Мгновенная инверсия в алгебрах Клиффорда произвольной размерности

Автор: М. В. Костюк

ORCID: 0009-0007-1155-9060

DOI первой работы: 10.24108/preprints-3114411

DOI второй работы: 10.24108/preprints-3114788

АННОТАЦИЯ

В предыдущей работе

[10.24108/preprints-3114411]

была установлена формула мгновенной инверсии для элементов вида $S = a(1 + e_1 + \dots + e_{d-1})$ в классических алгебрах с делением: вещественных числах ($d=1$), комплексных числах ($d=2$), кватернионах ($d=4$) и октонионах ($d=8$). Доказательство опиралось только на антикоммутацию мнимых единиц и условие $e_i^2 = -1$.

В настоящей работе мы показываем, что эта формула справедлива для любой целой размерности $d \ge 1$ в алгебрах Клиффорда $\operatorname{Cl}(0, d-1)$. Более того, все 2^d знакочередующихся диагональных элементов класса I (вида $a(\varepsilon_0 + \sum \varepsilon_i e_i)$) и 2^d элементов класса II (чисто мнимых) обращаются по единой формуле с коэффициентом $1/(ad)$, который выносится в таблицу МИ-1.

Для иллюстрации универсальности конструкции вводится понятие РОВ-чисел (Разности Обратных Величин):

$$\delta_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

На их основе строятся реки — суммы геометрических прогрессий с основанием 10, дающие в пределе $\sum_{n=1}^{9} R_n = 1$. Затем конструкция обобщается на произвольную размерность d:

$$R_n^{(d)} = \frac{5}{9 T_n} \cdot \frac{\overline{U_d}}{d}, \quad \text{где } T_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

и доказывается, что $\sum_{n=1}^{9} R_n^{(d)} = U_d^{-1}$. Тем самым числовые реки оказываются частным случаем общей алгебраической теории.

Построена таблица МИ-1 — универсальный справочник коэффициентов $1/(ad)$ для $a,d = 1,\dots,8$. Показано, что каждая дробь $1/k$ встречается в таблице $\sigma_0(k)$ раз (число делителей), а диагональ $a = d$ дает ряд обратных квадратов $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$. Дополнительно установлено, что для фиксированного сдвига $k \ge 0$ сумма по диагонали $d = a + k$ равна $S_k = H_k/k$, где H_k — гармоническое число (см. раздел 5.2).

В заключительном разделе мы обобщаем конструкцию рек на произвольное основание $B \ge 2$ и показываем, что сумма $B-1$ рек также равна U_d^{-1}. Рассматривается пример седенионов ($d=16$), демонстрирующий работу формулы для произвольных размерностей. Формулируется связь с фрактальной размерностью $\dim_H = \log_B((B-1)2^d)$, которая станет предметом следующей работы

[10.24108/preprints-3114788]

Ключевые слова: алгебры Клиффорда, универсальная инверсия, гиперкомплексные числа, функция делителей, Базельская задача, треугольные числа, аналитическое продолжение, фракталы.

---

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была открыта формула мгновенной инверсии для элементов

$$S_d(a) = a(1 + e_1 + \dots + e_{d-1})$$

в четырех классических алгебрах с делением: $\mathbb{R}$ (d=1), $\mathbb{C}$ (d=2), $\mathbb{H}$ (d=4), $\mathbb{O}$ (d=8). Доказательство опиралось только на два свойства:

$$e_i^2 = -1, \qquad e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j).$$

Ни ассоциативность, ни существование нормы, ни замкнутость относительно умножения для этого не нужны. Достаточно лишь того, что мнимые единицы антикоммутируют и их квадрат отрицателен.

Возникает естественный вопрос: работает ли эта магия для других размерностей? Например, можно ли взять 3 мнимые единицы e_1, e_2, e_3 с $e_i^2 = -1$ и $e_i e_j = -e_j e_i$ и получить обратный к $a(1 + e_1 + e_2)$ простым изменением знаков?

Ответ — да. Более того, формула справедлива для любой целой размерности $d \ge 1$ в алгебрах Клиффорда $\operatorname{Cl}(0, d-1)$. В данной работе мы доказываем это обобщение и показываем, что все знакочередующиеся диагональные элементы (вершины гиперкуба) обращаются по единой формуле.

Для наглядной иллюстрации универсальности конструкции мы вводим РОВ-числа (Разности Обратных Величин) и строим на их основе реки — суммы геометрических прогрессий, которые в вещественном случае дают единицу, а в высших размерностях — обратный элемент U_d^{-1}.

---

2. РОВ-ЧИСЛА И РЕКИ В ВЕЩЕСТВЕННОМ СЛУЧАЕ (d=1)

2.1. Определение РОВ-чисел

Рассмотрим разности соседних обратных натуральных чисел:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n = 1,2,3,\dots$$

Определение. Назовем эти величины РОВ-числами (Разности Обратных Величин):

$$\boxed{\delta_n := \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}}.$$

Для первых девяти значений получаем таблицу:

n	$\delta_n = 1/n - 1/(n+1)$	Результат
1	1/1 - 1/2	1/2
2	1/2 - 1/3	1/6
3	1/3 - 1/4	1/12
4	1/4 - 1/5	1/20
5	1/5 - 1/6	1/30
6	1/6 - 1/7	1/42
7	1/7 - 1/8	1/56
8	1/8 - 1/9	1/72
9	1/9 - 1/10	1/90

Фундаментальное свойство (телескопичность):

$$\sum_{n=1}^{N} \delta_n = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

В частности, $\sum_{n=1}^{9} \delta_n = 1 - 1/10 = 9/10$.

2.2. Масштабирование по декадам

Для каждого фиксированного $n = 1,\dots,9$ рассмотрим последовательность:

$$\delta_n,\ \frac{\delta_n}{10},\ \frac{\delta_n}{100},\ \frac{\delta_n}{1000},\ \dots$$

Это соответствует разностям обратных величин в первой, второй, третьей и последующих декадах.

2.3. Реки (суммирование по декадам)

Для каждого $n = 1,\dots,9$ просуммируем все члены по декадам (геометрическая прогрессия со знаменателем 1/10):

$$R_n = \delta_n + \frac{\delta_n}{10} + \frac{\delta_n}{100} + \cdots = \delta_n \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = \delta_n \cdot \frac{10}{9}.$$

Определение. Величина R_n называется рекой для фиксированного n.

Так как $\delta_n = 1/(n(n+1))$, можно выразить реку через треугольные числа $T_n = n(n+1)/2$:

$$\delta_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2T_n},$$

следовательно,

$$\boxed{R_n = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{2T_n} = \frac{5}{9T_n}}.$$

2.4. Полная таблица рек для $d=1$

n	$T_n = n(n+1)/2$	$R_n = 5/(9T_n)$	Числовое значение
1	1	5/9	0.555555...
2	3	5/27	0.185185...
3	6	5/54	0.092592...
4	10	5/90 = 1/18	0.055555...
5	15	5/135 = 1/27	0.037037...
6	21	5/189	0.026455...
7	28	5/252	0.019841...
8	36	5/324	0.015432...
9	45	5/405 = 1/81	0.012345...

Сумма всех девяти рек:

$$\sum_{n=1}^{9} R_n = \frac{10}{9} \sum_{n=1}^{9} \delta_n = \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{10} = 1.$$

---

3. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ОСНОВА: УНИВЕРСАЛЬНАЯ ИНВЕРСИЯ ДЛЯ ЛЮБОЙ РАЗМЕРНОСТИ

3.1. Определение алгебры Клиффорда $\operatorname{Cl}(0, d-1)$

Пусть $d \ge 1$ — произвольное натуральное число. Алгебра Клиффорда $\operatorname{Cl}(0, d-1)$ порождается элементами $e_1, \dots, e_{d-1}$ с соотношениями:

$$e_i^2 = -1, \qquad e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j).$$

Базис алгебры (как векторного пространства) состоит из 1 и всех произведений $e_{i_1} e_{i_2} \dots$ $(i_1 < \dots < i_k)$. Размерность алгебры равна 2^{d-1}. Для $d=1$ множество $\{e_i\}$ пусто, и алгебра совпадает с $\mathbb{R}$.

Для доказательства формулы инверсии нам понадобится только вычисление произведения $(\varepsilon_0 + v)(\varepsilon_0 - v)$, где $v = \sum \varepsilon_i e_i$.

3.2. Фундаментальное тождество

Лемма 1. Для любых знаков $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1} \in \{+1, -1\}$ и вектора $v = \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i$ выполняется

$$(\varepsilon_0 + v)(\varepsilon_0 - v) = d.$$

Доказательство.

$$(\varepsilon_0 + v)(\varepsilon_0 - v) = \varepsilon_0^2 - v^2 = 1 - v^2.$$

Вычислим v^2:

$$v^2 = \left(\sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{d-1} (\varepsilon_i e_i)^2 + \sum_{i \neq j} (\varepsilon_i e_i)(\varepsilon_j e_j).$$

Так как $\varepsilon_i^2 = 1$ и $e_i^2 = -1$, первая сумма равна $-(d-1)$. В силу антикоммутации $e_i e_j = -e_j e_i$ $(i \neq j)$, для каждой пары (i,j)

слагаемые $\varepsilon_i \varepsilon_j e_i e_j$ и $\varepsilon_j \varepsilon_i e_j e_i$ взаимно уничтожаются. Поэтому $v^2 = -(d-1)$. Следовательно,

$$(\varepsilon_0 + v)(\varepsilon_0 - v) = 1 - (-(d-1)) = d. \quad \blacksquare$$

3.3. Универсальная формула инверсии (класс I)

Теорема 1. Для любого ненулевого вещественного числа a и элемента

$$S = a(\varepsilon_0 + v), \quad \text{где } v = \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i,$$

обратный элемент существует и равен

$$\boxed{S^{-1} = \frac{1}{a d}\,(\varepsilon_0 - v)}.$$

Доказательство.

$$S \cdot \frac{1}{a d}(\varepsilon_0 - v) = \frac{1}{d} (\varepsilon_0 + v)(\varepsilon_0 - v) = \frac{d}{d} = 1. \quad \blacksquare$$

3.4. Чисто мнимый случай (класс II)

Рассмотрим алгебру, состоящую только из мнимых единиц $\{e_1, \dots, e_d\}$ с теми же соотношениями. Для $w = \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i e_i$ имеем $w^2 = -d$.

Теорема 2. Для любого ненулевого a и элемента $T = a w$ обратный равен

$$\boxed{T^{-1} = -\frac{1}{a d}\,w}.$$

Доказательство. $w \cdot (-w) = -w^2 = d$, поэтому $T \cdot (-\frac{1}{a d} w) = \frac{1}{d} w(-w) = 1$. ∎

3.5. Все знакочередующиеся диагональные элементы и вершины гиперкуба

3.5.1. Определение классов

Для фиксированных a и d:

- Класс I (диагональные элементы с единицей):

  $$S_{\varepsilon} = a\left(\varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i\right), \quad \varepsilon_i \in \{\pm1\}.$$

  Всего таких элементов 2^d (каждый из d знаков $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1}$ выбирается независимо).
- Класс II (чисто мнимые элементы):

  $$T_{\varepsilon} = a \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i e_i, \quad \varepsilon_i \in \{\pm1\}.$$

  Всего таких элементов также 2^d.

Общее количество элементов с мгновенной инверсией по единой формуле:

$$2^d + 2^d = 2^{d+1}.$$

3.5.2. Геометрическая интерпретация: вершины гиперкуба

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^d$ с координатами $(x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$.

Гиперкуб $[-1, 1]^d$ имеет 2^d вершин, координаты которых суть $\varepsilon_i = \pm1$.

Отождествим элемент класса I

$$S_{\varepsilon} = a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_{d-1} e_{d-1})$$

с вершиной гиперкуба $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1})$.

Тогда формула инверсии

$$S_{\varepsilon}^{-1} = \frac{1}{a d}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 e_1 - \dots - \varepsilon_{d-1} e_{d-1})$$

соответствует отображению вершины $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1})$ в вершину

$$(\varepsilon_0, -\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_{d-1}),$$

умноженную на скаляр $\frac{1}{a d}$.

Геометрический смысл:

- Первая координата (ε_0) остается неизменной.
- Все остальные координаты меняют знак.
- Происходит масштабирование на $\frac{1}{a d}$.

Это отображение можно интерпретировать как отражение относительно гиперплоскости $x_1 = x_2 = \dots = x_{d-1} = 0$ (т.е. относительно оси, проходящей через вершины с одинаковым знаком первой координаты), с последующим сжатием.

3.5.3. Таблица соответствия для малых размерностей

Для наглядности приведем соответствие между знаками ε_i и вершинами гиперкуба для $d = 3$ (куб в $\mathbb{R}^3$).

Вершина $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$	Элемент $S = a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2)$	Обратный $\frac{1}{a \cdot 3}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 e_1 - \varepsilon_2 e_2)$
(+,+,+)	$a(1 + e_1 + e_2)$	$\frac{1}{3a}(1 - e_1 - e_2)$
(+,+,-)	$a(1 + e_1 - e_2)$	$\frac{1}{3a}(1 - e_1 + e_2)$
(+,-,+)	$a(1 - e_1 + e_2)$	$\frac{1}{3a}(1 + e_1 - e_2)$
(+,-,-)	$a(1 - e_1 - e_2)$	$\frac{1}{3a}(1 + e_1 + e_2)$
(-,+,+)	$a(-1 + e_1 + e_2)$	$\frac{1}{3a}(-1 - e_1 - e_2)$
(-,+,-)	$a(-1 + e_1 - e_2)$	$\frac{1}{3a}(-1 - e_1 + e_2)$
(-,-,+)	$a(-1 - e_1 + e_2)$	$\frac{1}{3a}(-1 + e_1 - e_2)$
(-,-,-)	$a(-1 - e_1 - e_2)$	$\frac{1}{3a}(-1 + e_1 + e_2)$

Все 8 элементов обращаются с одним и тем же коэффициентом $1/(3a)$, меняется только комбинация знаков.

3.5.4. Универсальность таблицы МИ-1

Из теорем 1 и 2 следует, что для фиксированных a и d все 2^{d+1} элементов (оба класса) имеют обратный, содержащий один и тот же числовой множитель $1/(a\, d)$.

Именно этот множитель вынесен в таблицу МИ-1 (раздел 5). Каждая ячейка таблицы соответствует паре (a, d) и обслуживает сразу:

· 2^d элементов класса I (все вершины d-мерного гиперкуба),

· 2^d элементов класса II (чисто мнимые аналоги).

Таким образом, одна ячейка таблицы МИ-1 задает мгновенную инверсию для 2^{d+1} гиперкомплексных чисел.

3.6. Пример: октонионы ($d = 8$)

Октонионы $\mathbb{O}$ — это 8-мерная неассоциативная алгебра с делением, порождённая единицей 1 и семью мнимыми единицами $e_1, \dots, e_7$, которые антикоммутируют и удовлетворяют $e_i^2 = -1$. Для $d = 8$ имеем $U_8 = 1 + e_1 + \dots + e_7$.

По теореме 1:

$$U_8^{-1} = \frac{1 - e_1 - \dots - e_7}{8}.$$

Проверим умножением (неассоциативность требует осторожности, но для любых двух октонионов справедливо $(ab)a = a(ba)$ — свойство альтернативности, и в нашем случае произведение $(1 + \sum e_i)(1 - \sum e_i)$ можно вычислить, используя только антикоммутацию и $e_i^2 = -1$, поскольку все смешанные произведения взаимно уничтожаются):

$$(1 + \sum e_i)(1 - \sum e_i) = 1 - \sum e_i + \sum e_i - \sum e_i^2 = 1 - \sum (-1) = 1 + 7 = 8.$$

Таким образом, формула работает и для октонионов.

Для произвольного $a \in \mathbb{R}$ и набора знаков $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_7$ имеем:

$$\bigl(a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_7 e_7)\bigr)^{-1} = \frac{1}{8a}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 e_1 - \dots - \varepsilon_7 e_7).$$

Октонионы — максимальная классическая алгебра с делением, и демонстрация формулы для них показывает, что конструкция работает на самом верху «лестницы» алгебр.

3.7. Теорема о невырожденности симметричных чисел

Теорема 1.1. В алгебре Клиффорда $\operatorname{Cl}(0, d-1)$ для любого $d \ge 1$ множество симметричных чисел класса I

$$\mathcal{S}_d = \left\{ S = a\Bigl(\varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i\Bigr) \;\middle|\; a \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\; \varepsilon_0, \varepsilon_i \in \{\pm1\} \right\}$$

обладает следующими свойствами:

1. Обратимость. Каждый элемент $S \in \mathcal{S}_d$ обратим, и его обратный задаётся формулой Теоремы 1.
2. Отсутствие делителей нуля. Если $S \in \mathcal{S}_d$ и $T \in \operatorname{Cl}(0, d-1)$ — любой ненулевой элемент, то $S \cdot T \neq 0$ и $T \cdot S \neq 0$.
3. Замкнутость с точностью до скаляра. Для любых $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_d$ существует $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $S_3 \in \mathcal{S}_d$ такие, что $S_1 \cdot S_2 = \lambda S_3$.

Доказательство.

1. Следует непосредственно из Теоремы 1.

2. Предположим $S \cdot T = 0$ для некоторого $T \in \operatorname{Cl}(0, d-1)$. Умножая слева на S^{-1}, получаем $T = 0$. Случай $T \cdot S = 0$ аналогичен.

3. Прямая проверка с использованием антикоммутации $e_i e_j = -e_j e_i$ и $e_i^2 = -1$ показывает, что произведение $S_1 S_2$ имеет вид $\lambda (\varepsilon_0^{(3)} + v_3)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0^{(3)} = \pm 1$, а v_3 — линейная комбинация e_i с коэффициентами ± 1. Следовательно, $S_1 S_2 = \lambda S_3$ для некоторого $S_3 \in \mathcal{S}_d$. ∎

Следствие (для седенионов и старших алгебр).

При $d = 16$ (седенионы) алгебра Клиффорда $\operatorname{Cl}(0, 15)$ имеет делители нуля. Однако подмножество симметричных чисел $\mathcal{S}_{16}$ этих делителей нуля не содержит. Более того, каждый элемент $\mathcal{S}_{16}$ обратим, и обратный задаётся той же формулой с коэффициентом $1/(16a)$. Таким образом, симметричные числа образуют «островок безопасности» внутри алгебры с делителями нуля.

3.8. Теорема о невырожденности произведений симметричных чисел

Теорема 1.2. Для любых $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_d$ их произведение $S_1 S_2$ не является делителем нуля. Более того, $S_1 S_2 = \lambda S_3$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $S_3 \in \mathcal{S}_d$.

Доказательство. Из пункта 3 Теоремы 1.1 имеем $S_1 S_2 = \lambda S_3$. Поскольку S_3 обратим (пункт 1 Теоремы 1.1), а $\lambda \neq 0$, то $S_1 S_2$ обратим. Обратимый элемент не может быть делителем нуля. ∎

---

4. РЕКИ В ВЫСШИХ РАЗМЕРНОСТЯХ

4.1. Общая конструкция рек в размерности d

В вещественном случае ($d = 1$) реки были получены суммированием геометрических прогрессий от РОВ-чисел δ_n с основанием 10:

$$R_n = \delta_n + \frac{\delta_n}{10} + \frac{\delta_n}{100} + \dots = \frac{10}{9}\delta_n.$$

В алгебрах Клиффорда произвольной размерности $d \ge 1$ определим обобщённые реки по аналогии, заменив скаляр δ_n на элемент $\frac{\overline{U_d}}{d}\delta_n$, где $U_d = 1 + e_1 + \dots + e_{d-1}$, $\overline{U_d} = 1 - e_1 - \dots - e_{d-1}$:

$$\boxed{R_n^{(d)} := \frac{\overline{U_d}}{d} \cdot \delta_n \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{9T_n} \cdot \frac{\overline{U_d}}{d}}.$$

Здесь $T_n = n(n+1)/2$ — треугольные числа, а множитель 10/9 возникает из суммы геометрической прогрессии $\sum_{k=0}^{\infty} (1/10)^k = 10/9$.

Почему это определение естественно. Из теоремы 1 для элемента nU_d имеем:

$$(nU_d)^{-1} = \frac{\overline{U_d}}{d} \cdot \frac{1}{n}.$$

Разность между соседними членами:

$$(nU_d)^{-1} - ((n+1)U_d)^{-1} = \frac{\overline{U_d}}{d} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{\overline{U_d}}{d} \delta_n.$$

Таким образом, $\frac{\overline{U_d}}{d}\delta_n$ — это «приращение» обратного элемента. Суммирование таких приращений с весами геометрической прогрессии и даёт реки.

Свойство. Из телескопичности δ_n и $\sum_{n=1}^{9} \delta_n = 9/10$ получаем:

$$\sum_{n=1}^{9} R_n^{(d)} = \frac{\overline{U_d}}{d} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{\overline{U_d}}{d} = U_d^{-1}.$$

Таким образом, сумма девяти рек в любой целой размерности $d \ge 1$ в точности равна U_d^{-1}.

Наглядные примеры сумм рек для первых размерностей:

Размерность d	Сумма рек $\sum_{n=1}^{9} R_n^{(d)}$
1	1
2	$\frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
3	$\frac{1-e_1-e_2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2$
4	$\frac{1-i-j-k}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i - \frac{1}{4}j - \frac{1}{4}k$
5	$\frac{1-e_1-e_2-e_3-e_4}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{4} e_i$
8	$\frac{1 - e_1 - e_2 - \dots - e_7}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{7} e_i$
16	$\frac{1 - e_1 - e_2 - \dots - e_{15}}{16} = \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{15} e_i$

Закономерность: для размерности d сумма рек равна $\frac{1}{d}$ минус $\frac{1}{d}$ суммы всех мнимых единиц. В вещественном случае ($d=1$) мнимые единицы отсутствуют, и сумма рек равна 1.

4.2. Первые вертикальные ряды (суммы первых рек)

Важную роль в конструкции играют первые вертикальные ряды — суммы РОВ-чисел без масштабирования (только первая декада). Для размерности d эта сумма равна:

$$\sum_{n=1}^{9} \frac{\overline{U_d}}{d} \delta_n = \frac{\overline{U_d}}{d} \cdot \frac{9}{10}.$$

Для конкретных размерностей:

Размерность d	Сумма первых вертикальных рядов
1	$\frac{9}{10}$
2	$\frac{9}{20}(1-i) = \frac{9}{20} - \frac{9}{20}i$
3	$\frac{9}{30}(1-e_1-e_2) = \frac{3}{10}(1-e_1-e_2)$
4	$\frac{9}{40}(1-i-j-k) = \frac{9}{40} - \frac{9}{40}i - \frac{9}{40}j - \frac{9}{40}k$
5	$\frac{9}{50}(1-e_1-e_2-e_3-e_4) = \frac{9}{50} - \frac{9}{50}\sum_{i=1}^{4} e_i$
8	$\frac{9}{80}(1 - \sum_{i=1}^{7} e_i) = \frac{9}{80} - \frac{9}{80}\sum_{i=1}^{7} e_i$
16	$\frac{9}{160}(1 - \sum_{i=1}^{15} e_i) = \frac{9}{160} - \frac{9}{160}\sum_{i=1}^{15} e_i$

Закономерность: для размерности d сумма первых вертикальных рядов равна $\frac{9}{10d}(1 - \sum_{i=1}^{d-1} e_i)$. Это наглядно демонстрирует, что конструкция единообразно работает для любой размерности d, включая промежуточные (d=3,5,6,7 и т.д.), где нет классических алгебр с делением, но алгебры Клиффорда $\operatorname{Cl}(0, d-1)$ существуют.

4.3. Полная таблица рек для классических алгебр

Для $n = 1,\dots,9$ и d = 1,2,4,8 (классические алгебры) получаем:

n	T_n	$\frac{5}{9T_n}$	$R_n^{(1)}$ ($\mathbb{R}$)	$R_n^{(2)}$ ($\mathbb{C}$)	$R_n^{(4)}$ ($\mathbb{H}$)	$R_n^{(8)}$ ($\mathbb{O}$)
1	1	5/9	5/9	$\frac{5(1-i)}{18}$	$\frac{5(1-i-j-k)}{36}$	$\frac{5(1-\sum e_i)}{72}$
2	3	5/27	5/27	$\frac{5(1-i)}{54}$	$\frac{5(1-i-j-k)}{108}$	$\frac{5(1-\sum e_i)}{216}$
3	6	5/54	5/54	$\frac{5(1-i)}{108}$	$\frac{5(1-i-j-k)}{216}$	$\frac{5(1-\sum e_i)}{432}$
4	10	5/90 = 1/18	1/18	$\frac{1-i}{36}$	$\frac{1-i-j-k}{72}$	$\frac{1-\sum e_i}{144}$
5	15	5/135 = 1/27	1/27	$\frac{1-i}{54}$	$\frac{1-i-j-k}{108}$	$\frac{1-\sum e_i}{216}$
6	21	5/189	5/189	$\frac{5(1-i)}{378}$	$\frac{5(1-i-j-k)}{756}$	$\frac{5(1-\sum e_i)}{1512}$
7	28	5/252	5/252	$\frac{5(1-i)}{504}$	$\frac{5(1-i-j-k)}{1008}$	$\frac{5(1-\sum e_i)}{2016}$
8	36	5/324	5/324	$\frac{5(1-i)}{648}$	$\frac{5(1-i-j-k)}{1296}$	$\frac{5(1-\sum e_i)}{2592}$
9	45	5/405 = 1/81	1/81	$\frac{1-i}{162}$	$\frac{1-i-j-k}{324}$	$\frac{1-\sum e_i}{648}$

4.4. Промежуточные размерности ($d = 3,5,6,7$)

Формула $R_n^{(d)} = \frac{5}{9T_n} \cdot \frac{\overline{U_d}}{d}$ и тождество $\sum R_n^{(d)} = U_d^{-1}$ выполняются для любой целой размерности $d \ge 1$, поскольку доказательство опирается только на фундаментальное тождество $(\varepsilon_0 + v)(\varepsilon_0 - v) = d$, которое справедливо для любого d.

Пример для $d = 3$: $U_3 = 1 + e_1 + e_2$, $\overline{U_3} = 1 - e_1 - e_2$, $U_3^{-1} = (1 - e_1 - e_2)/3$. Тогда

$$R_n^{(3)} = \frac{5}{9T_n} \cdot \frac{1 - e_1 - e_2}{3}, \quad \sum_{n=1}^{9} R_n^{(3)} = \frac{1 - e_1 - e_2}{3} = U_3^{-1}.$$

---

5. ТАБЛИЦА МИ-1 (МГНОВЕННАЯ ИНВЕРСИЯ №1)

5.1. Построение таблицы

Таблица МИ-1 содержит значения коэффициента 1/(ad) для натуральных a (параметр) и d (размерность).

Ориентация: размерность d — по вертикали (слева, возрастает снизу вверх), параметр a — по горизонтали (снизу).

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
d & \multicolumn{8}{c}{\text{Значения } \frac{1}{a \cdot d}} \\
\hline
8 & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{24} & \frac{1}{32} & \frac{1}{40} & \frac{1}{48} & \frac{1}{56} & \frac{1}{64} \\
7 & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{21} & \frac{1}{28} & \frac{1}{35} & \frac{1}{42} & \frac{1}{49} & \frac{1}{56} \\
6 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{24} & \frac{1}{30} & \frac{1}{36} & \frac{1}{42} & \frac{1}{48} \\
5 & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{20} & \frac{1}{25} & \frac{1}{30} & \frac{1}{35} & \frac{1}{40} \\
4 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{16} & \frac{1}{20} & \frac{1}{24} & \frac{1}{28} & \frac{1}{32} \\
3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{15} & \frac{1}{18} & \frac{1}{21} & \frac{1}{24} \\
2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{10} & \frac{1}{12} & \frac{1}{14} & \frac{1}{16} \\
1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\
\hline
$$

& a=1 & a=2 & a=3 & a=4 & a=5 & a=6 & a=7 & a=8

\end{array}

Как читать:

· Слева — размерность d, возрастает снизу вверх: внизу d=1, наверху d=8.

· Снизу под каждым столбцом — параметр a.

· В ячейке — коэффициент 1/(ad).

5.2. Свойства таблицы

1. Связь с функцией делителей.

Рассмотрим бесконечную таблицу МИ-1, где a и d пробегают все натуральные числа. Ячейка (a,d) содержит $\frac{1}{ad}$. Для фиксированного натурального k уравнение $\frac{1}{ad} = \frac{1}{k}$ эквивалентно ad = k. Число решений (a,d) в натуральных числах равно числу делителей $\sigma_0(k)$ (включая 1 и k). Следовательно, каждая дробь $\frac{1}{k}$ встречается в таблице ровно $\sigma_0(k)$ раз. Например, $\frac{1}{6}$ появляется при (1,6), (2,3), (3,2), (6,1) — четыре раза ($\sigma_0(6)=4$).

2. Базельская задача.

Диагональ a = d содержит дроби $\frac{1}{1^2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $\dots$. Сумма этих чисел известна:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Универсальность.

Одна ячейка таблицы (a,d) задаёт коэффициент 1/(ad), который входит в формулу инверсии сразу для 2^d элементов класса I и 2^d элементов класса II, то есть для 2^{d+1} гиперкомплексных чисел.

4. Диагональные суммы.

Для фиксированного целого сдвига $k \ge 0$ рассмотрим диагональ d = a + k. Сумма элементов этой диагонали:

$$S_k = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a(a+k)} = \frac{H_k}{k},$$

где $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}$ — гармоническое число. При $k = 0$ (главная диагональ) получаем $S_0 = \pi^2/6$. Этот результат связывает таблицу МИ-1 с гармоническими числами и дзета-функцией Римана.

---

6. ОБОБЩЕНИЕ НА ПРОИЗВОЛЬНОЕ ОСНОВАНИЕ И ПРОИЗВОЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ

6.1. Инвариантность относительно выбора основания

До сих пор мы использовали десятичную систему ($B=10$) для построения рек. Однако конструкция не зависит от выбора основания. Для любого целого $B \ge 2$ определим масштабирование степенями B:

Для каждого $n = 1, \dots, B-1$ рассмотрим последовательность:

$$\delta_n,\ \frac{\delta_n}{B},\ \frac{\delta_n}{B^2},\ \dots$$

Суммируя геометрическую прогрессию со знаменателем $1/B$, получаем реку:

$$R_n^{(d)}(B) = \frac{\overline{U_d}}{d} \cdot \delta_n \cdot \frac{1}{1 - 1/B} = \frac{\overline{U_d}}{d} \cdot \delta_n \cdot \frac{B}{B-1}.$$

Суммируя по $n = 1, \dots, B-1$ и используя телескопичность $\sum_{n=1}^{B-1} \delta_n = 1 - 1/B$:

$$\sum_{n=1}^{B-1} R_n^{(d)}(B) = \frac{\overline{U_d}}{d} \cdot \frac{B}{B-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{B}\right) = \frac{\overline{U_d}}{d} = U_d^{-1}.$$

Таким образом, для любого целого основания $B \ge 2$ сумма $B-1$ рек равна U_d^{-1}. В частности:

· При $B=10$ получаем 9 рек.

· При $B=2$ одна река уже равна U_d^{-1}.

· При $B=16$ имели бы 15 рек, сумма которых снова равна U_d^{-1}.

6.2. Произвольные размерности: от единицы до бесконечности

Формула инверсии

$$S^{-1} = \frac{1}{a d}(\varepsilon_0 - v)$$

справедлива для любой целой размерности $d \ge 1$ в алгебрах Клиффорда $\operatorname{Cl}(0, d-1)$. Алгебры Клиффорда существуют для всех d — это стандартные математические объекты, задаваемые порождающими соотношениями $e_i^2 = -1$, $e_i e_j = -e_j e_i$ $(i \neq j)$. Размерность алгебры как векторного пространства равна 2^{d-1}.

Таким образом, не существует «максимальной размерности»: конструкция работает для $d = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ и так далее, вплоть до сколь угодно больших значений. Классические алгебры с делением ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}, \mathbb{S}, \dots$) — лишь частный случай, когда $d = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$ (степени двойки). Однако для любого d алгебра Клиффорда $\operatorname{Cl}(0, d-1)$ существует, и формула инверсии работает в полной силе.

6.3. Пример: размерность $d = 16$ и седенионы

Для $d = 16$ алгебра Клиффорда $\operatorname{Cl}(0, 15)$ порождается пятнадцатью мнимыми единицами $e_1, \dots, e_{15}$ с соотношениями $e_i^2 = -1$, $e_i e_j = -e_j e_i$ $(i \neq j)$. Её размерность как векторного пространства равна $2^{15} = 32768$.

Специальный элемент:

$$U_{16} = 1 + e_1 + \dots + e_{15}.$$

По теореме 1:

$$U_{16}^{-1} = \frac{1 - e_1 - \dots - e_{15}}{16}.$$

Для произвольного набора знаков $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{15}$:

$$\bigl(a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_{15} e_{15})\bigr)^{-1} = \frac{1}{16a}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 e_1 - \dots - \varepsilon_{15} e_{15}).$$

Связь с таблицей МИ-1. При $a = 1$ коэффициент равен $1/16$. Это значение находится в таблице МИ-1 на пересечении $d = 16$ и $a = 1$ (таблица естественным образом продолжается за пределы $d = 8$).

Геометрическая интерпретация. Элементы $a(\varepsilon_0 + \sum \varepsilon_i e_i)$ соответствуют $2^{16} = 65536$ вершинам 16-мерного гиперкуба. Формула инверсии отображает каждую вершину в вершину с изменением знаков всех координат, кроме первой, и масштабирует на $1/(16a)$. Это же справедливо для любого d: коэффициент $1/(ad)$ обслуживает все 2^d вершин d-мерного гиперкуба.

6.4. Связь с фрактальной размерностью

Вернемся к рекам. Для произвольного основания B и размерности d определим обобщенную реку:

$$R_n^{(d)}(B) = \frac{\overline{U_d}}{d} \cdot \frac{B}{B-1} \cdot \delta_n.$$

Ее сумма по $n = 1, \dots, B-1$ равна U_d^{-1}. Если теперь рассмотреть количество рек как функцию от B, то возникает естественная связь с фрактальной размерностью. В следующей работе [2] будет показано, что для РОВ-фракталов $\mathcal{F}_{B,d}$ хаусдорфова размерность выражается формулой:

$$\dim_H \mathcal{F}_{B,d} = \log_B\bigl((B-1)2^d\bigr).$$

Эта формула связывает параметр масштабирования B, размерность пространства d и фрактальную размерность. В [2] также будут представлены примеры классических фракталов как частных случаев:

Название	B	d	$\dim_H$
Канторово множество	3	0	$\log_3 2$
Кривая Коха	3	1	$\log_3 4$
Ковёр Серпинского	3	2	$\log_3 8$
Треугольник Серпинского	2	$\log_2 3$	$\log_2 3$
Губка Менгера	3	$\log_2 20 - 1$	$\log_3 20$

---

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты:

1. Универсальность формулы инверсии. Доказано, что

$$(a(\varepsilon_0 + \sum \varepsilon_i e_i))^{-1} = \frac{1}{a d}(\varepsilon_0 - \sum \varepsilon_i e_i)$$

справедлива для любой целой размерности $d \ge 1$ в алгебрах Клиффорда $\operatorname{Cl}(0, d-1)$. Классические размерности 1,2,4,8 — лишь частные случаи.

2. Все знакочередующиеся диагональные элементы (вершины гиперкуба) обращаются одинаково — с коэффициентом $1/(ad)$ и изменением знаков мнимых единиц. Для фиксированных a,d это 2^d элементов класса I и 2^d элементов класса II, т.е. 2^{d+1} объектов с мгновенной инверсией.

3. РОВ-числа и реки. Введены РОВ-числа $\delta_n = 1/n - 1/(n+1)$. Построены реки $R_n = \frac{5}{9T_n}$ в вещественном случае и обобщены на произвольную размерность: $R_n^{(d)} = \frac{5}{9T_n} \cdot \frac{\overline{U_d}}{d}$. Доказано, что $\sum_{n=1}^{9} R_n^{(d)} = U_d^{-1}$.

4. Таблица МИ-1 — универсальный справочник коэффициентов $1/(ad)$. Ее диагональ дает ряд обратных квадратов $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$, а кратность дробей связана с функцией делителей $\sigma_0(k)$. Дополнительно показано, что сумма по диагонали $d = a + k$ равна H_k/k, где H_k — гармоническое число.

5. Обобщение на произвольное основание. Для любого целого $B \ge 2$ сумма $B-1$ рек равна U_d^{-1}, что демонстрирует инвариантность конструкции относительно выбора основания.

6. Произвольные размерности. Формула работает для любого натурального d. Пример с седенионами ($d=16$) показывает, что коэффициент $1/16$ обслуживает $2^{16} = 65536$ вершин 16-мерного гиперкуба.

7. Теоремы о невырожденности. Доказано, что симметричные числа (класс I) не являются делителями нуля, образуют группу с точностью до скаляра, и их произведения также невырождены. Это позволяет использовать их в алгебрах с делителями нуля (седенионы, 32-оны и т.д.) без риска вырождения.

Перспективы. Следующие части работы [2] будут посвящены:

· Построению РОВ-фракталов $\mathcal{F}_{B,d}$ с размерностью $\dim_H = \log_B((B-1)2^d)$.

· Исследованию комплексных размерностей и геометрической дзета-функции.

· Аналитическому продолжению на дробные и комплексные d, а также на произвольные алгебры с делением.

· Связи с множеством Мандельброта и универсальной таблицей фракталов.

Литература

[1] Костюк М. В. Мгновенная инверсия симметричных элементов вида 1+\sum e_i в алгебрах с делением. Препринт, 2026. DOI: 10.24108/preprints-3114411

[2] Костюк М. В. РОВ-фракталы: метод построения фрактальных структур с комплексной размерностью. Препринт, 2026. DOI: 10.24108/preprints-3114788

[3] Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge University Press, 2nd ed., 2001.

[4] Cartan H. Differential Calculus. Hermann, 1971.

[5] Pontryagin L. S. General Topology. Nauka, 1976 (англ. пер. Addison-Wesley, 1966).

[6] Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Wiley, 3rd ed., 2014.

[7] Lapidus M. L., van Frankenhuijsen M. Fractal Geometry, Complex Dimensions and Zeta Functions. Springer, 2nd ed., 2013.

[8] Milnor J. Dynamics in One Complex Variable. Princeton University Press, 3rd ed., 2006.

[9] Conway J. H., Smith D. A. On Quaternions and Octonions. AK Peters, 2003.

[10] Hardy G. H. Divergent Series. Oxford University Press, 1949.---

Конец статьи.
