

Нелокальные однопетлевые формфакторы спектрального действия с содержанием частиц Стандартной модели

Давид Алфёров*

Мы вычисляем полные нелокальные однопетлевые формфакторы $F_1(\square/\Lambda^2)$ и $F_2(\square/\Lambda^2, \xi)$ квадратичного по кривизне сектора спектрального действия $S = \text{Tr } f(D^2/\Lambda^2)$ для всего содержания частиц Стандартной модели: 4 вещественных скаляра (дублет Хиггса), 45/2 дираковских фермионов (3 поколения) и 12 калибровочных бозонов ($SU(3) \times SU(2) \times U(1)$). С помощью ковариантной теории возмущений Барвинского–Вилковьского и диаграммного ядра теплопроводности Коделло–Занусси мы получаем результаты в замкнутой форме для каждого спинового сектора (0, 1/2, 1) в вейлевском базисе $\{C^2, R^2\}$ и собираем полные суммы Стандартной модели. Локальные пределы, определяемые стандартными коэффициентами ядра теплопроводности [1, 2], дают $\alpha_C = 13/120$ для коэффициента при квадрате тензора Вейля и $\alpha_R(\xi) = 2(\xi - 1/6)^2$ для коэффициента при R^2 , где ξ — параметр неминимальной связи поля Хиггса. Показано, что оба формфактора являются целыми функциями переменной \square/Λ^2 , что гарантирует отсутствие дополнительных полюсов пропагатора помимо имеющихся в классической теории. Мы выводим отношение c_1/c_2 в базисе $\{R^2, R_{\mu\nu}^2\}$, условие отщепления скалярного гравитона при конформной связи $\xi = 1/6$, а также ультрафиолетовое асимптотическое поведение. Формфакторы приводят к модифицированному ньютоновскому потенциалу с вычисляемыми эффективными массами $m_2 = \Lambda\sqrt{60/13}$ и $m_0 = \Lambda/\sqrt{6(\xi - 1/6)^2}$, связывая формализм спектрального действия с феноменологией Солнечной системы. Все результаты подтверждены независимыми численными вычислениями с произвольной арифметической точностью.

I. ВВЕДЕНИЕ

Принцип спектрального действия [3, 4] обеспечивает геометрическое происхождение как гравитационных, так и калибровочных взаимодействий: бозонное действие задаётся выражением $S = \text{Tr } f(D^2/\Lambda^2)$, где D — оператор Дирака некоммутативной геометрии, Λ — спектральный масштаб обрезания, а f — положительная чётная функция. На классическом уровне разложение этого следа по ядру теплопроводности воспроизводит действие Эйнштейна–Гильберта, космологическую постоянную и члены Янга–Миллса из первых нескольких коэффициентов Сили–ДеВитта [5, 6].

За рамками ведущего приближения Сили–ДеВитта спектральное действие порождает *нелокальные* квадратичные по кривизне члены, характеризующиеся зависящими от импульса формфакторами $F_1(\square/\Lambda^2)$ и $F_2(\square/\Lambda^2)$. Эти формфакторы описывают полное однопетлевое квантово-гравитационное эффективное действие порядка $\mathcal{O}(\mathcal{R}^2)$ и определяют модифицированный пропагатор гравитона, спектр массивных гравитационных мод и ультрафиолетовое поведение теории.

Ковариантная теория возмущений Барвинского–Вилковьского (БВ) [7, 8] предоставляет общий формализм для вычисления таких формфакторов для произвольного обобщённого лапласиана $\Delta = -(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + E)$ на векторном расслоении над искривлённым многообразием. Диаграммная техника ядра теплопроводности Коделло–Занусси (КЗ) [9] даёт явные выражения для пяти независимых формфакторов ($f_{\text{Ric}}, f_R, f_{RU}, f_U, f_\Omega$) через универсальную мастер-функцию $\varphi(x)$. Коэффициенты Сили–ДеВитта и их роль в спектральной геометрии

обсуждаются в [1, 2, 10–12].

В предшествующих работах формфакторы вычислялись для отдельных спиновых секторов [8, 9] или для упрощённого набора частиц [13]. В настоящей статье мы представляем первое полное вычисление для всего спектра Стандартной модели (СМ): 4 вещественных скаляра (дублет Хиггса), $N_f = 45$ вейлевских фермионов (что эквивалентно $N_D = 45/2$ дираковским фермионам) и 12 калибровочных бозонов группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Соглашение о подсчёте следует работе Коделло, Перкаччи и Рахмеди (КПР) [13].

Основные результаты:

- Замкнутые выражения для $h_C^{(s)}(x)$ и $h_R^{(s)}(x)$ при $s = 0, 1/2, 1$ в вейлевском базисе $\{C^2, R^2\}$ с корректным вычитанием духов для спина 1.
- Полные суммы СМ: $\alpha_C = 13/120$ (фиксировано содержанием СМ) и $\alpha_R(\xi) = 2(\xi - 1/6)^2$ (зависит только от параметра неминимальной связи Хиггса ξ).
- Доказательство того, что F_1 и F_2 являются целыми функциями переменной $z = \square/\Lambda^2$, что гарантирует отсутствие новых полюсов помимо унаследованных от структуры пропагатора.
- Отношение c_1/c_2 , отщепление скалярного гравитона при $\xi = 1/6$ и ультрафиолетовая асимптотика.

Структура статьи следующая. В разделе II устанавливаются соглашения и излагается формализм БВ/КЗ. В разделах III–V выводятся формфакторы для каждого спинового сектора. В разделе VI собираются полные суммы СМ и выводятся их свойства. В разделе VII обсуждается природа целых функций, ультрафиолетовое поведение и эффективные массы гравитонов. В разделе VIII проводится

* davidich.alfyrov@gmail.com

сравнение с существующими результатами и обсуждаются следствия. Заключение приведено в разд. IX.

В данной статье мы используем евклидову сигнатуру $(+, +, +, +)$, естественные единицы $c = \hbar = 1$ и соглашение для обобщённого лапласиана $\Delta = -(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + E)$ Барвинского и Вилковыского [7]. Лоренцево продолжение к сигнатуре $(-, +, +, +)$ обсуждается в разд. VIII. Сводка основных результатов приведена в таблице I.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СОГЛАШЕНИЯ

A. Обобщённый лапласиан и спектральное действие

Рассмотрим замкнутое (компактное, без края) римановое спиновое 4-многообразие (M, g) . Спектральное действие в порядке $\mathcal{O}(\mathcal{R}^2)$ в вейлевском базисе имеет вид

$$S_{\text{спец}} \Big|_{\mathcal{R}^2} = \int_M d^4x \sqrt{g} [F_1(z) C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} + F_2(z, \xi) R^2], \quad (1)$$

где $z \equiv \square/\Lambda^2$ и Λ — спектральный масштаб обрезания. Для обобщённого лапласиана $\Delta = -(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + E)$, действующего на векторном расслоении ранга d_V (так что $\text{tr } \mathbf{1} = d_V$), эндоморфизм КЗ равен $\mathbf{U} = -E$, а кривизна расслоения — $\Omega_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$.

B. Мастер-функция

Все формфакторы строятся из универсальной мастер-функции

$$\varphi(x) = \int_0^1 d\xi e^{-\xi(1-\xi)x}, \quad (2)$$

имеющей замкнутую форму

$$\varphi(x) = e^{-x/4} \sqrt{\frac{\pi}{x}} \text{erfi}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right). \quad (3)$$

Основные свойства: $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = -1/6$, тейлоровские коэффициенты $a_n = (-1)^n n!/(2n+1)!$, так что $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ с бесконечным радиусом сходимости. В частности, φ является целой функцией первого порядка (рис. 1).

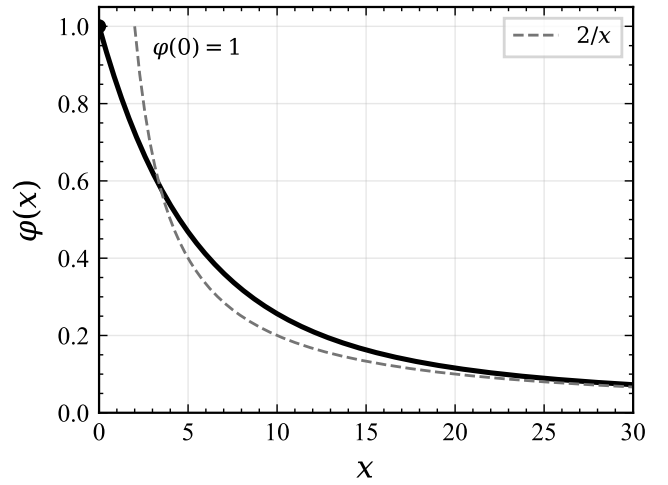


Рис. 1. Мастер-функция $\varphi(x)$, где $x = \square/\Lambda^2$. Начиная с $\varphi(0) = 1$, функция монотонно убывает и стремится к асимптотической форме $2/x$ (штриховая линия) при $x \gg 1$.

C. Формфакторы КЗ

Пять формфакторов КЗ [9]:

$$f_{\text{Ric}}(x) = \frac{1}{6x} + \frac{\varphi - 1}{x^2}, \quad (4a)$$

$$f_R(x) = \frac{\varphi}{32} + \frac{\varphi}{8x} - \frac{7}{48x} - \frac{\varphi - 1}{8x^2}, \quad (4b)$$

$$f_{RU}(x) = -\frac{\varphi}{4} - \frac{\varphi - 1}{2x}, \quad (4c)$$

$$f_U(x) = \frac{\varphi}{2}, \quad (4d)$$

$$f_\Omega(x) = -\frac{\varphi - 1}{2x}. \quad (4e)$$

Их локальные пределы: $f_{\text{Ric}}(0) = 1/60$, $f_R(0) = 1/120$, $f_{RU}(0) = -1/6$, $f_U(0) = 1/2$, $f_\Omega(0) = 1/12$.

D. Сборка в вейлевском базисе

Для любого спинового сектора формфакторы $\{C^2, R^2\}$ получаются из формфакторов КЗ с помощью правил сборки БВ. Детали зависят от эндоморфизма \mathbf{U} , кривизны расслоения $\Omega_{\mu\nu}$ и тождеств для следов, специфичных для каждого спина [8, 14]. Результат записывается в виде

$$F_i^{(s)}(z) = \frac{h_i^{(s)}(z)}{16\pi^2}, \quad i = C, R, \quad (5)$$

где $s = 0, 1/2, 1$ обозначает спин, а $h_C^{(s)}, h_R^{(s)}$ — приведённые формфакторы. Локальные пределы $\beta_W^{(s)} \equiv h_C^{(s)}(0)$ и $\beta_R^{(s)} \equiv h_R^{(s)}(0)$ представляют собой однопетлевые коэффициенты β -функции операторов C^2 и R^2 .

III. СПИН 0: ВЕЩЕСТВЕННЫЙ СКАЛЯР

Для вещественного скалярного поля с неминимальной связью $\xi R\phi^2/2$ обобщённый лапласиан имеет $\text{tr } \mathbf{1} = 1$, $\mathbf{U} = \xi R$ и $\Omega_{\mu\nu} = 0$ (тривиальное расслоение). Сборка БВ даёт

$$h_C^{(0)}(x) = \frac{1}{12x} + \frac{\varphi - 1}{2x^2}, \quad (6a)$$

$$h_R^{(0)}(x, \xi) = f_{R,\text{bis}}(x) + \xi f_{RU}(x) + \xi^2 f_U(x), \quad (6b)$$

где $f_{R,\text{bis}} = \frac{1}{3}f_{\text{Ric}} + f_R$. Локальные пределы:

$$\beta_W^{(0)} = \frac{1}{120}, \quad \beta_R^{(0)}(\xi) = \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2. \quad (7)$$

Формфакторы отдельных спиновых секторов показаны на рис. 2 и 3. Коэффициент при тензоре Вейля $\beta_W^{(0)}$ не зависит от ξ (тензор Вейля бесследовый, поэтому пропорциональный R эндоморфизм не вносит вклада в C^2). Коэффициент при R^2 обращается в нуль при конформной связи $\xi = 1/6$, что отражает конформную инвариантность безмассового конформно связанного скаляра в $d = 4$.

IV. СПИН 1/2: ДИРАКОВСКИЙ ФЕРМИОН

Для безмассового 4-компонентного дираковского фермиона квадрат оператора Дирака $D^2 = -(\nabla^* \nabla - R/4)$ даёт $\mathbf{U} = R/4$ (из формулы Лихнеровича) и $\text{tr}(\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ при $\text{tr } \mathbf{1} = 4$. Приведённые формфакторы:

$$h_C^{(1/2)}(x) = \frac{3\varphi - 1}{6x} + \frac{2(\varphi - 1)}{x^2}, \quad (8a)$$

$$h_R^{(1/2)}(x) = \frac{3\varphi + 2}{36x} + \frac{5(\varphi - 1)}{6x^2}, \quad (8b)$$

с локальными пределами

$$\beta_W^{(1/2)} = -\frac{1}{20}, \quad \beta_R^{(1/2)} = 0. \quad (9)$$

Отрицательный знак $\beta_W^{(1/2)}$ является геометрическим следствием спинорного расслоения: вклад кривизны f_Ω (от $\text{tr } \Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$) преобладает над вкладом тензора Риччи f_{Ric} в проекции на квадрат тензора Вейля, давая $h_C^{(1/2)}(0) = 2f_{\text{Ric}}(0) - f_\Omega(0) = 2/60 - 1/12 = -1/20$. Отметим, что в некоторых работах приводится абсолютное значение $|\beta_W^{(1/2)}| = 1/20$, а знак учитывается отдельно через множитель $(-1)^{2s}$ [13]; в нашем соглашении знак включён в $h_C^{(1/2)}$.

Обращение в нуль $\beta_R^{(1/2)}$ отражает конформную инвариантность безмассового действия Дирака в $d = 4$.

V. СПИН 1: КАЛИБРОВОЧНЫЙ БОЗОН

Для калибровочного бозона (поле Прока) в формализме спектрального действия обобщённый лапласиан действует на векторном расслоении с $\text{tr } \mathbf{1} = 4$, $\mathbf{U} = R_{\mu\nu}$ (тензор

Риччи как эндоморфизм) и $\Omega_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$ (тензор Римана как кривизна расслоения) [2, 14].

Неограниченные (до вычитания духов) формфакторы имеют вид [9]:

$$h_C^{(\text{unc})}(x) = \frac{2}{3}f_{\text{Ric}}(x) + \frac{1}{3}f_\Omega(x), \quad (10a)$$

$$h_R^{(\text{unc})}(x) = \frac{4}{3}f_{\text{Ric}} + 4f_R + f_{RU} + \frac{1}{3}f_U - \frac{1}{3}f_\Omega. \quad (10b)$$

Коэффициенты $(4/3, 1, 1/3, -1/3)$ при $(f_{\text{Ric}}, f_{RU}, f_U, f_\Omega)$ следуют из проекции на R^2 соответствующих инвариантов кривизны для $\mathbf{U} = R_{\mu\nu}$ и $\Omega_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$ на касательном расслоении [8, 9]; они проверяются локальным пределом $\beta_R^{(1)} = 0$.

Физические формфакторы спина 1 требуют вычитания двух скалярных духов Фаддеева–Попова (с $\mathbf{U} = 0$, $\Omega_{\mu\nu} = 0$):

$$h_i^{(1)}(x) = h_i^{(\text{unc})}(x) - 2h_i^{(0)}(x) \Big|_{\xi=0}. \quad (11)$$

Это даёт

$$h_C^{(1)}(x) = \frac{\varphi}{4} + \frac{6\varphi - 5}{6x} + \frac{\varphi - 1}{x^2}, \quad (12a)$$

$$h_R^{(1)}(x) = -\frac{\varphi}{48} + \frac{11 - 6\varphi}{72x} + \frac{5(\varphi - 1)}{12x^2}, \quad (12b)$$

с локальными пределами

$$\beta_W^{(1)} = \frac{1}{10}, \quad \beta_R^{(1)} = 0. \quad (13)$$

Результат $\beta_R^{(1)} = 0$ отражает конформную инвариантность действия Максвелла в $d = 4$. Число вычитаемых духов, равное 2 (а не 1), является существенным: неограниченный вектор даёт $\beta_W^{(\text{unc})} = 7/60$, а вычитание двух минимально связанных скалярных духов ($2 \times 1/120$) приводит к $7/60 - 1/60 = 1/10$. Это совпадает со стандартной процедурой Фаддеева–Попова [14].

VI. СБОРКА СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ

A. Содержание частиц

Содержание полей СМ, входящее в однопетлевое спектральное действие:

Тип частиц	Число	Обозначение
Вещественные скаляры (дублет Хиггса)	4	$N_s = 4$
Вейлевские фермионы (3 поколения)	45	$N_f = 45$
Калибровочные бозоны (8 + 3 + 1)	12	$N_v = 12$

Поскольку формфакторы из разд. IV определены на один 4-компонентный дираковский фермион, эффективное число дираковских фермионов равно $N_D = N_f/2 = 45/2$ в соответствии с соглашением [13].

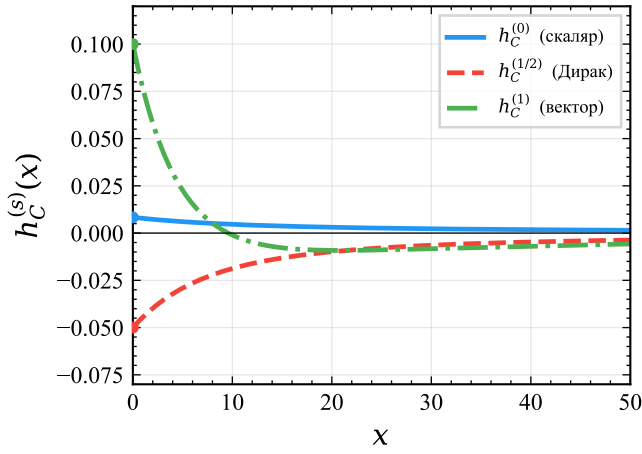


Рис. 2. Формфакторы квадрата тензора Вейля $h_C^{(s)}(x)$ для трёх спиновых секторов, где $x = \square/\Lambda^2$. Локальные пределы: $h_C^{(0)}(0) = 1/120$ (скаляр, синий), $h_C^{(1/2)}(0) = -1/20$ (Дирак, красный) и $h_C^{(1)}(0) = 1/10$ (вектор, зелёный). Все формфакторы убывают как $1/x$ при $x \rightarrow \infty$.

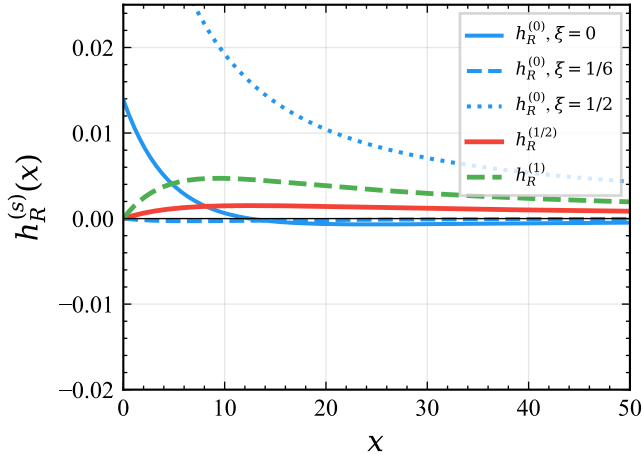


Рис. 3. Формфакторы $R^2: h_R^{(s)}(x)$, где $x = \square/\Lambda^2$. Скалярный формфактор (синий) зависит от параметра неминимальной связи ξ : он тождественно обращается в нуль при конформной связи $\xi = 1/6$ (штриховая линия) и растёт с увеличением $|\xi - 1/6|$. Вклады дираковского фермиона (красный) и вектора (зелёный) не зависят от ξ и начинаются с $h_R(0) = 0$.

В. Полный коэффициент при тензоре Вейля

Полный формфактор квадрата тензора Вейля:

$$\alpha_C(z) = N_s h_C^{(0)}(z) + N_D h_C^{(1/2)}(z) + N_v h_C^{(1)}(z). \quad (14)$$

При $z = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha_C &= 4 \cdot \frac{1}{120} + \frac{45}{2} \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) + 12 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{4 - 135 + 144}{120}, \end{aligned} \quad (15)$$

что даёт центральный результат:

$$\alpha_C = \frac{13}{120} \approx 0,1083. \quad (16)$$

Эта величина положительна и не зависит от ξ . Знаковая структура $(+4 - 135 + 144)$ показывает, что вклад векторного сектора $(+144/120)$ преобладает над вкладом фермионного сектора $(-135/120)$ с запасом $+9/120$, в то время как скалярный сектор вносит $+4/120$. Положительность α_C означает, что спин-2 гравитационная мода в линейризованной теории является духом [15] — хорошо известная особенность квадратичной гравитации.

С. Полный коэффициент при R^2

$$\alpha_R(\xi) = N_s \cdot \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 + N_D \cdot 0 + N_v \cdot 0, \quad (17)$$

откуда

$$\alpha_R(\xi) = 2 \left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2. \quad (18)$$

Вклад вносит только скалярный сектор: β_R для фермиона Дирака и для максвелловского поля обращаются в нуль в силу конформной инвариантности. Результат представляет собой полный квадрат, поэтому $\alpha_R(\xi) \geq 0$ для всех ξ , причём $\alpha_R(1/6) = 0$ при конформной связи.

Д. Пересчёт базиса и c_1/c_2

Используя тождество Гаусса–Бонне для перехода к базису $\{R^2, R_{\mu\nu}^2\}$ ($C^2 = 2R_{\mu\nu}^2 - \frac{2}{3}R^2$ с точностью до топологической плотности Эйлера), получаем $c_1 = \alpha_R - \frac{2}{3}\alpha_C$ и $c_2 = 2\alpha_C$, что даёт

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{1}{3} + \frac{120\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2}{13}. \quad (19)$$

При конформной связи $\xi = 1/6$ это сводится к $c_1/c_2 = -1/3$. При минимальной связи $\xi = 0$ получаем $c_1/c_2 = -1/13$.

Е. Отщепление скалярной моды

Комбинация $3c_1 + c_2$ определяет массу скалярного гравитона ($m_0^2 \propto \Lambda^2/(3c_1 + c_2)$). Прямое вычисление даёт

$$3c_1 + c_2 = 3\alpha_R(\xi) = 6 \left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2. \quad (20)$$

Скалярная мода отщепляется (бесконечная масса) тогда и только тогда, когда $\xi = 1/6$, что обеспечивает динамический механизм исключения скалярного сектора гравитона через конформную связь поля Хиггса.

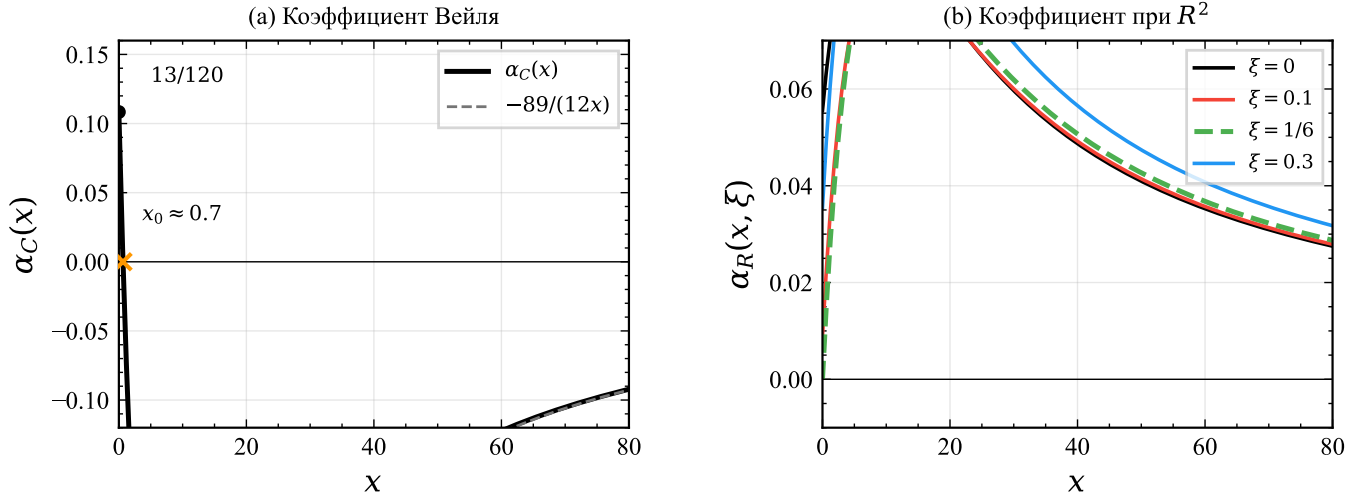


Рис. 4. Полные суммы Стандартной модели как функции $x = \square/\Lambda^2$. (a) Коэффициент при тензоре Вейля $\alpha_C(x)$ начинается с $13/120$ и пересекает нуль при $x_0 \approx 0,7$, стремясь к асимптоте $-89/(12x)$ (штриховая серая линия) при $x \gg 1$. Смена знака сигнализирует о переходе в эффективной связи при квадрате тензора Вейля. (b) Коэффициент при R^2 : $\alpha_R(x, \xi)$ для нескольких значений параметра неминимальной связи Хиггса ξ . При конформной связи $\xi = 1/6$ (зелёная штриховая линия) α_R обращается в нуль при $x = 0$ и остаётся малым при всех x .

VII. СВОЙСТВА ФОРМФАКТОРОВ

A. Природа целых функций

Поскольку $\varphi(z)$ является целой функцией первого порядка [её ряд Тейлора имеет бесконечный радиус сходимости, ср. ур. (2)], а формфакторы (6a)–(12b) представляют собой рациональные комбинации φ и $1/z$, все кажущиеся особенности при $z = 0$ устранимы (проверено по правилу Лопиталя), и каждый $h_C^{(s)}(z)$ и $h_R^{(s)}(z)$ является целой функцией. По линейности полные суммы СМ $\alpha_C(z)$ и $\alpha_R(z, \xi)$ также являются целыми функциями переменной z .

Физически формфакторы спектрального действия, таким образом, не вносят *новых полюсов* в пропагатор гра-

витона помимо классических. Любые полюса духов возникают исключительно из нулей одетого пропагатора $\Pi_{TT}(z) = 1 + \frac{13}{60} z \hat{F}_1(z)$, а не из особенностей самих F_1 или F_2 .

B. Ультрафиолетовая асимптотика

При $x \rightarrow \infty$ имеем $\varphi(x) \rightarrow 2/x + O(1/x^2)$, откуда

$$x h_C^{(0)} \rightarrow \frac{1}{12}, \quad x h_C^{(1/2)} \rightarrow -\frac{1}{6}, \quad x h_C^{(1)} \rightarrow -\frac{1}{3}. \quad (21)$$

Полный ультрафиолетовый коэффициент:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \alpha_C(x) = \frac{4}{12} - \frac{45}{12} - \frac{48}{12} = -\frac{89}{12}. \quad (22)$$

Смена знака от $\alpha_C(0) = +13/120$ к $x \alpha_C \rightarrow -89/12 < 0$ означает, что $\alpha_C(z)$ пересекает нуль при конечном $z_0 \approx 0,7$ (рис. 4a), сигнализируя о переходе в эффективном знаке связи при квадрате тензора Вейля.

C. Эффективные массы гравитонов

В линеаризованной теории на плоском фоне одетые пропагаторы спина 2 и спина 0 имеют вид

$$G_{TT} \propto \frac{1}{k^2 \Pi_{TT}(k^2/\Lambda^2)}, \quad (23)$$

$$G_s \propto \frac{1}{k^2 \Pi_s(k^2/\Lambda^2, \xi)}, \quad (24)$$

Таблица I. Сводка основных результатов. Все величины определены в тексте; Λ — спектральный масштаб обрезания, а ξ — параметр неминимальной связи Хиггса.

Величина	Значение	Ур.
α_C	$13/120 \approx 0,1083$	(16)
$\alpha_R(\xi)$	$2(\xi - 1/6)^2$	(18)
c_1/c_2	$-1/3 + 120(\xi - 1/6)^2/13$	(19)
$3c_1 + c_2$	$6(\xi - 1/6)^2$	(20)
$\lim_{x \rightarrow \infty} x \alpha_C$	$-89/12$	(22)
m_2	$\Lambda \sqrt{60/13} \approx 2,148 \Lambda$	(25)
$m_0(\xi = 0)$	$\Lambda \sqrt{6} \approx 2,449 \Lambda$	(26)
$m_2/m_0 _{\xi=0}$	$\sqrt{10/13} \approx 0,877$	(27)
$V(0)/V_N(0)$	0 (конечен в начале координат)	(28)

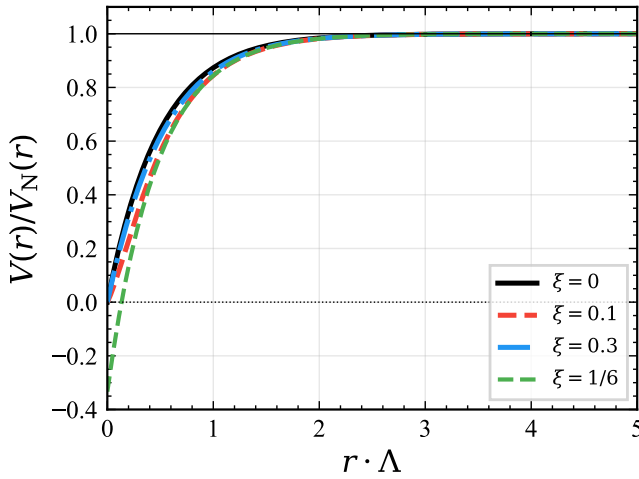


Рис. 5. Модифицированный ньютоновский потенциал $V(r)/V_N(r)$ для нескольких значений ξ как функция $r\Lambda$. При конформной связи $\xi = 1/6$ (зелёная штриховая линия) скалярная мода отщепляется, и потенциал опускается до $-1/3$ прежде, чем восстановится закон Ньютона. Для всех ξ $V(0) = 0$ (конечен в начале координат) и $V \rightarrow V_N$ при $r \gg 1/\Lambda$.

где $\Pi_{TT}(z) = 1 + (13/60)z\hat{F}_1(z)$ и $\Pi_s(z, \xi) = 1 + 6(\xi - 1/6)^2 z\hat{F}_2(z, \xi)$. Разложение вблизи $z = 0$ при $\hat{F}_1(0) = 1$ даёт:

$$m_2 = \Lambda \sqrt{\frac{60}{13}} \approx 2,148 \Lambda, \quad (25)$$

а при $\xi \neq 1/6$:

$$m_0(\xi) = \frac{\Lambda}{\sqrt{6(\xi - 1/6)^2}}. \quad (26)$$

При минимальной связи $\xi = 0$ это даёт $m_0 = \Lambda\sqrt{6} \approx 2,449 \Lambda$. Отношение масс

$$\left. \frac{m_2}{m_0} \right|_{\xi=0} = \sqrt{\frac{10}{13}} \approx 0,877 \quad (27)$$

фиксировано содержанием частиц СМ и не зависит от Λ .

Модифицированный ньютоновский потенциал в линеаризованной теории [15]:

$$\frac{V(r)}{V_N(r)} = 1 - \frac{4}{3}e^{-m_2 r} + \frac{1}{3}e^{-m_0 r}, \quad (28)$$

который показан на рис. 5. При $r = 0$ экспоненты компенсируются, давая $V(0) = 0$ и конечный гравитационный потенциал в начале координат. Закон Ньютона восстанавливается при $r \gg 1/\Lambda$.

VIII. ОБСУЖДЕНИЕ

A. Сравнение с существующими результатами

Локальные пределы $(\beta_W^{(s)}, \beta_R^{(s)})$ согласуются с установленными результатами работ [11, 13–15], сведёнными в

Таблица II. Однопетлевые коэффициенты β -функции $\beta_W^{(s)} \equiv h_C^{(s)}(0)$ и $\beta_R^{(s)} \equiv h_R^{(s)}(0)$ для каждого спинного сектора в сравнении с литературой. Знаковое соглашение для спина 1/2 явно включает множитель $(-1)^{2s}$; КПР [13] приводят значение без знака $|\beta_W^{(1/2)}| = 1/20$. КЗ = Коделло–Занусси [9], ПТ = Паркер–Томс [14], С77 = Стелле [15].

Спин	$\beta_W^{(s)}$	Лит.	$\beta_R^{(s)}$	Лит.
0	$\frac{1}{120}$	КЗ, ПТ	$\frac{1}{2}(\xi - \frac{1}{6})^2$	ПТ
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{20}$	КЗ, КПР	0	КЗ, ПТ
1	$\frac{1}{10}$	С77, КПР	0	КЗ, ПТ
СМ	$\frac{13}{120}$	–	$2(\xi - \frac{1}{6})^2$	–

таблицу II. В частности, коэффициент при тензоре Вейля для СМ, $13/120$, может быть разложен как

$$\frac{13}{120} = \frac{N_s}{120} - \frac{N_D}{20} + \frac{N_v}{10}, \quad (29)$$

что совпадает с общей формулой из [13] при $\delta_s = 1/120$, $|\delta_f| = 1/20$ (на один дираковский фермион, без знака в их соглашении) и $\delta_v = 1/10$ (на один калибровочный бозон, после вычитания духов).

Нелокальные формфакторы $h_C^{(s)}(x)$ и $h_R^{(s)}(x)$ сводятся к выражениям КЗ [9] при указании эндоморфизма Лихнеровича $E = -R/4$ для дираковского сектора и числа вычитаемых духов, равного 2, для сектора калибровочных бозонов.

В. Роль неминимальной связи

Параметр ξ входит исключительно через скалярный сектор и влияет только на α_R (но не на α_C). Это имеет два следствия:

1. Спектр спин-2 гравитона (Π_{TT} , массы духов, ультрафиолетовое поведение) полностью не зависит от ξ и, следовательно, является устойчивым следствием формализма.
2. Скалярный сектор гравитона управляем: при $\xi = 1/6$ весь сектор R^2 обращается в нуль, и скалярная мода отщепляется. Это обеспечивает естественное разрешение проблемы скалярного духа через конформную связь.

С. Лоренцево продолжение

Вычисленные здесь формфакторы являются евклидовыми ($\square_E > 0$). Лоренцевы формфакторы получают-ся вick-поворотом $z_E \rightarrow -z_L$, т.е. $F_i(\square_E/\Lambda^2) \rightarrow F_i(-\square_L/\Lambda^2)$. Поскольку $\varphi(z)$ является целой функцией,

это продолжение корректно определено для всех z . Полюса одетого пропагатора (массы духов) находятся из решения уравнения $\Pi_{TT}(-z_L) = 0$ и обсуждаются в сопровождающей статье.

D. Следствия для нелокальной гравитации

Природа целых функций формфакторов связывает спектральное действие с программой нелокальной гравитации (гравитации с бесконечным числом производных) [16–18], где целые функции от \square вводятся для улучшения ультрафиолетового поведения. В спектральном действии эти формфакторы возникают *производным* образом из ядра теплопроводности, а не постулируются. Однопетлевая степень расходимости снижается с $D = 4$ (гравитация Эйнштейна) до $D = 0$ (логарифмическая), что согласуется с результатами [15] для локальной квадратичной гравитации, но с дополнительной структурой зависящих от импульса формфакторов, модифицирующих ультрафиолетовое поведение на всех масштабах.

IX. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы вычислили полные нелокальные однопетлевые формфакторы спектрального действия со всем содержанием частиц Стандартной модели. Центральными результатами являются определяемый СМ коэффициент при тензоре Вейля $\alpha_C = 13/120$ и зависящий от ξ коэффициент при R^2 : $\alpha_R(\xi) = 2(\xi - 1/6)^2$, а также замкнутые выражения (6)–(12) для каждого спинового сектора.

Формфакторы являются целыми функциями переменной \square/Λ^2 , что гарантирует отсутствие новых полю-

сов пропагатора, и дают эффективные массы гравитонов $m_2 = \Lambda\sqrt{60/13}$ (спин 2) и $m_0 = \Lambda/\sqrt{6(\xi - 1/6)^2}$ (спин 0), определяемые спектром СМ. Скалярный гравитон отщепляется при конформной связи $\xi = 1/6$, а ультрафиолетовое поведение является логарифмическим ($D = 0$), что улучшает ситуацию по сравнению с гравитацией Эйнштейна ($D = 4$).

Полученные результаты закладывают основу для систематического исследования квантово-гравитационной феноменологии спектрального действия, включая модифицированный ньютоновский потенциал, параметризованное постньютоновское приближение (ПП-параметры), распространение гравитационных волн и структуру унитарности, которые будут представлены в сопровождающих статьях.

ACKNOWLEDGMENTS

Автор благодарит Александра Саматю за помощь в исследованиях. Все символьные результаты были проверены численно с точностью ≥ 100 значащих цифр с помощью `mpmath` и сопоставлены с оригинальными выражениями КЗ из [9] и коэффициентами Сили–ДеВитта из [2, 11].

ДОСТУПНОСТЬ ДАННЫХ

Вычислительные инструменты, использованные в данной работе, включая реализации всех формфакторов с произвольной точностью, доступны у автора по обоснованному запросу.

-
- [1] P. B. Gilkey, The spectral geometry of a riemannian manifold, *J. Diff. Geom.* **10**, 601 (1975).
 - [2] D. V. Vassilevich, Heat kernel expansion: user’s manual, *Phys. Rept.* **388**, 279 (2003), arXiv:hep-th/0306138.
 - [3] A. H. Chamseddine and A. Connes, The spectral action principle, *Commun. Math. Phys.* **186**, 731 (1997), arXiv:hep-th/9606001.
 - [4] A. H. Chamseddine and A. Connes, Inner fluctuations of the spectral action, *J. Geom. Phys.* **57**, 1 (2006), arXiv:hep-th/0605011.
 - [5] A. H. Chamseddine and A. Connes, Noncommutative geometry as a framework for unification of all fundamental interactions including gravity. part i, *Fortsch. Phys.* **58**, 553 (2010), arXiv:1004.0464 [hep-th].
 - [6] W. D. van Suijlekom, *Noncommutative Geometry and Particle Physics* (Springer, 2015).
 - [7] A. O. Barvinsky and G. A. Vilkovisky, The generalized schwinger-dewitt technique in gauge theories and quantum gravity, *Phys. Rept.* **119**, 1 (1985).
 - [8] A. O. Barvinsky and G. A. Vilkovisky, Beyond the schwinger-dewitt technique: converting loops into trees and in-in currents, *Nucl. Phys. B* **282**, 163 (1987).
 - [9] A. Codello and O. Zanusso, On the non-local heat kernel expansion, *J. Math. Phys.* **54**, 013513 (2013), arXiv:1203.2034 [math-ph].
 - [10] B. S. DeWitt, Dynamical theory of groups and fields, *Conf. Proc. C* **630701**, 585 (1964).
 - [11] I. G. Avramidi, Heat kernel approach in quantum field theory, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **104**, 3 (2002), arXiv:math-ph/0107018.
 - [12] D. V. Fursaev and D. V. Vassilevich, *Operators, Geometry and Quanta: Methods of Spectral Geometry in Quantum Field Theory* (Springer, 2011).
 - [13] A. Codello, R. Percacci, and C. Rahmede, Investigating the ultraviolet properties of gravity with a wilsonian renormalization group equation, *Annals Phys.* **324**, 414 (2009), arXiv:0805.2909 [hep-th].
 - [14] L. Parker and D. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity* (Cambridge University Press, 2009).
 - [15] K. S. Stelle, Renormalization of higher-derivative quantum gravity, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
 - [16] L. Modesto, Super-renormalizable quantum gravity, *Phys. Rev. D* **86**, 044005 (2012), arXiv:1107.2403 [hep-th].

- [17] E. T. Tomboulis, Superrenormalizable gauge and gravitational theories, [arXiv:hep-th/9702146](https://arxiv.org/abs/hep-th/9702146) (1997), preprint.
- [18] T. Biswas, E. Gerber, A. Mazumdar, and S. Talaganis, Towards singularity- and ghost-free theories of gravity, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 031101 (2012), [arXiv:1110.5249](https://arxiv.org/abs/1110.5249) [gr-qc].