Область связи параметров у многопараметрической распределительной задачи на простом графе

Ф. М. Кемпер[1, a]

[1] Пенсионер,
ул. Осташковская, 26, кв 132, 127224 Москва, Россия
E-mail: [a] fkemper@mail.ru

Аннотация. В этой статье рассматривается многопараметрическая распределительная задача на простом графе без лимитов на перемещения ресурсов. И для нее устанавливаются необходимые и достаточные условия существования решений в виде набора линейных ограничений, связывающих предложения ресурсов и потребности в них. Затем предлагается алгоритм построения всех независимых линейных ограничений. Полученный результат зависит только от структуры исходного графа. Выявлена связь между ограничениями задачи и алгебраическими решетками. Табл. 4, библиогр. 24.

Ключевые слова: двудольные графы, простые графы, многопараметрические потоки в сетях, решетки, цепи Маркова.

Введение

В статье строятся явные аналитические выражения для области допустимых ограничений у многопараметрической распределительной задачи в транспортной сети на двудольном графе.

Эта статья является развитием результатов статьи [1] и содержит дальнейший анализ многопараметрической транспортной задачи на двудольном графе. Работа возникла из практической многопараметрической задачи распределения транспортных средств по предварительному нечетко заданному набору работ. Этот метод также может применяться:

- в задаче анализа насыщения потребителей набором имеющихся ресурсов;
- в задаче достаточности ресурсов для покрытия набора заданных потребностей;
- в задаче распределения бюджета по различным расходным статьям;
- в задаче планирования оптимального складирования и хранения запасов ресурсов до распределения их по потребителям.

Последняя задача актуальна при периодическом создании запасов ресурсов в труднодоступных регионах, с которыми регулярная, постоянная связь невозможна. Разработка каждой этой задачи требует отдельных исследований.

В этой статье для распределительной сети на двудольных графах (задача распределения ресурса) удалось получить конструктивное описание аналитических выражений и эффективную вычислительную схему построения всех независимых линейных условий между параметрами сети. Структура и количество линейных условий на параметры сети зависит только от структуры исходного графа и поэтому устойчиво к вариациям запасов в источниках и потребностей у потребителей.

Перед построением конкретного плана перевозок задача распределения ресурса от поставщиков по потребителям требует предварительной оценки достаточности запаса ресурса у каждого поставщика для удовлетворения всех потребностей в нем, что является задачей планирования. Т.е. необходимо решить вопрос существования решения у будущей задачи распределения, а именно, совместна ли система всех ограничений на параметры задачи. Наличие явного аналитического вида этих ограничений существенно упрощает эту задачу, позволяет применить к ней эффективные вычислительные методы. Так же сильно упрощается многопараметрический анализ исходной распределительной задачи. Поэтому результат этого исследования имеет и прикладное применение.

Задачи анализа потоков в сетях имеют более чем полувековую историю. В классических руководствах [2–8] рассматриваются алгоритмы решения стационарной задачи нахождения максимального потока в сети при фиксированных значениях ограничений на потоки в ребрах, вершинах. В современных работах строятся алгоритмы решения задачи о макс потоке и ее различные обобщения с фиксированными значениями пропускных способностей [9–11]. При анализе задач потоков в сетях исследователи акцентируют основное внимание на явном решении экстремальных залач о потоках минимальной стоимости и их обобщениях.

Вопрос существования решений пропускается или является побочным результатом при решении оптимизационной задачи с конкретными значениями ограничений [12]. Полный набор условий существования потоков в конкретной сети, как видно из результата [2], есть доволно большой набор однородных линейных неравенств. И конструктивное выделение из них подмножества независимых неравенств представляет довольно сложную задачу. Поэтому при многопараметрическом анализе сети (вариации ее параметров) приходится при каждом значении набора параметров решать задачу о максимальном потоке двойственной сети [2]. Есть попытки использовать вариацию параметров в задаче о расстояниях в сети, например [9]. В [13] предлагаются модели критических уровней и периодической проверки, которые предполагают контроль за состоянием запасов и адаптивное пополнение их путем заказов, размер которых определяется в соответствии с выбранной стратегией. В [14] рассматриваются вероятностные модели для пропускной способности ребер графа многопользовательской сетевой системы. В [10] рассматриваются специфические эмпирические способы моделирования и вариации параметров в городских транспортных сетях. В [15] используются нечеткие переменные (fuzzy set) для параметров транспортной сети. В [16] рассматриваются сети с изменяющейся структурой их графа. В [11] для многостадийной модели распределения транспортных потоков по сети используется метод выпуклой оптимизации.

Известно [17], что любую транспортную сеть можно преобразовать в равносильную сеть на двудольном графе. Поэтому изучение таких сетей приобретает особое значение.

1. Постановка задачи

Простой граф $G = (X, Y, \Gamma)$ это граф, определяемый двумя непересекающимися множествами X и Y и многозначным отображением Γ множества X в Y [8] (глава 10).

$X = \{x_i,\ i = 1..n\}$, $Y = \{y_j,\ j = 1..m\}$. Дуга $(x_i, y_j) \in G \iff y_j \in \Gamma x_i$.

В каждой вершине x_i есть запас продукта в количестве $a_i = a(x_i) > 0$, потребность каждой вершины y_j это $b_j = b(y_j) > 0$. Пропускные способности всех ребер неограничены. Спрашивается, при каких соотношениях между параметрами $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ весь запас продукта можно распределить между потребителями, насытив их полностью. Т.е. при каких соотношениях между параметрами $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ совместна система (1.1), где x_{ij} — поток по дуге (x_i, y_j).

$$\begin{cases} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} e_{ij} x_{ij} \\ b_j = \sum\limits_{i=1}^{n} e_{ij} x_{ij} \end{cases} \quad (1.1).$$

где все $a_i \geqslant 0, i = 1..n,\ b_j \geqslant 0, j = 1..m$ и каждое e_{ij} равно 0 или 1. При $e_{ij} = 0$ соответствующее $x_{ij} \equiv 0$ и исключается из системы (1.1).

Матрица $M(G) = (e_{ij})$, строки которой соответствуют вершинам из X, а столбцы - вершинам из Y, есть матрица смежности двудольного графа G.

Будем рассматривать связный граф G. Ясно, что ограничения для несвязного графа есть объединение ограничений для его каждой связной компоненты.

1.1. Свойства отображения Γ. В [8] указано, что Γ имеет такие свойства:

(1) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \Gamma X_1 \subseteq \Gamma X_2$;
(2) $\Gamma(X_1 \cup X_2) = \Gamma X_1 \cup \Gamma X_2$;
(3) $\Gamma(X_1 \cap X_2) \subseteq \Gamma X_1 \cap \Gamma X_2$.

В последнем свойстве возможно $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, но $\Gamma X_1 \cap \Gamma X_2 \neq \varnothing$. Если же $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, то $\Gamma(X_1 \cap X_2) = \Gamma X_1 \cap \Gamma X_2$.

2. Система неравенств на потоки

Сначала рассмотрим систему (2.1) и условия ее разрешимости.

$$\begin{cases} a_i \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} e_{ij}x_{ij} \\ b_j \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} e_{ij}x_{ij} \end{cases} \qquad (2.1)$$

Дополним граф G до транспортной сети S, добавив вход s, выход t и дуги $(s, x_i), (y_j, t), i = 1..n, j = 1..m$.

Каждой дуге поставим в соответствие пару чисел – нижнюю и верхнюю границы потока по этой дуге. Для (s, x_i): (a_i, ∞), для (x_i, y_j): $(0, \infty)$, для (y_j, t): $(0, b_j)$. Тогда система (2.1) разрешима $\iff$ $\exists$ поток по сети S.

В [6–8, 18] имеется такая

Теорема 1 (Hoffman). *Пусть каждой дуге u некоторой транспортной сети отнесены два целых числа $a(u)$ и $b(u)$ $[0 \leqslant a(u) \leqslant b(u)]$. Пусть $\aleph$ — семейство тех подмножеств множества всех вершин сети, которые либо не содержат ни s, ни t, либо содержат s и t одновременно. Существует поток φ, удовлетворяющий условию $a(u) \leqslant \varphi(u) \leqslant b(u)$, тогда и только тогда, когда $b(U_L^-) \geqslant a(U_L^+)$ для всех $L \in \aleph$. Здесь U_L^- — дуги, заходящие в L, U_L^+ — дуги, исходящие из L. Для любого набора дуг U $a(U) = \sum_U a(u)$, $b(U) = \sum_U b(u)$.*

Замечание 1. Прямое использование результата этой теоремы приводит к построению экспоненциального числа ограничений, многие из которых зависимы друг от друга. Для рассматриваемых в этой статье сетей число этих ограничений в большинстве случаев будет резко сокращено.

Для нашей задачи удобнее вместо множеств L рассматривать множества $D = S \setminus L$ того же типа, что и в теореме выше. Для них $b(U_L^-) = b(U_D^+)$ и $a(U_L^+) = a(U_D^-)$. Тогда неравенства теоремы принимают вид

$$a(U_D^-) \leqslant b(U_D^+) \qquad (2.2)$$

Набор неравенств (2.2) задает набор ограничений между параметрами a_i и b_j, при которых система (2.1) разрешима. Каждое ограничение определяется своим множеством D.

Какие множества D имеет смысл рассматривать? Прежде всего, D должно определять непустое ограничение. Далее, все $b(U_D^+)$ должны быть конечны, иначе при бесконечном $b(u)$ получим тривиальное ограничение, т.е. все $(s, x_i) \notin U_D^+$ и $(x_i, y_j) \notin U_D^+$. Кроме того, если $u = (x_i, y_j) \in U_D^-$, то $a(u) = 0$ и не дает вклад ни в одно из ограничений. Поэтому считаем, что все $(x_i, y_j) \notin U_D^-$.

Определение 1. Ограничение (множество D) будем называть существенным, если оно обладает указанными выше свойствами.

Найдем условия, при которых ограничения (2.2) существенны.

Лемма 1. *Если ограничение существенно, то* $x_i \in D \iff \Gamma x_i \subseteq D$.

Доказательство. Если $x_i \in D$ и $y_j \in \Gamma x_i$, но $y_j \notin D$, то $(x_i, y_j) \in U_D^+$, $b(x_i, y_j) = \infty$ и ограничение для D несущественно. Получили противоречие.

Если $\Gamma x_i \subseteq D$ и $x_i \notin D$, то $\exists y_j \in \Gamma x_i \subseteq D$. Тогда $(x_i, y_j) \in U_D^-$, что противоречит существенности ограничения.

Итак, для каждого $x_i \in D$ так же и $\Gamma x_i \subseteq D$ и наоборот. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если ограничение существенно, то* $D \subseteq G$.

Доказательство. Если $s \in D$, $t \in D$ и $x_i \notin D$, то $(s, x_i) \in U_D^+$ и ограничение для D несущественно. Получили противоречие.

Если $s \in D$, $t \in D$ и $\forall x_i \in D$, то, по предыдущей лемме, $\Gamma(X) = Y \subseteq D$ и $D = S$. Но у S нет входящих и исходящих дуг — ограничение отсутствует, хотя оно должно быть существенным.

Т.к. по теореме 1 s, t одновременно входят или не входят в D, то будем считать, что $D \subseteq G$ без потери каких либо ограничений. Лемма 2 доказана.

Ясно, что для всех x_i $\Gamma x_i \neq \varnothing$ и для всех y_j $\exists x_i$ такое, что $y_j \in \Gamma x_i$. Иначе вершины x_i, y_j висячие, не участвуют ни в одном ограничении и их можно не учитывать.

Утверждение 1. *Ограничения (2.2) существенны тогда и только тогда, когда* $D \subseteq G$ *и* $x_i \in D \iff \Gamma x_i \subseteq D$.

Доказательство. В прямую сторону доказано в предыдущих леммах.

Если $D \subseteq G, \{x_i\} \subseteq D$, $\Gamma\{x_i\} \subseteq D$, то $U_D^- = \{(s, x_i)\}, U_D^+ = \{(y_j, t) | y_j \in \Gamma\{x_i\}\}$, откуда $a(s, x_i) > 0$, $b(y_j, t) < \infty$ и ограничение существенно. Утверждение 1 доказано.

Поищем случаи, когда одни ограничения являются следствием других.

Утверждение 2. *Если* $\Gamma X_i = \Gamma X_j = Y_0$, *то ограничение, соответствующее* $D_0 = \{X_i \cup X_j, Y_0\}$, *сильнее каждого из ограничений для* $D_k = \{X_k, Y_0\}, k \in \{i, j\}$.

Доказательство. Ограничения для D_0, D_k имеют вид

$$\sum_{X_i\cup X_j} a_p \leqslant \sum_{Y_0} b_r$$
$$\sum_{X_k} a_p \leqslant \sum_{Y_0} b_r$$

Так как $\sum_{X_k} a_p \leqslant \sum_{X_i\cup X_j} a_p$, то получаем требуемое. Утверждение 2 доказано.

Замечание 2. Поэтому для всех X_i с одним общим ΓX_i будем учитывать только ограничение, соответствующее объединению таких X_i с $D_{\max}(Y_0) = \{\cup X_i, Y_0 | \Gamma X_i = Y_0, \forall X_i \subseteq X, Y_0 \subseteq Y\}$.

Утверждение 3. *Если $\Gamma X_0 \subset \Gamma X_1$, то ограничение для $D_{01} = \{X_0 \cup X_1, \Gamma X_1\}$ сильнее ограничения $\{X_1, \Gamma X_1\}$. В то же время остается в силе ограничение $\{X_0, \Gamma X_0\}$.*

Доказательство. По условию $\Gamma X_1 = \Gamma X_0 \cup Y_1$.
Ограничения имеют вид $\sum_{X_0\cup X_1} a_p \leqslant \sum_{\Gamma X_1} b_r,\ \sum_{X_1} a_p \leqslant \sum_{\Gamma X_1} b_r,\ \sum_{X_0} a_p \leqslant \sum_{\Gamma X_0} b_r$.
Но $\sum_{X_1} a_p \leqslant \sum_{X_0\cup X_1} a_p$ — получаем первое утверждение.
$\sum_{\Gamma X_0} b_r \leqslant \sum_{\Gamma X_1} b_r$ и $\sum_{X_0} a_p \leqslant \sum_{X_1} a_p$, откуда следует второе утверждение. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. *Если $\Gamma X_1 \setminus \Gamma X_2 \neq \varnothing$, $\Gamma X_2 \setminus \Gamma X_1 \neq \varnothing$ и $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, то ограничения для $\{X_1, \Gamma X_1\}$, $\{X_2, \Gamma X_2\}$, $\{X_1 \cup X_2, \Gamma(X_1 \cup X_2)\}$ независимы.*

Доказательство. Пусть $X_1 \cap X_2 = X_0$, $\Gamma X_0 = Y_0$, $\Gamma X_1 \setminus \Gamma X_2 = Y_1$, $\Gamma X_2 \setminus \Gamma X_1 = Y_2$. Тогда $X_1 = X_{10} \cup X_0$, $X_2 = X_{20} \cup X_0$, $\Gamma X_1 = Y_1 \cup Y_0$, $\Gamma X_2 = Y_2 \cup Y_0$, $X_1 \cup X_2 = X_{10} \cup X_{20} \cup X_0$, $\Gamma(X_1 \cup X_2) = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_0$.
И ограничения $\sum_{X_1} a_p \leqslant \sum_{\Gamma X_1} b_r$, $\sum_{X_2} a_p \leqslant \sum_{\Gamma X_2} b_r$, $\sum_{X_1\cup X_2} a_p \leqslant \sum_{\Gamma(X_1\cup X_2)} b_r$ принимают вид $\sum_{X_{10}\cup X_0} a_p \leqslant \sum_{Y_1\cup Y_0} b_r$, $\sum_{X_{20}\cup X_0} a_p \leqslant \sum_{Y_2\cup Y_0} b_r$, $\sum_{X_{10}\cup X_{20}\cup X_0} a_p \leqslant \sum_{Y_1\cup Y_2\cup Y_0} b_r$.
Но $\sum_{X_{k0}\cup X_0} a_p \leqslant \sum_{X_{10}\cup X_{20}\cup X_0} a_p$ и $\sum_{Y_k\cup Y_0} b_r \leqslant \sum_{Y_1\cup Y_2\cup Y_0} b_r, k \in \{1,2\}$.
Значит, исходные ограничения независимы. Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. *Если $\Gamma X_1 \cap \Gamma X_2 = \varnothing$, то ограничение для $\{X_1 \cup X_2, \Gamma(X_1 \cup X_2)\}$ является следствием ограничений для $\{X_1, \Gamma X_1\}, \{X_2, \Gamma X_2\}$.*

Доказательство. Так как $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, то $\sum_{X_1\cup X_2} a_p \leqslant \sum_{\Gamma(X_1\cup X_2)} b_r$ равносильно $\sum_{X_1} a_p + \sum_{X_2} a_p \leqslant \sum_{\Gamma X_1} b_r + \sum_{\Gamma X_2} b_r$, т.е. сумме ограничений для $\{X_1, \Gamma X_1\}$, $\{X_2, \Gamma X_2\}$. Утверждение 5 доказано.

Следствие 1. *Ограничения для всего графа G есть объединение ограничений для каждой его связной компоненты.*

Доказательство. Непосредственно следует из предыдущего Утверждения.

3. Алгоритм

3.1. Предварительная обработка. Согласно предыдущему разделу порождать новые независимые ограничения могут только подмножества из X с пересекающимися Γ множествами. В этом алгоритме такие ограничения строятся последовательным добавлением вершин из X.

Шаг 1. Так как все коэффициенты в ограничениях (2.2) равны 1 или 0, то храним каждое ограничение в паре битовых строк с длинами n и m, где $n = |X|, m = |Y|$. Нумерация битов в этих строках идет справа налево и соответствует нумерации вершин в X. Для каждого ограничения $D_i = \{\{x_{ik}\}, \{y_{il}\} | \Gamma(\{x_{ik}\}) = \{y_{il}\}\}$ в строки заносятся 1_k и 1_l, где 1_t — 1 на месте t в строке. Для всех ограничений получаем массив пар битовых строк R.

Шаг 2. Сортируем матрицу смежности $M(G)$ лексикографически по строкам, чтобы все вершины из X с одним Γ оказались рядом. Проходим матрицу $M(G)$ и заменяем все вершины x_k с общим Γ одной псевдовершиной $x^{'}$ с $a(x^{'}) = \Sigma_k a_k$. Получаем редуцированный граф $G^{'}$. Далее, для упрощения изложения, будем вместо $G^{'}$ писать просто G.

Шаг 3. Для X графа G вводим расстояние ρ между вершинами x_i : $\rho(x_i, x_j) = 1$ при $\Gamma x_i \cap \Gamma x_j \neq \varnothing$, иначе $\rho(x_i, x_j) = 0$. Строим симметричную матрицу соседства $M(X) = M(G) \times M^T(G)$, а по ней — граф смежности $QX = (X, \{[x_i, x_j] | \rho(x_i, x_j) = 1\})$. Здесь $M^T(G)$ — матрица, транспонированная к матрице $M(G)$.

Шаг 4. Для графа QX строим матрицу смежности $Q(X)$: $Q_{ij}(X) = min(1, M_{ij}(X))$.

Шаг 5. Упорядочиваем все вершины графа QX, проходя его способом поиска в ширину [5, §22.2]. При этом все компоненты связности графа QX будут пройдены последовательно, одна за другой.

3.2. Основной цикл. На каждом шаге в массив строк R добавляем все ограничения для x_j в подграфе $QX_j = \{\{x_k\} | k \leqslant j\}$, считая что ограничения для всех QX_k с $k < j$ уже занесены в массив строк R.

Цикл по всем x_j графа QX, (итерация j):

Предусловие Массив R перед шагом j лексикографически упорядочен по битовым строкам X, где каждая строка — набор вершин из подграфа $X_j = \{\{x_k\} | k < j\}$.

Шаг 1. Для вершины x_j выбираем из графа QX отсортированный список *prev_conn* всех связанных с ней предыдущих вершин $\{x_k | \rho(x_k, x_j) = 1, k < j\}$,.

Шаг 2. По списку *prev_conn* получаем из R отсортированный список ограничений *prev_limits*, куда входят вершины из *prev_conn*. (Это можно сделать за один проход, так как массив R и список *prev_conn* упорядочены одинаково).

Шаг 3. Добавляем в массив R ограничение $\{x_j, \Gamma x_j\}$..

Шаг 4. Добавляем текущее $\{x_j, \Gamma x_j\}$. во все ограничения списка *prev_limits*, расширяя влево строки этих ограничений.

Шаг 5. Если в списке *prev_limits* имеются ограничения с одинаковыми частями Y, то убираем из этого списка то ограничение, которое ближе к его началу.

Шаг 6. Если часть Y ограничения p из списка *prev_limits* совпадает с частью Y у ограничения r из массива R, то убираем исходное ограничение r из массива R.

Шаг 7. Добавляем список *prev_limits* в конец массива R.

Постусловие Упорядоченность массива R сохраняется.

Конец Цикла

В конце алгоритма получаем набор существенных ограничений в виде массива R структур из двух битовых строк.

Если граф редуцирован, то восстанавливаем во всех ограничениях псевдовершины $x^{'}$ на $\Sigma_k x_k$, для которых $\Gamma x_k = \Gamma x^{'}$.

Массив R непосредственно отображается на систему линейных неравенств между параметрами $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$

$$A_1 a \leqslant B_1 b \qquad (3.1)$$

где a и b — векторы параметров $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$, A_1 — матрица размером $s_1 \times n$, B_1 — матрица размером $s_1 \times m$, s_1 — число ограничений.

Реализация алгоритма на языках Python, Java доступна в [19].

3.3. Анализ алгоритма.

Утверждение 6. *Алгоритм строит все существенные ограничения.*

Доказательство. По утверждению 1 все существенные ограничения имеют вид $\{X_0, \Gamma X_0\}$.

На итерации 1 цикла для подграфа QX_1 имеем только одно существенное ограничение $\{x_1, \Gamma x_1\}$, которое добавляется на шаге 3.

Предположим, что для подграфа QX_{j-1} в R входят все его существенные ограничения.

На итерации j на шаге 3 в R добавили $\{x_j, \Gamma x_j\}$.

Рассмотрим любое $\{X_0, \Gamma X_0\}$ с $X_0 = \{x_p | p \leqslant j\}$. Пусть $X_1 = X_0 \setminus \{x_j\} = \{x_p | p < j\}$. $X_1 \subset X_0$, тогда $\Gamma X_1 \subset \Gamma X_0$ либо $\Gamma X_1 = \Gamma X_0$.

При $X_1 \subset X_0$ $\{X_1, \Gamma X_1\}$ уже добавлено на предыдущих итерациях и $\{X_0, \Gamma X_0\} = \{X_0 \cup \{x_j\}, \Gamma X_0 \cup \Gamma X_1\}$ добавлено на шаге 4.

При $\Gamma X_1 = \Gamma X_0$ $\Gamma x_j \subseteq \Gamma X_0$ и $\exists x_q$ с $q < j$ такая, что $\Gamma x_q \cap \Gamma x_j \neq \varnothing$. Иначе $\Gamma X_0 \cap \Gamma x_j = (\cup_q \Gamma x_q) \cap \Gamma x_j = \cup_q (\Gamma x_q \cap \Gamma x_j) = \varnothing$ — получили противоречие. Значит, x_q сосед x_j, $\{X_1, \Gamma X_1\}$ отобрано на шаге 2, $\{X_0, \Gamma X_0\}$ получено на шаге 4.

В алгоритме выполняются все утверждения 1–5. Утверждение 6 доказано.

Независимость существенных ограничений-неравенств.

Лемма 3 (Фаркаш [20]). *Пусть* $f_1(x), f_2(x), ..., f_r(x)$ *и* $f_0(x)$ — *однородные линейные функции* m *вещественных переменных* $x_1, x_2, ..., x_m$. *Предположим, что соотношения* $f_1(x) \geqslant 0, f_2(x) \geqslant 0, ..., f_r(x) \geqslant 0$ *влекут за собой неравенство* $f_0(x) \geqslant 0$. *Тогда существуют неотрицательные постоянные* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$, *для которых выполняется тождество* $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + ... + \lambda_r f_r(x) \equiv f_0(x)$.

Если в лемме Фаркаша коэффициенты всех функций рациональные числа (у нас они все равны 1), то и все λ_i рациональны, т.к. лемма Фаркаша справедлива для любого упорядоченного поля [21].

Умножив все λ_i на наименьший общий знаменатель, получим условие Фаркаша в виде $L_1 f_1(x) + L_2 f_2(x) + ... + L_r f_r(x) \equiv L_0 f_0(x)$., где все L_i натуральные числа. У всех существенных неравенств-ограничений все ненулевые коэффициенты равны 1. Поэтому для зависимости одного ограничения от других при взятии их линейной комбинации с положительными коэффициентами, мы должны получить неравенство, в котором все ненулевые коэффициенты в обеих сторонах равны одному и тому же натуральному числу.

Утверждение 7. *Все существенные неравенства-ограничения линейно независимы.*

Доказательство. По построению алгоритмом существенного ограничения каждая текущая вершина x_j сосед в графе QX предыдущей вершины x_{j-1} и т.д.. Т.е. все $\Gamma x_j \cap \Gamma x_{j-1} \neq \varnothing$.

Допустим, имеется несколько (> 1) ограничений и неравенство f_0 зависит от других неравенств.

Если в f_0 входит только a_j, то f_0 соответствует ограничению $\{x_j, \Gamma x_j\}$ и может зависеть только от ограничений вида $\{X_0, \Gamma X_0, |\{x_j\} \subset X_0, \Gamma x_j \supseteq \Gamma X_0\}$, что возможно тодько при $\Gamma x_j = \Gamma X_0$ и, по замечанию 2, такое $\{x_j, \Gamma x_j\}$ не входит в число существенных.

Итак, пусть a_j и $a_{j+1} \in f_0$ и f_0 зависит от других неравенств-ограничений $\{f_p\} \cup \{f_q\} \cup \{f_r\}$, $a_j \in \{f_p\} \cup \{f_q\}$, $a_{j+1} \in \{f_p\} \cup \{f_r\}$, $b_k \in \Gamma a_j \cap \Gamma a_{j+1}$. Тогда $(\Sigma L_p + \Sigma L_q) a_j + (\Sigma L_p + \Sigma L_r) a_{j+1} + ... \leqslant (2\Sigma L_p + \Sigma L_q + \Sigma L_r) b_k + ...$ и по выводу из леммы Фаркаша $\Sigma L_p + \Sigma L_q = \Sigma L_p + \Sigma L_r = 2\Sigma L_p + \Sigma L_q + \Sigma L_r$, откуда $\Sigma L_p = \Sigma L_q = \Sigma L_r = 0$. А значит и все исходные $L_\alpha = 0$, т.к. они неотрицательны. Утверждение 7 доказано.

Оценка числа операций. Основные элементарные операции в алгоритме: поиск предыдущей вершины в графе QX для списка *prev_conn* на шаге 1; поиск по строке x ограничений в R на шаге 2; поиск по строке y ограничений на шагах 5,6; добавление ограничений в R на шагах 3,7; расширение ограничений в *prev_limits* на шаге 4.

Пусть длина R перед итерацией j равна r_{j-1}. Тогда порядок числа элементарных операций на шаге 1: j, на шаге 2: $\leqslant r_{j-1}\log j$, на шаге 3: 1, на шаге 4: $\leqslant r_{j-1}$, на шаге 5: $\leqslant r_{j-1}\log r_{j-1}$, на шаге 6: $\leqslant r_{j-1}\log r_{j-1}$, на шаге 7: $\leqslant r_{j-1}$. Отсюда получаем $r_j \leqslant 2r_{j-1}+1$, т.е. $r_j \leqslant 2^j-1$. Число всех операций на итерации j: $\leqslant 2(2^j-1)\log(2^j-1)+(2^j-1)\log j+2(2^j-1)+1$.

Всего число операций на всех итерациях: $\leqslant C\Sigma_{j=1}^{n} 2^j j + 2^j \log j + 2^j \sim Cn2^n$, где $n = |X|$, C константа. Число ограничений $r \leqslant 2^n - 1$.

Как показывают нижеследующие примеры, хотя полученные оценки и достижимы, но диапазоны разброса реального числа операций и ограничений весьма велики.

4. Примеры

Пример 1 (конфигурация '1–1'). $X = \{x_i | i = 1..n\}, Y = \{y_i | i = 1..n\}, \Gamma x_i = y_i$. Алгоритм обрабатывает каждую связную компоненту графа отдельно, связная компонента состоит из одной дуги и число ограничений — n.

Пример 2 (конфигурация 'Напор'). $X = \{x_i | i = 1..n\}, Y = \{y_i | i = 1..n\}, \Gamma x_i = \{y_j | j = 1..i\}$. Так как все $\Gamma x_{j-1} \subset \Gamma x_j$, то алгоритм на шаге j ограничение для x_j обьединяет с копией ограничения, полученного на шаге $j-1$. Всего ограничений n: $\{\{x_i\}, \{y_i\} | i = 1..k\}, k = 1..n$.

Пример 3 (конфигурация 'Пила'). $X = \{x_i | i = 1..n\}, Y = \{y_i | i = 1..n+1\}, \Gamma x_i = \{y_i, y_{i+1}\}$. Конфигурация является простой цепью от y_1 до y_{n+1}. Алгоритм на каждой итерации дублирует ограничения, куда входит x_{j-1}, вводя в них x_j + само ограничение для x_j. Всего ограничений получается $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Пример 4 (конфигурация 'Паук'). $X = \{x_i | i = 1..n\}, Y = \{y_i | i = 0..n\}, \Gamma x_i = \{y_0, y_i\}$. Для всех $X_0 \subseteq X$ все ΓX_0 пересекаются по y_0, но различны. Поэтому всего ограничений столько же, сколько и подмножеств в X. Т.е. $2^n - 1$.

4.1. Оценка числа ограничений. Приведенные примеры конфигураций сети показывают, что рост числа ограничений может варьироваться в весьма широких пределах, от линейного, до экспоненциального. Теоретическая оценка меры того, как в среднем растет число ограничений, требует отдельного рассмотрения.

Для получения приближенной вычислительной оценки среднего числа ограничений необходимо обработать значительную часть набора сетей какого-либо размера. В сети размера $n \times m$, где $n = |X|,\ m = |Y|$, у каждой вершины из X Γ может быть любым подмножеством в Y, т.е. всего $2^m - 1$. Общее число различных сетей равно $(2^m - 1)^n$ и при $m = n$ имеет порядок 2^{n^2}. При $n = 10$ получаем порядок 2^{100}, что выходит за пределы вычислительных возможностей.

Поэтому обработаны полностью сети следующих размеров (n, m): (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,4), (4,5), (4,6). Программа расчета доступна в [19]. Результат показан в таблицах 1, 2, 3.

В таблицах 3 и 4 E — математическое ожидание количества ограничений для конкретного размера сети, σ — его среднее отклонение.

Из этих расчетов видно, что для сетей $n \times m$ при $n < m$ максимальное число ограничений в каждой сети равно $2^n - 1$, что соответствует теоретической оценке пункта 3.3.

Сети других размеров обработаны выборочно путем случайной выборки, повторенной 10^7 раз для каждого размера. Результаты этих расчетов добавлены в таблицу 3 и показаны в таблице 4. Максимальное число ограничений для каждой такой сети также равно $2^n - 1$.

В то же время видно, что среднее число ограничений E с разбросом 3σ не превосходит $n \times m$. В этот разброс по неравенству Чебышева входит почти 90% всех сетей конкретного размера.

Полученные результаты показывают, что во всех случаях σ колеблется в пределах 20–25% от E независимо от размера сети. Т.е. это показывает, что распределение длин всегда имеет хвосты, которые могут только увеличиваться, пока не достигнут теоретических границ минимума (1) и максимума $(2^n - 1)$. После этого σ начнет уменьшаться и E стабилизируется, так как распределение длин ограничений сети имеет колокол-образный вид. Но достичь этого не хватает вычислительных мощностей.

5. Система равенств на потоки

$$\begin{cases} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} e_{ij} x_{ij} \\ b_j = \sum\limits_{i=1}^{n} e_{ij} x_{ij} \end{cases} \iff (2.1) \wedge \begin{cases} a_i \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} e_{ij} x_{ij} \\ b_j \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} e_{ij} x_{ij} \end{cases} \quad (2.1')$$

Значит, ограничения для системы равенств состоят из ограничений для системы неравенств (2.1), изученные ранее, и ограничений для двойственной сети S', у которой, по сравнению с сетью S, направления дуг изменены на обратные, $s \to t$, $t \to s$. Ограничители по дугам будут: для (s, y_j) — (b_j, ∞), для (y_j, x_i) — $(0,\ \infty)$, для (x_i, t) — (0, a_i).

В двойственной сети S' граф $G' = (Y, X, \Gamma')$, где отображение Γ' двойственно отображению Γ, т.е. дуга $(y_j, x_i) \in G' \iff x_i \in \Gamma' y_j$.

Ограничения для сети S соответствуют случаю избытка продуктов, а для сети S' – дефицита продуктов.

Ограничения для S' получаем описанным выше способом и объединяем их с ограничениями для S.

Утверждение 8. *Ограничение $\Sigma_X a_i = \Sigma_Y b_j$ существует тогда и только тогда, когда (X, Y) связная компонента графа G.*

Доказательство. По алгоритму этой статьи мы получаем, что существенные ограничения имеются только внутри каждой связной компоненты исходного графа.

В частности, ограничение у всей связной компоненты для S $\Sigma_X a_i \leqslant \Sigma_Y b_j$ и ограничение для S' $\Sigma_Y b_j \leqslant \Sigma_X a_i$ объединяются в $\Sigma_X a_i = \Sigma_Y b_j$, так же это следствие исходной системы равенств.

Верно и обратное: если имеется пара ограничений $\Sigma_X a_i \leqslant \Sigma_Y b_j$ и $\Sigma_Y b_j \leqslant \Sigma_X a_i$, т.е $\Sigma_X a_i = \Sigma_Y b_j$, то (X, Y) связная компонента графа G. Действительно, в этом случае $\Gamma X = Y$ и $\Gamma Y = X$. Утверждение 8 доказано.

6. О существовании нетривиальных ограничений

6.1. Существование решений у системы ограничений.

Утверждение 9. *Система ограничений (3.1) всегда имеет нетривиальные решения.*

Доказательство. Все элементы матриц A_1, B_1 числа 0 или 1. Выбираем произвольный положительный набор $\{a_i\}$ и пусть $c = \Sigma_i a_i$. Выбираем все $b_j = c$. Тогда каждый элемент вектора $A_1 a \leqslant c$, а каждый элемент вектора $B_1 b \geqslant c$. Утверждение 9 доказано.

Если выбрать набор $\{a_i\}$ из натуральных чисел, то получим и все b_j натуральными. Поэтому верно

Следствие 2. *Система ограничений (3.1) всегда имеет решения в натуральных числах.*

Замечание 3. Из общих результатов о системах линейных неравенств [22] следует, что область решений системы (3.1) составляет выпуклый многогранный конус.

Ограничения области параметров системы равенств на потоки кроме ограничений (3.1) включают еще и ограничения для двойственной сети

$$B_2 b \leqslant A_2 a \qquad (6.1)$$

где a и b — те же векторы параметров $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$, A_2 — матрица размером $s_2 \times n$, B_2 — матрица размером $s_2 \times m$, s_2 — число ограничений для двойственной сети.

Системы неравенств (3.1) и (6.1) противоположны, объединенная система относится к типу двусторонних неравенств. И эта система, по построению, следствие исходной системы равенств на потоки.

Утверждение 10. *Объединенная система ограничений (3.1) и (6.1) всегда имеет нетривиальные решения.*

Доказательство. Для любого положительного набора $[a_1, ..., a_n] \in R^n$ исходная система уравнений на потоки (1.1) всегда имеет нетривиальное решение. Действительно, в исходной системе (1.1) все $\varphi(x_i, y_j)$ независимы и каждое $\varphi(x_i, y_j)$ входит только в одно уравнение. В каждое уравнение $a_i = \sum_j \varphi(x_i, y_j)$ входит хотя бы одно $\varphi(x_i, y_j)$, т.е. переменных не меньше одного. Поэтому их можно выбрать положительными и удовлетворяющими этому уравнению. Затем, по ним вычисляем набор $[b_1, ..., b_m] \in R^m$ из уравнений $b_j = \sum_i \varphi(x_i, y_j)$. В результате получаем точку, удовлетворяющую системе (3.1) и (6.1). Утверждение 10 доказано.

6.2. Существование ограничений-неравенств.

Ограничения-неравенства возникают при $\Gamma X_k = Y_k \subsetneq Y$ для $X_k \subsetneq X$, т.е. когда в матрице $M(G)$ существуют $e_{ij} = 0$.

В простейшем случае, считая, что вероятность $P(e_{ij} = 1) = p < 1$ и все e_{ij} независимы, получим P(существует ограничение-неравенство) $= 1 - p^{mn}$ – близко к 1.

7. Структура набора ограничений

7.1. Замкнутые множества.

Определение 2. В простом графе $G = (X, Y, \Gamma)$ для любого $X_0 \subseteq X$ введем операцию Cl: $Cl(X_0) = \cup_i \{\forall X_i | \Gamma X_i \subseteq \Gamma X_0\}$.

Из определения видно, что $X_0 \subseteq Cl(X_0)$, $Cl(Cl(X_0)) = Cl(X_0)$. Если $X_1 \subseteq X_2$, то $\Gamma X_1 \subseteq \Gamma X_2$ и $Cl(X_1) = \cup_i \{\forall X_i | \Gamma X_i \subseteq \Gamma X_1\} \subseteq \cup_i \{\forall X_i | \Gamma X_i \subseteq \Gamma X_2\} = Cl(X_2)$. Ясно, что $Cl(X) = X$.

Лемма 4. $Cl(X_1) \cup Cl(X_2) \subseteq Cl(X_1 \cup X_2)$.

Доказательство. Так как $\Gamma(X_1 \cup X_2) = \Gamma X_1 \cup \Gamma X_2$, то $Cl(X_1) \cup Cl(X_2) = \cup_i \{\forall X_i | \Gamma X_i \subseteq \Gamma X_1\} \cup \cup_j \{\forall X_j | \Gamma X_j \subseteq \Gamma X_2\} = \cup_{ij} \{\forall X_{ij} | (\Gamma X_{ij} \subseteq \Gamma X_1) \vee (\Gamma X_{ij} \subseteq \Gamma X_2)\} \subseteq \cup_k \{\forall X_k | \Gamma X_k \subseteq \Gamma X_1 \cup \Gamma X_2\} = \cup_k \{\forall X_k | \Gamma X_k \subseteq \Gamma(X_1 \cup X_2)\} = Cl(X_1 \cup X_2)$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. $Cl(X_1 \cap X_2) \subseteq Cl(X_1) \cap Cl(X_2)$.

Доказательство. Если вершина $x_0 \in Cl(X_1 \cap X_2)$, то $\Gamma x_0 \subseteq \Gamma(X_1 \cap X_2) \subseteq \Gamma X_1 \cap \Gamma X_2$, т.е. $\Gamma x_0 \subseteq \Gamma X_1 \wedge \Gamma x_0 \subseteq \Gamma X_2$. Откуда $x_0 \in Cl(X_1) \wedge x_0 \in Cl(X_2)$, значит $x_0 \in Cl(X_1) \cap Cl(X_2)$. Лемма 5 доказана.

Получили, что операция Cl обладает всеми свойствами *оператора замыкания* для всех подмножеств множества X [23, стр. 63].

Определение 3. Подмножество $X_0 \subseteq X$ называется *замкнутым*, если $X_0 = CL(X_0)$.

По [23, §4.2, лемма 1] замкнутые множества выдерживают операцию $\cap$, т.е. для замкнутых A, B $Cl(A \cap B) = A \cap B$.

Левая часть каждого существенного ограничения, входящего в (3.1), соответствует некоему $X_0 \subseteq X$.

Утверждение 11. *Каждое X_0, входящее в (3.1), замкнуто. И наоборот, каждому замкнутому $X_0 \subseteq X$ соответствует существенное ограничение из (3.1).*

Доказательство. Первая часть следует из Замечания 1. Каждое конкретное замкнутое X_0 строится Алгоритмом по Предложению 6. Утверждение 11 доказано.

7.2. Решетки над замкнутыми множествами. Через $Sub\,X$ обозначим множество всех замкнутых подмножеств оператора замыкания Cl на X. По [23, стр. 64] $Sub\,X$ – полная решетка относительно $\subseteq$. И в $Sub\,X$ операции пересечения $\wedge$ и объединения $\vee$ имеют вид

$X_1 \wedge X_2 = X_1 \cap X_2$ и $X_1 \vee X_2 = Cl(X_1 \cup X_2)$.

Замечание 4. Но X не является матроидом, так как для него не выполняется аксиома замены ([23, стр. 64]). Например, при $A = \{x_1\}$, $\Gamma A = \{y_{10}, y_{12}, y_{13}\}$, $\Gamma\{p\} = \{y_{13}, y_{23}, y_{30}\}$, $\Gamma\{q\} = \{y_{12}, y_{23}\}$ получаем $q \notin Cl(A)$, $q \in Cl(A \cup \{p\})$, но $p \notin Cl(A \cup \{q\})$.

Утверждение 12. *Пусть X – матроид, тогда граф смежности QX – полный и для всех $x_i \in X \quad \Gamma\{x_i\} \subseteq \cup_{j \neq i} \Gamma\{x_j\}$.*

Доказательство. По аксиоме замены для матроидов при любых $p, q \in X$ и всякого $A \subsetneq X$ такого, что $p \notin Cl(A)$, $q \notin Cl(A)$, $q \in Cl(A \cup \{p\})$ и $p \in Cl(A \cup \{q\})$, получаем $\Gamma\{p\} \nsubseteq \Gamma A$, $\Gamma\{p\} \subseteq \Gamma(A \cup \{q\}) \subseteq \Gamma(A) \cup \Gamma\{q\}$. Аналогично получаем, $\Gamma\{q\} \nsubseteq \Gamma A$, $\Gamma\{q\} \subseteq \Gamma(A) \cup \Gamma\{p\}$.

Отсюда получаем, что $\exists(\Gamma\{p\} \cap \Gamma\{q\}) \nsubseteq \Gamma A$ и в графе смежности QX существует ребро (p, q). Т.е. граф смежности QX – полный.

Кроме того, для всех $x_i \in X \quad \Gamma\{x_i\} \subseteq \cup_{j \neq i} \Gamma\{x_j\}, \forall x_j \in X$.

Утверждение 12 доказано.

Утверждение 13. *Решетка $Sub\,X$ является дистрибутивной решеткой, т.е. для нее выполняются соотношения [24, стр. 51]*

$X_1 \vee (X_2 \wedge X_3) = (X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3)$
$X_1 \wedge (X_2 \vee X_3) = (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3)$

Доказательство. Множества X_1, X_2, X_3 замкнуты и входят в $Sub\ X$, поэтому $X_1 \vee (X_2 \wedge X_3) = Cl(X_1 \cup (X_2 \wedge X_3)) = Cl(X_1 \cup (X_2 \cap X_3)) = Cl((X_1 \cup X_2) \cap (X_1 \cup X_3)) = Cl(X_1 \cup X_2) \wedge Cl(X_1 \cup X_3) = (X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3)$.

Так же $X_1 \wedge (X_2 \vee X_3) = X_1 \cap Cl(X_2 \cup X_3) = Cl(X_1 \cap (X_2 \cup X_3)) = Cl((X_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap X_3)) = Cl((X_1 \wedge X_2) \cup (X_1 \wedge X_3)) = (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3)$. Утверждение 13 доказано.

Замечание 5. Но $Sub\ X$ не является булевой решеткой [24, §1.6]. Например, при $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $\Gamma\{x_1\} = \{y_1, y_2\}$, $\Gamma\{x_2\} = \{y_2\}$, $\Gamma\{x_3\} = \{y_2, y_3\}$ получаем $Cl(\{x_1\}) = \{x_1, x_2\}$, $Cl(\{x_2\}) = \{x_2\}$, $Cl(\{x_3\}) = \{x_2, x_3\}$, и операция дополнения в $Sub\ X$ не существует.

Пусть $LY \stackrel{\text{def}}{=} \{Y_j | Y_j \subseteq Y \ \&\ \exists X_j \subseteq X : \Gamma X_j = Y_j\}$.

Утверждение 14. *Частично упорядоченное по включению $\subseteq$ множество LY является решеткой.*

Доказательство. Для любой пары элементов A, B из LY рассмотрим $C_0 = \cup_j \{Y_j | \exists X_j : \Gamma X_j = Y_j \subseteq A \cap B\}$ и $C_1 = \cup_j \{Y_j | \exists X_j : \Gamma X_j = Y_j \subseteq A \cup B\}$. Ясно, что $C_0 = inf\{A, B\} = A \wedge B$, $C_1 = sup\{A, B\} = A \vee B$. Утверждение 14 доказано.

Но, в общем случае, LY не является дистрибутивной ни даже модулярной решеткой, как как может содержать пентагон или диамант [24, §2.1]. Например, у $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, \}, \Gamma x_1 = \{y_1, y_2\} = a, \Gamma x_2 = \{y_2, y_3\} = b, \Gamma x_3 = \{y_3\} = c$ элементы a, b, c образуют пентагон: $a \wedge b = a \wedge c = \varnothing$, $a \vee b = a \vee c = Y$. $\Gamma x_1 = \{y_2, y_3\} = a, \Gamma x_2 = \{y_1, y_3\} = b, \Gamma x_3 = \{y_1, y_2\} = c$ образуют диамант: $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c = \varnothing$, $a \vee b = a \vee c = b \vee c = Y$.

На множестве LY введем отображение Δ: $\Delta(Y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \cup_i \{\forall X_i | \Gamma X_i \subseteq Y_0\}$. Ясно, что $\Gamma\Delta(Y_0) = Y_0$, т.е. Δ взаимно однозначно. Кроме того, $\Delta\Gamma = Cl$. Вообще, пара $\langle \Gamma, \Delta \rangle$ является *соответствием Галуа* между частично упорядоченными множествами $Sub\ X$ и LY. Кроме того, $\Delta\Gamma$ и $\Gamma\Delta$ – *отображения замыкания* [24, стр. 78].

Для каждого $V \subseteq X$ введем функцию $sa = \Sigma_{x \in V} a(x)$, где $a(x)$ минимальный поток, входящий в вершину x. Для каждых A, B из $Sub\ X$ считаем $sa(A) \wedge sa(B) \stackrel{\text{def}}{=} sa(A \wedge B) \leqslant min(sa(A), sa(B))$, $sa(A) \vee sa(B) \stackrel{\text{def}}{=} sa(A \vee B) \geqslant max(sa(A), sa(B))$.

Пусть $Sub\ RX = sa(Sub\ X)$. Так как, по построению, sa – гомоморфизм из $Sub\ X$ в цепь действительных чисел $\mathbb{R}$, то и множество $Sub\ RX$ – дистрибутивная решетка.

Аналогично, для каждого $W \subseteq Y$ введем функцию $sb = \Sigma_{y\in W} b(y)$, где $b(y)$ максимальный поток, выходящий из вершины y. Для каждых A, B из LY считаем $sb(A) \wedge sb(B) \stackrel{\mathsf{def}}{=} sb(A \wedge B) \leqslant min(sb(A), sb(B))$, $sb(A) \vee sb(B) \stackrel{\mathsf{def}}{=} sb(A \vee B) \geqslant max(sb(A), sb(B))$.

Пусть $Sub\ RY = sb(LY)$. Так как, по построению, sb – гомоморфизм из LY в цепь действительных чисел $\mathbb{R}$, то и множество $Sub\ RY$ – решетка.

7.3. Дуальность замкнутых множеств. Для графа G рассмотрим дуальное отображение $\Gamma_d : Y \to X$, $x_i \in \Gamma_d(y_j) \iff (x_i, y_j) \in G$.

Утверждение 15. *Пусть $X_1 \subseteq X$ замкнуто для Γ, $X_1^{'} \stackrel{\mathsf{def}}{=} X \setminus X_1, Y_1^{'} \stackrel{\mathsf{def}}{=} Y \setminus \Gamma X_1$. Тогда $X_1^{'} = \Gamma_d Y_1^{'}$ и $Y_1^{'}$ замкнуто для Γ_d.*

Доказательство. Так как X_1 замкнуто для Γ, то в графе G отсутствуют ребра между X_1 и $Y_1^{'}$. Поэтому $\Gamma_d Y_1^{'} \subseteq X_1^{'}$. Если бы существовала $y_j \in \Gamma X_1$ такая, что $\Gamma_d(y_j) \subseteq X_1^{'}$, то не существовало бы ребер между y_j и X_1, откуда $y_j \notin \Gamma X_1$ – противоречие. Значит $Y_1^{'}$ замкнуто для Γ_d. Утверждение 15 доказано.

Получили взаимнооднозначное соответствие между замкнутыми множествами для Γ и для Γ_d.

7.4. Минимальные разрезы. Пусть $W \subseteq X \cup Y \cup \{t\}$ и $\{t\} \in W$. Множество U_W^- дуг, заходящих в W, называют разрезом сети, если его удаление разделяет сеть на две несвязных компоненты. Пропускной способностью разреза U_W^- называют число $c(U_W^-) = \Sigma_{U_W^-} c(u)$, где $c(u)$ пропускная способность одного ребра u.

По теореме Форда-Фалкерсона [2] в каждой конкретной транспортной сети найбольшая величина потока равна найменьшей пропускной способности некоего разреза. Разрез из этой теоремы называют минимальным разрезом.

В [1] фактически доказано, что для транспортной сети S и системы (2.1) минимальные разрезы имеют вид $U_{W_0}^-$, где $W_0 = X_0 \cup \Gamma X_0 \cup (Y \backslash \Gamma X_0) \cup \{t\}$, а X_0 пробегает все замкнутые множества в X. Т.е. выявлено полное соответствие между минимальными разрезами и замкнутыми множествами в двудольной сети.

8. Приложения метода

Приведем некоторые схемы приложений построенного метода.

8.1. Сети с истоками и стоками в вершинах. Исходный граф $G = (X, Y, \Gamma)$ можно представить как сеть с истоками в вершинах x_i интенсивностью $a_i > 0$, стоками в вершинах y_j интенсивностью $b_j > 0$

и неограниченной пропускной способностью всех ребер. Все результаты этой статьи останутся теми же.

Любая сеть с истоком или стоком в каждой вершине и неограниченной пропускной способностью во всех ребрах эквивалентна сети на таком графе G: все истоки группируются в X, а стоки - в Y. Связная группа истоков/стоков, соединенных ребрами, объединяется в одну общую вершину исток/сток с суммарной интенсивностью. В конце вычисления ограничений общая вершина заменяется нв сумму исходных.

8.2. Цепи Маркова. Пусть $m = n$ и $\Sigma_i a_i = \Sigma_j b_j = 1$. Тогда $\{a_i\}, \{b_j\}$ входные и выходные вероятности каждого шага в однородной цепи Маркова [25]. По ее графу переходов однозначно строим систему (1.1). При этом объединенная система ограничений (3.1) и (6.1) полностью определяет возможные конечные вероятности $\{b_j\}$ при заданных начальных вероятностях $\{a_i\}$ для фиксированной структуры графа переходов.

8.3. Задача финансового бюджетирования. Пусть имеется n статей дохода, каждая обьемом в $a_i, (i = 1, ..., n)$, и m статей расхода, каждая обьемом в $b_j, (j = 1, ..., m)$. По условиям финансового кодекса каждая статья дохода может использоваться только на некоторые, конкретные статьи расхода.

Распределение статей дохода по статьям расхода описывается системой (1.1). Поэтому действует объединенная система ограничений (3.1) и (6.1). Дополняя эти ограничения целевой функцией с эмпирическими правилами учета приоритетов статей расхода, получаем и решаем задачу оптимального финансового бюджетирования.

8.4. Задача формирования парка строительных машин. Пусть имеется парк строительных машин, состоящий из n типов, машины i-го типа $(i = 1, ..., n)$ способны за заданный период времени произвести суммарный объем работ $a_i = q_i N_i$, где q_i, N_i – производительность и количество машин i-го типа. И пусть за этот же период необходимо выполнить набор работ m видов, каждый вид объемом $b_j, (j = 1, ..., m)$. При этом машины одного типа могут выполнять работы только определенных типов. Спрашивается, при каких значениях b_j данный парк можно распределить по работам так, чтобы он смог все выполнить.

Данная задача описывается моделью в виде двойственной сети S', откуда получаем систему ограничений (6.1). Добавляя к этой системе целевую функцию с стоимостными ограничениями, получаем оптимизационную задачу с линейными ограничениями.

Если набор работ b_j задан неточно, т.е. $b_j \in P$, где P – некоторая область, и нам нужно сформировать парк машин, выполняющий любой набор работ из P, то в (6.1) заменяем a_i на $q_i N_i$, добавлем ограничения

$b_j \in P$, целевую функцию с стоимостными ограничениями на парк и получаем задачу целочисленного программирования для N_i.

Заключение

Алгоритм статьи для каждого простого графа $G = (X, Y, \Gamma)$ по отображению Γ строит набор всех замкнутых подмножеств в X. Эти подмножеста образуют дистрибутивную решетку и определяют все ограничения-неравенства на параметры исходной распределительной задачи.

Построенный алгоритм получения полной системы независимых ограничений на параметры многопараметрической распределительной задачи легко программируется и позволяет эффективно подбирать размеры материальных запасов, потребностей материальных продуктов, анализировать их вариации. Так же этот метод применим в задачах анализа финансового бюджетирования.

Алгоритм статьи реализован в виде примера экспериментальной программы на распространенных языках программирования, которая в аналитическом виде строит полный набор ограничений-неравенств для прямого или дуального графов.

Текст программы доступен в [19].

Там же находится экспериментальная процедура расчета всех ограничений и их совместимости для конкретного набора ресурсов.

Представляет интерес комбинаторная оценка меры того, как в среднем растет число ограничений и распределение его значений.

Результаты статьи могут быть использованы при анализе совместимости набора параметров многопараметрической распределительной задачи. Такой анализ проводится независимо от оптимизационной задачи, либо как предварительный этап перед постановкой оптимизационной задачи.

Дальнейший план исследований.

1. Аналитический анализ числа ограничений и его ассимптотики в зависимости от размера графа.
2. Углубление связей структуры многозначных отображений с алгебраическими структурами.
3. Применение к задачам оптимального управления потоками на графе с набором ограничений в качестве фазового пространства.

Приложение

Таблица 1. К-во ограничений (r) и к-во сетей (Nets) для $|X| = 3$

$\|Y\|$:	3		4		5		6		7		8	
r	Nets	%	Nets	%	Nets	%	Nets	%	Nets	%	Nets	%
1	7	2,0	15	0,4	31	0,1	63	0,0	127	0,0	255	0,0
2	108	31,5	450	13,3	1620	5,4	5418	2,2	17388	0,8	54450	0,3
3	168	49,0	1470	43,6	9120	30,6	48006	19,2	230328	11,2	1043790	6,3
4	60	17,5	1128	33,4	11820	39,7	94920	38,0	656460	32,0	4136328	24,9
5	-	-	216	6,4	4320	14,5	52920	21,2	514080	25,1	4359096	26,3
6	-	-	72	2,1	2160	7,3	34920	14,0	423360	20,7	4356072	26,3
7	-	-	24	0,7	720	2,4	13800	5,5	206640	10,1	2631384	15,9
sum	343	100	3375	100	29791	100	250047	100	2048383	100	16581375	100

Таблица 2. К-во ограничений (r) и к-во сетей (Nets) для $|X| = 4$

$\|Y\|$:	4		5		6	
r	Nets	%	Nets	%	Nets	%
1	15	0,0	31	0,0	63	0,0
2	1050	2,1	3780	0,4	12642	0,1
3	8160	16,1	50430	5,5	264936	1,7
4	17400	34,4	183480	19,9	1478400	9,4
5	15000	29,6	270480	29,3	3266760	20,7
6	5904	11,7	196440	21,3	3525480	22,4
7	2256	4,5	122760	13,3	3075240	19,5
8	768	1,5	64800	7,0	2199120	14,0
9	72	0,1	20400	2,2	1036440	6,6
10	-	-	7920	0,9	591840	3,8
11	-	-	1440	0,2	158400	1,0
12	-	-	1440	0,2	120960	0,8
13	-	-	-	-	9360	0,1
14	-	-	-	-	3600	0,0
15	-	-	120	0,0	9720	0,1
sum	50625	100	923521	100	15752961	100

Таблица 3. Математическое ожидание (E) и стандартное отклонение (σ)

$\|Y\|$:	3		4		5		6		7		8	
$\|X\|$	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ
3	2,82	0,74	3,41	0,94	3,94	1,09	4,42	1,17	4,84	1,20	5,19	1,18
4	-	-	4,53	1,19	5,52	1,51	6,48	1,76	7,38	1,93	8,21	2,03
5	-	-	-	-	7,02	1,82	8,56	2,25	10,08	2,61	11,55	2,89
6	-	-	-	-	-	-	10,60	2,68	12,85	3,24	15,10	3,73
7	-	-	-	-	-	-	-	-	15,63	3,83	18,78	4,55
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	22,55	5,33

Таблица 4. Математическое ожидание (E) и стандартное отклонение (σ) для сетей $n \times m$

8×9		9×10		10×11		11×12		12×13		13×14	
E	σ	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ	E	σ
26,83	6,27	37,55	8,53	51,62	11,49	69,83	15,31	93,19	20,20	122,83	26,41

Литература

1. **Кемпер Ф. М.** Алгоритм формирования существенных ограничений транспортной задачи с запретами. Математические методы решения экономических задач. Сборник 8. С. 126–134. Москва: Наука, 1979. 139 с.
2. **Форд Л., Фалкерсон Д.** Потоки в сетях, пер. с англ. Москва: ИЛ, 1966. 278 с.
3. **Ху Т.** Целочисленное программирование и потоки в сетях. Москва: Мир, 1974. 520 с.
4. **Филлипс Д., Гарсия-Диас А.** Методы анализа сетей, пер. с англ. Москва: Мир, 1984. 496 с.
5. **Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.** Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд. Москва: Вильямс, 2013. 1328 с.
6. **Berge C.** Graphs. Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1991. 413 p.
7. **Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B.** Network Flows : Theory, Algorithms, and Applications. NY, Prentice Hall, 1993. 846 p.
8. **Берж К.** Теория графов и ее применение, пер. с франц. Москва: ИЛ, 1962. 320 с.
9. **Родионов В. В.** Параметрическая задача о кратчайших расстояниях // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1968. Т. 8. № 5. С. 1173–1177.
10. **Швецов В. И.** Алгоритмы распределения транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10.
11. **Гасникова Е. В., Гасников А. В., Ярмошик Д. В. и др.** О многостадийной транспортной модели и достаточных условиях ее потенциальности // Математическая теория игр и её приложения. 2023. Т. 15. № 2. С. 3–17.
12. **Йенсен П., Барнес Д.** Потоковое программирование, пер. с англ. Москва: Радио и связь, 1984. 392 с.
13. **Лотоцкий В. А., Мандель А. С.** Модели и методы управления запасами. Москва: Наука, 1991. 188 с.
14. **Малашенко Ю. Е., Новикова Н. М.** Модели неопределенности в многопользовательских сетях. Москва: Эдиториал УРСС, 1999. `http://www.ccas.ru/depart/malashen/papper/pp.htm`
15. **Боженюк А. В., Герасименко Е. М.** Разработка алгоритма нахождения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой динамической транспортной сети // Инженерный вестник Дона. 2013. № 1. `http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583`
16. **Колесников К. Г., Масалкин А. А., Москвин Б. В.** Параметрическая оптимизация информационного обмена в сети связи с динамически изменяющейся структурой // Труды военно-космической академии имени А. Ф. Можайского. 2019. № 668. С. 31–36.
17. **Lawler E. L.** Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. NY, Holt, Rinehart and Winston, 1976. 374 p.
18. **Hoffman A. J.** Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis // Combinatorial Analysis, edited by

R. Bellman and M. Hall, pp. 113–128. Providence, American Mathematical Society, 1960. 311 p.

19. https://github.com/Gilbert00/TransportNet

20. **Даффин Р., Питерсон Е., Зенер К.** Геометрическое программирование, пер. с англ. Москва: Мир, 1972. 311 с.

21. **Черников С. Н.** Линейные неравенства. Москва: Наука, ГРФМЛ, 1968. 488 с.

22. **Зоркальцев В. И., Киселева М. А.** Системы линейных неравенств. Иркутск: Изд-во Иркутского гос. ун-та, 2007. 128 с.

23. **Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. СПб: Лань, 2010. 368 с.

24. **Гретцер Г.** Общая теория решеток, пер. с англ. Москва: Мир, 1982. 456 с.

25. **Кемени Д. Дж., Снелл Дж. Л.** Конечные цепи Маркова, пер. с англ. Москва: Наука, ГРФМЛ, 1970. 272 с.