы определяется модулем разности между конечным в интервале нечётным и исходным.

2.2 ОПИСАНИЕ МЕХАНИЗМА ПЕРЕХОДА ЧИСЛА ИЗ ОДНОГО МНОЖЕСТВА В ДРУГОЕ

Возьмём из первого множества число 7. В результате исполнения алгоритма (3·7+1)/2 =11 число 7 увеличилось примерно в 3/2 раза, переместилось в позицию числа 11. С другой стороны очередное число 11 стало больше исходного на значение 11-7=4. Числа 7 и 11, отличающиеся на значение 4, кратное периоду исходного множества М1 равному 4, принадлежат этому множеству. Каковы шансы теперь уже у исходного числа 11 следующим шагом остаться в этом же множестве. Шансы ещё есть. Та же самая формула увеличивает исходное число примерно в те же 3/2 раза (3·11+1)/2 =17, но теперь уже разница между очередным и исходным 17-11=6 не является кратным 4. Потому что, действие умножения мы провели для большего числа, а 11 больше 7. С ещё большими числами будет ещё больше разница. Умножение разных по значению чисел на одно и то же приводит к разным приращениям, не всегда кратным периоду исходного множества.

Разные приращения создают иллюзию непредсказуемости поведения числа. Тем не менее. алгоритм «3Х+1» имеет закономерный механизм перехода из одного множества нечетных в другое. Каждая вторая позиция числа в натуральном ряде принадлежит первому множеству. Вероятность попадания очередного числа в первое множество равна 50 на 50. Такая же вероятность попадания очередного числа в любое из множеств М2, М3, М4 … M_m, ведь они также в сумме занимают каждую вторую позицию. Один очередной шаг, следующий … и т.д., в какую бы сторону мы не направились, мы можем оказаться вообще в любом множестве, в любой момент сменить направление. Алгоритму не важно в какую сторону будет изменяться очередное число. Он просто совершает свою работу.

Механизм перехода из одного множества в другое является математическим описанием известного закона перехода количественных изменений в качественные. Число в новом множестве обретает возможность изменяться алгоритмом уже с другим делителем, поэтому переход числа в другое множество всегда является качественным переходом. Далее по тексту, механизм перехода из одного множества в другое будем именовать математическим законом перехода количественных изменений в качественные.
Теперь, когда мы знаем механизм перехода числа из одного множества в другое, когда знаем формулу числа каждого множества, его период, каждый шаг алгоритма можно просчитать.

2.3 СЦЕНАРИЙ РОСТА «НЕЧЁТНОГО» В ПРЕДЕЛАХ МНОЖЕСТВА M1

Множество M1, единственное из всех, следующим ходом увеличивает значение числа. Рассмотрим первые 32 числа из M1 (Рисунок 8). Через порядковый номер значение числа в M1определим по формуле (15).

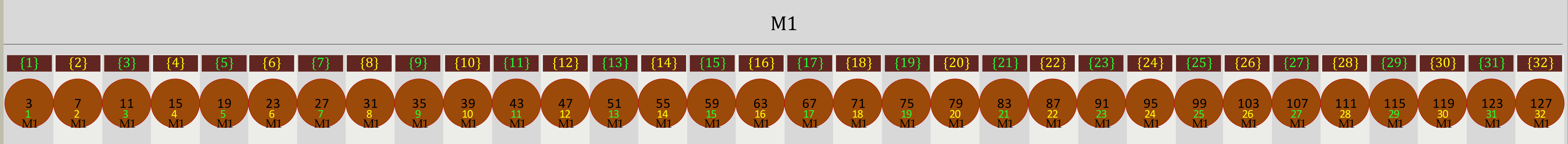


Рис.8 Первое множество Коллатца

Для наглядности, нечётные будем различать по цветовым признакам в зависимости от того, к какому множеству они принадлежат, а также от чётности их порядкового номера в этом множестве, как представлено на Рис 9, и Рис 10

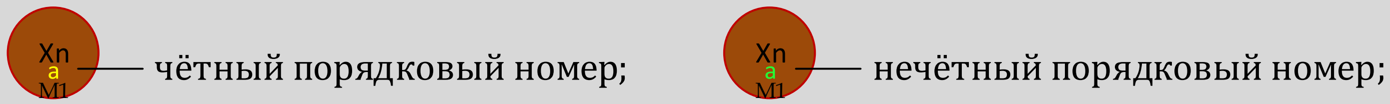


Рис.9 Цветовые признаки числа и его порядкового номера, принадлежащего множеству нечётных Коллатца M1

Числа, принадлежащие множествам M2, M3, M4 … M_m обозначим как на (Рис.10):

Рис.10 Цветовые признаки числа и его порядкового номера, принадлежащего множествам нечётных Коллатца M2, M3, M4 … Mm.

Найдём очередное значение каждого числа из M1 (Рис.11).

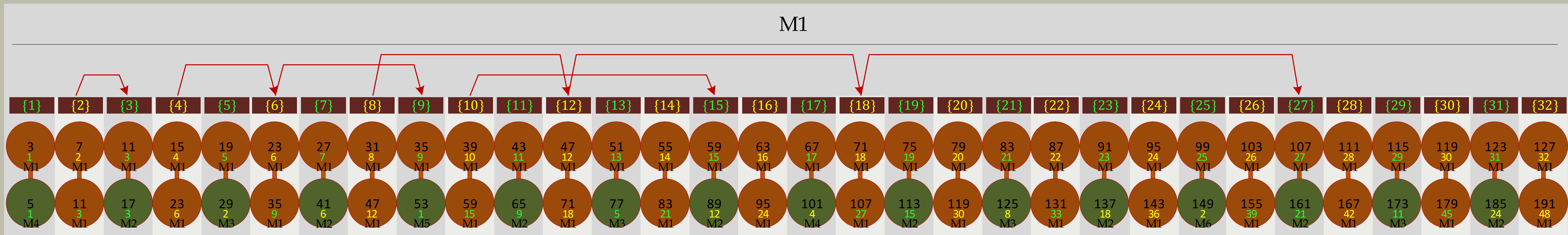


Рис.11

После первого хода все «нечётные» множества M1, с нечётным порядковым номером {1}, {3}, {5} ... перешли в одно из множеств M2, M3, M4 … M_m, а «нечётные» с чётным {2}, {4} , {6} … и т.д. остались в M1. Но, каждое второе чётное, т.е. ровно половина от их общего числа, осталось в M1 чётным. Вторая половина с чётным порядковым номером перешла в разряд нечётных, значит следующим ходом эта часть перейдёт в одно из множеств M2, M3, M4 … M_m, таким образом сменит направление движения.

Такое поведение «нечётных» принадлежащих М1 в последовательности Коллатца является закономерным. Определяющим признаком направления движения «нечётного» в М1 является признак чётности его порядкового номера. Не значение «нечётного», не значение его порядкового номера, а чётность или нечётность порядкового номера исходного влияют на то, каким будет направление движения очередного «нечётного» в последовательности Коллатца.

Механизм перехода от одного «нечётного» к другому «нечётному» в М1 рассмотрим на примере фрагмента последовательности с исходным 31.

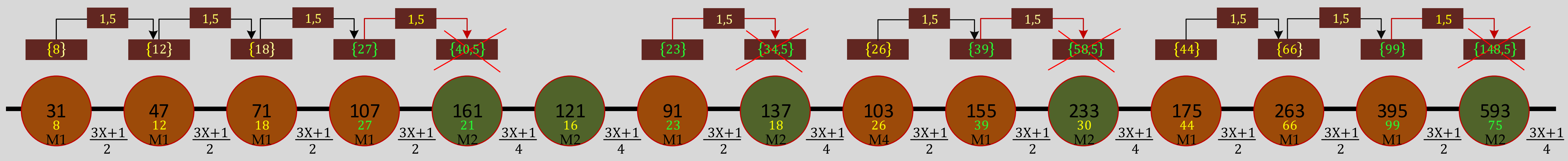


Рис.12 Фрагмент последовательности с исходным 31

Обращает на себя внимание следующий факт: число с чётным порядковый номером в М1 в очередном шаге остаётся в М1, порядковый номер очередного нечётного при этом, увеличивается ровно в 1,5 раза. Процесс продолжается, до тех пор, пока порядковый номер остаётся чётным. В следующем шаге чётный порядковый номер сменяется на нечётный, а затем нечётный при умножении на 1,5 становится дробным. А дробным порядковый номер очередного «нечётного» быть не может, поэтому «нечётное» переходит в другое множество, то, в котором его порядковый номер - натуральное число.
Рассмотрим механизм перехода от одного «нечётного» к другому «нечётному» в М1 подробнее.
В результате действия алгоритма «нечётное», принадлежащее множеству М1 в этой последовательности увеличивается приблизительно в 1,5 раза, в соответствии с полной формулой алгоритма (34) :

$$\frac{3\cdot 31+1}{2} = 47 \quad \Rightarrow \quad \frac{47}{31} \approx 1{,}516129 \qquad (34)$$

С увеличением значений коэффициент перехода от одного «нечётного» к другому «нечётному» в своём пределе приближается к 1,5, но никогда не будет ему равным, из-за наличия +1 в формуле алгоритма, а порядковый номер очередного «нечётного» увеличивается ровно в 1,5 раза, независимо от значения «нечётного» (35):

$$\frac{\{12\}}{\{8\}} = 1{,}5\,; \quad \frac{\{18\}}{\{12\}} = 1{,}5\,; \quad \frac{\{27\}}{\{18\}} = 1{,}5\,; \quad \frac{\{39\}}{\{26\}} = 1{,}5\,; \quad \frac{\{66\}}{\{44\}} = 1{,}5\,; \quad \frac{\{99\}}{\{66\}} = 1{,}5\,; \qquad (35)$$

Почему так происходит, становится ясно, после того как применим алгоритм непосредственно к (29) - формуле числа, принадлежащего М1:

$$\frac{3\cdot(4a-1)+1}{2} = \frac{12a-2}{2} = 6a-1 \qquad (36)$$

Формулой «6а-1» описываются числа нового закономерного ряда: 5, 11, 17, 23 … и т.д., теперь уже с периодом равным 6, содержащего в своём составе нечётные разных множеств, в том числе и множества М1.
Очередное нечётное, описываемое формулой «6а-1» будет принадлежать М1 при условии равенства:

$$6\,\{a_i\}\,-1 = 4\,\{a_{i+1}\}\,-1 \qquad (37)$$

Здесь; $\{a_i\}$ - порядковый номер исходного нечётного в М1;
$\{a_{i+1}\}$ - порядковый номер очередного нечётного в М1;

Из (37) следует (38):

$$6\,\{a_i\} = 4\,\{a_{i+1}\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\{a_{i+1}\}}{\{a_i\}} = \frac{6}{4} = 1{,}5 \qquad (38)$$

Натуральный порядковый номер при умножении на 1,5 остаётся натуральным пока номер чётный. Число с чётным порядковым номером в М1 очередным ходом всегда остаётся в М1.

Поэтому сценарий перехода «нечётного» с чётным порядковым номером к очередному с чётным порядковым номером в М1 - первый кандидат среди сценариев непрерывного роста. Вопрос, который возникает в связи с гипотезой Коллатца, будет ли этот сценарий бесконечным, хотя бы для одного из натуральных?

Продолжим Рис.11. Выполним очередной шаг алгоритма. Будем отслеживать сценарий непрерывного роста в последовательности только с чётными порядковыми номерами.

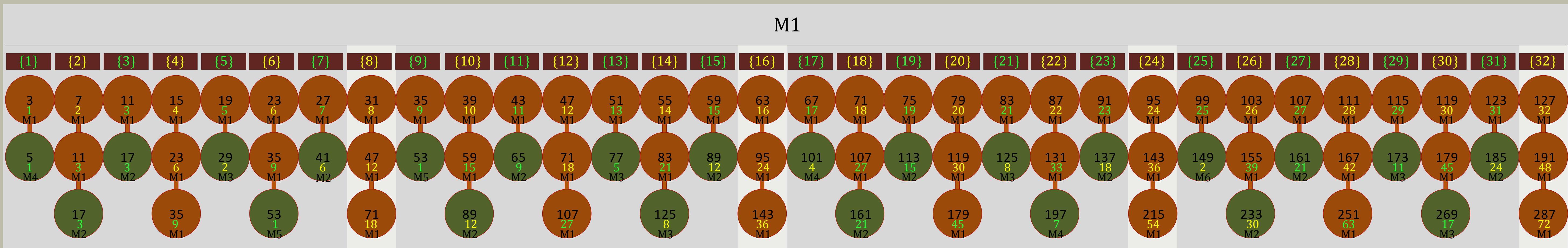


Рис.13

Количество чётных последовательностей только с чётными порядковыми номерами входящих в них чисел, сократилось вдвое: было восемь: {4}, {8}, {12}, {16}, {20}, {24}, {28}, {32} стало четыре: {8}, {16}, {24}, {32}.

Выполним очередной шаг алгоритма.

Рис.14

Количество чётных последовательностей только с чётными номерами входящих в них чисел опять сократилось вдвое, было четыре: {8} , {16}, {24}, {32}, стало две: {16}, {32}. Выполним очередной шаг алгоритма.

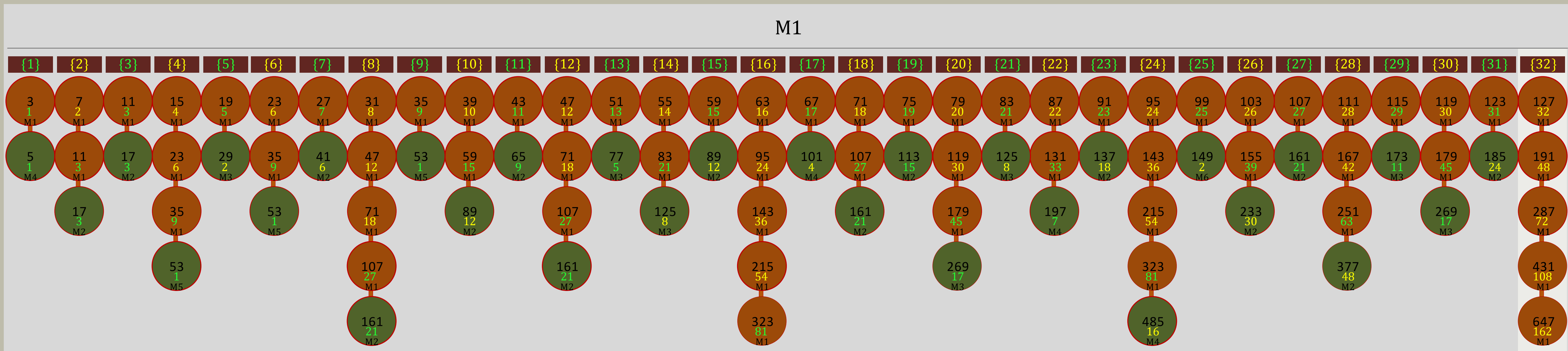


Рис.15

Количество последовательностей только с чётными номерами входящих в неё чисел опять сократилось вдвое, было две: {16}, {32}, осталась одна : {32}. Следующим шагом и эта перейдёт в позицию числа с нечётным порядковым номером, а затем в одно из множеств [M2, M3, M4…}. Но, далее в натуральном ряду, ещё остаются {64}, {128}, … и т.д., … {2^n}

В бесконечном натуральном ряде существует бесконечное количество таких последовательностей, отстоящих друг от друга на дистанции 2^n, до тех пор пока очередным “n”- ходом они не перейдут в число с нечётным порядковым номером, а затем “n+1”- ходом в одно из множеств [M2, M3, M4…}. На этом сценарий непрерывного роста для конкретной последовательности прерывается. Таким образом, можно утверждать: любая последовательность, состоящая только из чисел с чётными порядковыми номерами в M1, отстоящими друг от друга на дистанции 2^n - **конечна**.

Можно арифметически показать, что чётный порядковый номер 2^n последовательно умножаясь на коэффициент 1,5 всегда завершается “n”- ходом нечётным.

Пусть 2^n=X - чётное целое число, тогда

Шаг 1:

$$1{,}5X=X+0{,}5X=X+\frac{1}{2}X \tag{39}$$

Шаг 2:

$$1{,}5(X+\frac{1}{2}X)=(X+\frac{1}{2}X)+0{,}5(X+\frac{1}{2}X)=2X+\frac{1}{2^2}X \tag{40}$$

Шаг 3:

$$1{,}5(2X+\frac{1}{2^2}X)=(2X+\frac{1}{2^2}X)+0{,}5(2X+\frac{1}{2^2}X)=3X+\frac{3}{2^3}X \tag{41}$$

Шаг 4:

$$1{,}5(3X+\frac{3}{2^3}X)=(3X+\frac{3}{2^3}X)+0{,}5(3X+\frac{3}{2^3}X)=5X+\frac{1}{2^4}X \tag{42}$$

Шаг 5:

$$1{,}5(5X+\frac{1}{2^4}X)=(5X+\frac{1}{2^4}X)+0{,}5(5X+\frac{1}{2^4}X)=7X+\frac{19}{2^5}X \tag{43}$$

И так далее …

Шаг n:

$$1{,}5\cdot X_{n-1}=K\cdot X+\frac{\text{нечётное}}{2^n}\cdot X \tag{44}$$

Здесь K=1,2,3 … натуральный коэффициент.

После замены $X=2^n$ получим (41)

$$1{,}5\cdot X_{n-1}=K\cdot 2^n+\frac{\text{нечётное}}{\cancel{2^n}}\cdot\cancel{2^n}=\text{чётное}+\text{нечётное}=\text{нечётное} \tag{45}$$

Что и требовалось доказать.

Сценарий движения числа с чётным порядковым номером в М1, всегда один: сначала закономерное движение к нечётному, а затем, переход в любое другое множество.

На этом сценарий непрерывного роста прерывается.

2.4 РЯДЫ ГРУПП МНОЖЕСТВА М1 НЕЧЁТНЫХ КОЛЛАТЦА

Последовательности чисел, непрерывно следующих в одном и том же множестве М1 объединяются в отдельные ряды групп: одиночных, двух, трёх, четырёх и т.д. Коэффициент 1,5 между очередным и предыдущим порядковым номером в М1 является простым и удобным инструментом идентификации такой последовательности нечётных в одном из рядов групп.

Группа нечётных М1 - последовательность нечётных М1, в которой порядковый номер очередного больше предыдущего ровно в 1,5.

Количество членов в группе нечётных может быть любым, в том числе состоящей из одного, с нечётным порядковым номером. Если группа состоит из нескольких нечётных, то её возглавляет нечётное-**лидер** с чётным порядковым номером, а замыкает группу **замыкающее** с нечётным порядковым номером. В свою очередь каждый лидер окажется простым членом в очередной, старшей группе. Лидера и членов группы будем различать по цветовым признакам, как на Рис 16.

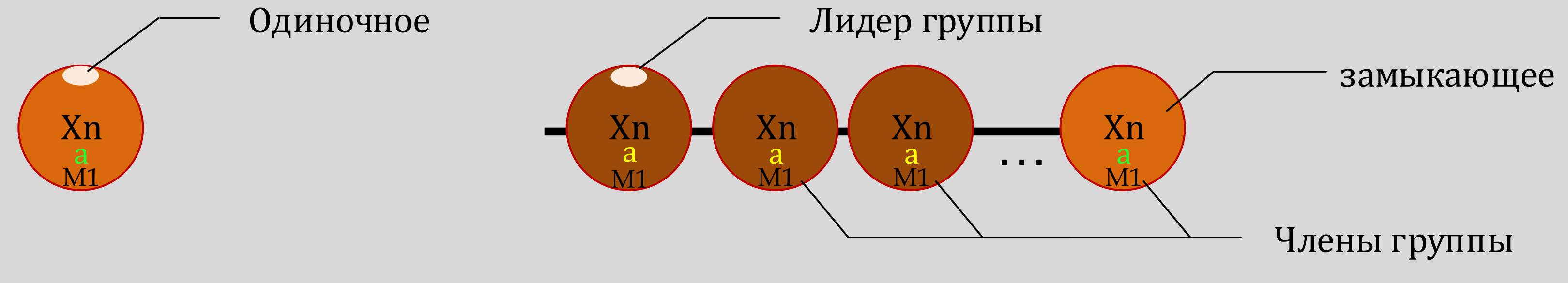


Рис.16 Отличительные цветовые признаки лидера и членов группы из множества нечётных М1

Из Рис.15 выделим множество последовательностей принадлежащих М1

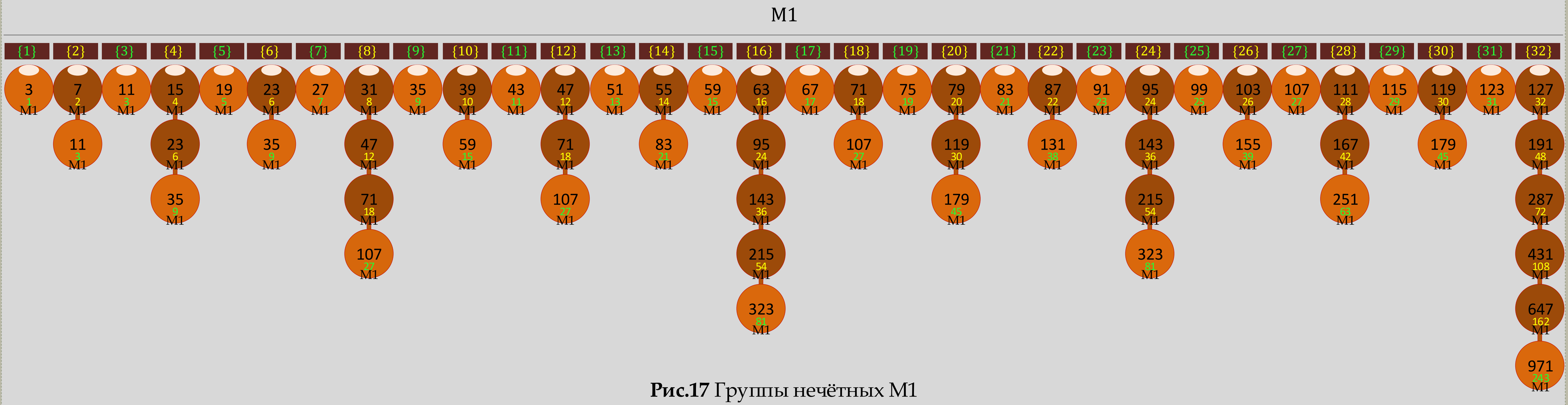


Рис.17 Группы нечётных М1

Разделим последовательности, представленные Рис.17, на группы по признаку количества находящихся в них членов:

Далее будем изображать «нечётное», принадлежащее множеству М1, как на **Рис.18**:

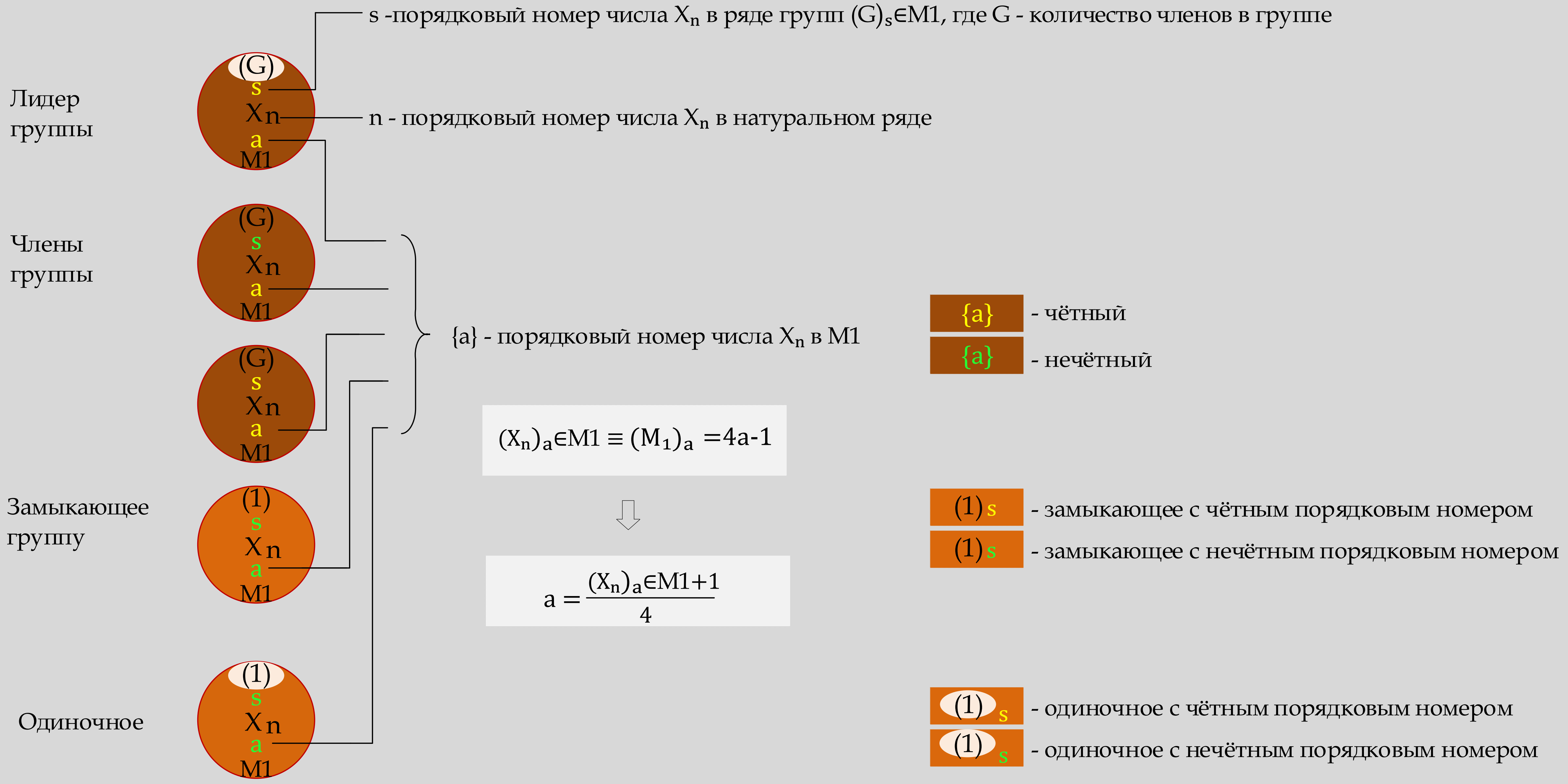


Рис.18 Анатомия нечётного числа, принадлежащего множеству М1

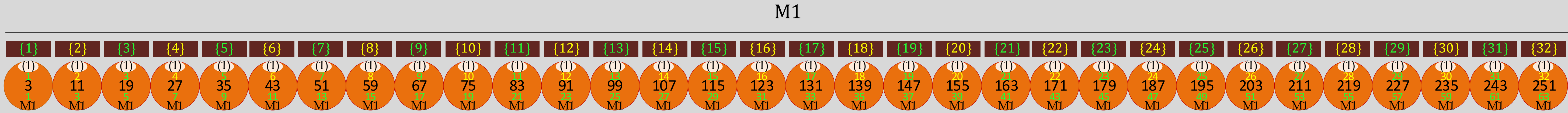


Рис.19 Множество одиночных $(1)_s$∈М1

Очередное «нечётное» в ряде $(1)_s$∈М1 отличается от предыдущего на одно то же значение 8, и оно описывается формулой (46):

$$(1)_s \in M1 = 8s-5 \tag{46}$$

где s = 1, 2 , 3 … - порядковый номер «нечётного» в ряде $(1)_s$∈М1.

Например числом с порядковым номером s=14 из ряда $(1)_s$∈М1 является: $(1)_{14}\in M1 = 8 \cdot 14 - 5 = 107$.

Если требуется определить какое положение «s» будет занимать число из натурального ряда X_{107} =107 в ряде $(1)_s$∈М1: s=(107+5)/8 =14

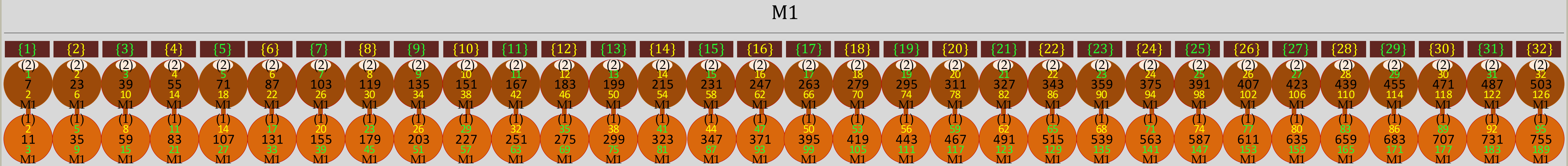


Рис.20 Множество двух $(2)_s$∈М1

Очередное число-лидер ряда $(2)_s$∈М1 отличается от предыдущего на одно то же значение 16, и оно описывается формулой (47):

$$(2)_s \in M1 = 16s-9 \tag{47}$$

Рис.21 Множество трёх $(3)_s$∈М1

Очередное число-лидер ряда $(3)_s$∈M1 отличается от предыдущего на одно то же значение 32, и оно описывается формулой (48):

$$(3)_s \in M1 = 32s-17 \quad (48)$$

И так далее. Каждый следующий ряд, содержащий большее количество членов в группе описывается формулой общего вида (49):

$$(G)_s \in M1 = 2^{G+2}s - (2^{G+1}+1) \quad (49)$$

Где G-номер ряда, с количеством членов в группе равным G.
s - порядковый номер числа в ряде (G).
В таблице 3 приведены формулы лидеров первых десяти рядов групп нечётных принадлежащих множеству M1

Порядковый номер: s	$(G)_s \in M1 = 2^{G+2}s - (2^{G+1}+1)$	Начальное $(G)_1$
1	$(1)_s = 8s-5$	3
2	$(2)_s = 16s-9$	7
3	$(3)_s = 32s-17$	15
4	$(4)_s = 64s-33$	31
5	$(5)_s = 128s-65$	63
6	$(6)_s = 256s-129$	127
7	$(7)_s = 512s-257$	255
8	$(8)_s = 1024s-513$	511
9	$(9)_s = 2048s-1025$	1023
10	$(10)_s = 4096s-2049$	2047
И т.д.	. . .	И т.д.

Таблица 3. Таблица формул рядов лидеров групп нечётных принадлежащих множеству M1

Таким образом, каждое «нечётное», принадлежащее M1 анатомически проявляет себя, как минимум, в трёх измерениях. В каждом из этих измерений число имеет свой порядковый номер **n**, **a**, или **s**. Совокупность всех признаков числа (порядковый номер числа, чётность номера) определяет его положение в структуре множества нечётных M1, делает поведение числа в алгоритме Коллатца понятным и предсказуемым.
Очередным этапом углубления нашего представления о структуре натурального ряда в гипотезе Коллатца будет зеркальная концепция алгоритма Коллатца.

2.5 ЗЕРКАЛЬНАЯ КОНЦЕПЦИЯ АЛГОРИТМА КОЛЛАТЦА

Из Таблицы 3 и Таблицы 2 выделим начальные значения и периоды закономерных рядов групп (1)s, (2)s, (3)s, … (G)s и рядов множеств М2, М3, М4, … Мм, соответственно.
Результаты сведены в таблицу 4 (Начальные значения и периоды закономерных рядов множеств Коллатца)

	$(G)_s$	Начальное $(G)_1$	период 2^{G+2}	Вектор
М1	$(1)_s$	3	8	↗
	$(2)_s$	7	16	↗
	$(3)_s$	15	32	↗
	$(4)_s$	31	64	↗
	$(5)_s$	63	128	↗
	$(6)_s$	127	256	↗
	$(7)_s$	255	512	↗
	$(8)_s$	511	1024	↗
	$(9)_s$	1023	2048	↗
	И т.д.	...	...	↗

≡

	Mm	Начальное $(M_m)_{a=1}$	период 2^{m+1}	Вектор
М2, М3, М4, … Мм	М2	1	8	↘
	М3	13	16	↘
	М4	5	32	↘
	М5	53	64	↘
	М6	21	128	↘
	М7	213	256	↘
	М8	85	512	↘
	М9	853	1024	↘
	М10	341	2048	↘
	И т.д.	...	...	↘

Таблица 4. Начальные значения и периоды закономерных рядов множеств Коллатца

Таблица 4 даёт наглядное представление того, как одно множество соотносится с другим. Каждому закономерному ряду $(G)_s$ находим зеркальное соответствие, в виде другого ряда, с таким же периодом, в одном из множеств Mm. Зеркальные по направлению закономерные ряды имеют одинаковые периоды между членами ряда, значит количество членов в них в пределах полного натурального ряда одинаково. Каждому члену одного ряда всегда найдём зеркальное соответствие другого. Начальные значения закономерных рядов множеств М2, М3, М4, … Мм есть ни что иное, как успешные решения алгоритма, интересный факт, но в зеркальной концепции нам важнее будет увидеть ещё и другие механизмы, закономерные и определяющие направление движения числа по алгоритму Коллатца.

Составим последовательности начальных значений этих закономерных рядов (Рис.22)

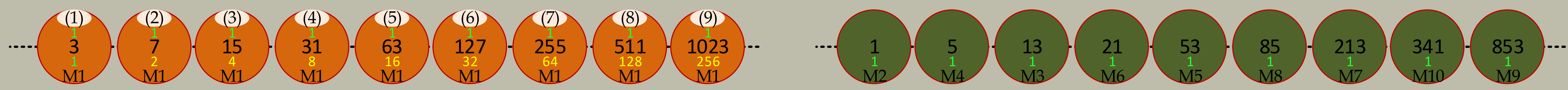


Рис.22 Последовательности начальных (первых по порядку) номеров нечётных, принадлежащих рядам групп (1)s, (2)s, (3)s, … (G)S ∈M1 и множествам M2, M3, M4, … Mм

Начальные этих закономерных рядов расположим в порядке их следования в натуральном ряде (Рис.23)

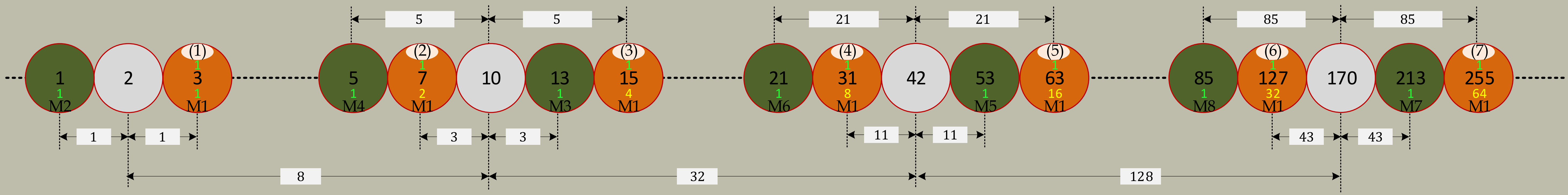


Рис.23. Зеркальный ряд Коллатца 1-го порядка (ряд чисел с 1-м порядковым номером)

Алгоритм Коллатца разделил натуральный ряд на два зеркально симметричных множества закономерных рядов. На оси симметрии находятся чётные числа натурального ряда – успешные решения алгоритма Коллатца. Они образуют закономерный ряд начальных, описываемый формулой (50):

$$Z_u \in N = \frac{2^{2u}-1}{3} \cdot 2 \qquad (50)$$

Где “u” -порядковый номер очередного начального зеркальных рядов.

Из Таблицы 2 и Таблицы 3 выделим следующие после начальных значения закономерных рядов групп (1)s, (2)s, (3)s, … (G)s и рядов множеств M2, M3, M4, … Mм, соответственно. Результаты 9 порядковых номеров сведены в Таблицу 5 (Начальные значения и периоды закономерных рядов множеств Коллатца)

$(G)_s$	период 2^{G+2}	$(G)_1$	$(G)_2$	$(G)_3$	$(G)_4$	$(G)_5$	$(G)_6$	$(G)_7$	$(G)_8$	$(G)_9$
$(1)_s$	8	3	11	19	27	35	43	51	59	67
$(2)_s$	16	7	23	39	55	71	87	103	119	135
$(3)_s$	32	15	47	79	111	143	175	207	239	271
$(4)_s$	64	31	95	159	223	287	351	415	479	543
$(5)_s$	128	63	191	319	447	575	703	831	959	1087
$(6)_s$	256	127	383	639	895	1151	1407	1663	1919	2175
$(7)_s$	512	255	767	1279	1791	2303	2815	3327	3839	4351
$(8)_s$	1024	511	1535	2559	3583	4607	5631	6655	7679	8703
$(9)_s$	2048	1023	3071	5119	7167	9215	11263	13311	15359	17407
И т.д.	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

≡

Mm	период 2^{m+1}	$(M_m)_1$	$(M_m)_2$	$(M_m)_3$	$(M_m)_4$	$(M_m)_5$	$(M_m)_6$	$(M_m)_7$	$(M_m)_8$	$(M_m)_9$
M2	8	1	9	17	25	33	41	49	57	65
M3	16	13	29	45	61	77	93	109	125	141
M4	32	5	37	69	101	133	165	197	229	261
M5	64	53	117	181	245	309	373	437	501	565
M6	128	21	149	277	405	533	661	789	917	1045
M7	256	213	469	725	981	1237	1493	1749	2005	2261
M8	512	85	597	1109	1621	2133	2645	3157	3669	4181
M9	1024	853	1877	2901	3925	4949	5973	6997	8021	9045
M10	2048	341	2 389	4437	6485	8533	10581	12629	14677	16725
И т.д.	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Таблица 5. Начальные значения и периоды закономерных рядов множеств Коллатца

Составим последовательности значений этих закономерных рядов, следующих, после начальных, (Рис.24)

Рис.24. Последовательности вторых по порядку номеров нечётных, принадлежащих рядам групп (1)s, (2)s, (3)s, … (G)s∈M1 и множествам M2, M3, M4, … Mм

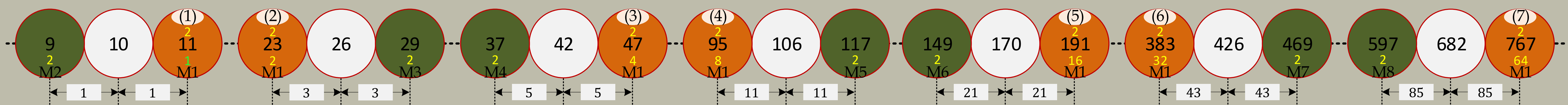


Рис.25. Зеркальный ряд Коллатца 2 порядка (ряд чисел со 2-м порядковым номером)

Рис.26. Последовательности третьих по порядку номеров нечётных, принадлежащих рядам групп (1)s, (2)s, (3)s, … (G)s∈M1 и множествам M2, M3, M4, … Mm

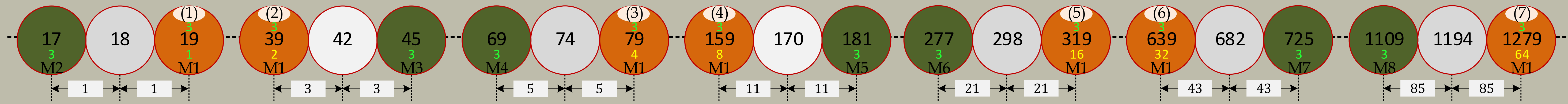


Рис.27. Зеркальный ряд Коллатца 3 порядка (ряд чисел с 3-м порядковым номером)

Рис.28. Последовательности чевёртых по порядку номеров нечётных, принадлежащих рядам групп (1)s, (2)s, (3)s, … (G)S ∈M1 и множествам M2, M3, M4, … Mm

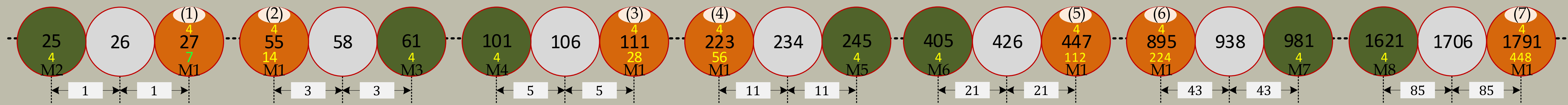


Рис.29. Зеркальный ряд Коллатца 4 порядка (ряд чисел с 4-м порядковым номером)

Продолжая таким же образом для других по порядку номеров получим и остальные значения чётных, находящихся на зеркальной оси (Рис.30):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
	2	10	18	26	34	42	50	58	66	74	82	90	98	106	114	122	130	138	146	154	162	170	178	186	194	202	210	218	226	234	242	250
	u=1	u=2				u=3																u=4										

Рис.30. Первые 32 числа полного зеркального ряда алгоритма Коллатца

Алгоритм Коллатца разделил натуральный ряд на два зеркально симметричных множества закономерных рядов. На оси симметрии, которую мы назвали полным зеркальным рядом алгоритма Коллатца находятся чётные натурального ряда следующие друг за другом с периодом равным восьми. Они образуют закономерный ряд, описываемый формулой (51):

$$Z_i \in N = 8i - 6 \tag{51}$$

Где “i” -порядковый номер очередного зеркального.
Половина нечётных натурального ряда принадлежит первому множеству, а вторая половина нечётных является суммой всех нечётных остальных множеств (52):

$$M_1 = M_2 + M_3 + M_4 \ldots. + M_m \quad \text{или} \quad \left((1)_s + (2)_s + (3)_s \ldots + (G)_s\right) \in M_1 = M_2 + M_3 + M_4 \ldots. + M_m \tag{52}$$

Т.е. по количественному составу сценариев роста (ВПЕРЁД) и убывания (НАЗАД), не существует доминирования одного сценария над другим. Продвижение ВПЕРЁД, никогда не бывает тождественным продвижению НАЗАД по совершаемой работе и генерированию переходного коэффициента от исходного к очередному. Причина в том, что формула алгоритма (4) по своей природе асимметрична.
В сценарии зеркального ВПЕРЁД количество шагов определяется количеством раз применения полной формулы (3X+1)/2: для $(1)_s$ -1 раз, для $(2)_s$ -2 раза, и т.д., а в сценарии зеркального НАЗАД оно определяется количеством делений на два чётного, полученного в результате вычисления числителя этой формулы (3X+1).
Получается, что сценарий убывания в зеркальной паре имеет на один шаг больше.
Рассмотрим произвольную зеркальную пару с нечётным порядковым номером, например s=99, для удобства вычислений и наглядности пусть она имеет небольшое количество ходов, например из ряда двух, принадлежащего множеству М1: по формуле для ряда двух из Таблицы 3 находим значение числа с порядковым номером s=99

$$(2)_s \in M1 = 16s - 9 \quad \Rightarrow \quad (2)_{99} \in M1 = 16 \cdot 99 - 9 = 1575 \tag{53}$$

В соответствии с анатомией нечётного в М1 (Рис.18), учитывая тождественность $X_n \in M1 \equiv (M_1)_a$, порядковый номер числа 1575 в М1 вычислим по формуле множества М1 из Таблицы 2:

$$(M_1)_a = 4a - 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(M_1)_a + 1}{4} \quad \text{или} \quad a = \frac{(X_n)_a \in M_1 + 1}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1575 + 1}{4} = 394 \tag{54}$$

Зеркальное для числа из ряда двух $(2)_{99} \in M1 = 1575$ в соответствии с Таблицей 5 находится в М3.
Значение $(X_n)_a \in M3 \equiv (M_3)_a$ для a=99 найдем по соответствующей формуле из Таблицы 2.

$$(X_n)_a \in M_3 \equiv (M_3)_a = 16a - 3 \quad \Rightarrow \quad (M_3)_{99} = 16 \cdot 99 - 3 = 1581 \tag{55}$$

Чётное, для зеркальной пары является её средним арифметическим, т.е. 1578, таким образом имеем все необходимые атрибуты зеркальной пары с нечётным порядковым номером s=99, Рис.31:

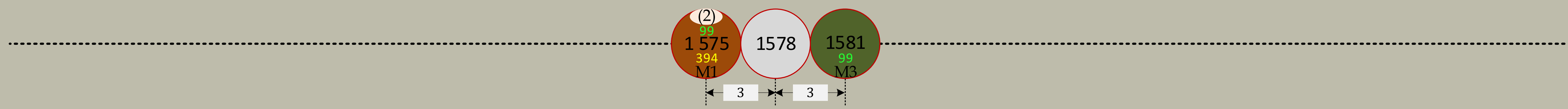


Рис.31. Зеркальная пара нечётных с нечётным порядковым номером 99 из ряда двух и зеркального ему множества M3

Выполним сравнительный анализ зеркальной пары нечётных 1575 и 1581 по совершаемой алгоритмом работе (Рис.32):

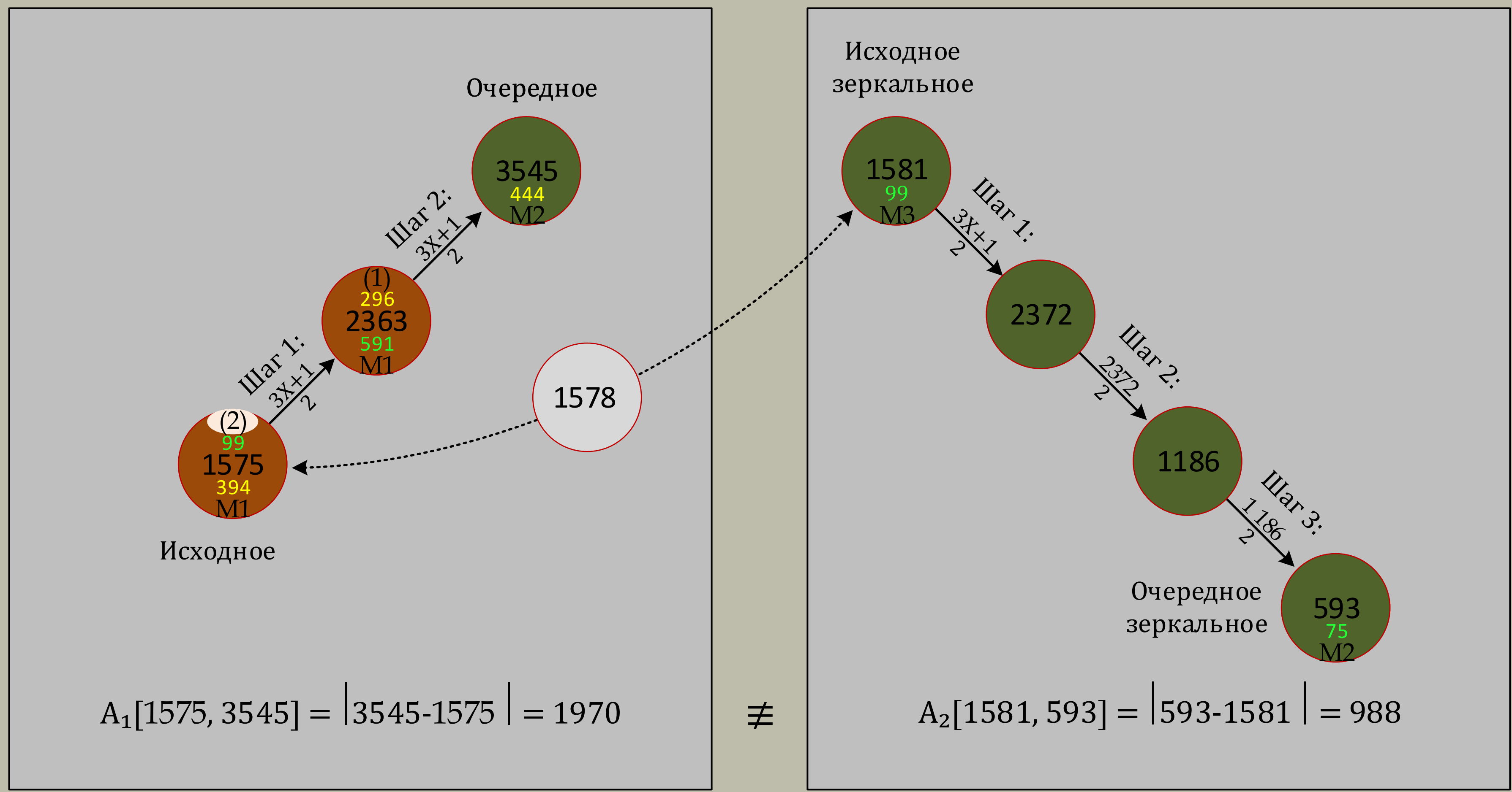


Рис.32. Сравнительный анализ зеркальной пары нечётных 1575 и 1581 по совершаемой работе.

Совершаемая алгоритмом работа зависит от значения исходного. Чем больше значение исходного, тем больше работа, при прочих равных условиях, для одного шага алгоритма. Неудивительно, что приведённый пример сравнения (Рис.32) не совсем корректен. Сравнивать работу алгоритма в зеркальных сценариях ВПЕРЁД и НАЗАД можно, только когда один сценарий является продолжение другого, когда два фрагмента «сшиваются» в одну последовательность.

Зеркальный шаг ВПЕРЁД всегда завершается переходом в одно из множеств M2, M3, M4 … M_m, принадлежащие сценариям НАЗАД. В примере Рис.32 найдём продолжение сценария ВПЕРЁД. Очередное для исходного 1575 это 3545∈M2, значит 3545∈M2 является исходным для сценария НАЗАД. Необходимо для исходного 3545 выполнить такое же количество шагов назад, как и для зеркального с исходным 1581 (Рис.33):

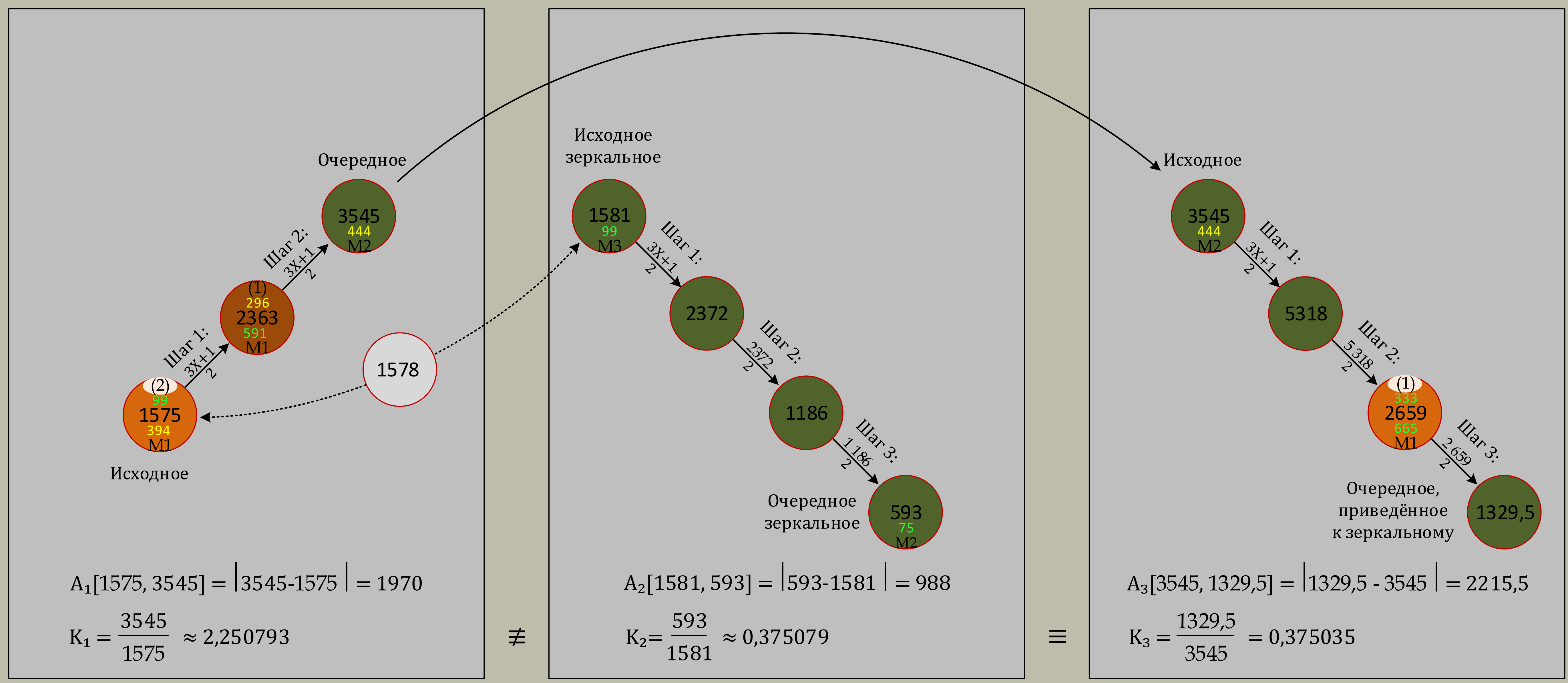


Рис.33. Сравнительный анализ зеркальной пары нечётных 1575 и 1581 по совершаемой работе и генерированию переходного коэффициента от исходного к очередному.

Получили приведённое к зеркальному число 1329,5 . Сценарий НАЗАД приведённый к зеркальному по количеству одинаковых шагов переместил очередное 3545 ниже исходного 1575. Это также видно из сравнения выполненных работ: $A_3[3545, 1329{,}5]=2215{,}5 > A_1[1575, 3545]= 1970$. Если бы составляющие зеркальных пар «сшивались», были продолжением одно другого, процесс сворачивания последовательности в единицу для любого натурального был бы очевидным и быстрым. Но мы имеем ситуацию, в которой составляющие зеркальных пар изначально разделены. Продолжением зеркального ВПЕРЁД является зеркальный НАЗАД, как правило, от другой зеркальной пары. Работа совершаемая сценарием НАЗАД от другой зеркальной пары может оказаться как меньше, так и больше той, которая, должна быть. Но, может оказаться также ей тождественная. Такой случай далее мы также рассмотрим.
Найдём значение общего переходного коэффициента зеркальной пары

$$K_{1-2} = K_1 \cdot K_2 \approx 2{,}250793 \cdot 0{,}375079 \approx 0{,}844225 \qquad (56)$$

Найдём значение общего переходного коэффициента пары тождественной зеркальной

$$K_{1-3} = K_1 \cdot K_3 \approx 2{,}250793 \cdot 0{,}375035 \approx 0{,}844126 \quad \text{или} \quad K_{1-3} = \frac{1329{,}5}{1575} \approx 0{,}844126 \tag{57}$$

Сценарий НАЗАД для исходного 3545 тождественен сценарию НАЗАД для исходного 1581, потому что переходные коэффициенты K_3 и K_2 тождественны. Незначительное расхождение в третьем знаке после запятой обусловлено наличием +1 в алгоритме, на числах, больших чем в приведённом примере это расхождение будет становиться в итоге пренебрежительно малым, и на общий результат влиять не будет. Пренебрегая этим незначительным расхождением можно утверждать, что K_{1-2} и K_{1-3} тождественны.

$$K_{1-2} \equiv K_{1-3} \tag{58}$$

Для подтверждения сказанного приводим ещё один сравнительный анализ, для зеркальной пары теперь уже с чётным порядковым номером 10000, нечётных $(2)_{10000}$ и $(M_3)_{10000}$ (Рис.34). Следуя алгоритмом выявления атрибутов зеркальной пары, изложенным формулами (31), (32), (33) определим их:

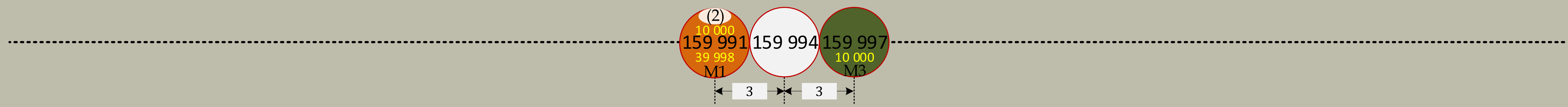


Рис.34. Зеркальная пара нечётных с чётным порядковым номером 10 000 из ряда двух и зеркального ему множества M3

Выполним сравнительный анализ зеркальной пары нечётных из ряда чисел с чётным 10 000-м порядковым номером по совершаемой алгоритмом работе и генерированию переходного коэффициента от исходного к очередному. (Рис.35):

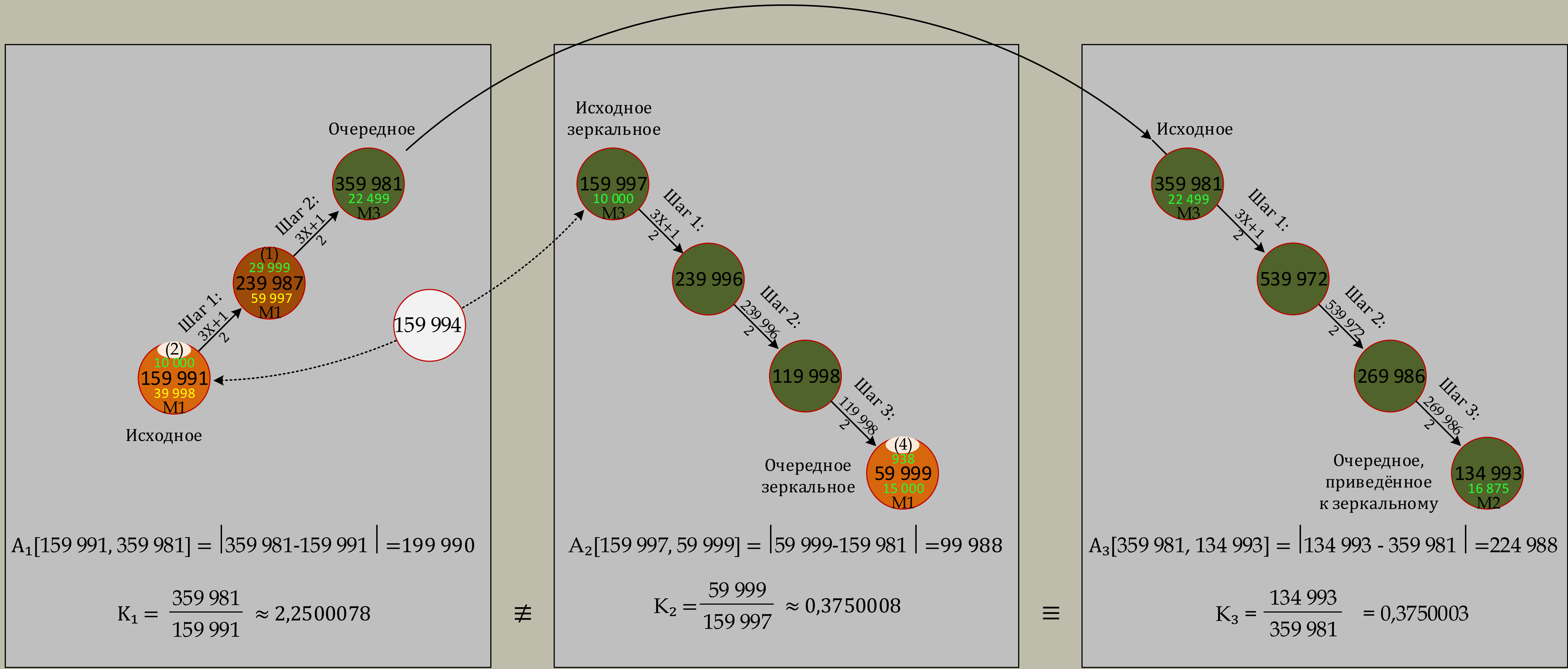


Рис.35. Сравнительный анализ зеркальной пары нечётных 159 975 и 159 981 по совершаемой работе и генерированию переходного коэффициента от исходного к очередному.

Иногда, как в нашем примере на Рис.35 очередное, приведённое к зеркальному может совпадать с очередным зеркальным по количеству шагов, хотя и является составляющей от другой зеркальной пары. Найдём значение общего переходного коэффициента зеркальной пары

$$К_{1-2} = К_1 \cdot К_2 \approx 2{,}2500078 \cdot 0{,}3750007 \approx 0{,}8437545 \qquad (59)$$

Найдём значение общего переходного коэффициента пары тождественной зеркальной

$$К_{1-3} = К_1 \cdot К_3 \approx 2{,}2500078 \cdot 0{,}3750003 \approx 0{,}8437537 \quad \text{или} \quad К_{1-3} = \frac{134\,979{,}5}{159\,991} \approx 0{,}8437537 \qquad (60)$$

Значение общего переходного коэффициента любого фрагмента последовательности меньшее единицы всегда указывает на переход очередного ниже исходного.
Найдём значение общего переходного коэффициента зеркальной пары для других рядов.
Возьмём из каждого закономерного ряда групп (1)s, (2)s, (3)s, … (G)s и множества M2, M3, M4, … Мм зеркальную пару, с произвольным порядковым номером, например s=10, a=10 и применим к нему алгоритм (4). Результаты сведены в Таблицу 6

Сценарий ВПЕРЁД				Сценарий НАЗАД				Переходный коэффициент
Ряд $(G)_s \in M_1$	Исходное	Очередное $\in M_m$	K1	Ряд $(M_m)_{10}$	Исходное	Очередное	K2	$K=K1 \cdot K2$
$(1)_{10} \in M_1$	75	113	1,506666	$(M_2)_{10}$	73	55	0,753425	1,135
$(2)_{10} \in M_1$	151	341	2,258278	$(M_3)_{10}$	157	59	0,375796	0,848
$(3)_{10} \in M_1$	303	1 025	3,382838	$(M_4)_{10}$	293	55	0,187713	0,635
$(4)_{10} \in M_1$	607	3 077	5,069193	$(M_5)_{10}$	629	59	0,093799	0,475
$(5)_{10} \in M_1$	1215	9 233	7,599177	$(M_6)_{10}$	1173	55	0,046888	0,356
$(6)_{10} \in M_1$	2431	27 701	11,394899	$(M_7)_{10}$	2517	59	0,023441	0,267
$(7)_{10} \in M_1$	4863	83 105	17,089245	$(M_8)_{10}$	4693	55	0,011719	0,300
$(8)_{10} \in M_1$	9727	249 317	25,631438	$(M_9)_{10}$	10069	59	0,005859	0,150
$(9)_{10} \in M_1$	19455	747 953	38,445284	$(M_{10})_{10}$	18773	55	0,002929	0,112
$(10)_{10} \in M_1$	38 911	2 243 861	57,666495	$(M_{11})_{10}$	40 277	59	0,001465	0,084

Таблица 6. Таблица переходных коэффициентов зеркальных пар

Единственная из перечисленных, в Таблице 6, зеркальная пара $(1)_{10} \in M_1$ и $(M_2)_{10}$ имеет переходный коэффициент 1,135>1. У других пар этот коэффициент меньше единицы. В концепции зеркальных пар только чередование ряда одиночных из М1 и множества М2 обеспечивает продвижение вперёд, все остальные переводят число ниже исходного. В каждой зеркальной паре сценарий НАЗАД имеет всегда плюс один шаг. Дополнительный шаг влияет как на совершаемую алгоритмом работу, так и на переходный коэффициент. Сценарий НАЗАД не является продолжением своей зеркальной пары, и потому мы сразу не видим преимущества дополнительного шага. Но факт заключается в том, что сценарий НАЗАД одной пары становится продолжением зеркального другой. Учитывая тождественность переходных коэффициентов зеркального и приведенного к зеркальному, а также учитывая, что от перемены мест сомножителей (переходных коэффициентов) результат их произведения не меняется, очерёдность вхождения составляющих зеркальных пар в последовательность становится уже не важной. На конечный результат влияет общий состав переходных коэффициентов, их количество и качество. В длинных последовательностях начинают действовать статистические законы, позволяющие нам усреднить коэффициенты, и тогда результат будет зависеть от соотношения количества сценариев ВПЕРЁД и НАЗАД накопленных в последовательности.

Из таблицы 6, по признаку количества занимаемых в ней строк, можно даже подумать о количественном доминировании множеств нечётных, переводящих число ниже исходного, но это не так. Несмотря на то, что ряд одиночных $(1)_s \in M1$ в паре с рядом «нечётных» M2 занимает только одну строку, он содержит ровно половину всех нечётных из множества M1. Это хорошо видно на Рис.17, а также отмечено (52). Значит, количество зеркальных пар, обеспечивающих продвижение вперёд равно количеству пар, которые переводят число ниже исходного.

Тем не менее, доминирование сценариев НАЗАД существует. И оно связано не с количеством объектов: «нечётных», множеств, рядов групп и др., над которыми производятся действия, а с количеством реализуемых алгоритмом зеркальных сценариев. Прежде мы считали, что последовательность Коллатца это последовательный переход от одного «нечётного» к другому «нечётному». Но теперь, с появлением концепции зеркальных пар мы утверждаем, что последовательность Коллатца это последовательность сменяющих друг друга зеркальных сценариев ВПЕРЁД и НАЗАД. Но, зеркальный ВПЕРЁД всегда совершает только один шаг в пределах множества M1, и затем переходит в одно из множеств M2, M3, M4 … Mm. А вот нечётное из множеств M2, M3, M4 … Mm имеет возможность совершать большее количество переходов из одного зеркального НАЗАД в другое НАЗАД, до тех пор, пока не окажется опять в M1, в одном из закономерных рядов групп $(G)_s \in M1$ или не свернётся в единицу, во всех случаях подчиняясь, сформулированному, применительно к гипотезе Коллатца, математическому закону перехода количественных изменений в качественные. В итоге мы имеем повторяющийся глобальный сценарий: с одной стороны один шаг ВПЕРЁД, а с другой не менее одного НАЗАД. Такая асимметричная направленность зеркальных переходов становится причиной доминирования сценариев НАЗАД, причиной общей тенденции алгоритма для любого натурального сворачивать последовательность в единицу.

Зеркальная концепция фундаментальна, она работает в любых последовательностях Коллатца, длинных, коротких, но, результаты её работы лучше выявляются в длинных. Тем не менее, любую последовательность Коллатца можно отобразить в зеркальной концепции. На Рис.36, в качестве примера, представлена последовательность с исходным 27.

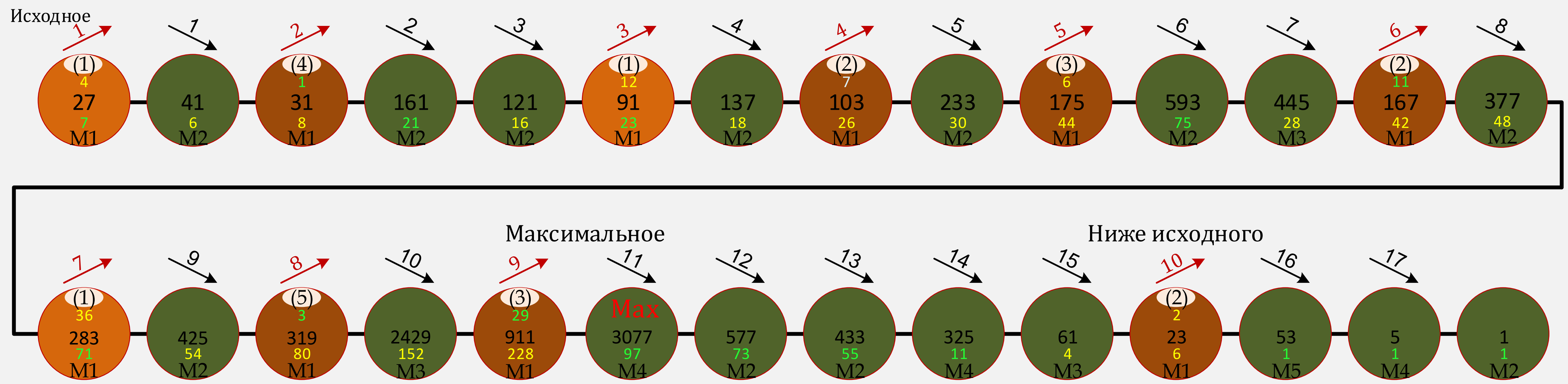


Рис.36. Последовательность зеркальных шагов Коллатца с исходным 27

Здесь, до 9 шага ВПЕРЁД соблюдается условный баланс. Преимущество в 1 или 2 шага, ещё не является определяющим. Доминирование становится очевидным после следующих исполненных подряд 5 шагов НАЗАД. Последовательность шагов 11, 12 … 15 НАЗАД переводит максимальное значение нечётного 3077 ниже исходного. Последовательность с исходным 27 выделяется своей длиной из первой сотни, но всё же это короткая последовательность. На таких коротких последовательностях трудно продемонстрировать более глобальные закономерности, чем простой переход от одного «нечётного» к другому «нечётному» по известной формуле алгоритма. Следующее наблюдение не имеет отношения к доказательству гипотезы Коллатца, однако, два удивительных совпадения для числа 27. Первое совпадение: сумма зеркальных ∑ВПЕРЁД+∑НАЗАД =10+17=27. Второе совпадение: пресловутый код 911 в точке критического перехода.

В ПРИЛОЖЕНИИ 2 представлена ближайшая к 27-й последовательность “18 889 465 931 478 580 854 811”, повторяющая траекторию всех её 27 зеркальных шагов. У каждой последовательности существует бесконечное множество других похожих, но, более длинных последовательностей, которые повторяют их “короткие” траектории.

В ПРИЛОЖЕНИИ 1 (Рис 1 … Рис 10) представлена другая произвольная, но одна из самых длинных уже до 100 000 000, последовательность Коллатца с исходным X_0=63 728 127. Там же, в Приложении 1 на Рис 2 она представлена в виде последовательности зеркальных сценариев ВПЕРЁД–НАЗАД. Демонстрация более длинной последовательности продиктована необходимостью показать также и другие закономерности, которые на коротких последовательностях не проявляются.

Общую тенденцию алгоритма в любой последовательности Коллатца удобно оценивать через количественное зеркальное отношение ∑НАЗАД/∑ВПЕРЁД, оно растёт непрерывно вместе с ростом последовательности. В таблице 7 приведены значения зеркальных количественных отношений в критически важных точках некоторых отдельных последовательностей.

Исходное	∑НАЗАД/∑ВПЕРЁД		
X_0	для X_n=Max	для $X_n<X_0$	для X_n=1
27	11/9 = 1,22	15/9 = 1,66	17/10 = 1,7
18 889 465 931 478 580 854 811	11/9 = 1,22	15/9 = 1,66	110/50 = 2,2
63 728 127	5/5 = 1,0	97/55 = 1,76	150/80 = 1,8
77031	15/10 = 1,5	21/14 = 1,5	54/28 = 1,9

Таблица 7. Таблица зеркальных количественных отношений для отдельных последовательностей.

Любую, какую угодно длинную последовательность, с какой угодно сложной траекторией всегда можно аппроксимировать, последовательно от одной аппроксимации до другой, упростить до траектории, состоящей из последовательности четырёх критически важных точек, таких как в таблице 7: исходное, максимальное, ниже исходного, единица.

В ПРИЛОЖЕНИИ 3 на примере последовательности с исходным X_0=77031 можно отметить следующий факт: количественное отношение ∑НАЗАД/∑ВПЕРЁД в точке “Максимум” 15/10 =1,5 и “Ниже исходного” 21\14 = 1,5 равны. Это значит последовательность продолжает идти к своему максимуму пока не наступит событие “Ниже исходного”. Такую же ситуацию мы будем наблюдать и в концепции успешного решения. В любом случае, количественное отношение ∑НАЗАД/∑ВПЕРЁД растёт непрерывно вместе с ростом последовательности. Тенденция алгоритма накапливать зеркальные шаги НАЗАД склоняет чашу весов всегда в одну сторону, к единице. Этот факт пока ещё не доказывает гипотезу Коллатца, но, становится весомым аргументом в её пользу.

Существование бесконечной последовательности в условиях зеркальной концепции возможно при условии: ∑НАЗАД/∑ВПЕРЁД=1, или ≈ 1. Такая возможность, может быть реализована чередованием «нечётных» M1 и M_m, по сценарию $M1 \Rightarrow M_m \Rightarrow M1$, при условии непрерывности такого чередования. При этом, самым эффективным сценарием, из возможных, следует признать M1⇒M2⇒M1. Прерывание чередования, переход из M2, или любого M_m в любое другое множество кроме первого означает накапливание зеркальных ∑НАЗАД, и как следствие: осуществление общей тенденции алгоритма для любого натурального при отношении ∑НАЗАД/∑ВПЕРЁД>1 сворачивать последовательность в единицу. В свою очередь, переход из $(1)_s \in M1$ в любое другое множество кроме M2, всегда шаг НАЗАД, и как следствие: означает очередной шаг в реализации концепции успешного решения. Выводы, которые мы можем получить из чередования M1⇒M2⇒M1 справедливы и для остальных $M1 \Rightarrow M_m \Rightarrow M1$.

Доказательство утверждения, что в алгоритме Коллатца не существует последовательностей, уходящих в бесконечность теперь необходимо и достаточно сводится к доказательству **неизбежного прерывания чередования M1 ⇒ M2 ⇒ M1 для любых натуральных.**

2.6 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕИЗБЕЖНОГО ПРЕРЫВАНИЯ СЦЕНАРИЯ РОСТА M1 ⇒ M2 ⇒ M1 ДЛЯ ЛЮБЫХ НАТУРАЛЬНЫХ.

Мы уже выяснили, что неуклонное продвижение «нечётного» с чётным порядковым номером ВПЕРЁД в пределах одного множества M1 ограничено. Оно завершается числом с нечётным порядковым номером и следующим шагом переходит в одно из множеств M2, M3, M4, … M_m. Сценарий чередование нечётных M1 и M2 имеет необходимые качества, чтобы создать условия непрерывного роста. Сценарий, в котором число покидая множество M1 попадает в M2, а следующим шагом возвращается в M1, в любой из рядов групп нечётных M1.

Любые другие чередования с привлечением множеств M3, M4, M5 … M_m малопригодны для выявления сценариев неуклонного продвижения вперёд, потому что это, как правило, всегда шаг назад, всегда прерывание продвижения вперёд.

Существование рядов групп «нечётных» делает множество M1 качественно неоднородным. Но, все без исключения группы завершаются в позиции ряда одиночных $(1)_s$∈M1. Поэтому и переход из M1 в любое другое множество совершается всегда из ряда одиночных (Рис.36).

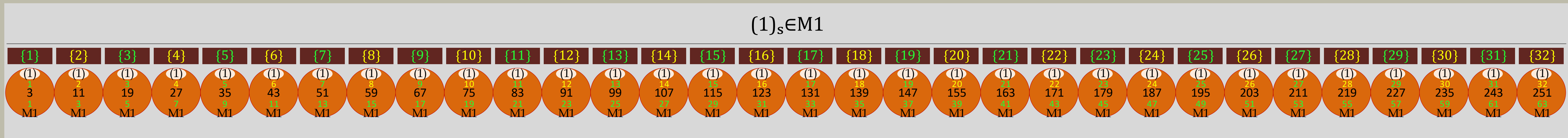


Рис.37

Из ряда одиночных групп нечётных M1 сделаем первый шаг по алгоритму Коллатца к очередному «нечётному» (Рис.37):

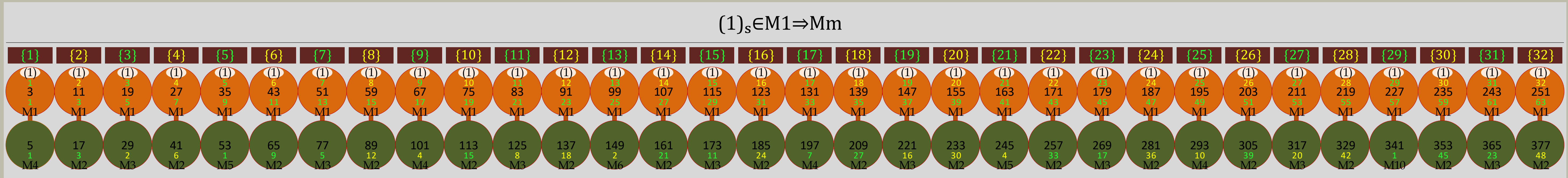


Рис.38

Все числа ряда одиночных с чётным порядковым номером $(1)_2$,$(1)_4$, $(1)_6$ ... перешли в M2, а числа с нечётным порядковым номером $(1)_1$, $(1)_3$, $(1)_5$ ... перешли в одно из множеств M3, M4, M5 … M_m. Между чётностью порядкового номера числа и сценариями ВПЕРЁД–НАЗАД существует прямая корреляция, своя для каждого множества. Чётность порядкового номера становится для нас признаком того или иного сценария очередного шага. Среди «нечётных», которые оказались во множествах M2, M3, M4...и т.д., также соблюдается чередование чётных - нечётных.

Сделаем выборку чисел ряда одиночных с чётным порядковым номером $(1)_2$,$(1)_4$, $(1)_6$ ... $(1)_{2n}$, всех тех, которые всегда переходят в M2.

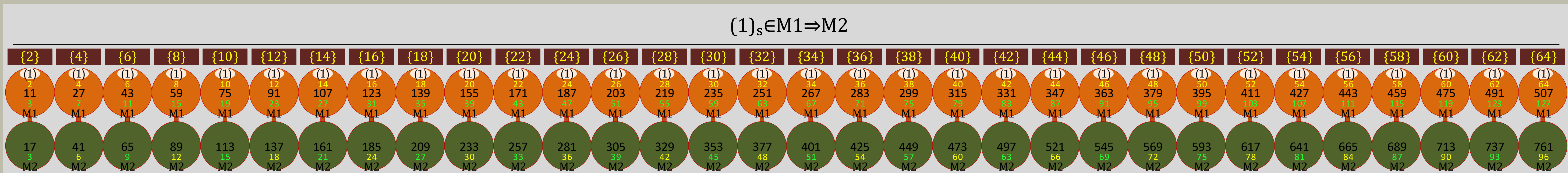


Рис.39

Выполним очередной шаг алгоритма

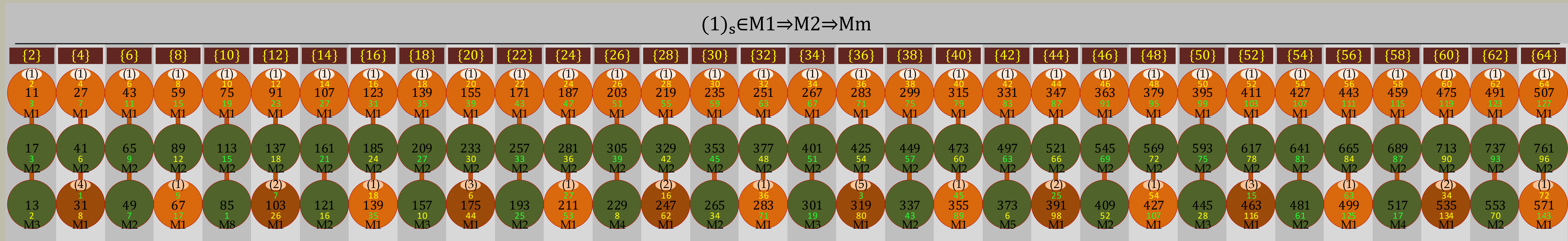


Рис.40

«Нечётные» исходного ряда, имеющие порядковый номер кратный 2 в ряде одиночных, $(1)_{2=2\cdot1}$, $(1)_{6=2\cdot3}$, $(1)_{10=2\cdot5}$ … $(1)_{2\cdot(2n-1)}$, при делении которого на 2 оно становится сразу нечётным, всегда переходят в позицию нечётного порядкового номера в M2, которое в очередном шаге, переходит в одно из множеств M2, M3, M4 … Mm, и никогда в M1, таким образом, осуществляя стратегию накопления зеркальных НАЗАД. Значит «нечётные» $(1)_{2\cdot(2n-1)}$ являются источниками накопление зеркальных НАЗАД.

Из сказанного выше следует, что каждое «нечётное» M2 с нечётным порядковым номером также является источником накопления зеркальных НАЗАД. Это также фундаментально, как и то, что из бесконечного ряда нечётных, принадлежащих M2 только числа с чётным порядковым номером $(M2)_6$, $(M2)_{12}$, $(M2)_{18}$ … и т.д., следуют сценарию роста, т.е. возвращаются в M1. Пока зафиксируем это как непреложный факт.

Из Рис.39 сделаем выборку «нечётных», следующих по сценария непрерывного роста

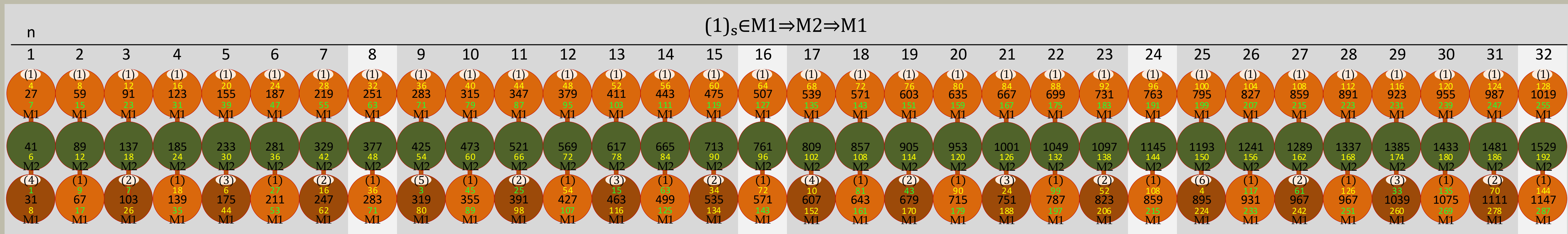


Рис.41

Выборка «нечётных», принадлежащая M1, а точнее ряду одиночных $(1)_{s=4n} \in M1$: 27, 59, 91 … «32n-5» является рядом исходных «нечётных», из которых в принципе могут формироваться фрагменты непрерывного роста в сценарии чередования M1⇒M2⇒M1. Главным признаком этого ряда является чётный порядковый номер кратный 4. Числа ряда одиночных (32n-5)=(8·{4n}-5)∈M1, с чётным порядковым номером кратным 4, всегда переходят в (8a-7)∈M2, в позицию числа с чётным порядковым номером в этом новом множестве.

$$\frac{3\cdot(32n-5)+1}{2} = \frac{96n-14}{2} = 48n-7=(8\cdot\{6n\}-7)\in M2 \quad \Rightarrow \quad (48n-7)\in M2 \qquad (61)$$

Очередным ходом «нечётное» возвращается в M1, но, для продолжения чередования M1⇒M2⇒M1 необходимо, чтобы «нечётное» оказалось в позиции $(1)_{s=4n} \in M1$. Неважно, сразу в позиции ряда $(1)_{s=4n} \in M1$, или по завершению одного из рядов групп: $(2)_s \Rightarrow (1)_{s=4n} \in M1$, $(3)_s \Rightarrow (1)_{s=4n} \in M1$, $(4)_s \Rightarrow (1)_{s=4n} \in M1$ … и т.д. Важно, чтобы «нечётное» оказалось в позиции ряда одиночных, с чётным порядковым номером кратным 4.

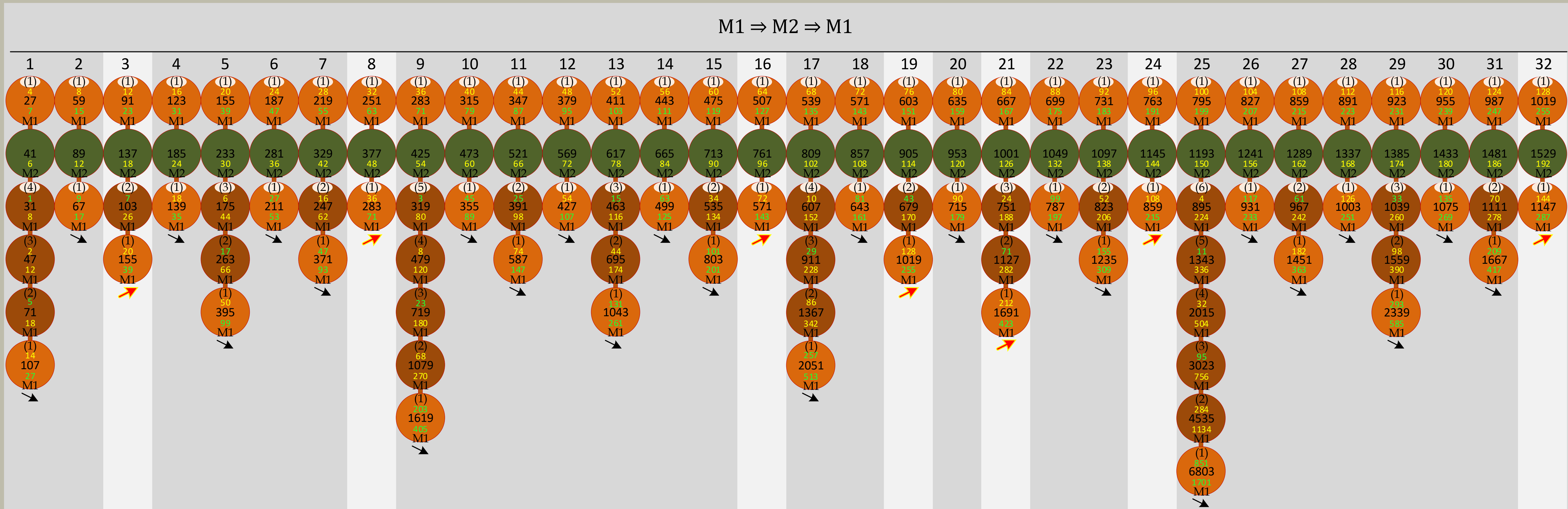


Рис.42

Каждый из рядов групп: $(2)_s \in M1$, $(3)_s \in M1$, $(4)_s \in M1$ и других, завершается «нечётным» из ряда одиночных $(1)_s \in M1$, но, только часть из них, принадлежащая ряду одиночных с чётным порядковым номером продолжает следовать выбранному сценарию .

Мы прикладываем определённые усилия по упорядочиванию событий, а на очередном этапе порядок разрушается, и нам снова надо прикладывать усилия по его упорядочиванию. И так по кругу. В действительности, в алгоритме Коллатца существует незыблемый порядок событий, который мы не можем преодолеть. Наши искусственные выборки не устанавливают новый порядок, не изменяют предыдущий, они по прежнему остаются отдельной выборкой, частью одного и того же действующего порядка.

Из 32-х представленных (Рис.42) только четвёртая часть вернулась в исходный ряд $(1)_{s=4n} \in M1$.
Разложим ряд фрагментов последовательностей (Рис.42) по признаку принадлежности к соответствующему им ряду групп.
Сфокусируем своё внимание на простейшем сценарии роста: $(1)_s \in M1 \Rightarrow M2 \Rightarrow (1)_s \in M1$

1) На Рис.43 представлена выборка фрагментов, в которых «нечётное» из ряда одиночных $(1)_{s=4n}\in M1$ возвращается в ряд одиночных $(1)_{s=n}\in M1$

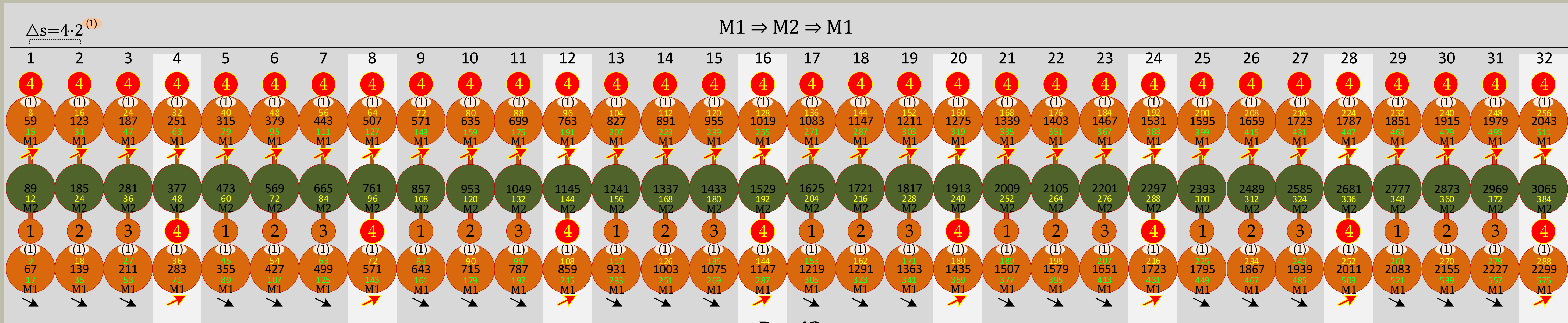


Рис.43

Порядковый номер «нечётного» из ряда одиночных в концепции непрерывного роста принимает одно из четырёх эквивалентных значений: ①↘, ②↘, ③↘, ④↗

①↘ - нечётный порядковый номер, означает в очередном шаге переход в М3, М4, М5 ... Mm, (см.Рис.38);

②↘ - чётный порядковый номер, кратный 2 (при делении на 2 становится сразу нечётным), означает переход в сценарий накопления зеркальных НАЗАД (см. Рис.40);

③↘ - нечётный порядковый номер, означает переход в М3, М4, М5 ... Mm, (см. Рис.38);

④↗ - чётный порядковый номер, кратный 4, следует сценарию роста по алгоритму M1 ⇒ M2 ⇒ M1;

Эквивалентный порядковый номер «нечётного» из ряда одиночных (сокращённо Экв.$№_s$) определяет перспективу движения «нечётного» ВПЕРЁД или НАЗАД:

Экв.$№_{s=4n}$=④ , единственное, которое следует сценарий роста, остальные ①, ②, ③, с порядковым номером $s\neq 4n$ его прерывают.

2) На Рис.44 представлена выборка фрагментов из Рис.42, в которых «нечётное» из ряда одиночных $(1)_{s=4n}\in M1$ возвращается в ряд двух $(2)_{s=n}\in M1$

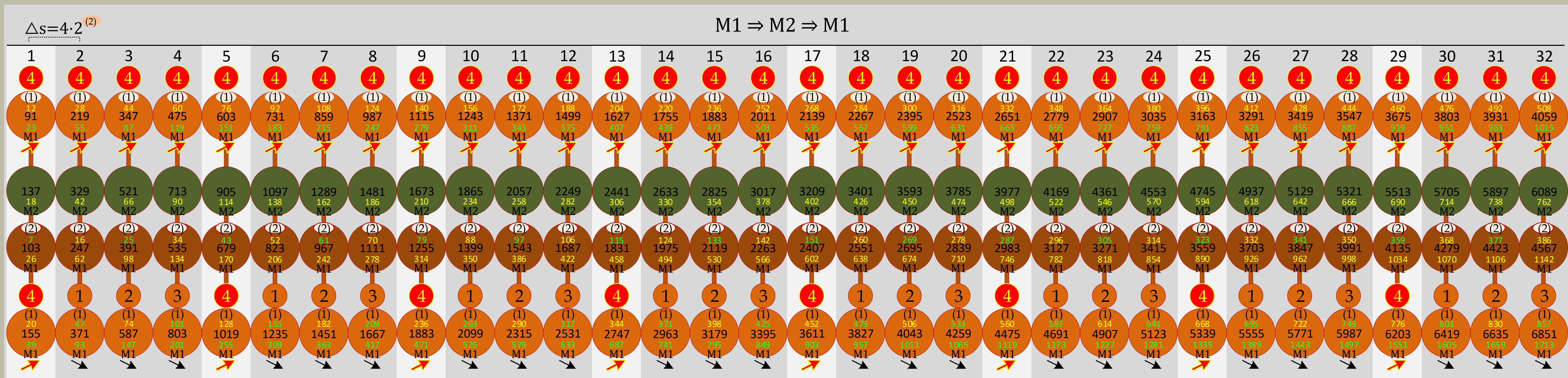


Рис.44

3) На Рис.45 представлена выборка фрагментов из Рис.42,, в которых «нечётное» из ряда одиночных $(1)_{s=4n} \in M1$ возвращается в ряд трёх $(3)_{s=n} \in M1$

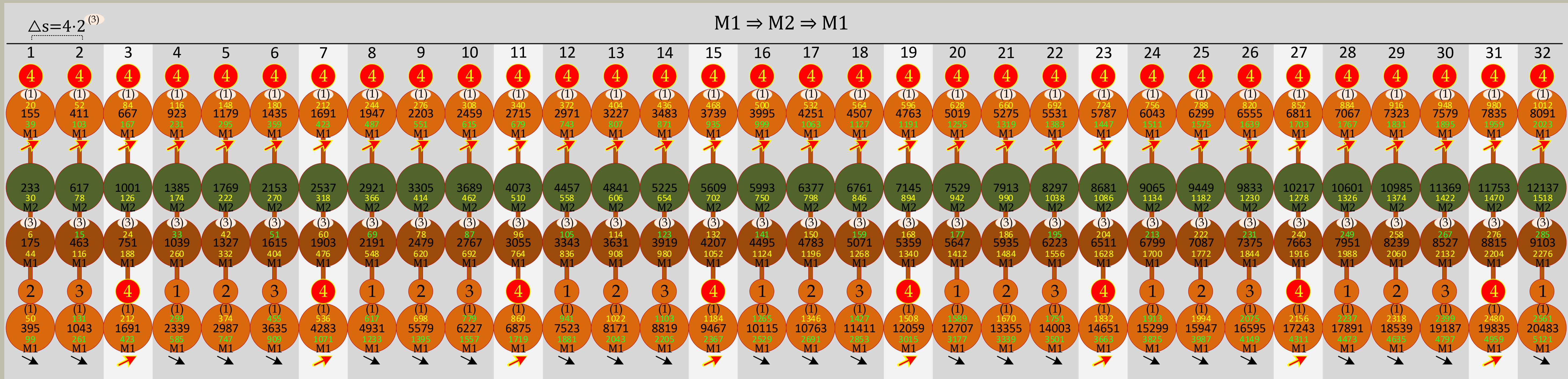


Рис.45

И так далее… , каждое «нечётное» бесконечного множества М1 в алгоритме Коллатца в итоге принимает одно из четырёх эквивалентных значений: ①↘, ②↘, ③↘, ④↗. В свою очередь, каждое эквивалентное ④↗ поочередно переходит в одно из: ①↘, ②↘, ③↘, ④↗. Это приводит к тому, что в каждой очередной выборке ④↗, количество фрагментов последовательностей «нечётных», следующих по сценарию роста, сокращается ровно в четыре раза.

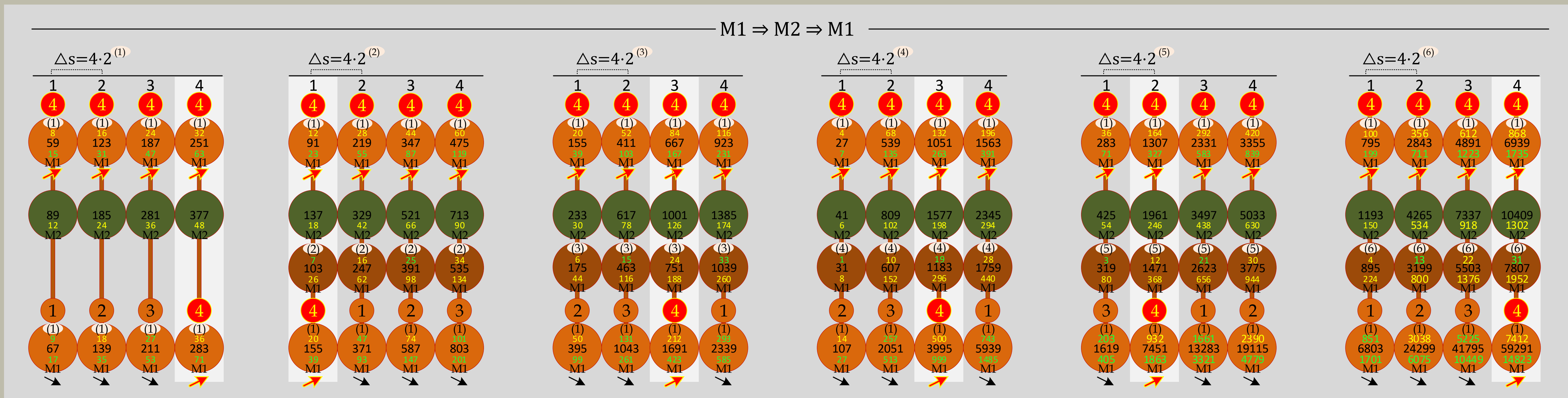


Рис.46

Любой из рядов групп «нечётных» первого множества завершается рядом одиночных, в которых закономерно чередуются последовательности эквивалентных значений: ①↘, ②↘, ③↘, ④↗.

Из Рис.42 выделим те, которые в очередном шаге оказались в М1 (Рис.43) сразу в ряде одиночных с чётным порядковым номером, кратным 4.

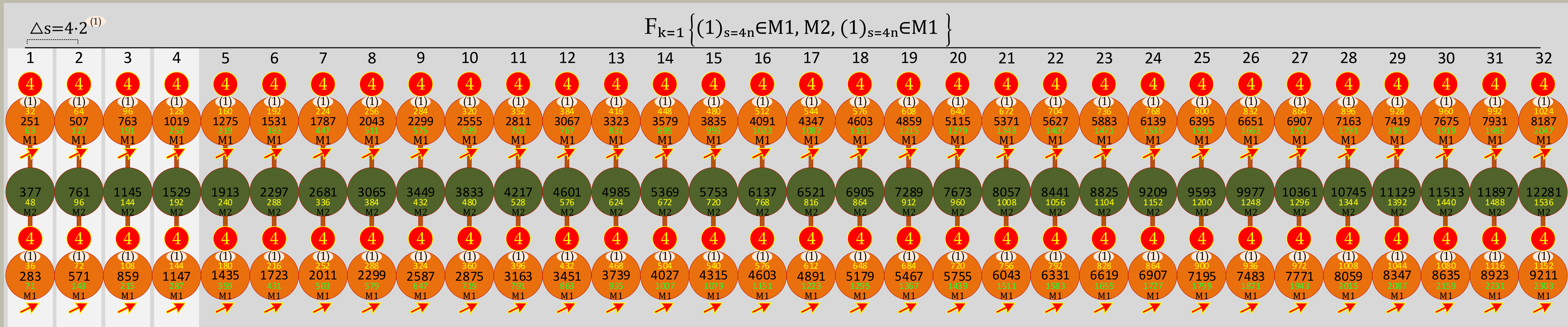


Рис.47

Так мы получили первую выборку «нечётных» следующих по сценария непрерывного роста. Обозначим её $F_{k=1}\{(1)_s, M2, (1)_s\}$, где k=1 порядковый номер выборки, указанного в скобках $F_k\{\ldots\}$ сценария непрерывного роста. Номер $\{s_{k=1}\}_n$ нечётного» в исходном $(1)_s \in M1$ равен.

$$\{s_{k=1}\}_n = 32n \qquad (62)$$

Учитывая (46) и (62) исходное ряда $F_{k=1}\{(1)_s, M2, (1)_s\}$ описывается (63):

$$F_{k=1}\left\{(1)_{s=4n}\in M1,\, M2,\, (1)_{s=4n}\in M1\right\} = 8\cdot\{s_{k=1}\}_n\text{-}5 = 8\cdot\{32n\}\text{-}5 = 256n\text{-}5 \qquad (63)$$

Выполним переход к следующему нечётному из ряда одиночных с чётным порядковым номером, кратным 4.

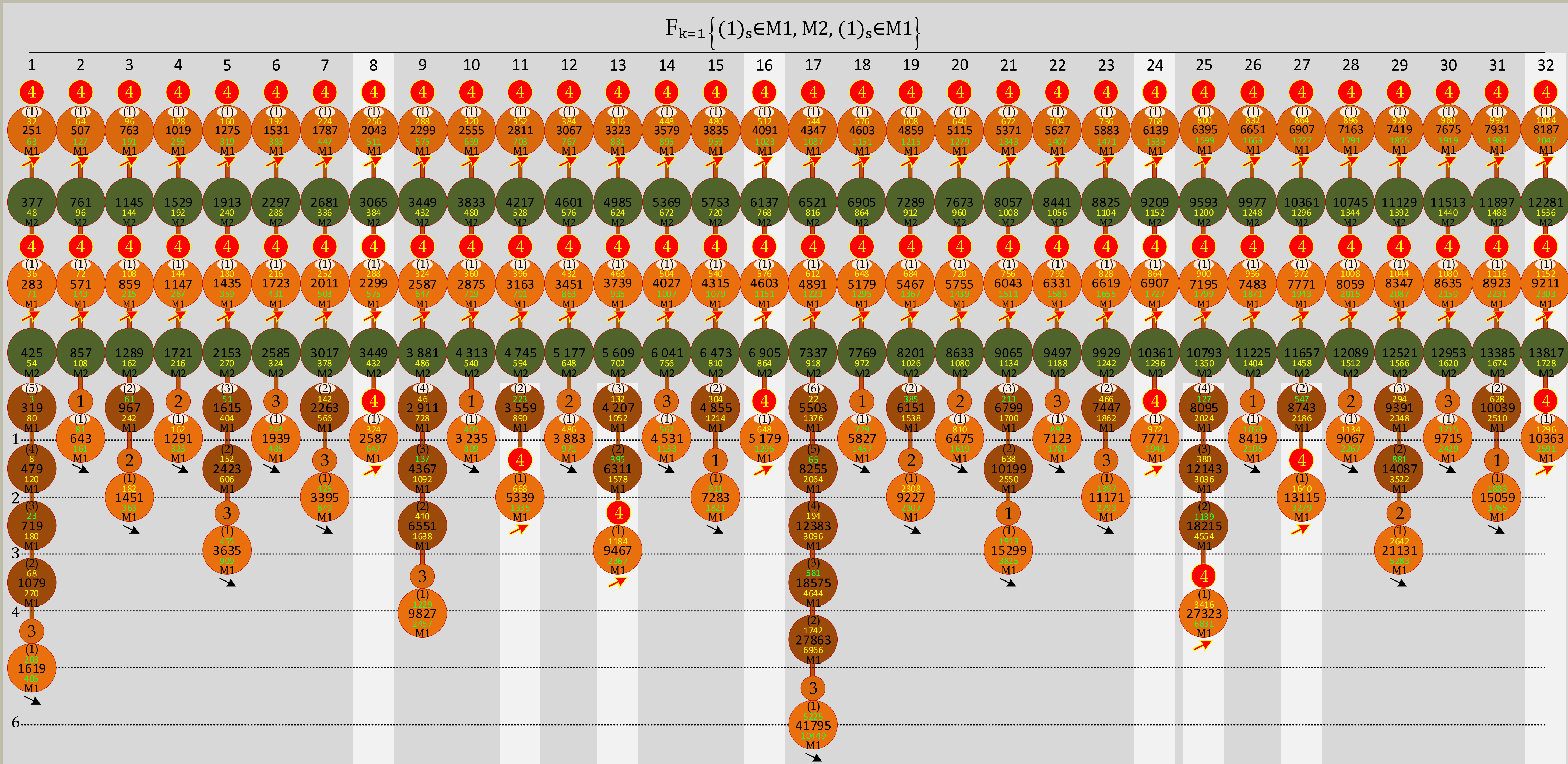


Рис.48

Сделаем из них очередную k=2 выборку

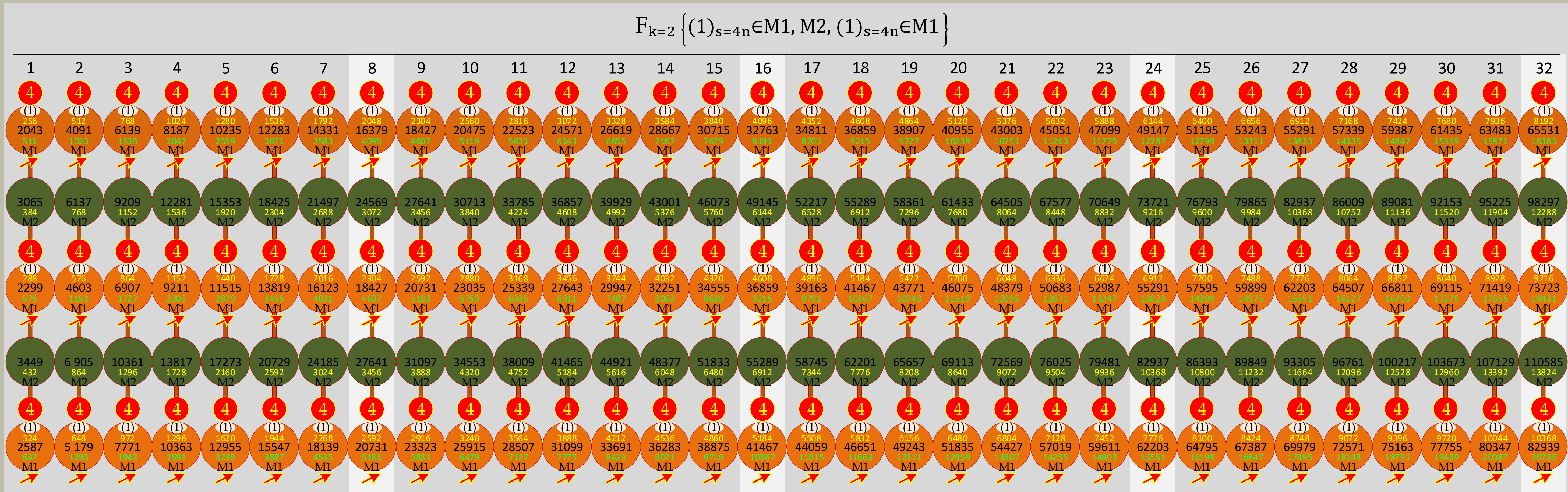


Рис.49

Так мы получили вторую выборку «нечётных» следующих по сценария непрерывного роста. Номер $\{s_{k=2}\}_n$ нечётного» в исходном $(1)_s\in M1$ равен.

$$\{s_{k=2}\}_n = 256n \tag{64}$$

Учитывая (46) и (64) исходное ряда $F_{k=2}\{(1)_s, M2, (1)_s\}$ описывается (65):

$$F_{k=2}\left\{(1)_{s=4n}\in M1, M2, (1)_{s=4n}\in M1\right\} = 8\cdot\{s_{k=2}\}_n-5 = 8\cdot\{256n\}-5 = 2048n-5 \tag{65}$$

В следующей итерации номер $\{s_{k=3}\}_n$ нечётного» в исходном $(1)_s\in M1$ равен.

$$\{s_{k=3}\}_n = 2048n \tag{66}$$

Учитывая (46) и (66) исходное ряда $F_{k=3}\{(1)_s, M2, (1)_s\}$ описывается (67):

$$F_{k=3}\left\{(1)_{s=4n}\in M1, M2, (1)_{s=4n}\in M1\right\} = 8\cdot\{s_{k=3}\}_n-5 = 8\cdot\{2048n\}-5 = 16384n-5 \tag{67}$$

Так можно продолжать бесконечно. Для сценария $(1)_s \in M1 \Rightarrow M2 \Rightarrow (1)_s \in M1$ существует бесконечное количество последовательностей, в которых порядковый номер $\{s_k\}_n$ нечётного» в исходном $(1)_s \in M1$ в общем виде равен:

$$\{s_k\}_n = (2^{3k+2}) \cdot n \tag{68}$$

Учитывая (46) и (68) В общем виде исходное ряда F_k $\{(1)_s$, M2, $(1)_s\} \in M2$ описывается (69):

$$F_k\left\{(1)_{s=4n} \in M1,\ M2,\ (1)_{s=4n} \in M1\right\} = 8 \cdot (2^{3k+2}) \cdot n-5 \tag{69}$$

Изначально, в (62), (63) мы определили, что «k»- порядковый номер выборки, указанного в скобках $F_k\{...\}$ сценария непрерывного роста. Теперь, уже после нескольких последовательных итераций можем уточнить: «k» - есть количество повторений сценария указанного в скобках $F_k\{...\}$, по завершению которого «нечётное» переходит в другой сценарий. А переход «нечётного» в другой сценарий означает конечность текущего.

Определим $Q(1)_s$ - коэффициент перехода от одного порядкового номера «нечётного» к другому в сценарии роста $(1)_s \in M1 \Rightarrow M2 \Rightarrow (1)_s \in M1$;

Из (Рис.41) имеем:

$$(1)_{s=4n} \in M1 = 32n-5 \tag{70}$$

Шаг 1:

$$\frac{3 \cdot (32n-5)+1}{2} = \frac{96n-14}{2} = 48n-7 \tag{71}$$

Шаг 2:

$$\frac{3 \cdot (48n-7)+1}{4} = \frac{144n-20}{4} = 36n-5 \tag{72}$$

Очередное нечётное, описываемое формулой «36n-5» будет принадлежать $(1)_{s=4n} \in M1$ = 32n-5 при условии равенства:

$$36\{n_i\}-5 = 32\{n_{i+1}\} -5 \quad \Rightarrow \quad 36\{n_i\} = 32\{n_{i+1}\} \tag{73}$$

Здесь; $\{n_i\}$-порядковый номер исходного «нечётного» в $(1)_{s=4n} \in M1$;

$\{n_{i+1}\}$-порядковый номер очередного «нечётного» в $(1)_{s=4n} \in M1$;

Учитывая, что s=4n из (73) следует (74):

$$36\left\{\frac{s_i}{4}\right\} = 32\left\{\frac{s_{i+1}}{4}\right\} \quad \Rightarrow \quad 9\{s_i\} = 8\{s_{i+1}\} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\{s_{i+1}\}}{\{s_i\}} = \frac{9}{8} = 1{,}125 \quad \Rightarrow \quad \{s_{i+1}\} = 1{,}125\{s_i\} \tag{74}$$

коэффициент перехода от одного порядкового номера «нечётного» к другому в сценарии роста $(1)_s \in M1 \Rightarrow M2 \Rightarrow (1)_s \in M1$ равен $Q(1)_s = 1{,}125$

$$F_k\left\{(1)_{s=4n}\in M1,\ M2,\ (1)_{s=4n}\in M1\right\}$$

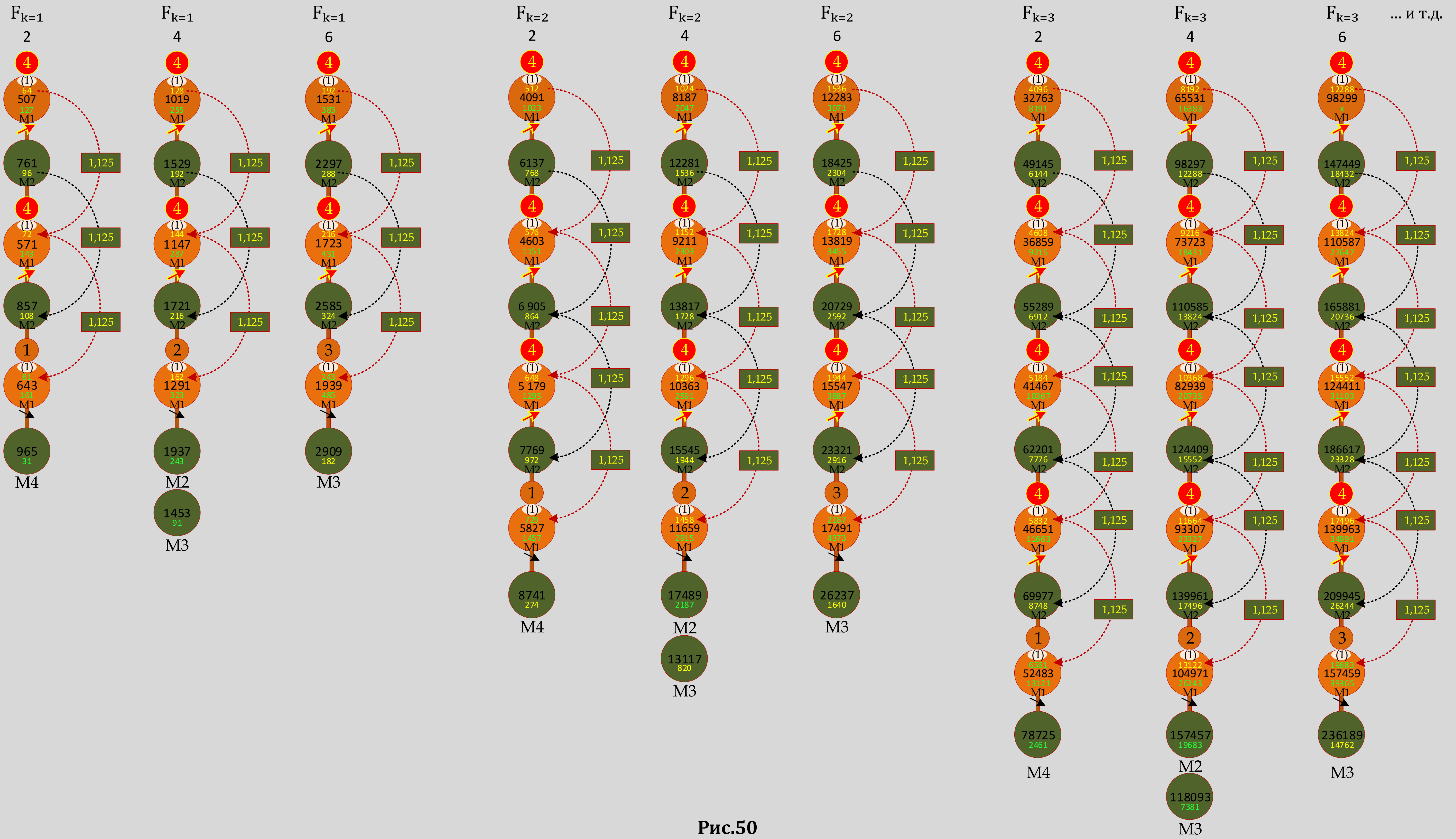


Рис.50

Оценим арифметически потенциальную возможность бесконечного последовательного умножения чётного порядкового номера (2^{3k+2}) на коэффициент $Q(1)_s=1{,}125$.

Пусть (2^{3k+2}) = X - чётное натуральное, тогда

Шаг 1:

$$1{,}125X=X+0{,}125X=X+\frac{1}{2^3}X \tag{75}$$

Шаг 2:

$$1{,}125(X+\frac{1}{2^3}X)=(X+\frac{1}{2^3}X)+0{,}125(X+\frac{1}{2^3}X)=X+\frac{2^4+1}{2^6}X \tag{76}$$

Шаг 3:

$$1{,}125(X+\frac{2^4+1}{2^6}X)=(X+\frac{2^4+1}{2^6}X)+0{,}125(X+\frac{2^4+1}{2^6}X)=X+\frac{2^7+89}{2^9}X \tag{77}$$

Шаг 4:

$$1{,}125(X+\frac{2^7+89}{2^9}X)=(X+\frac{2^7+89}{2^9}X)+0{,}125(X+\frac{2^7+89}{2^9}X)=X+\frac{2^{11}+417}{2^{12}}X \tag{78}$$

И так далее …

Шаг **k**:

$$1{,}125\cdot X_{k-1}=K\cdot X+\frac{\text{нечётное}}{2^{3k}}\cdot X \tag{79}$$

Шаг **k+1**:

$$1{,}125\cdot X_k=K\cdot X+\frac{\text{нечётное}}{2^{3k+3}}\cdot X \tag{80}$$

Здесь К=1,2,3 … натуральный коэффициент.

После замены $X=2^{3k+2}$ получим (81)

$$1{,}125\cdot X_k=K\cdot 2^{3k+2}+\frac{\text{нечётное}}{2\cdot\cancel{2^{3k+2}}}\cancel{\cdot 2^{3k+2}}=\text{чётное}+\frac{\text{нечётное}}{2}=\text{чётное}+\text{дробное}=\text{дробное} \tag{81}$$

Количество итераций умножений чётного порядкового номера (2^{3k+2}) на коэффициент 1,125 ограничено значением «k+1», после которого очередной порядковый номер «нечётного» становится дробным, что автоматически означает завершение прежде действующего сценария, а вместе с ним: накопление зеркальных НАЗАД или переход в другое множество: М3, М4, М5 … и др.

Определим $Q(2)_s$ - коэффициент перехода от одного порядкового номера «нечётного» к другому в сценарии роста $(1)_s \in M1 \Rightarrow M2 \Rightarrow (2)_s \in M1 \Rightarrow (1)_s \in M1$:
Имеем исходное (Рис.41)

$$(1)_{s=4n} \in M1 = 32n\text{-}5 \tag{82}$$

Шаг 1: $(1)_s \in M1 \Rightarrow M2$

$$\frac{3\cdot(32n-5)+1}{2} = \frac{96n-14}{2} = 48n-7 \tag{83}$$

Шаг 2: $M2 \Rightarrow (2)_s \in M1$

$$\frac{3\cdot(48n-7)+1}{4} = \frac{144n-20}{4} = 36n-5 \tag{84}$$

Шаг 3: $(2)_s \in M1 \Rightarrow (1)_s \in M1$

$$\frac{3\cdot(36n-5)+1}{2} = \frac{108n-14}{2} = 54n-7 \tag{85}$$

В каждом очередном шаге один закономерный ряд по формуле алгоритма (3X+1)/2 трансформируется в другой закономерный ряд. Порядковый номер «нечётного» исходного ряда объединяет «нечётные» очередных закономерных рядов в одной последовательности. Переход от одного «нечётного» к другому «нечётному» в алгоритме Коллатца - это всегда переход из одного закономерного ряда «нечётных» в другой закономерный.

Очередное нечётное, описываемое формулой «54n-7» будет принадлежать $(1)_{s=4n} \in M1 = 32n\text{-}5$ при условии равенства:

$$54\{n_i\} - 7 = 32\{n_{i+1}\} - 5 \quad \Rightarrow \quad 27\{n_i\} - 1 = 16\{n_{i+1}\} \tag{86}$$

Здесь; $\{n_i\}$-порядковый номер исходного «нечётного» в $(1)_{s=4n} \in M1$;

$\{n_{i+1}\}$-порядковый номер очередного «нечётного» в $(1)_{s=4n} \in M1$;

Учитывая, что s=4n из (86) следует (87):

$$27\{n_i\} - 1 = 16\{n_{i+1}\} \Rightarrow 27\left\{\frac{s_i}{4}\right\} - 1 = 16\left\{\frac{s_{i+1}}{4}\right\} \Rightarrow \{s_{i+1}\} = \frac{27\cdot\{s_i\} - 4}{16} \Rightarrow \{s_{i+1}\} = Q(1)_s\cdot\{s_i\} = \frac{27\cdot\{s_i\} - 4}{16} \tag{87}$$

Аналогичным образом определим коэффициенты перехода от одного порядкового номера «нечётного» к другому в других базовых сценариях роста (Таблица 8):

№	Сценарий роста	Формула перехода порядкового номера в сценарии роста	Формула перехода порядкового номера в сценарии роста в десятичном представлении
1	$(1)_{\{s_i\}}\in M1 \Rightarrow M2 \Rightarrow (1)_{\{s_{i+1}\}}\in M1$	$\{s_{i+1}\}_{(1)}=Q(1)_s\cdot\{s_i\} = \frac{9\{s_i\}}{8}$	$\{s_{i+1}\}_{(1)} = 1{,}125\{s_i\}$
2	$(1)_{\{s_i\}}\in M1\Rightarrow M2\Rightarrow(2)_s\Rightarrow(1)_{\{s_{i+1}\}}\in M1$	$\{s_{i+1}\}_{(2)}=Q(2)_s\cdot\{s_i\} = \frac{27\{s_i\}-4}{16}$	$\{s_{i+1}\}_{(2)} = 1{,}6875\{s_i\} - 0{,}25$
3	$(1)_{\{s_i\}}\in M1\Rightarrow M2\Rightarrow(3)_s\Rightarrow(1)_{\{s_{i+1}\}}\in M1$	$\{s_{i+1}\}_{(3)}=Q(3)_s\cdot\{s_i\} = \frac{81\{s_i\}-20}{32}$	$\{s_{i+1}\}_{(3)} = 2{,}53125\{s_i\} - 0{,}625$
4	$(1)_{\{s_i\}}\in M1\Rightarrow M2\Rightarrow(4)_s\Rightarrow(1)_{\{s_{i+1}\}}\in M1$	$\{s_{i+1}\}_{(4)}=Q(4)_s\cdot\{s_i\} = \frac{243\{s_i\}-76}{64}$	$\{s_{i+1}\}_{(4)} = 3{,}796875\{s_i\} - 1{,}1875$
5	$(1)_{\{s_i\}}\in M1\Rightarrow M2\Rightarrow(5)_s\Rightarrow(1)_{\{s_{i+1}\}}\in M1$	$\{s_{i+1}\}_{(5)}=Q(5)_s\cdot\{s_i\} = \frac{729\{s_i\}-260}{128}$	$\{s_{i+1}\}_{(5)} = 5{,}6953125\{s_i\} - 2{,}03125$
6	$(1)_{\{s_i\}}\in M1\Rightarrow M2\Rightarrow(6)_s\Rightarrow(1)_{\{s_{i+1}\}}\in M1$	$\{s_{i+1}\}_{(6)}=Q(6)_s\cdot\{s_i\} = \frac{2187\{s_i\}-844}{256}$	$\{s_{i+1}\}_{(6)} = 8{,}54296875\{s_i\} - 3{,}296875$
...	...	...	...

Таблица 8. Таблица формул перехода «нечётного» из ряда $(1)_{s=4n}\in M1$ от одного порядкового номера к другому в сценариях роста

Формулу перехода «нечётного» из ряда $(1)_{s=4n}\in M1$ от одного порядкового номера к другому в сценариях роста структурно можно представить, как (84):

$$\{s_{i+1}\} = \frac{\text{нечётное}\cdot\{s_i\} - \text{чётное}}{2^n} \tag{88}$$

Учитывая, что в (88) : **чётное< нечётное**, чётным можно пренебречь, т.к. оно не оказывает влияния на чётный или нечётный результат дроби, тогда:

$$\{s_{i+1}\} = \frac{\text{нечётное}}{2^n}\{s_i\} \tag{89}$$

Каждая очередная формула в таблице 8 получается из формулы закономерного ряда предыдущей формулы (см.(83), (84), (85)) применением к ней алгоритма (3X+1)/2, в результате чего: коэффициент перехода всякий раз увеличивается приблизительно в 3/2 раза, при этом структура (88), а значит и (89), остаётся прежней. Также заметим: количество знаков после запятой во всех дробных коэффициентах перехода в их десятичном представлении (Таблица 8) **конечно**, и всегда больше одного. Сценарий роста в последовательности Коллатца продолжается до тех пор, пока чётный порядковый номер «нечётного» не сравняется со знаменателем «2^n» в (89), после чего он становится нечётным, а следующим ходом дробным. На этом сценарий роста прерывается. Процесс прерывания простейшего базового сценария роста подробно описан в (75)…(81).

ВЫВОД: Из всех натуральных, с какого бы числа мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, не существует таких, которые бы уходили в бесконечность.

Доказательство №1, основанное на свойствах умножения нечётных, и деления их на чётное 2^n в формировании натурального порядкового номера.

Для того, чтобы процесс чередования сценариев роста был бесконечным, необходимо, чтобы чётный порядковый номер «нечётного» из ряда $(1)_{s=4n}$∈M1в каждом очередном шаге чередования сценариев оставался чётным.
Сценарий роста в последовательности Коллатца, в принципе, может состоять из произвольной комбинации базовых сценариев, представленных Таблицей 2.
Необходимо, чтобы произведение коэффициентов перехода «нечётного» из ряда $(1)_{s=4n}$ ∈M1 от одного порядкового номера к другому было целым натуральным числом. Только в этом случае чётный порядковый номер «нечётного» из ряда $(1)_{s=4n}$ ∈M1 в очередном шаге чередования сценариев будет оставаться чётным, а процесс чередования бесконечным.

Но, такого произведения переходных коэффициентов, чтобы в итоге получилось натуральное число, не существует, (66):

$$\left(\frac{\text{нечётное}}{2^n}\right)_1 \left(\frac{\text{нечётное}}{2^n}\right)_2 \dots \left(\frac{\text{нечётное}}{2^n}\right)_n \equiv \frac{\text{нечётное}}{2^n} \qquad (90)$$

Значит гипотетической возможности бесконечного роста в последовательности Коллатца не существует.
Что и требовалось доказать.

Доказательство №2

Бесконечный ряд $(1)_s \in M1$ можно представить бесконечным рядом повторяющихся 4-х эквивалентных (номеров, маршрутов, сценариев): 1↘, 2↘, 3↘, 4↗.

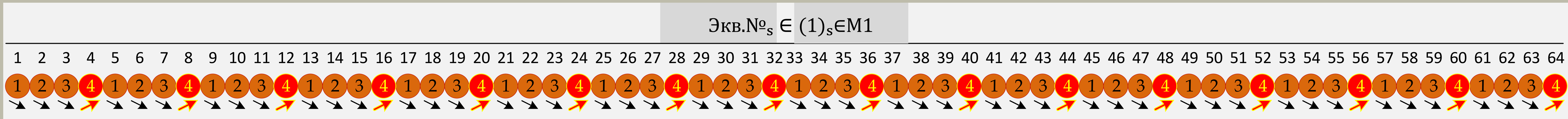


Рис.51 Ряд одиночных $(1)_{s=4n} \in M1$, представленный эквивалентными номерами Экв.$№_s \in (1)_s \in M1$

Из Рис.51 выделим кратные 4, (Рис.52). Так, что каждое из них становитсятся исходным одного из фрагментов роста в произвольной последовательности Коллатца:

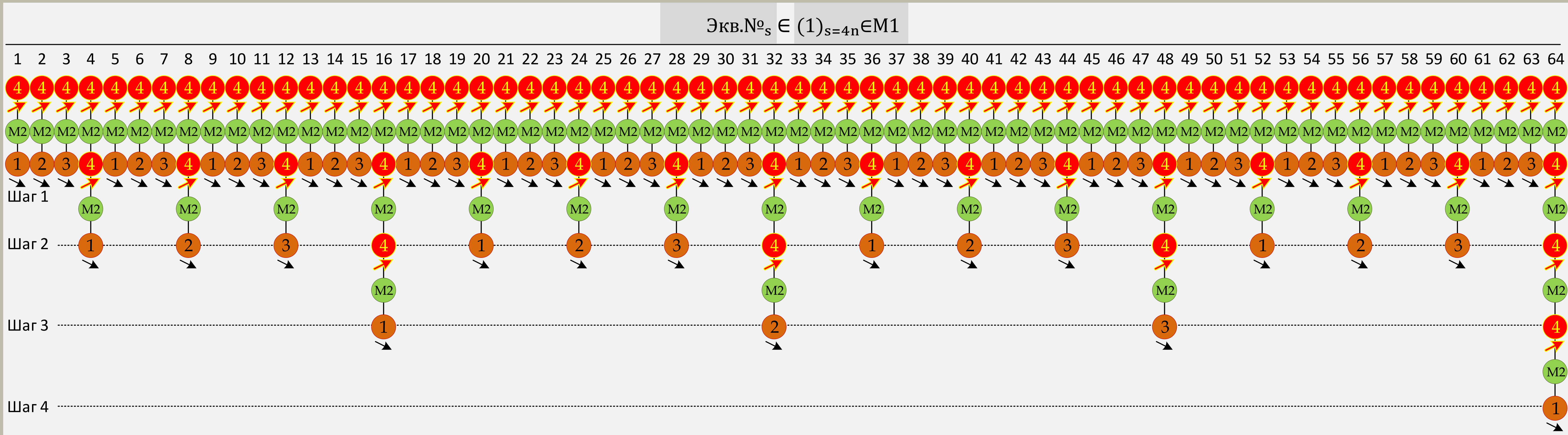


Рис.52 Набор фрагментов роста в последовательности Коллатца

Гипотеза бесконечной роста в последовательности Коллатца строится на предположении существования такого натурального, с Экв.$№_s$= 4, бесконечно переходящего в очередное с Экв.$№_s$= 4. Пусть количество чётных порядковых номеров, кратных 4, в бесконечном ряде $(1)_{s=4n} \in M1$ ограничено максимальным значением 2^N. В каждом очередном шаге формирования фрагментов роста это количество неизбежно сокращается ровно в 4 раза: $2^N \Rightarrow \ldots \Rightarrow 64 \Rightarrow 16 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1 \Rightarrow 0$. Каким бы оно ни было вначале, в конечном итоге, каждый раз уменьшаясь в четыре раза, оно становится равным нулю. Таким образом, абсолютно каждый фрагмент роста чередованием M1 ⇒ M2 ⇒ M1 из представленного бесконечного набора на Рис.52 конечен, и всегда завершается в одном из двух: переходом в другое множество, или накоплением зеркальных сценариев НАЗАД (Рис.41). Значит, бесконечного роста в последовательности Коллатца не существует.

Что и требовалось доказать.

ЧАСТЬ 4: **Выводы, заключение, результаты**

1) В алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных: бесконечного чередования одного и того же фрагмента последовательности, состоящего из нескольких нечётных. Потому, что произведение промежуточных коэффициентов между очередным и любым из предыдущих может принимать только два значения: или больше единицы, или меньше, и никогда равным ей. Главное условие закольцованного фрагмента, такое как произведение промежуточных коэффициентов равное единице, не соблюдается. Этот общий переходный коэффициент, определяемый как результат суммы двух слагаемых с разным количеством знаков после запятой не является натуральным, значит и равным единице он также не может быть. Значит очередное в последовательности никогда не станет равным ни одному из предыдущих.

2) В алгоритме Коллатца повсеместно действует математический закон перехода количественных изменений в качественные. Одна и та же формула прикладываясь к разным числам одного и того же множества приводит к разным результатам: приращения кратные периоду множества позволяют остаться в этом же множестве, приращения, не кратные периоду множества, вынуждают перейти в другое. Переход из одного множества в другое сопровождается обретением качественного разнообразия промежуточных коэффициентов, приводящего в конечном итоге общего переходного коэффициента к значению, меньшему единицы, что равносильно переходу ниже исходного.

3) Алгоритм, асимметричный по своему структурному содержанию, благодаря заложенной в нём непрерывности (регулярным восстановлением «нечётного» до «чётного»), разделил натуральный ряд на два симметричных множества зеркальных пар, сбалансировал их по количеству сценариев роста (ВПЕРЁД) и убывания (НАЗАД). Следуя по такому алгоритму: сценарий убывания (НАЗАД) доминирует над сценарием роста (ВПЕРЁД), как значением выполняемой работы, что равносильно переводу числа ниже исходного, так и количеством выполняемых последовательных шагов. Количество последовательных шагов зеркальных ВПЕРЁД ограничено одним шагом, в то время как у зеркальных НАЗАД количество переходов из одного множества в другое в пределах М2, М3, М4 … Мm, определяемое только математическим законом перехода количественных изменений в качественные, одним шагом не ограничено. В результате дисбаланс количественного соотношения зеркальных сценариев непрерывно растёт вместе с увеличением последовательности. Такая ситуация неизбежно приводит алгоритм к сворачиванию любого натурального в единицу.

4) Применив алгоритм Коллатца синхронно и параллельно, как метод, к каждому «нечётному» из ряда натуральных, сформировав таким образом из них бесконечный ряд последовательностей Коллатца, удалось обнаружить в параллельных шагах закономерности поведения очередного «нечётного», которые сложно обнаружить в одной отдельной последовательности с каким угодно исходным:

* Каждый очередной шаг алгоритма делит общее количество сценариев ВПЕРЁД пополам, при этом одна половина последовательностей продолжает следовать сценарию ВПЕРЁД, и в итоге приходит к своему максимуму, а другая половина следует сценарию НАЗАД.

* В свою очередь, каждый очередной шаг алгоритма делит общее количество сценариев НАЗАД также пополам, при этом ровно половина из них встанет опять на путь сценария продвижения ВПЕРЁД, но уже с меньших стартовых позиций, которые приведут к очередному максимуму, меньше предыдущего.

* Снижение очередных максимумов указывает на стремление алгоритма, перемещаться в область меньших значений, что наглядно продемонстрировано в ПРИЛОЖЕНИИ 1 (Структурный анализ произвольной последовательности 63 728 127 по алгоритму Коллатца) рисунками: Рис.П4-2 ... Рис.П9-2.

* Разделение одной общей траектории на несколько параллельных в пределах закономерных рядов групп, с учётом чётности порядковых номеров «нечётных», простой способ увидеть общую закономерность. Поскольку ряды групп в М1 параллельные, то и закономерность они будут демонстрировать одну и ту же, совпадающую с закономерностью общей последовательности.

* Судьба «нечётного» в очередном шаге определяется его положением в ряде одиночных $(1)_s \in M1$, от того, какой порядковый номер, чётный или нечётный, оно имеет, какую кратность имеет чётный порядковый номер. Эти два признака: чётность и кратность порядкового номера «нечётного» в ряде одиночных $(1)_s \in M1$ формируют в целом последовательность Коллатца с любым исходным из ряда натуральных «нечётных».

5) В алгоритме Коллатца не существует последовательностей, уходящих в бесконечность по следующим причинам:

* Не существует бесконечного роста в пределах М1 «нечётного» с чётным порядковым номером. Он всегда завершается, в соответствии с (45), сначала переходом к «очередному» с нечётным порядковым номером, а следующим ходом сценарий роста «нечётного» прерывается переходом его в одно из множеств М2, М3, М4 … Mm.

* Не существует бесконечного роста чередованием М1⇒М2⇒М1, а значит и любым другим чередованием множеств. Произведение дробных коэффициентов перехода «нечётного» из ряда $(1)_{s=4n}$∈М1 от одного порядкового номера к другому, представленных в десятичном виде, с конечным количеством знаков после запятой более одного, в любом их сочетании, в соответствии с (66), не дают целого натурального. Значит гипотетической возможности бесконечного перехода от одного чётного порядкового номера к другому чётному в последовательности Коллатца не существует.

* Гипотеза бесконечной роста в последовательности Коллатца, построенная на предположении существования такого натурального, с Экв.$№_s$=4↗, бесконечно переходящего в очередное с Экв.$№_s$=4↗, также несостоятельна. Абсолютно любой фрагмент роста чередованием М1⇒М2⇒М1 в концепции четырёх эквивалентных сценариев конечен, и всегда завершается переходом из М2 в другое множество, отличное от М1.

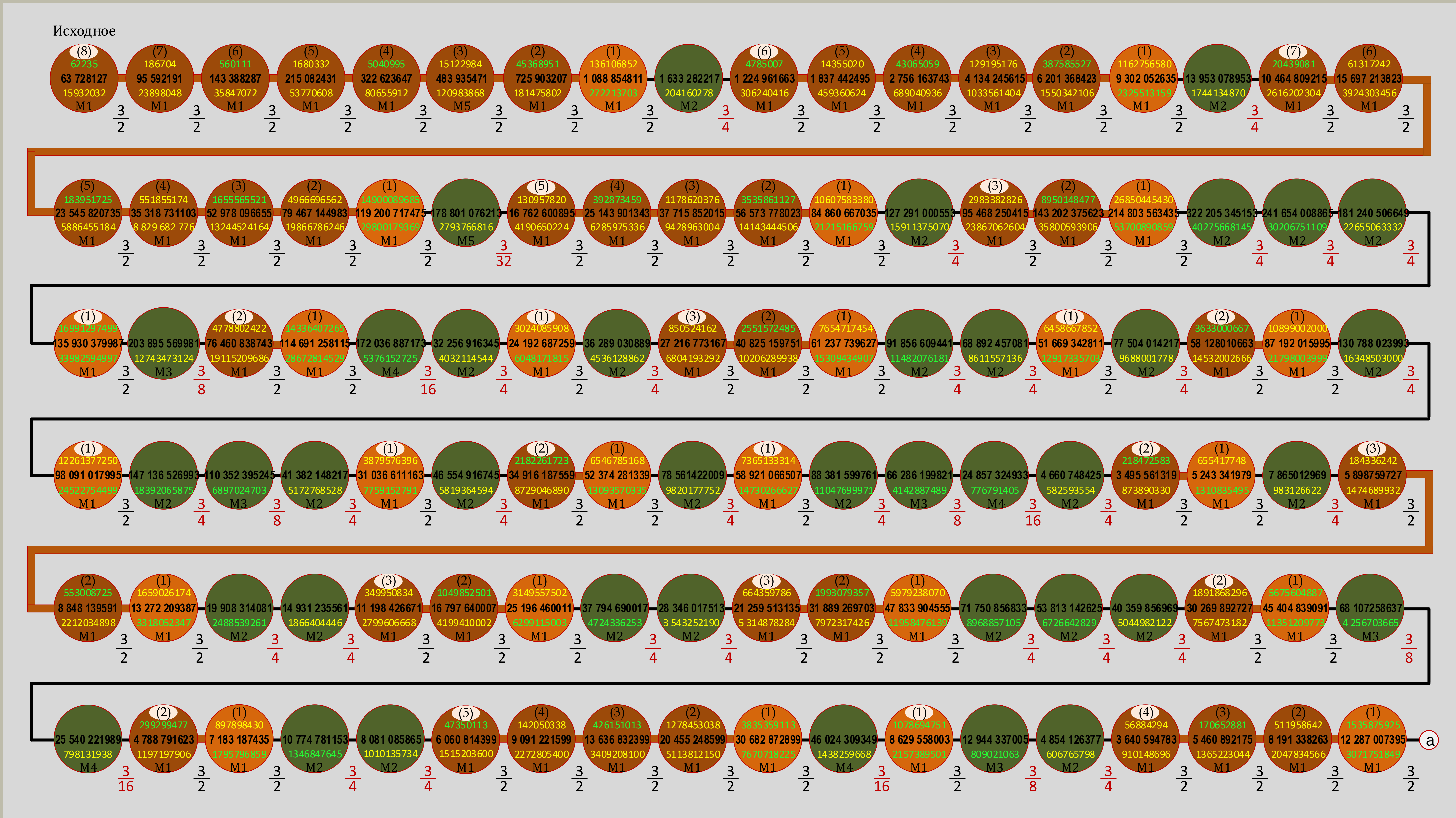
* Переход из М2 в другое множество, отличное от М1, означает одно из двух: реализуется или концепция успешного решения или зеркальная, путём накопления зеркальных сценариев НАЗАД. В обоих случаях с предсказуемым результатом: завершением последовательности в единице.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: Таким образом, в совокупности приведенных выше аргументов и доказательств двух принципиальных утверждений:

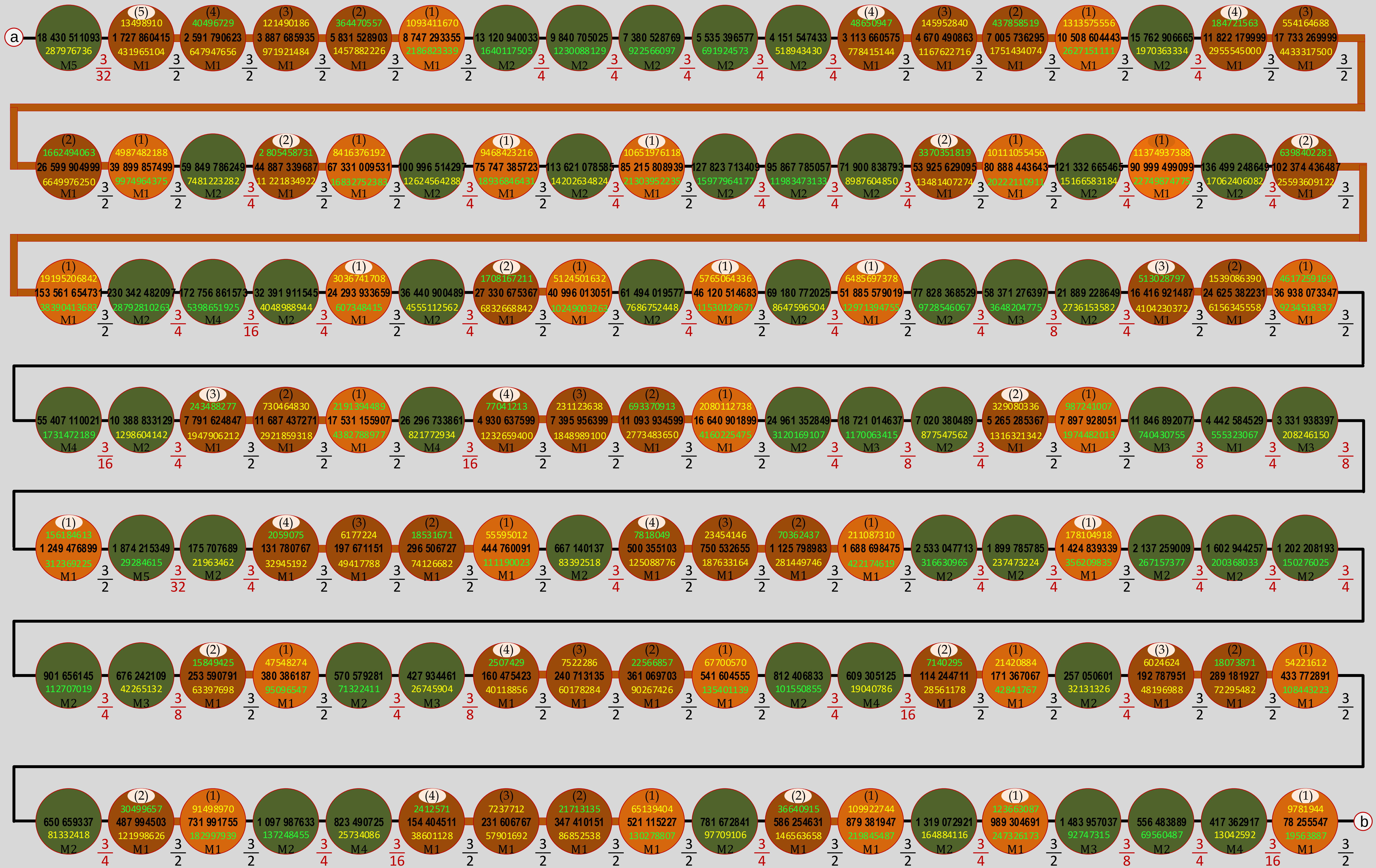
* в алгоритме Коллатца не существует последовательностей закольцованных;
* в алгоритме Коллатца не существует последовательностей, уходящих в бесконечность,

с какого бы числа, целого и положительного, мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле 3X+1, а в случае чётного следуя формуле X/2, мы в итоге придём к единице.

ГИПОТЕЗА КОЛЛАТЦА ДОКАЗАНА.



Приложение1: Рис 1.1 1-й фрагмент последовательности **“63 728 127”** по алгоритму Коллатца.
(продолжение следует)

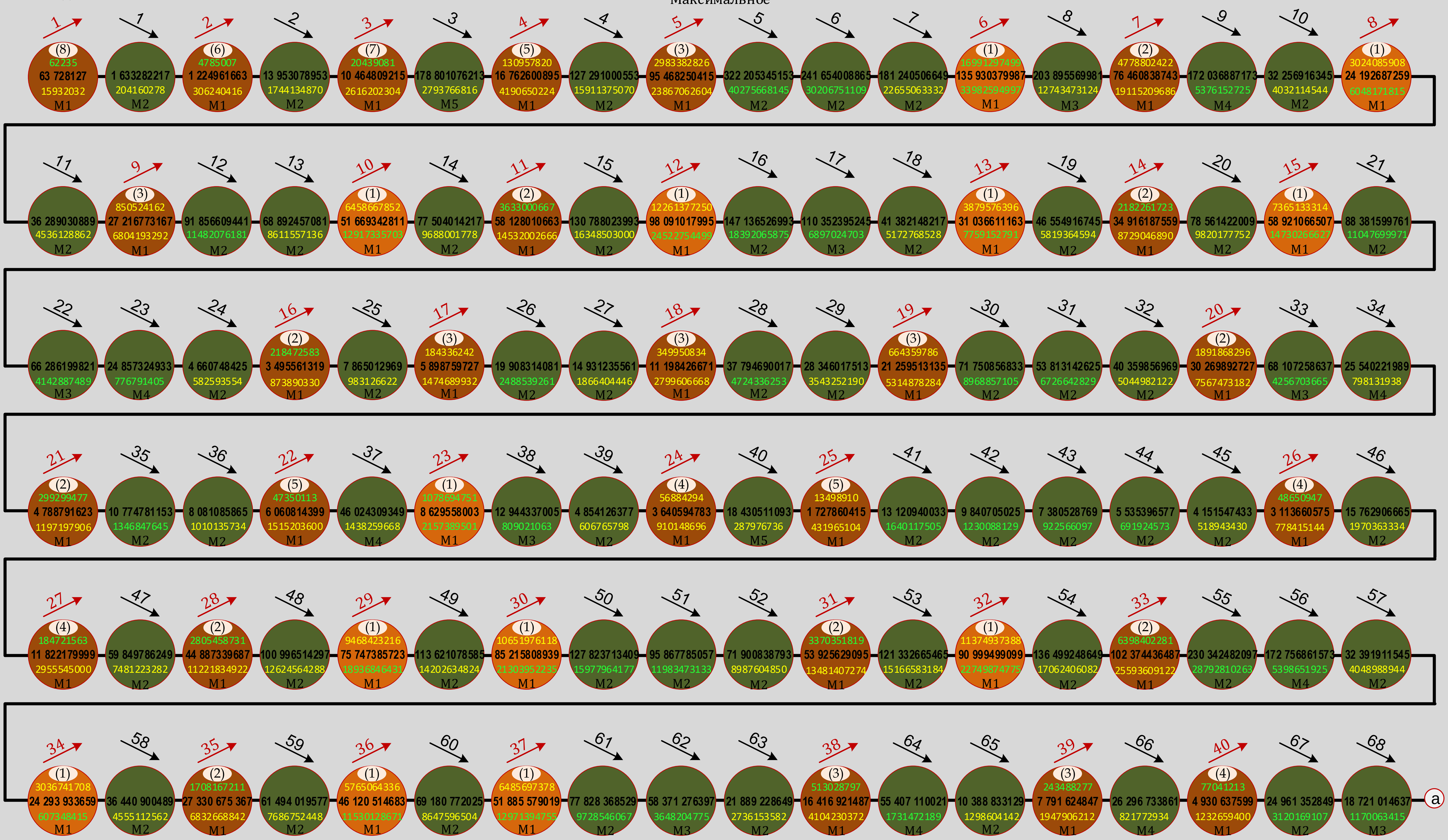


Приложение1: Рис 1.2 2-й фрагмент последовательности **“63 728 127”** по алгоритму Коллатца.

(продолжение следует)

Приложение1: Рис 1.3 3-й фрагмент последовательности **“63 728 127”** по алгоритму Коллатца.

Представим произвольную последовательность Коллатца с исходным X_0= **63 728 127** в виде последовательности зеркальных сценариев ВПЕРЁД - НАЗАД:



Приложение1: Рис 2.1 1-й фрагмент последовательности **“63 728 127”** по алгоритму Коллатца в зеркальной концепции.

(продолжение следует)

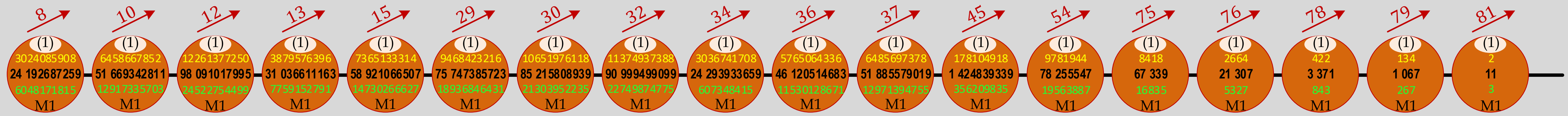
Приложение1: Рис 2.2 2-й фрагмент последовательности “**63 728 127**” по алгоритму Коллатца в зеркальной концепции.

Представим последовательность Коллатца с исходным X_0=63728127 маршрутом в пределах множества М1. Попутно вычислим коэффициенты $K_n=X_n/X_0$ между очередным X_n и исходным X_0=63728127. **Приложение1:** Рис 3.1:

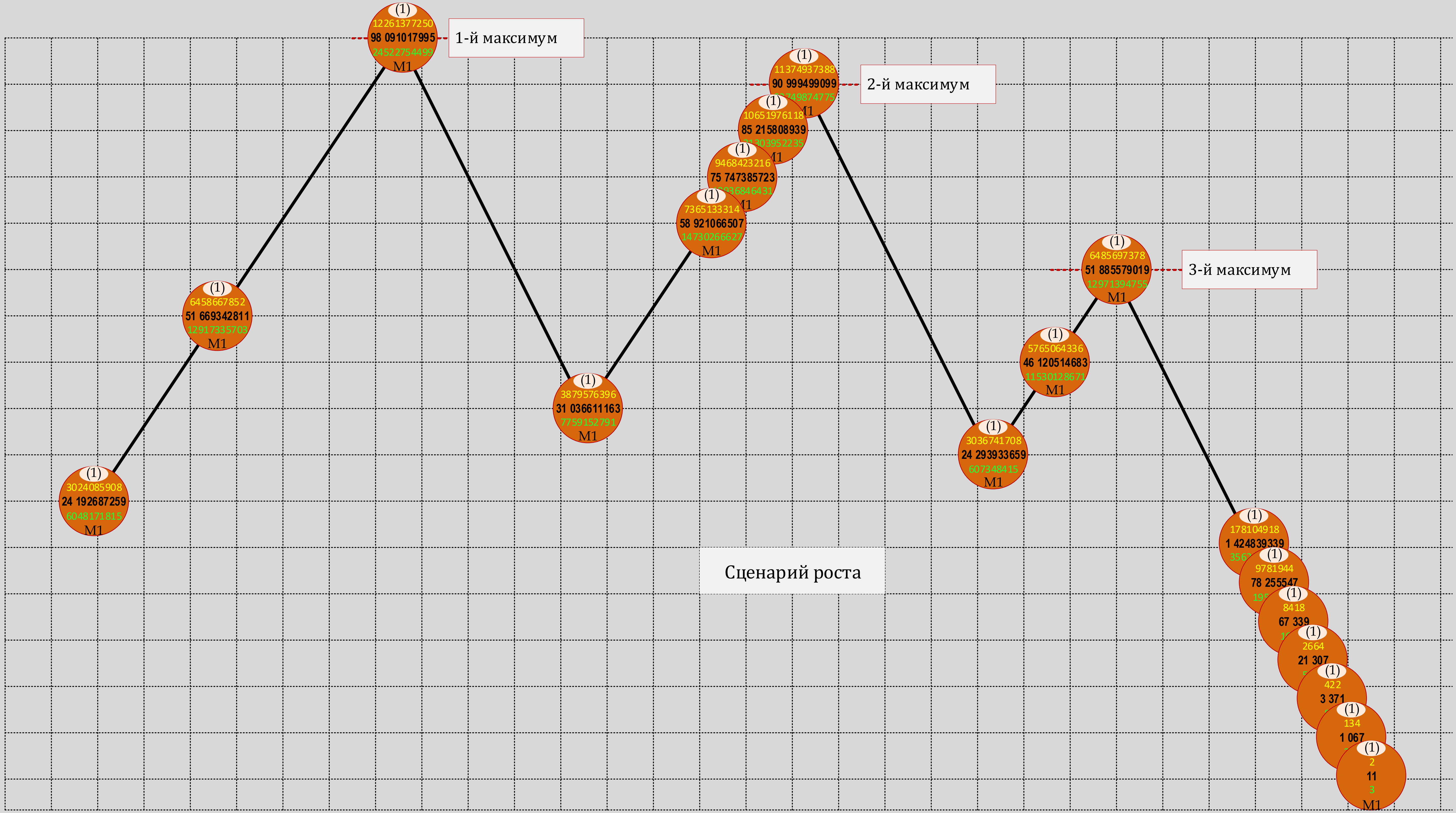
Приложение1: Рис 3.1 1-й фрагмент последовательности **"63 728 127"**, представленная маршрутом в пределах множества М1

(продолжение следует)

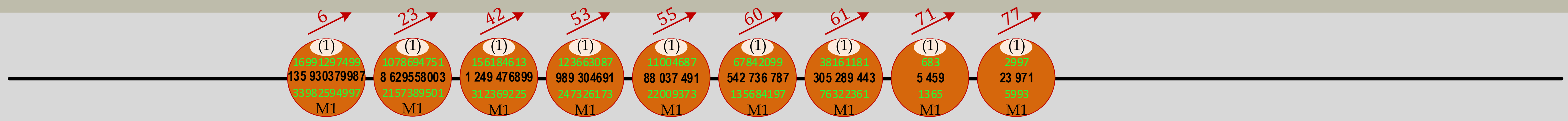
Приложение1: Рис 3.2 2-й фрагмент последовательности **“63 728 127”**, представленная маршрутом в пределах множества М1



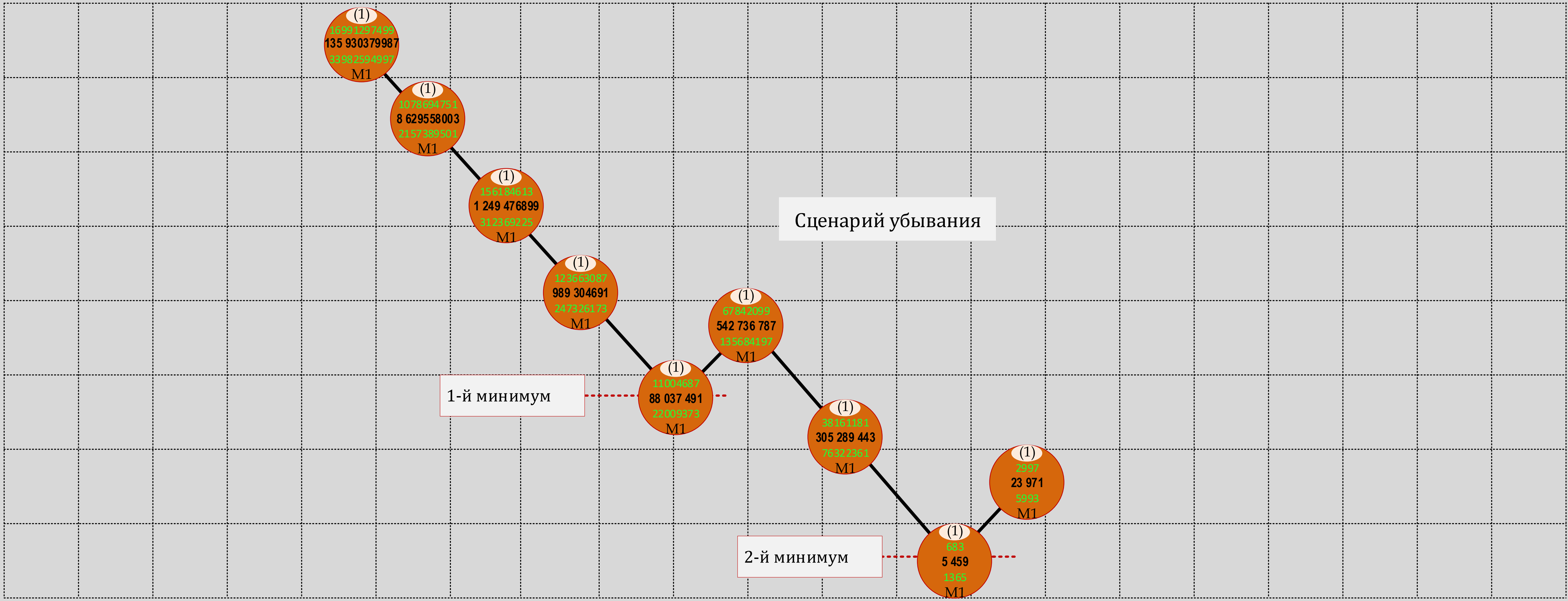
Приложение1: Рис 4.1 Маршрут исходного **“63 728 127”** в пределах ряда $(1)_s$∈M1 с чётным порядковым номером в сценарии роста.



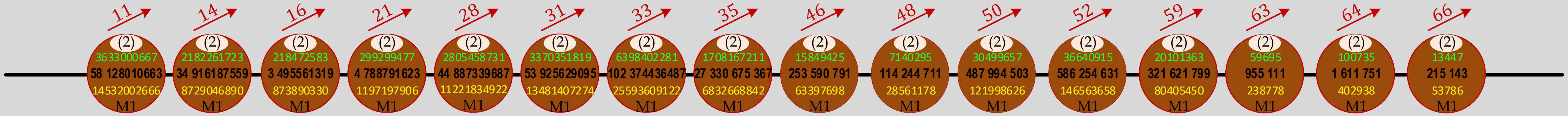
Приложение1: Рис 4.2 Траектория исходного **“63 728 127”** в пределах ряда $(1)_s$∈M1 с чётным порядковым номером в сценарии роста.



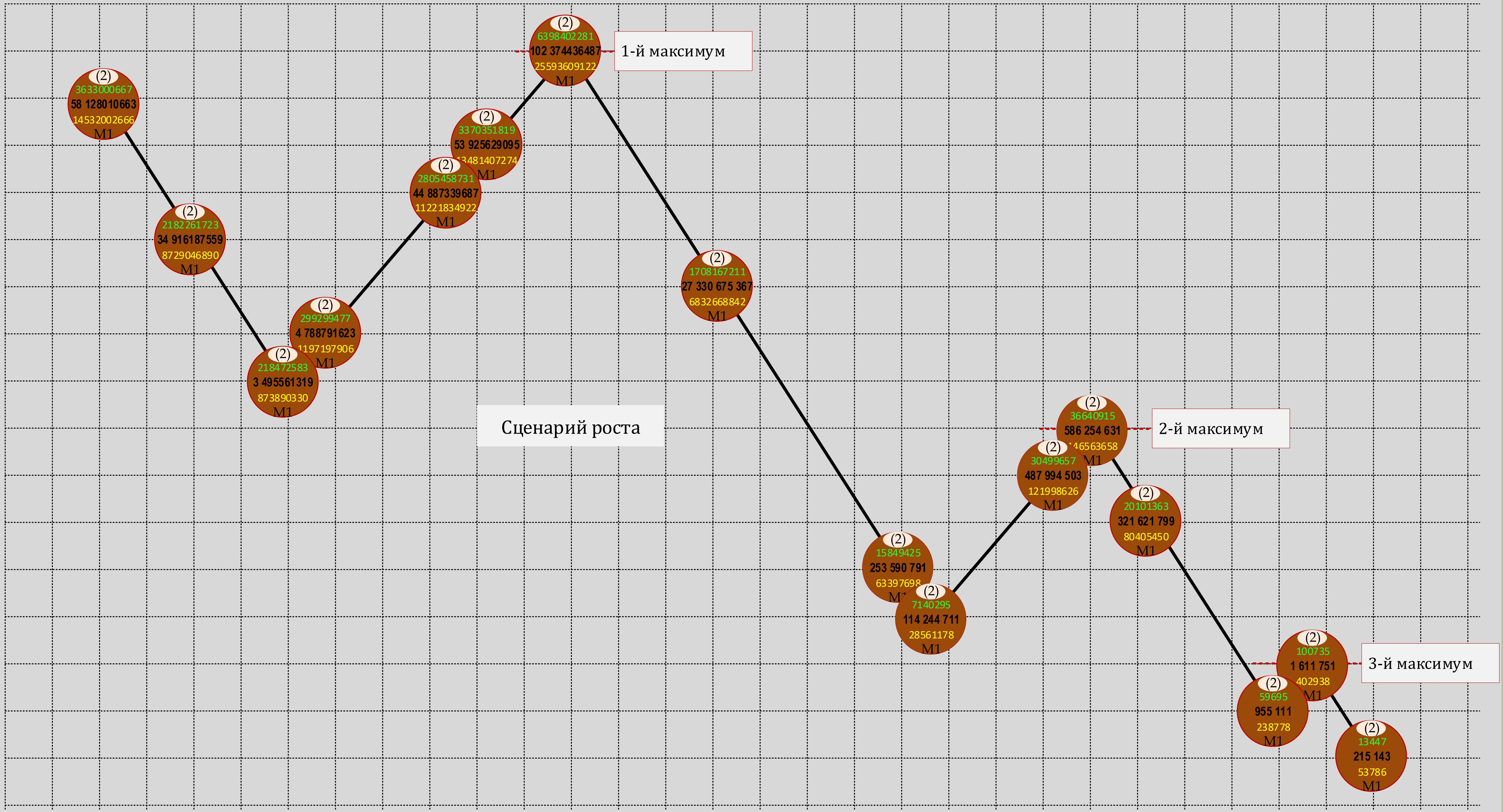
Приложение1: Рис 5.1 Маршрут исходного **"63 728 127"** в пределах ряда $(1)_s \in$M1 с нечётным порядковым номером в сценарии убывания.



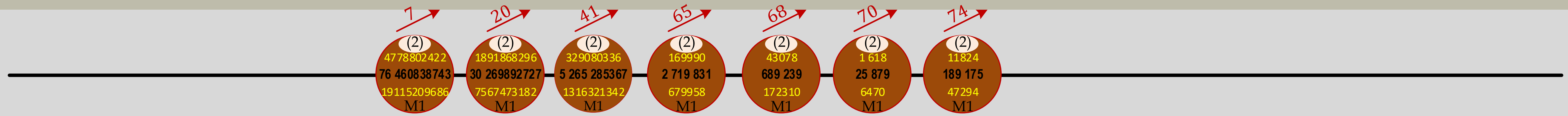
Приложение1: Рис 5.2 Траектория исходного **"63 728 127"** в пределах ряда $(1)_s \in$M1 с нечётным порядковым номером в сценарии убывания.



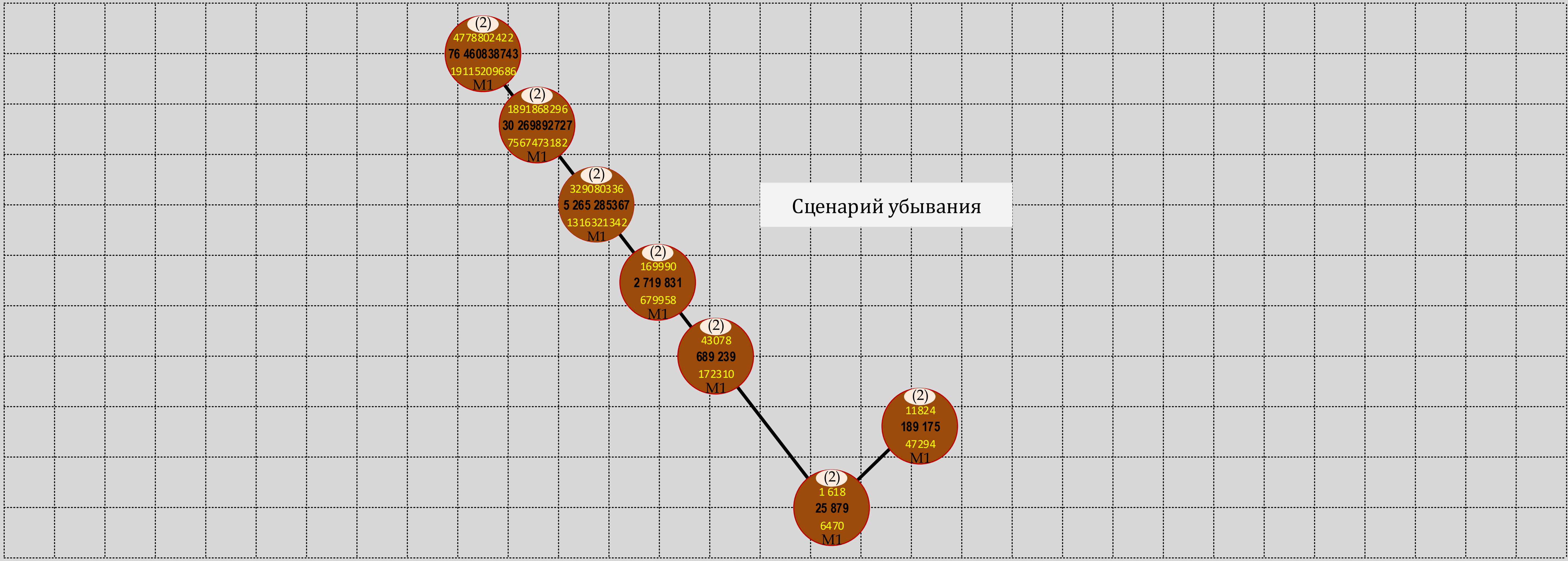
Приложение1: Рис 6.1 Маршрут исходного **“63 728 127”** в пределах ряда $(2)_s \in M1$ с нечётным порядковым номером в сценарии роста



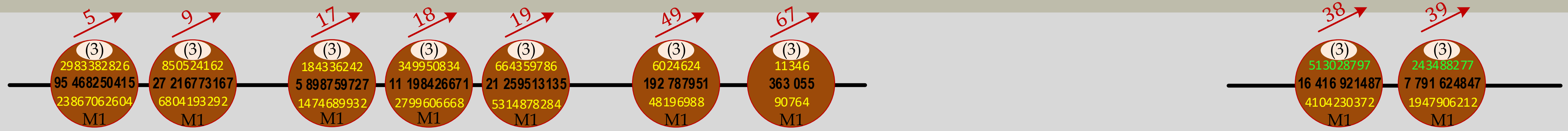
Приложение1: Рис 6.2 Траектория исходного **“63 728 127”** в пределах ряда $(2)_s \in M1$ с нечётным порядковым номером в сценарии роста.



Приложение1: Рис 7.1 Маршрут исходного **"63 728 127"** в пределах ряда $(2)_s \in$М1 с чётным порядковым номером в сценарии убывания.

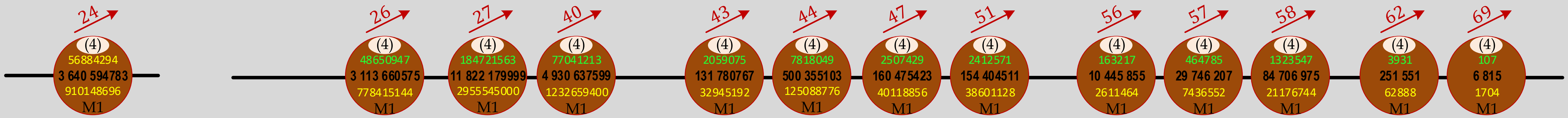


Приложение1: Рис 7.2 Траектория исходного **"63 728 127"** в пределах ряда $(2)_s \in$М1 с чётным порядковым номером в сценарии убывания.

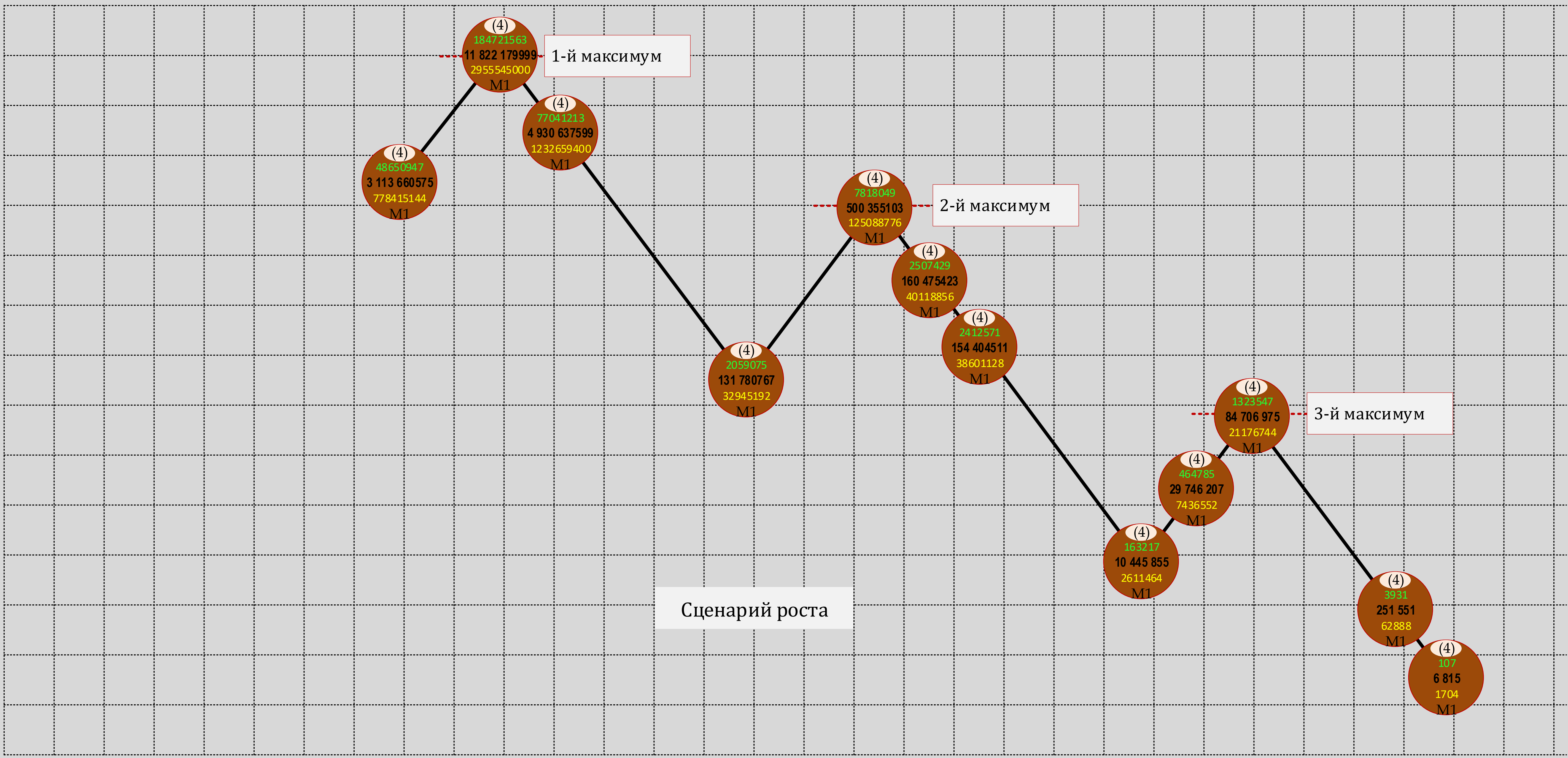


Приложение1: Рис 8.1 Маршруты исходного **"63 728 127"** в пределах ряда $(3)_s$∈M1 с чётным и с нечётным порядковым номером

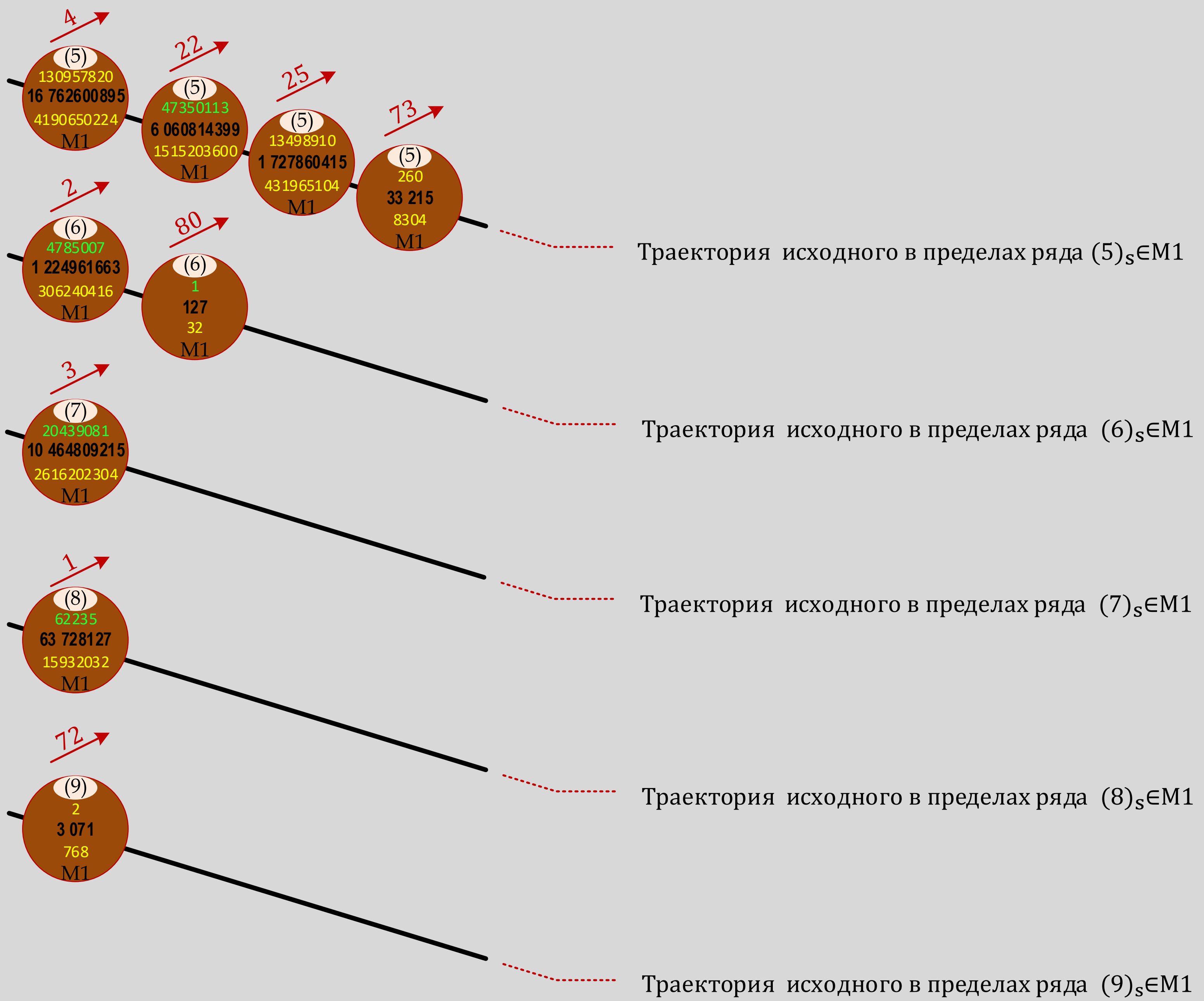
Приложение1: Рис 8.2 Траектории исходного **"63 728 127"** в пределах ряда $(3)_s$∈M1 с чётным и с нечётным порядковым номером.



Приложение1: Рис 9.1 Маршрут исходного **“63 728 127”** в пределах ряда $(4)_s \in$M1 с нечётным порядковым номером в сценарии роста



Приложение1: Рис 9.2 Траектория исходного **“63 728 127”** в пределах ряда $(4)_s \in$M1 с нечётным порядковым номером в сценарии роста

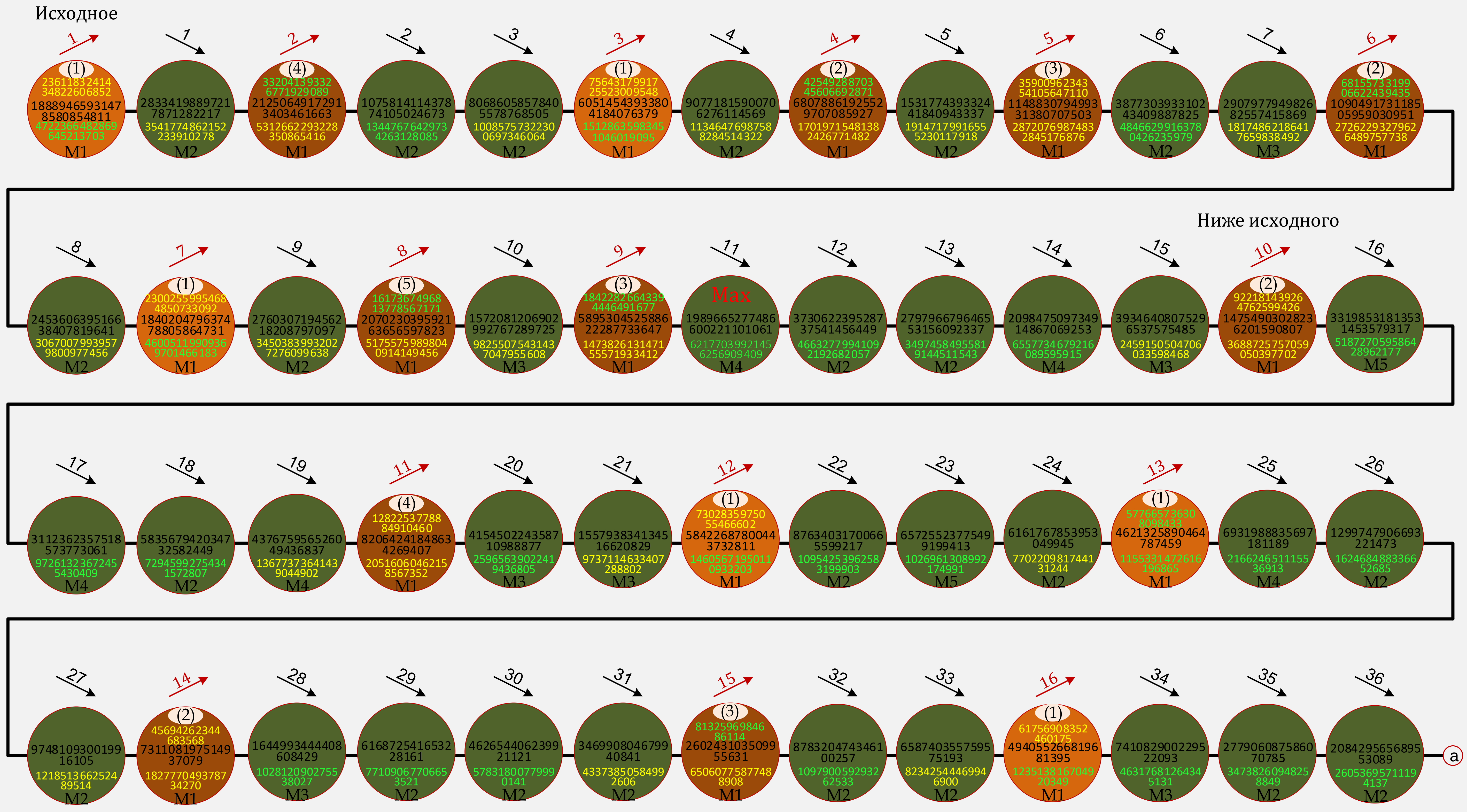


Приложение1: Рис 10 Отдельные ниспадающие траектории исходного **“63 728 127”** в пределах отдельных рядов групп $(G)_s$ЄM1

Разделение одной общей траектории на несколько параллельных в пределах закономерных рядов групп, с учётом чётности порядковых номеров «нечётных», простой способ увидеть общую закономерность. Поскольку ряды параллельные, то и закономерность они будут демонстрировать одну и ту же, совпадающую с закономерностью общей последовательности.

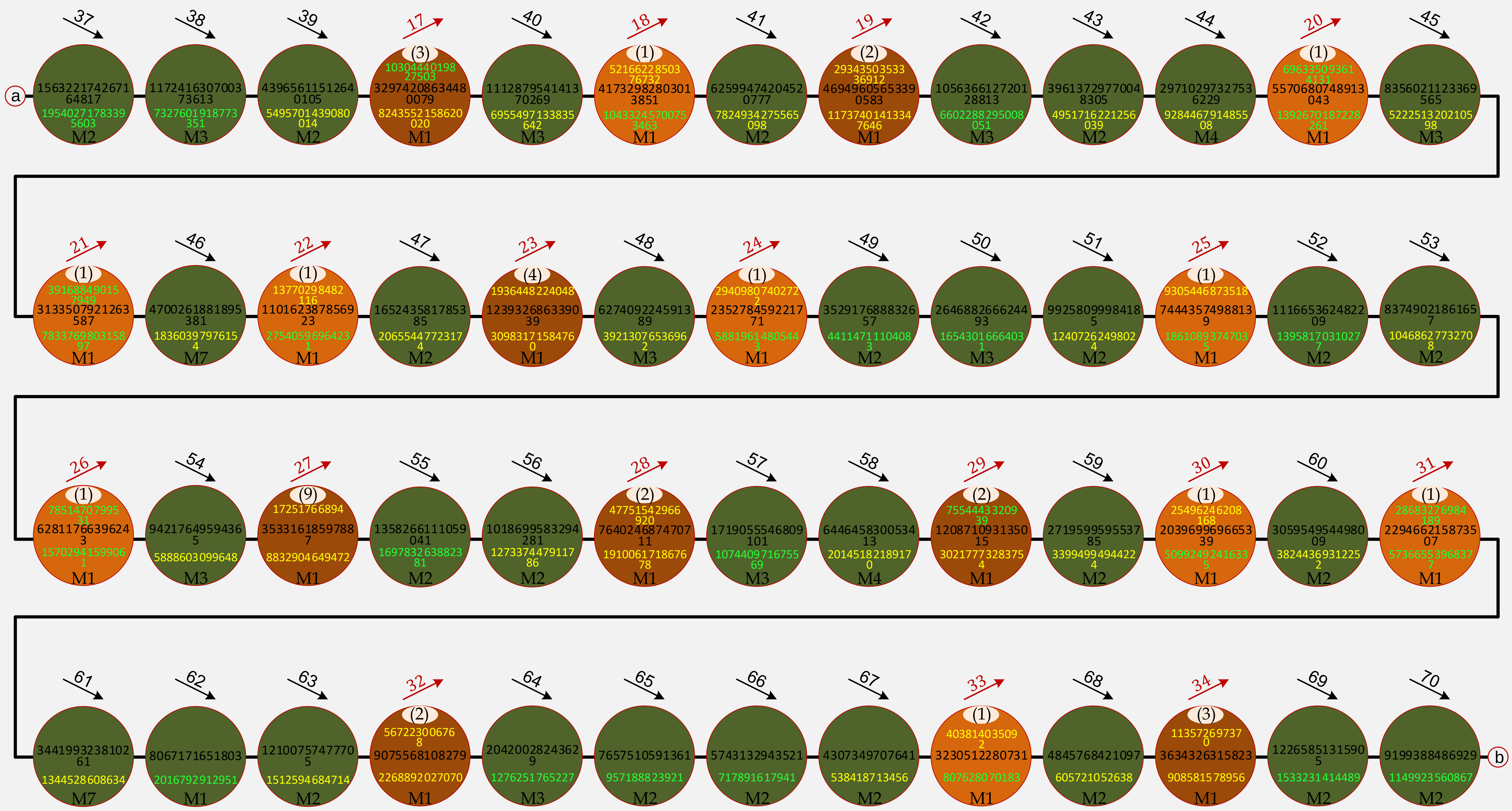
Признаком сценария роста «нечётного» для любого из рядов групп: $(2)_s$ЄM1, $(3)_s$ЄM1, $(4)_s$ЄM1 и т.д. является чётный порядковый номер «нечётного» в ряде $(1)_s$ЄM1, в позиции которого оказывается замыкающее группы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2: Последовательность **“18 889 465 931 478 580 854 811”** в зеркальной концепции (ближайшая к 27, повторяющая 27 её зеркальных шагов)



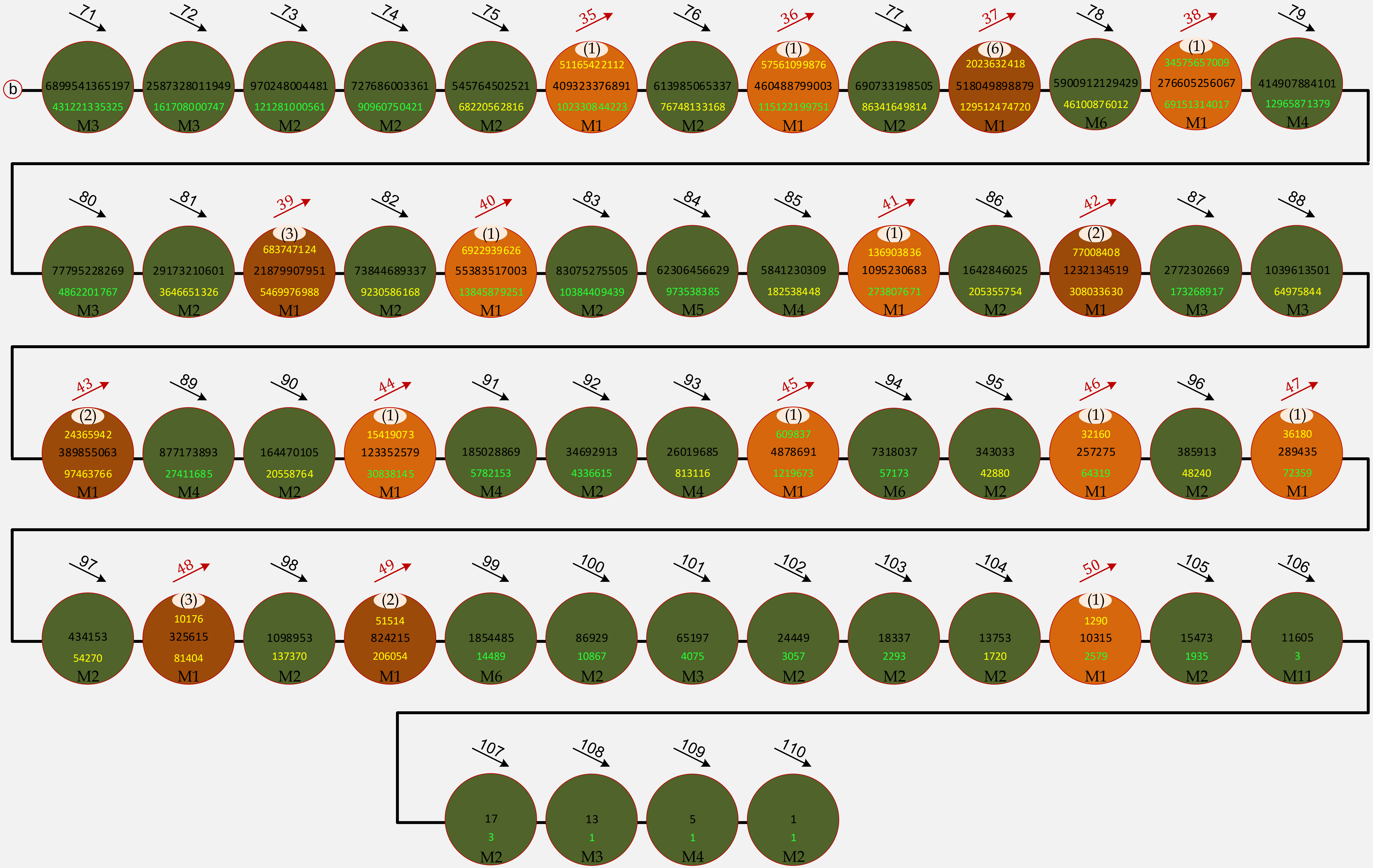
Приложение2: Рис 1.1 1-й фрагмент последовательности **“18 889 465 931 478 580 854 811”** по алгоритму Коллатца в зеркальной концепции.

(продолжение следует)

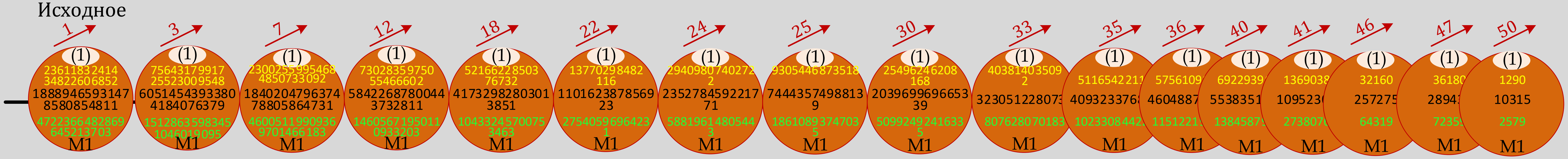


Приложение2: Рис 1.2 2-й фрагмент последовательности **“18 889 465 931 478 580 854 811”** по алгоритму Коллатца в зеркальной концепции.

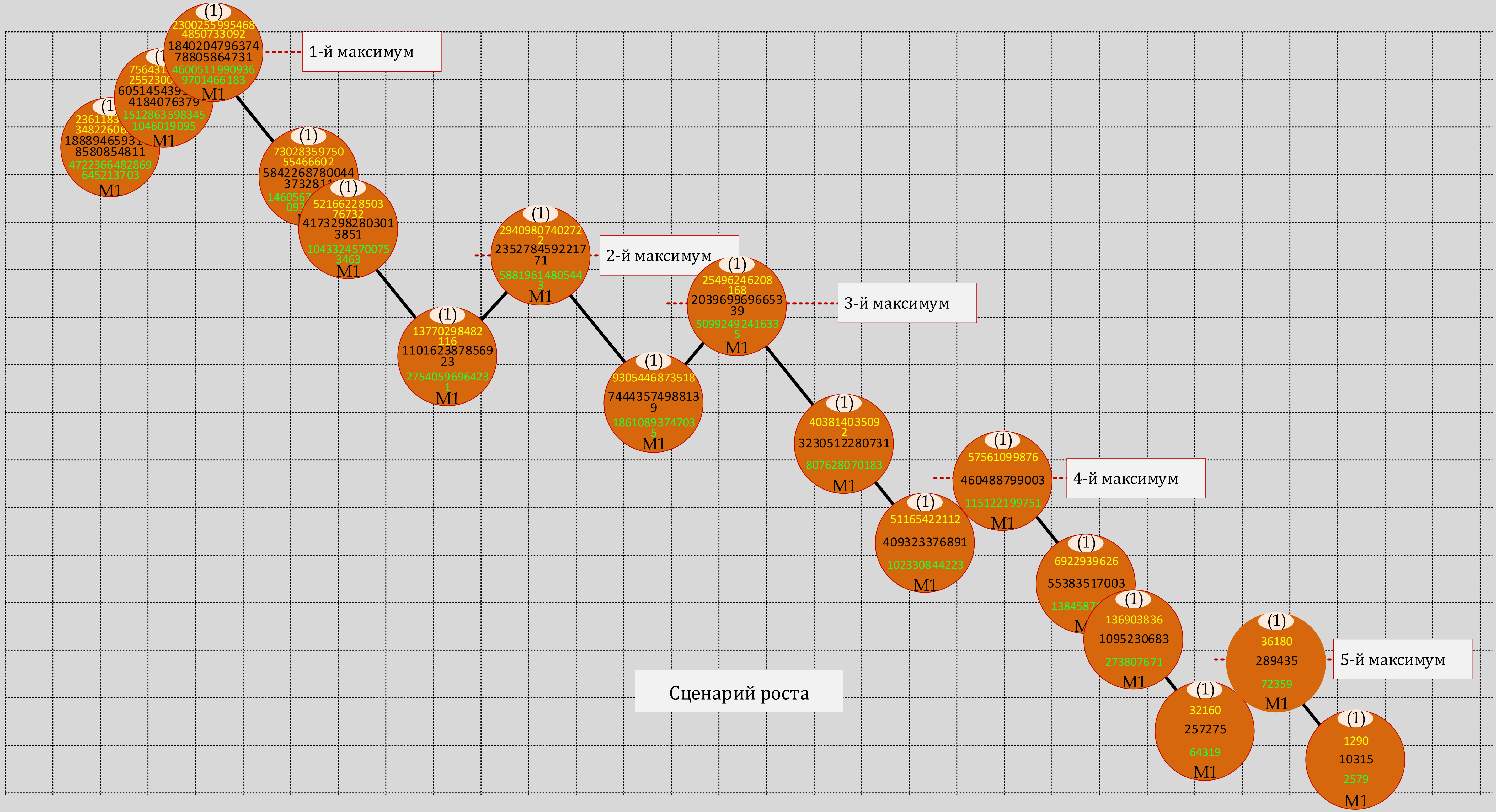
(продолжение следует)



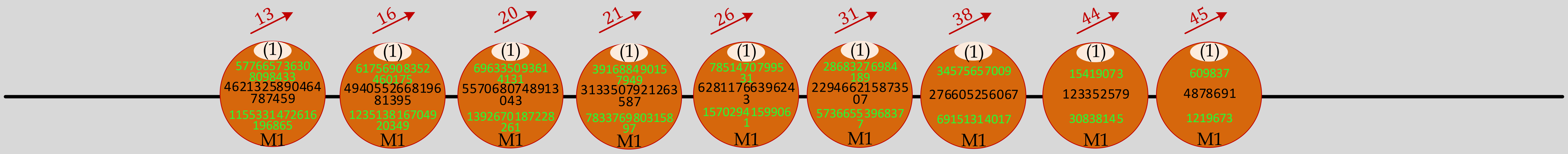
Приложение2: Рис 1.3 3-й фрагмент последовательности **“18 889 465 931 478 580 854 811”** по алгоритму Коллатца в зеркальной концепции.



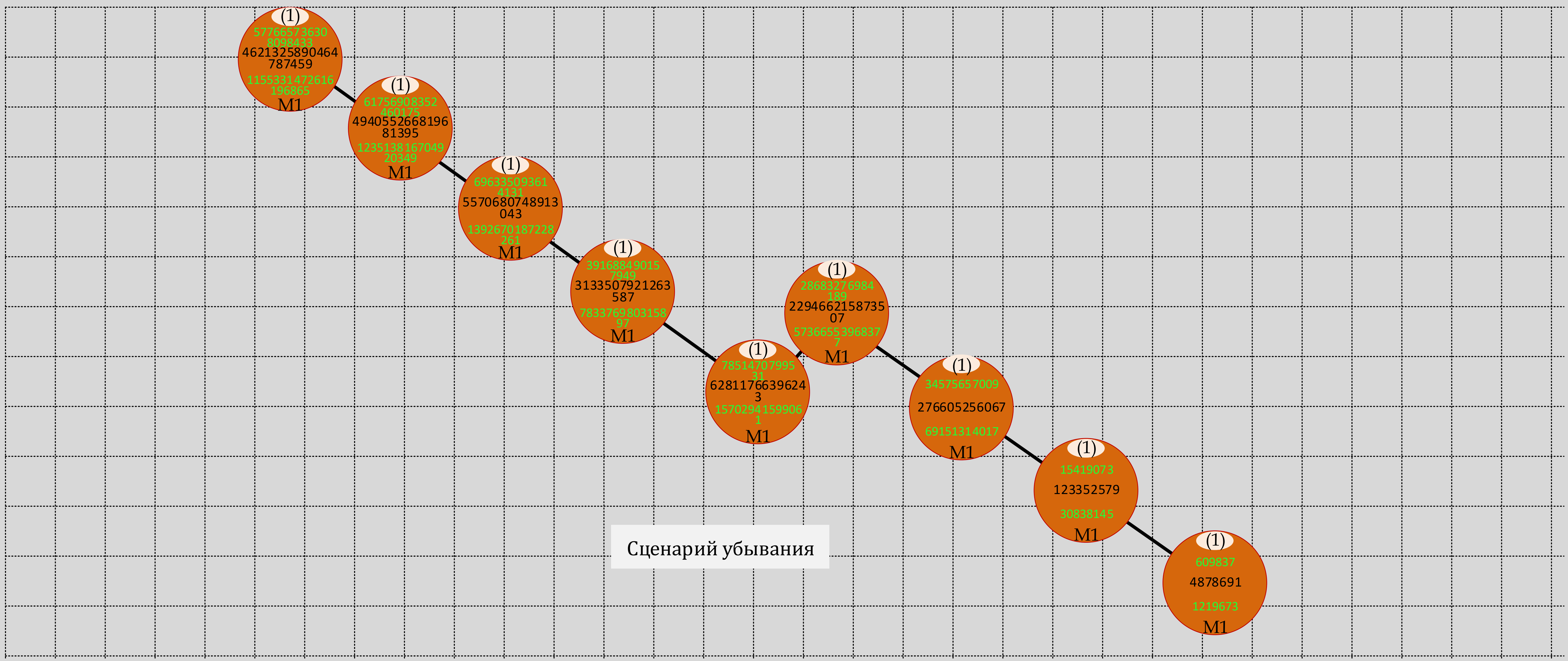
Приложение1: Рис 2.1 Маршрут **“18 889 465 931 478 580 854 811”** в пределах ряда $(1)_s \in M1$ с чётным порядковым номером в сценарии роста.



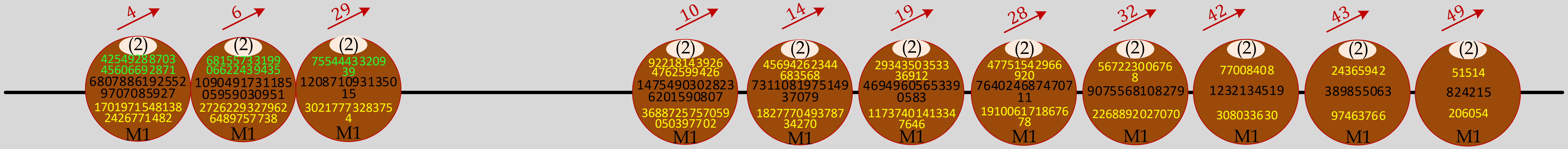
Приложение2: Рис 2.2 Траектория **“18 889 465 931 478 580 854 811”** в пределах ряда $(1)_s \in M1$ с чётным порядковым номером в сценарии роста.



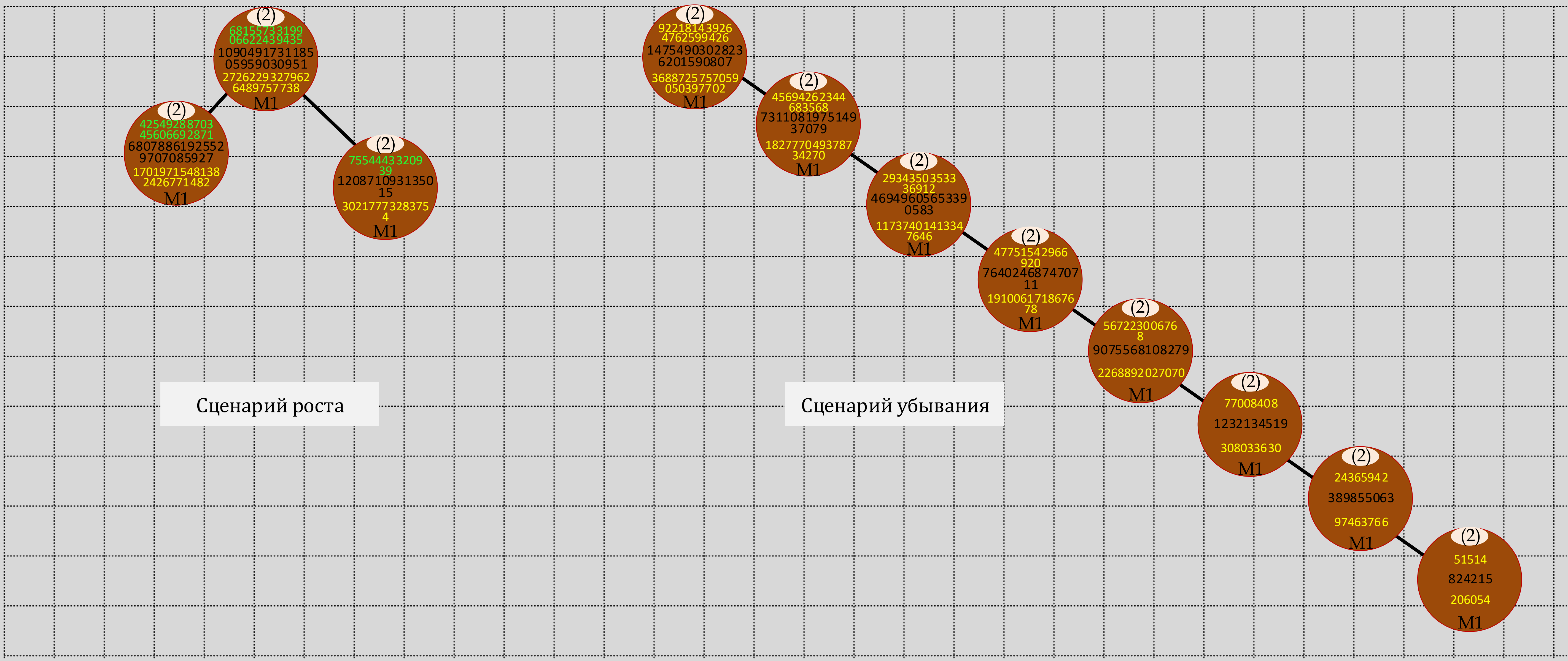
Приложение2: Рис 3.1 Маршрут **“18 889 465 931 478 580 854 811”** в пределах ряда $(1)_s \in M1$ с нечётным порядковым номером в сценарии убывания



Приложение2: Рис 3.2 Траектория **“18 889 465 931 478 580 854 811”** в пределах ряда $(1)_s \in M1$ с нечётным порядковым номером в сценарии убывания.

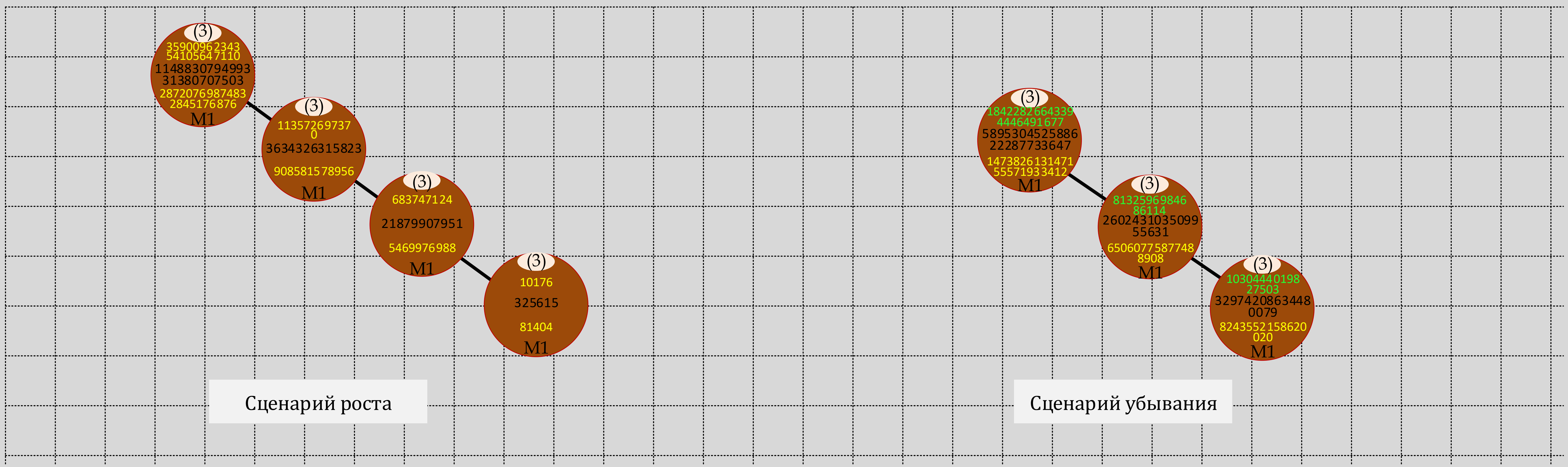


Приложение2: Рис 4.1 Маршруты **“18 889 465 931 478 580 854 811”** в пределах ряда $(2)_s \in M1$

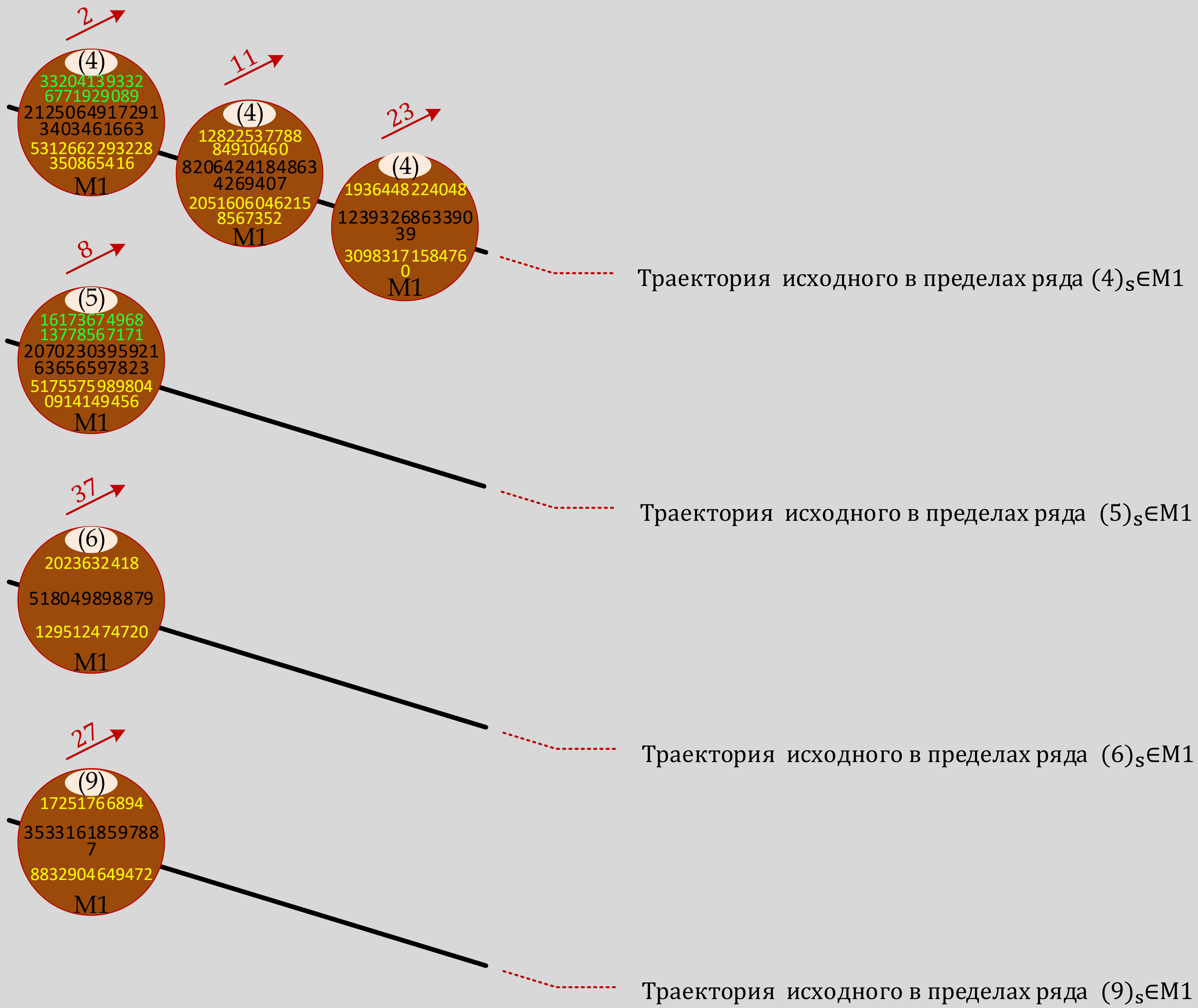


Приложение2: Рис 4.2 Траектории **“18 889 465 931 478 580 854 811”** в пределах ряда $(2)_s \in M1$.

Приложение2: Рис 5.1 Маршруты **“18 889 465 931 478 580 854 811”** в пределах ряда $(3)_s \in M1$



Приложение2: Рис 5.2 Траектории **“18 889 465 931 478 580 854 811”** в пределах ряда $(3)_s \in M1$.



Приложение2: Рис 6 Отдельные ниспадающие траектории **“18 889 465 931 478 580 854 811”** в пределах отдельных рядов групп (G)$_s$∈M1

Разделение одной общей траектории на несколько параллельных в пределах закономерных рядов групп, с учётом чётности порядковых номеров «нечётных», простой способ увидеть общую закономерность. Поскольку ряды параллельные, то и закономерность они будут демонстрировать одну и ту же, совпадающую с закономерностью общей последовательности.

Признаком сценария роста «нечётного» для любого из рядов групп: (2)$_s$∈M1, (3)$_s$∈M1, (4)$_s$∈M1 и т.д. является чётный порядковый номер «нечётного» в ряде (1)$_s$∈M1, в позиции которого оказывается замыкающее группы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3: Последовательность **“77031”** по алгоритму Коллатца в зеркальной концепции.

Приложение3: Рис 1 Последовательность **“77031”** по алгоритму Коллатца в зеркальной концепции

Библиографический список:

1. Тао, Теренс. [Электронный ресурс] // URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тао,_Теренс (дата обращения: 21.03.2025)

2. Derek Muller. Самая простая нерешённая задача – гипотеза Колатца [Veritasium]/[Электронный ресурс]//
Студия Vert Dider: сайт. - URL: https://youtu.be/QgzBDZwanWA?si=QW5HRHFjov1Y5F5l (дата обращения: 21.03.2025)