

Об одном случае сведения системы уравнений в частных производных, описывающей нагрев и плавление тонкостенных порошковых проволок малого диаметра, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

А.С.Борисов^{*)}, Р. Найденов,

Москва, 2026 Контакты^{*)}: basifto@mail.ru, +79168002718мт

Предложена система уравнений в частных производных для описания динамики нагрева и плавления порошковых проволок, используемых в металлургии для легирования сталей и модифицирования микровключений, а также в сварочных процессах. Показано, что если данную систему сформулировать в терминах средних- средней по радиусу температуры наполнителя и средней по радиусу температуры оболочки (что обоснованно для тонких оболочек и малых диаметров у проволок), то данная система сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которая допускает точные, ранее уже опубликованные [2], аналитические решения.

Предложенная система уравнений дополнена соотношениями, которые описывают кристаллизирующийся вокруг проволоки слиток- устойчивое в течение всего процесса инъекции проволоки в ковш образование расплава солитонного типа. По аналогии выведены уравнения, которые в терминах средней по радиусу температуры слитка и радиуса слитка описывают динамику его кристаллизации. Рассмотрена модельная аппроксимация решений предложенных уравнений. Найдена зависимость между скоростью роста слитка и скоростью падения его средней температуры, а также показано, что при малых временах, рост радиуса слитка происходит по линейному закону.

Полученная система ОДУ может служить основой для проведения существенно более простых и быстрых расчетов динамики нагрева и плавления порошковых проволок, чем традиционно применяемые специализированные пакеты, основанные на решении уравнения теплопроводности [1].

1.Введение. Порошковые проволоки (пп) находят широкое применение. Наибольшее распространение среди них в черной металлургии получили пп с наполнителем из чистого (>98,5%) кальция. Основной задачей применения данных пп является: попасть местом плавления оболочки в заданную область высоты сталеразливочного ковша. Решение данной задачи, не мыслимо без расчетов. Проведение таких расчетов - трудоемкая, но решаемая задача. Имеются практические пакеты прикладных программ, сводящиеся к решению уравнения теплопроводности для системы сред: наполнитель, оболочка, расплав, находящихся в различных фазовых состояниях [1]. С учетом осевой симметрии проволок, даже в условиях установившегося режима, задача является трудоемкой. Как отмечено ранее [2] и показано ниже, ее математическая постановка допускает значительные упрощения, если учесть, что оболочки порошковых проволок это очень тонкие цилиндры, а наполнитель- плотно упакованные твердые цилиндрические стержни малых диаметров.

Действительно, в реальности разброс вертикальной составляющей скорости ввода пп не может быть обеспечен современными техническими устройствами лучше 5-10% от задаваемой устройством скорости (например, из-за того, что вводная труба в процессе инъекции на некоторых устройствах с открытыми ковшами так нагревается излучением, что угол ввода вначале слабо отличающийся от вертикального, затем значительно увеличивается). Этот факт на ковшах большой размерности (120-350тн) приводит к разбросу глубин плавления оболочек проволок по высоте $\delta h = \delta v \cdot t_{\text{плавления}} = (5-10\%) \cdot 2\text{м/с} \cdot 3\text{с} \approx 0,3-0,6\text{м}$. В тоже время диаметр порошковых проволок ~1см, а толщины оболочек ~1мм. Оба этих параметра существенно меньше, чем указанная выше неопределенность реального расположения глубины плавления оболочек. Из-за этого, вероятно, не имеет смысла решать задачу настолько детально, чтобы рассчитывать распределение температур по радиусу в наполнителе или оболочке, а достаточно перейти от этих зависимостей к их средним (т.е. усредненным по радиусу-вектору, отсчитываемому от оси симметрии порошковой проволоки) величинам. При таком подходе уравнения, описывающие данные величины, значительно упрощаются, что позволяет создавать пакеты вычислительных

программ для решения данных задач даже на базе неспециализированных универсальных бухгалтерских оболочек разработки компании Microsoft Office Excel разных версий. Это значительно проще, чем создание расчетных модулей для решения уравнения теплопроводности со специфическими граничными условиями (ГУ), описывающими развитие и сосуществование в физической системе различных фаз. Так созданный в Excel на базе предложенных результатов программный комплекс обеспечил описание реальных данных в диапазоне +/-15% путем подбора свободных параметров модели [2].

2. Постановка задачи. Поскольку в различных работах применяют различные формы записи уравнений теплопроводности, приведем здесь их полный вывод вместе с граничными условиями, которые описывают поведение твердой фазы в процессе фазового перехода в том виде, в котором для нас это будет удобнее.

Начнем с того, что рассмотрим расплав в сталеразливочном ковше без шлака (при необходимости наличие шлака в ковше легко учесть предлагаемыми способами). Рассмотрим случай, когда в ковш вертикально, с постоянной скоростью вводится порошковая проволока, содержащая твердый сердечник из запрессованного или монолитного материала, отличного от материала оболочки. В такой постановке задача имеет осевую симметрию. Если необходимо определить распределение температуры по радиусу r внутри проволоки и снаружи в зависимости от времени t , глубины ее проникновения в ковш z , то следует записать закон сохранения энергии, который определяет входящие и исходящие из нее потоки тепла. В начальный момент распределение температуры вдоль радиуса проволоки разумно принять постоянным $T=T(0,r)=\text{Const} \sim 3 \cdot 10^2 \text{ C}^\circ$, так как проволока до ее ввода в ковш находится в состоянии термодинамического равновесия с окружающей средой. Температура расплава в ковше $T_p \sim 1600 \text{ C}^\circ$, которую все время инъекции будем считать постоянной (масса вводимой проволоки составляет 0,05-0,005% от массы расплава и потому, изменение температуры расплава в ковше минимально). В такой постановке при начале ввода тонкий слой расплава примыкающий к оболочке мгновенно охлаждается меньше температуры кристаллизации расплава $\approx 1520 \text{ C}^\circ$ и в направлении от оси проволоки от наружной части ее оболочки побежит волна кристаллизации. Наличие такого закристаллизованного слоя расплава экранирует поток тепла в оболочку (данный слой для удобства будем в дальнейшем иногда называть «намороженным», по аналогии с явлением образования инея на трубах с переохлажденной жидкостью, хотя никакого реального отношения к намерзанию чего-либо это, разумеется, не имеет). Из-за эффекта экранировки данный слой приходится учитывать при построении математической модели.

Закон сохранения энергии с учетом возможного изменения объема образующегося слитка запишем в эйлеровых координатах в следующей форме:

$$d/dt(\int_{v(t)} d^3r(\rho \cdot c \cdot T)) = \int_{s(t)} (\vec{ds} \cdot \vec{j}) + d/dt(\int_{v(t)} d^3r(\rho \cdot q)) \quad (1)$$

здесь $v(t)$ - объем, охватывающий порошковую проволоку; $s(t)$ -поверхность, ограничивающая объем $v(t)$; q -тепло фазовых переходов; c - удельная теплоемкость; ρ - плотность; T - температура; \vec{j} - вектор потока тепла; \vec{ds} -вектор-нормаль к ds элементу площади, охватывающей объем $v(t)$. В (1) учтено, что изменение теплосодержание в объеме $v(t)$ за единицу времени равно сумме потоков тепла через охватывающую данный объем поверхность $s(t)$ и мощности внутренних источников тепла в объеме. Полные производные по времени от интегралов по объему, стоящие в левой части и во втором слагаемом правой части (1) при условии, что объем есть функция времени запишем согласно приведенному в Приложении 1 доказательству следующим образом:

$$d/dt(\int_{v(t)} d^3r(\rho \cdot c \cdot T)) = \int_{s(t)} ds v_{\perp}(\rho \cdot c \cdot T) + (\int_{v(t)} d^3r(\partial/\partial t(\rho \cdot c \cdot T))) \quad (2)$$

и $d/dt(\int_{v(t)} d^3r(\rho \cdot q)) = \int_{s(t)} ds v_{\perp}(\rho \cdot q) + (\int_{v(t)} d^3r(\partial/\partial t(\rho \cdot q)))$, здесь v_{\perp} - перпендикулярная площади $s(t)$ составляющая скорости изменения объема системы. Интегралы по поверхности $s(t)$ заменим согласно теореме Остроградского- Гаусса интегралами по объему. Это приводит к выражению: $\int_{v(t)} d^3r (\partial/\partial t(\rho \cdot c \cdot T) + \partial/\partial t(\rho \cdot q) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(T) - \text{div}(\vec{j}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\rho \cdot q)) = 0$, или принимая во внимание, что внутренние источники тепла стационарны и сосредоточены только вдоль границы кристаллизации, т.е. интеграл по объему от них равен нулю, получаем скалярное уравнение

$$\partial/\partial t(T) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(T) - \text{div}(\vec{j}) = 0, \vec{j} = (\lambda/(c\rho)) \cdot \vec{\nabla}T; c, \lambda, \rho = \text{Const}, \vec{\nabla} = i_x \partial/\partial x + j_y \partial/\partial y + k_z \partial/\partial z \quad (3).$$

Аналогичный закон сохранения энергии на границе $s(t)$, где происходит фазовый переход, записываем в виде (учитываем, что мощность выделившегося на границе тепла равна сумме потоков тепла на границе):

$d/dt(\int_{v(t)} d^3r(\rho \cdot q \cdot \delta(R-R(t)))) = \int_{s(t)} (\vec{ds} \cdot \vec{j} \cdot \delta(R-R(t)))$, здесь $\delta(R-R(t))$ - дельта-функция, фиксирующая движение границ объема $v(t)$. Используя (2), а также учитывая, что частная производная по времени от дельта-функции $\partial/\partial t(\delta(R-R(t)))=0$, получаем соотношение $\int_{s(t)} (\vec{ds} \cdot (\vec{v}_{\perp}(\rho \cdot q) - \vec{j})) \cdot \delta(R-R(t)) = 0$, что эквивалентно векторному уравнению:

$$\vec{v}_{\perp}(\rho \cdot q) = \vec{j} = -\lambda \cdot \vec{\nabla}T \quad (4),$$

здесь \vec{v}_{\perp} - перпендикулярная составляющая вектора скорости изменения границы разделения фаз, которая в рассматриваемом случае параллельна с суммарным потоком тепла в оболочку или из нее. Для потока тепла при выводе (4) использовано соотношение Фурье: $\vec{j} = -\lambda \cdot \vec{\nabla}T$, λ - коэффициент теплопроводности среды.

Заметим, что для того, чтобы описать уравнениями (3)-(4) полную систему: наполнитель- оболочка- замороженный слой необходимо эти соотношения применить к каждому компоненту системы и кроме того согласовать условия на границах переходов от одного материала к другому в виде равенства температур и потоков тепла на границах переходов. Таким образом, необходимо задать еще дополнительные равенства:

$$T_i(r_i, t) \Big|_{r_i \rightarrow R_i - \delta} = T_j(r_j, t) \Big|_{r_j \rightarrow R_i + \delta} \quad \text{при } i \neq j \text{ и } \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta = +0, \delta > 0, \text{ при начальном условии } T(0, r) = \text{Const} = T_0$$

$$\text{и } \vec{j} \Big|_{r_i \rightarrow R_i - \delta} = \vec{j} \Big|_{r_j \rightarrow R_i + \delta} \quad \text{или} \quad \lambda_i \cdot \vec{\nabla}T_i \Big|_{r_i \rightarrow R_i - \delta} = \lambda_j \cdot \vec{\nabla}T_j \Big|_{r_j \rightarrow R_i + \delta}, \text{ где } i, j = \text{Ca}, \text{ o}, \text{ s} \quad (5).$$

Индексы Ca, o, s обозначают соответственно наполнитель, оболочка, слиток-«замороженный» слой. В общем случае при необходимости знать распределения температуры вдоль радиуса во всех компонентах $i = \text{Ca}, \text{ o}, \text{ s}$ в зависимости от времени t , глубины погружения z , необходимо решить систему уравнений (3)-(4) согласовав граничные и начальные условия (5).

3. Преобразование уравнений. Наполнитель и оболочка. Начальное условие в (5) можно переписать в следующее виде

$$T(0, r) = \text{Const} = T_0 \ll T_p \quad \text{или} \quad T_0/T_p = (2,93/16) \approx 0 \quad (6).$$

Решение задачи (3)-(6) трудоемко и вряд ли может быть выполнено полностью аналитически. При численном счете требует значительных вычислительных затрат и разработки или применения специализированных пакетов прикладных программ для решения систем уравнений в частных производных. В тоже время понятно, что в практических приложениях, с учетом возникающей при применении кальций содержащих и других ферро материалов турбулентностей в расплаве,

точное описание распределения температуры внутри проволоки знать вряд ли целесообразно, так как даже характерные геометрические масштабы турбулентных вихрей расплава в ковше оказываются много больше, чем характерные размеры порошковой проволоки и кристаллизующегося вокруг него слитка. По сути такая детализация является превышением точности расчетной модели. Именно поэтому от точных уравнений распределения величин по радиусу разумно отказаться и перейти к точным уравнениям, описывающим динамику поведения усредненных величин- средней по радиусу температуры оболочки в заданный момент времени на заданной глубине; средней по радиусу температуры наполнителя на заданной глубине и т.д. Если такой переход допускается строгими преобразованиями системы уравнений в частных производных (3)-(6) к системе уравнений в частных производных на единицу более низкой размерности (от распределений по r отказываемся в пользу одного числа-среднего по r), то при описании стационарного режима это позволяет получить систему ОДУ, что в ряде случаев приводит к аналитическим решениям задачи. Данные частные решения могут пригодиться как для проведения практических инженерных расчетов, так и для тестирования компьютерных программ.

Рассмотрим далее установившийся режим, при котором вводимая порошковая проволока плавится на некоторой глубине от поверхности расплава. Будем пренебрегать тем фактом, что проволока плавясь в точке с координатой $z=-H_{\text{плав}}$ ($H_{\text{плав}} > 0$, ось z направлена вертикально вниз) на самом деле постоянно нагревается с точки входа теплом расплава, которое передается вверх по оболочке, что приводит к тому, что глубина плавления оболочки постоянно приближается к поверхности расплава (или удаляется от нее, если время плавления оболочки больше времени за которое конец проволоки проходит высоту ковша). Такой режим инъекции для внешнего наблюдателя условно можно назвать квазистационарным. В действительности он не стационарен именно из-за эффекта сокращения длины погруженного в ковш участка проволоки. Если этим фактом пренебречь, то это серьезно облегчает решение задачи (3)-(6). Покажем, как это происходит.

Рассмотрим в первую очередь уравнения для оболочки и наполнителя в период, когда в такой системе не происходит фазовых переходов. Тогда в уравнениях (3)-(6) отсутствует компонента, описывающая кристаллизующийся слой расплава, так как для нее $T=\text{Const}$ и скорость движения раздела фаз и градиенты температуры равны нулю. В уравнении (3) воспользуемся условием квазистационарности $\partial/\partial t(T_{ca})=\partial/\partial t(T_o)=0$ и перейдем в систему координат связанную с движущейся проволокой (локальное время в этой системе координат $z/v_z=\tau$). Это в цилиндрической системе координат с учетом азимутальной симметрии задачи сводит (3) к нестационарным, одномерным уравнениям теплопроводности вида (7) (пренебрегаем вторыми производными по z по сравнению со вторыми производными по радиусу, что возможно при $\partial^2 T/\partial r^2 \gg \partial^2 T/\partial z^2$ или $(r/z)^2 \ll 1$, где $r \sim D/2$, D -диаметр проволоки; $z \sim H$, H -высота ковша):

$$\partial/\partial \tau(r_i \cdot T_i) = X_i \cdot \partial/\partial r_i(r_i \cdot \partial/\partial r_i(T_i)), \quad X_i = \lambda_i / (c_i \cdot \rho_i), \quad i = Ca, o \quad (7).$$

Для решения (7) с учетом (5)-(6) вводим средние по радиусу температуры наполнителя и оболочки величины следующей системой соотношений: $t_i = \bar{T}_i / T_p$; $\bar{T}_o = (2 / (2 \cdot \Delta \cdot R + \Delta^2)) \cdot \int_0^{R+\Delta} dr_o \cdot r_o \cdot T_o(r_o)$; $\bar{T}_{Ca} = (2 / R^2) \cdot \int_0^R dr_{Ca} \cdot r_{Ca} \cdot T_{Ca}(r_{Ca})$; $i = Ca, o$ и интегрируем (7) по радиусам для каждого индекса по отдельности, что дает два уравнения (для каждого из индексов):

$$d\bar{T}_o/d\eta = X_o \cdot [(R+\Delta) \cdot (\partial T_o/\partial r)_{r \rightarrow R+\Delta-0} - R \cdot (\partial T_o/\partial r)_{r \rightarrow R+0}] \cdot (2 / ((2 \cdot \Delta \cdot R + \Delta^2) \cdot T_p)) \quad (8)$$

$d\bar{T}_{ca}/d\eta = X_{ca} * [R * (\partial T_{ca}/\partial r)_{r \rightarrow R-0}] * (2/(R^2 * T_p))$, здесь ,безразмерное время $\eta = \tau/\tau_o$, где τ_o пока не определено.

Из граничных условий (5) имеем связь:

$$(\partial T_o/\partial r)_{r \rightarrow R+\Delta+0} = (\lambda_s/\lambda_o) * (\partial T_s/\partial r)_{r \rightarrow R+\Delta+0} \text{ и } (\partial T_{ca}/\partial r)_{r \rightarrow R-0} = (\lambda_o/\lambda_{ca}) * (\partial T_o/\partial r)_{r \rightarrow R+0} \quad (8a)$$

Вводим соотношения Фурье в виде:

$$(\partial T_s/\partial r)_{r \rightarrow R+\Delta+0} = \alpha_{so} * (\bar{T}_s - \bar{T}_o) \text{ и } (\partial T_o/\partial r)_{r \rightarrow R+\Delta+0} = \alpha_{sca} * (\bar{T}_o - \bar{T}_{ca}) \quad (8b).$$

Подставляя (8b), (8a) в (8) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $t_i = \bar{T}_i/T_p$ где $i=0, Ca$:

$$dt_o/d\eta = (2 * \tau_o * X_o * (R+\Delta) * \lambda_s * \alpha_{so} / ((2 * \Delta * R + \Delta^2) * \lambda_o)) * [t_s - t_o] - 2 * X_o * R * \tau_o * \lambda_{ca} * \alpha_{oca} / ((2 * \Delta * R + \Delta^2) * \lambda_o) * [t_o - t_{ca}]$$

$$dt_{ca}/d\eta = (2 * \tau_o * X_{ca} * \alpha_{oca} / R) * [t_o - t_{ca}] \quad (8c)$$

с начальными условиями, следующими из (6): $t_i(0) = \bar{T}_i(0)/T_p = (2,93/16) \approx 0$, $i=0, Ca$.

Выбираем τ_o таким образом, чтобы в верхнем уравнении (8c) в правой части в первом слагаемом множитель перед квадратной скобкой давал бы единицу. Это сводит (8c) к системе:

$$dt_o/d\eta = [t_s - t_o] - a * [t_o - t_{ca}]$$

$$dt_{ca}/d\eta = b * [t_o - t_{ca}] \quad (8d)$$

$t_o(0) = t_{ca}(0) = \bar{T}_i(0)/T_p = (2,93/16) \approx 0$, $i=0, Ca$, где $a = (\lambda_{ca} * \alpha_{oca} / \lambda_s * \alpha_{so}) * (1/(1+\Delta/R))$; $b = 2X_{ca} * \alpha_{oca} * \tau_o / R$; $\tau_o = (\lambda_o / (\lambda_s * \alpha_{os} * X_o)) * \Delta * (1+\Delta/2R) / (1+\Delta/R)$, $\eta = \tau/\tau_o$, $z/v_z = \tau$.

Заметим, что уравнения (8d) имеют простой физический смысл. Динамика изменения средних температур оболочки и наполнителя определяется через линейную комбинацию разностей их средних температур и слагаемого характеризующего разность средней температуры кристаллизованного слитка и оболочки. Иными словами определяется потоками втекающего и вытекающего из пп тепла. Соотношения (8d) совпадают с системой уравнений, полученной в [2] иным способом (см. [2] формулы (1)-(1'')), если принять верным следующее равенство вводимых в [2] эмпирических параметров x и y и введенных в данной работе коэффициентов α_{oca} и α_{os} :

$$x/y = (\lambda_{ca} * \alpha_{oca}) / (\lambda_s * \alpha_{os}) \quad (8e)$$

Факт сведения системы уравнений в частных производных (7) (в более общем случае (3)-(6)) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для средних (8d), означает возможность получения аналитического решения задачи (7) или (3)-(6) в случае, если известно, как зависит средняя температура слитка («намороженного» слоя) от безразмерного времени η , т.е. при задании функции $t_s = t_s(\eta)$.

4. Преобразование уравнений. Слиток или «намороженный» слой.

Для дальнейшего введем усредненную по радиусу образующегося вокруг пп слитка безразмерную температуру, которую определим следующей формулой:

$$t_s(\eta) = (2 / (2 * (R_s(\eta) - 1) + (R_s(\eta) - 1)^2)) * \int_1^{R_s} dR * R * T_s(\eta, R) / T_p \quad (9)$$

Заметим, что нормировочный множитель, записан здесь по аналогии с множителем, принятым для наполнителя и оболочки, и может быть переписан в более простой форме $2/(R_s^2-1)$. При $T_s(\eta, R)/T_p=1$, т.е. если температура слитка везде и всегда равна температуре расплава, (9) определяет среднюю температуру слитка t_s в относительных единицах равной единице в соответствии со здравым смыслом. Рассмотрим безразмерное уравнение теплопроводности в форме (7) $\partial/\partial\eta(R_s \cdot T_s) = \chi_s \cdot \partial/\partial R_s (R_s \cdot \partial/\partial R_s (T_s))$, $\chi_s = \lambda_s / (c_s \cdot \rho_s)$, $\chi_s = X_s \cdot \tau_o / (R + \Delta)^2$, $i=s$, $\eta = \tau / \tau_o$, $z/v_z = \tau$ здесь R , Δ определены в (7), τ_o определено формулой (8d), индекс $i=s$ означает слиток. Проинтегрируем его правую и левую части по dR_s в пределах от 1 до $R_s(\eta)$, η -текущее безразмерное время в локальной системе координат проволоки и умножим это соотношение на нормировку, о которой говорилось выше. Получим:

$$(2/(R_s(\eta)^2-1)) \cdot \int_1^{R_s} dR_s \cdot \partial(R_s \cdot T_s(\eta, R)) / \partial \eta = 2\chi_s / (R_s^2-1) \cdot [(R_s \cdot (\partial T_s / \partial R_s))_{R_s \rightarrow R_s(\eta)-0} - (R_s \cdot (\partial T_s / \partial R_s))_{R_s \rightarrow 1+0}] \quad (10)$$

Если левую часть (10) принять за А, а правую за В, это уравнение имеет вид А=В. Так как

$$dt_s/d\eta = -(2R_s \cdot \check{R}_s) / (R_s^2-1) \cdot \int_1^{R_s} dR_s \cdot R_s \cdot (T_s/T_p) + (2/(R_s^2-1)) \cdot \int_1^{R_s} dR_s \cdot (\partial(R_s \cdot T_s/T_p) / \partial \eta) + (2/(R_s^2-1)) \cdot \check{R}_s \cdot R_s \cdot (T_s/T_p);$$

$\check{R}_s = dR_s/d\eta$ отсюда

$$A = \partial t_s / \partial \eta + 2 \cdot \check{R}_s \cdot R_s / (R_s^2-1) \cdot [t_s - (T_s/T_p)] \quad (10a)$$

Используем для дальнейшего два тождества:

$$R_s \cdot (T_s/T_p) = \partial / \partial R_s (\int_1^{R_s} dy y (T_s/T_p)), \quad \text{а также} \quad \partial t_s / \partial R_s = \partial / \partial R_s [(2/(R_s^2-1)) \cdot \int_1^{R_s} dR_s \cdot R_s \cdot (T_s/T_p)] = -(2 \cdot R_s / (R_s^2-1)) \cdot (2/(R_s^2-1)) \cdot \int_1^{R_s} dy y (T_s/T_p) + 2R_s \cdot (T_s/T_p) / (R_s^2-1) \quad \text{откуда}$$

$$(T_s/T_p) = t_s + ((R_s^2-1)/(2R_s)) \cdot \partial t_s / \partial R_s \quad (10b)$$

Полученное соотношение имеет простой физический смысл. Распределение температуры вдоль слитка определяется его средней температурой и практически линейно (в локальных масштабах) зависит от радиуса образующегося слитка. Это имеет место всегда, даже если отклонение радиуса слитка от единицы значительно. Подставляем полученное соотношение (10b) в (10a), чем определяем левую часть (10)

$$A = dt_s/d\eta - \check{R}_s \cdot \partial t_s / \partial R_s = \partial t_s / \partial \eta, \quad \check{R}_s = dR_s/d\eta \quad (10c)$$

Рассмотрим выражение для правой части уравнения теплопроводности проинтегрированного по радиусу слитка (10). В силу принятых граничных условий (5) можем записать два соотношения

$$(\partial(T_s/T_p) / \partial R_s)_{R_s \rightarrow R_s+0} = (\lambda_s/\lambda_p) \cdot (\partial(T_s/T_p) / \partial R_s)_{R_s \rightarrow R_s-0} \quad \text{и} \quad (\partial(T_s/T_p) / \partial R_s)_{R_s \rightarrow 1-0} = (\lambda_s/\lambda_o) \cdot (\partial(T_s/T_p) / \partial R_s)_{R_s \rightarrow 1+0}$$

для которых, используя (10b), вводим новые величины- α_{ps} , α_{so} соотношениями:

$$(\partial(T_s/T_p) / \partial R_s)_{R_s \rightarrow R_s+0} = \alpha_{ps} \cdot (1 - T_s/T_p) = \alpha_{ps} \cdot (1 - t_s - ((R_s^2-1)/(2R_s)) \cdot \partial t_s / \partial R_s) \quad \text{и}$$

$$(\partial(T_s/T_p) / \partial R_s)_{R_s \rightarrow 1-0} = \alpha_{so} \cdot (T_s/T_p - T_o/T_p) = \alpha_{so} \cdot (t_s - t_o + ((R_s^2-1)/(2R_s)) \cdot \partial t_s / \partial R_s) \quad (11)$$

здесь α_{ps} и α_{so} пока не определены.

Подставив эти соотношения в (10), получаем уравнение теплопроводности для распределения средней температуры слитка по времени в виде

$$\partial t_s / \partial \eta = 2\chi / (R_s^2 - 1) * [(R_s * (\lambda_p / \lambda_s) * \alpha_{ps} * (1 - t_s - ((R_s^2 - 1) / (2R_s)) * \partial t_s / \partial R_s)_{R_s \rightarrow R_s(\eta)+0} - (\lambda_o / \lambda_s) * \alpha_{so} * (t_s - t_o + ((R_s^2 - 1) / (2R_s)) * \partial t_s / \partial R_s)_{R_s \rightarrow 1-0}]$$

Его более компактно можно записать следующим образом:

$$\partial t_s / \partial \eta = \varpi_s * (1 - t_s) - \varpi_o * (t_s - t_o), \text{ здесь} \quad (12)$$

$$\varpi_s = \omega_s^T - \chi * (\lambda_p / \lambda_s) * \alpha_{ps} * \bar{\alpha}_{ps}, \quad \omega_s^T = (2\chi / (R_s^2 - 1)) * R_s * (\lambda_p / \lambda_s) * \alpha_{ps}, \quad (\partial t_s / \partial R_s)_{R_s \rightarrow R_s(\eta)+0} = \bar{\alpha}_{ps} * (1 - t_s)$$

$$\varpi_o = \omega_o^T + \chi * (\lambda_o / \lambda_s) * \alpha_{so} * \bar{\alpha}_{so} / R_s, \quad \omega_o^T = (2\chi / (R_s^2 - 1)) * (\lambda_o / \lambda_s) * \alpha_{so}, \quad (\partial t_s / \partial R_s)_{R_s \rightarrow 1-0} = \bar{\alpha}_{so} * (t_s - t_o).$$

Это уравнение аналогично по форме соответствующему уравнению [2 см (1'')], уже полученным в п.3. (8a)-(8d) и имеет тот же прозрачный, физический смысл. Скорость изменения относительной средней температуры слитка определяется входящими и исходящими в него и из него потоками тепла.

В данном случае, однако, в отличие от соотношений п.3 следует учесть, что на среднюю температуру слитка будет оказывать влияние, как геометрия роста слитка, так и тепло фазовых переходов, которое выделяется на границе кристаллизации. Последнее пока не учтено введенными соотношениями. Чтобы его учесть, необходимо переформулировать граничное условие (4) через среднюю температуру слитка и геометрический размер новой фазы, т.е. через радиус слитка. Чтобы это сделать, заметим, что условие на границе фаз (4) может быть переписано в безразмерной форме

$$(\Omega / \chi) * \check{R}_s = -\partial(T_s / T_p) / \partial R_s, \quad \check{R}_s = dR_s / d\eta, \quad \eta = \tau / \tau_o, \quad \Omega = q_s / (c_s * T_p), \quad \chi = X_s * \tau_o / (R + \Delta)^2, \quad X_s = \lambda_s / (c_s * \rho_s) \quad (13),$$

причем $q_s > 0$ для кристаллизации и $q_s < 0$ для плавления. Используя (10b), можем переписать (13) в терминах средних. Тогда

$$(\Omega / \chi) * \check{R}_s = -\partial(t_s) / \partial R_s * (3 * R_s^2 + 1) / ((2R_s^2) - (R_s^2 - 1) / (2R_s)) * (\partial^2(t_s) / \partial R_s^2). \quad (14)$$

Соотношения (12) и (14) определяют динамику поведения средних величин: температуры и размера слитка. При этом средняя температура слитка, если она определена так как это записано в (12) есть функция двух переменных- радиуса слитка и времени (или что тоже самое вертикальной координаты $z = v * \eta * \tau_o$), а радиус слитка зависит только от времени.

5. Приближенный расчет температуры и радиуса слитка. В общем случае соотношения (12)-(14) не сильно проще уравнения теплопроводности, так как содержат две переменные для температуры слитка. В тоже время из этих уравнений виден путь их упрощения. Для этого заметим, что из условий задачи уже следует примерный вид кривой, каковой должно быть ее решение. Действительно, вдоль оси симметрии z проволоки слиток сначала образуется, а потом, уменьшаясь, исчезает. В соответствии с этим положим, что радиус слитка и его температура зависят от времени согласно простейшей кривой с максимумом- параболе

$$R_s = 1 + (\alpha / 2\eta_o) * (2\eta_o * \eta - \eta^2) \quad 0 < \eta < 2\eta_o \quad \text{и} \quad R_s = 1 \quad \text{для} \quad \eta > 2 * \eta_o$$

$$t_s = 1 - (\beta / 2\eta_o) * (2\eta_o * \eta - \eta^2) \quad 0 < \eta < 2\eta_o \quad \text{и} \quad t_s = 1 \quad \text{для} \quad \eta > 2 * \eta_o \quad (15)$$

$$t_s = 1 - (\beta / \alpha) * (R_s - 1) \quad 0 < \eta < 2\eta_o \quad \text{и} \quad t_s = R_s = 1 \quad \text{для} \quad \eta > 2 * \eta_o$$

В такой модели средняя температура слитка является линейной функцией его радиуса (третье из соотношений в (15)). Найдем эти решения (параметры α, β, η_0) при малых временах или в начале кристаллизации. Из (15) имеем $t_s = 1 - \beta \cdot \eta$ и $R_s = 1 + \alpha \cdot \eta$, где $\eta > 0$. Заметим, что при таком выборе члены ω_s^T и ω_o^T формально расходятся. Однако, эту расходимость легко устранить, тем способом, что в правой части (12) при малых временах разность производных следует рассчитывать иным образом. Имеется ввиду, что на этапе старта кристаллизации, эта разность будет определяться геометрической величиной слоя, который может быть закристаллизован. Тогда для правой части (10) вместо (12) нужно написать

$$2\chi/(R_s^2-1) \cdot [(R_s \cdot (\partial(T_s/T_p)/\partial R_s)_{R_s \rightarrow R_s-0} - (R_s \cdot (\partial T_s/\partial R_s)))_{R_s \rightarrow 1+0}] = (2\chi/(R_s^2-1)) \cdot (R_s-1) \cdot (\partial(T_s/T_p)/\partial R_s)_{1+(R_s-1)/2} \text{ или с учётом (10b)}$$

$$(2\chi/(R_s^2-1)) \cdot (R_s-1) \cdot (\partial(T_s/T_p)/\partial R_s)_{1+(R_s-1)/2} = (2\chi/(R_s+1)) \cdot [\partial(t_s)/\partial R_s \cdot (3 \cdot R_s^2 + 1)/(2R_s^2) - (R_s^2 - 1)/(2R_s) \cdot (\partial^2(t_s)/\partial R_s^2)]_{1+(R_s-1)/2}$$

Учитывая, что $R_s > 1$, второе слагаемое правой части мало как $\alpha \cdot \eta$, а также то, что в выбранной модели $\partial^2(t_s)/\partial R_s^2 = 0$, получаем при малых временах

$$\partial t_s / \partial \eta = 2\chi / (R_s^2 - 1) \cdot (R_s - 1) \cdot (\partial(T_s/T_p) / \partial R_s)_{1+(R_s-1)/2} \approx 2 / (R_s + 1) \cdot \chi \cdot (\partial(t_s) / \partial R_s)_{1+(R_s-1)/2} \quad (12b)$$

и расходимость при $R_s > 1$ исчезла.

Если распределение температуры слитка по радиусу определяется значением его текущего радиуса и не зависит от локального времени, т.е. $T_s/T_p = T_s(R_s(\eta))/T_p$, то, согласно (9) аналогично $t_s = t_s(R_s(\eta))$. Используем (12), чтобы установить, какова структура его решения при малых временах или когда $R_s \approx 1$. Тогда из (15) для всего периода существования слитка $\partial(t_s)/\partial R_s = (-\beta/\alpha)$, и с учетом изложенного, а также соотношения (10b) для правой части (12) получаем

$$2\chi/(R_s^2-1) \cdot [(R_s \cdot (\partial(T_s/T_p)/\partial R_s)_{R_s \rightarrow R_s-0} - (R_s \cdot (\partial T_s/\partial R_s)))_{R_s \rightarrow 1+0}] = 2\chi/(R_s^2-1) \cdot [R_s \cdot (\partial(t_s)/\partial R_s) \cdot (3 \cdot R_s^2 + 1)/(2R_s^2) - (R_s^2 - 1)/(2R_s) \cdot (\partial^2(t_s)/\partial R_s^2)] - 2 \cdot (-\beta/\alpha) = \partial t_s / \partial \eta = 0.$$

Здесь использовано, что если средняя температура слитка $t_s = t_s(R_s(\eta))$ определяется только его текущим радиусом $R_s(\eta)$, то $\partial t_s / \partial \eta = 0$. Тогда, частные производные по R_s можно заменить на полные, что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения t_s как функции R_s , следующего вида:

$$(dt_s/dR_s) \cdot ((3R_s^2 + 1)/(2R_s)) + (R_s^2 - 1)/2R_s \cdot d^2(t_s)/dR_s^2 = 2 \cdot (-\beta/\alpha) \quad (16).$$

Заменой $dt_s/dR_s = f(R_s)$ это уравнение сводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка для функции f и интегрируется (см Приложение 2). Это приводит к выражению (верному, однако, только для малых времен η):

$$t_s = 1 + (-\beta/\alpha) \cdot (R_s^2 \cdot \ln(R_s) / (R_s^2 - 1) - 0,5) \quad (17)$$

Раскладываем теперь выражение (17) в ряд по степеням $(R_s - 1)$, что дает:

$$t_s \approx 1 + (-\beta/\alpha) \cdot (1 - 2 \cdot (R_s - 1)) \cdot \ln(1 + (R_s - 1)) / (1 + 2 \cdot (R_s - 1) - 1) - 0,5 = 1 + (-\beta/\alpha) \cdot (1 - 2 \cdot (R_s - 1)) \cdot (R_s - 1) / (2 \cdot (R_s - 1)) - 0,5 = 1 + (-\beta/\alpha) \cdot (R_s - 1) \text{ в полном соответствии с третьим выражением (15).}$$

Таким образом, исследование решения уравнения теплопроводности в форме (12) при малых временах не приводит к новому уравнению по сравнению с (15) для определения констант α, β, η_0 . Рассмотрим уравнение (14) в виде:

$(\Omega/\chi) \cdot \check{R}_s = \partial(t_s)/\partial R_s \cdot (3 \cdot R_s^2 + 1)/(2R_s^2) - (R_s^2 - 1)/(2R_s) \cdot (\partial^2(t_s)/\partial R_s^2)$ или используя (16) имеем:

$(\Omega/\chi) \cdot \check{R}_s = -2(-\beta/\alpha)/R_s$. Отсюда разделяя переменные и выполняя элементарное интегрирование, получаем, что $R_s(\eta) = (1 - 4\eta((-\beta/\alpha) \cdot \chi/\Omega))^{1/2}$, т.е. R_s как функция времени имеет корневую зависимость (это выражение опять-таки справедливо только для области $R \approx 1$ вблизи единицы). Разложение $R_s(\eta)$ по степеням η при старте кристаллизации имеет вид $R_s(\eta) = (1 - 2\eta((-\beta/\alpha) \cdot \chi/\Omega))$ или так как $R_s(\eta) \approx 1 + \alpha\eta$ отсюда следует, что

$$\alpha = (2\chi/\Omega) \cdot (\beta/\alpha) \text{ или } 2\beta = \alpha^2 \cdot \Omega/\chi \quad (18).$$

Это выражение отличается от полученного в работе [2], фактором 1/2, который возник благодаря учету смещения нормировки при расчете средней температуры слитка.

Дополнительное соотношение между константами α, β, η_0 получим, если учтем тот факт, что в тонком пристеночном слое при старте кристаллизации охлаждение слитка определяется уносом тепла в оболочку из пристеночного слоя. Данный факт всецело определяет скорость падения температуры слитка β посредством уравнения (12) в форме (12b). Для дальнейшего запишем ряд соотношений, следующих из граничных условий (5):

$$\lambda_o \cdot (\partial(T_s/T_p)/\partial R_s)_{R_s \rightarrow 1-0} = \lambda_s \cdot (\partial(T_s/T_p)/\partial R_s)_{R_s \rightarrow 1+0} = \lambda_s \cdot (\partial(T_s/T_p)/\partial R_s)_{R_s \rightarrow 1+(R_s-1)/2}, \text{ откуда согласно (11)}$$

$$(\partial(T_s/T_p)/\partial R_s)_{R_s \rightarrow 1+(R_s-1)/2} = (\lambda_o/\lambda_s) \cdot (\partial(T_s/T_p)/\partial R_s)_{R_s \rightarrow 1-0} = -(\lambda_o/\lambda_s) \cdot \alpha_{so} \cdot (T_s/T_p - T_o/T_p) = -(\lambda_o/\lambda_s) \cdot \alpha_{so} \cdot (t_s - t_o) + ((R_s^2 - 1)/(2R_s)) \cdot \partial t_s / \partial R_s \approx -(\lambda_o/\lambda_s) \cdot \alpha_{so} \cdot (t_s - t_o). \text{ Тогда (12b) переписывается в виде:}$$

$$\partial t_s / \partial \eta = 2\chi / (R_s^2 - 1) \cdot (R_s - 1) \cdot (\partial(T_s/T_p)/\partial R_s)_{1+(R_s-1)/2} \approx -(\lambda_o/\lambda_s) \cdot 2 / (R_s + 1) \cdot \chi \cdot \alpha_{so} \cdot (t_s - t_o) \text{ откуда, так как, } R_s = 1 + \alpha\eta \text{ и } t_s = 1 - \beta\eta, \text{ получаем с точностью до членов порядка } \eta:$$

$$\beta = \chi \cdot \alpha_{so} \cdot (\lambda_o/\lambda_s) \quad (19)$$

Теперь для решения (15) нужно вычислить также значение момента конца кристаллизации слитка, иными словами продольный размер слитка $2\eta_0$. Чтобы это сделать, следует заметить, что согласно (15) η_0 определяет момент, когда кристаллизация сменяется плавлением. В этот момент $\partial t_s / \partial \eta = \check{R}_s = 0$, и из (12) получаем следующее соотношение для определения этого момента

$$\varpi_s / \varpi_o = (t_{s \min}(\eta_o) - t_o(\eta_o)) / (1 - t_{s \min}(\eta_o)) \quad (20)$$

Уравнение (19) неявно определяет η_0 , по известной левой части уравнения. В [2] найдено, что это уравнение хорошо решается как простыми итерациями (они сходятся и соответственно уравнение хорошо обусловлено), так и итерациями по Ньютону (сходятся гораздо быстрее). При нашем более строгом рассмотрении левая часть (19) сама является функцией η_0 , так как в левую часть входит величина радиуса слитка в момент $\eta = \eta_0$. Это усложняет численный счет, однако вероятно, не является принципиальным для решения уравнения (19) теми же методами.

Соотношения (15), (18)-(20) решают поставленную задачу. При этом

$$\alpha = (\chi \cdot (2 \cdot (\lambda_o/\lambda_s) \cdot \alpha_{so} / \Omega)^{1/2}) \approx 2^{0.5} \alpha_{из[2]} \text{ и } \beta = (\chi \cdot \alpha_{so} \cdot (\lambda_o/\lambda_s)) = \beta_{из[2]}, \Omega_{[2]} \cdot \omega_o \gg 1 \quad (21),$$

если принять следующее соответствие между принятыми здесь и в [2] величинами:

$$\alpha_{s0}=2*(R+\Delta)/x, \quad (21b)$$

где, x- один из эмпирических параметров длины, вводимый в расчетах [2], значение которого подбиралось из наилучшего соответствия расчетов измерениям. Кроме того при выводе (21)-(21b) принято, что $\Omega_{[2]}*\omega_0 \gg 1$. Для полного соответствия полученных в данной заметке результатов результатам [2] (исходя из выбора других эмпирических параметров принятых в [2]), следует считать выполненными (8e), а также соотношение аналогичное (8e):

$$x/\xi = R_s*(\alpha_{ps}/\alpha_{s0}) \quad (21c).$$

Отметим также следующее. Для решения (15) нужно было получить одно дополнительное соотношение (помимо (14) и (20)) связывающее параметры α, β, η_0 . Можно рассмотреть случай, когда входящие потоки тепла в слиток компенсированы исходящими, выделяющееся тепло мало, и тогда возможно предполагать, что теплосодержание слитка не меняется при его кристаллизации. Это означает что $\partial/\partial\eta(t_s*(R_s^2-1))=0$. При малых η это не возможно. Как уже отмечено в [2], это приводит к отсутствию в модели (15) старта кристаллизации из-за нехватки холода в близлежащем к оболочке слое. В [2], чтобы исправить ситуацию, было предложено считать, что нужно учитывать весь холод системы наполнитель-оболочка для старта кристаллизации. Это привело к соотношению $\partial/\partial\eta(t_s*R_s^2)=0$ или $\beta \approx 2\alpha$. Физически данное условие слабо обоснованно, так как предполагает, что в процессе образования и плавления слитка заключенное в нем тепло сохраняется (анalogией здесь может выступать процесс адиабатического расширения и сжатия объема идеального газа, имеющего цилиндрическую форму, когда при расширении газа его температура падает, а при сжатии возрастает). Если придерживаться этой гипотезы, то используя (14), (20) и $\beta \approx 2\alpha$ получаем, что

$$\alpha=(4\chi/\Omega) \approx 2\alpha_{из[2]}; \beta=(8\chi/\Omega) \approx 2\beta_{из[2]}, \text{ причем } \beta/\alpha=2=\beta_{из[2]}/\alpha_{из[2]} \text{ и при } \Omega_{[2]}*\omega_0 \ll 1 \quad (22)$$

Таким образом в обоих предельных случаях точное рассмотрение проведенное в этой заметке подтверждает расчеты проведенные в [2]. Насколько они близкие дает представление следующая таблица:

Таблица1

	Hi-Cal $\Delta=1\text{mm}$, $\varnothing=10\text{mm}$	$(R_{\max(18)}-R_{\max[2]})/R_{\max(18)}*100$ %	$(t_{\min(19)}-t_{\min[2]})/t_{\min(19)}*100$ %	CCW, $\Delta=0,45\text{mm}$, $\varnothing=16\text{mm}$,	$(R_{\max(18)}-R_{\max[2]})/R_{\max(18)}*100$ %	$(t_{\min(19)}-t_{\min[2]})/t_{\min(19)}*100$ %
R_{\max} по (18)	1,367	9,8		1,141	-1,3	
R_{\max} [2]	1,232			1,156		
t_{\min} по (19)	0,731		23,9	0,869		20
t_{\min} [2]	0,555			0,694		
1- t_{\min}/R_{\max} - 1 по (18)-(19)	0,73			0,92		
1- t_{\min} [2]/ R_{\max} [2] -1	1,91			1,95		

В ней проведено сравнение параметров образующегося слитка (т.е. его максимального радиуса R_{\max} и минимальной средней температуры слитка t_{\min} согласно (15) при $\eta=\eta_0$, если их рассчитывать по (18)-(19) настоящей работы и по [2 формулы (3) стр.7]), для 2-х типов проволок: Ni-CaI [2] ($\Delta/R=0,25$) и для обычных проволок CCW (Convention Cored Wires $\Delta/R=0,14$) с завальцованным замком. При этом протяженность слитка $2\eta_0$ оценивалась согласно грубой оценке решения уравнения (20) приводимой в [2] согласно:

$$\eta_0 \approx 1/(1+\beta) \quad (23)$$

Из расчетов видно, что параметры слитка, экранирующего поток тепла в оболочку, модель, принятая в [2], оценивает весьма разумно (максимальное отклонение от точного решения (18)-(19) составляет 23,9%). При этом надо иметь ввиду, что ошибки в определении падения средней температуры слитка приводят к ошибкам в оценке степени экранировки теплового потока идущего на оболочку и соответственно ведут к ошибкам расчета времени ее плавления. В частности, специальный тест, проведенный по созданной на базе подхода [2] программе, показал, что использование формул (18)-(20) вместо формул для $\alpha_{[2]}$ и $\beta_{[2]}$ согласно [2] при полном сохранении других параметров программы дает отклонение в расчетах времен плавления одной и той же оболочки менее 4,1%.

Следует также отметить, что любые ошибки при определении степени экранировки, в [2] ликвидированы тем обстоятельством, что в модель вводится эмпирический параметр x , который подбирается так, чтобы оптимум вводимой скорости совпал с измеренным для одного из типов проволоки. Найденный параметр только затем используется для расчетов оптимальных скоростей у других типов проволок, и сравнения результатов с измерениями. В [2] показано, что при таком подходе удается совпасть с измерениями на разных типоразмерах проволок в пределах инженерной точности расчетов +/-15%. Из сказанного выше становится ясно, почему данный путь привел к успеху. С одной стороны введенные в модель корректировки, хотя и были не очень обоснованы идеологически, но дали результаты близкие к точным, а с другой в модель был введен параметр, который обеспечивал привязку результатов расчетов к одной точке экспериментальной кривой, обеспечивая тем, самым ее близкое совпадение на других экспериментальных точках.

6. Заключение. Результаты данной работы показывают, что полуэмпирический вывод уравнений, принятый в работе [2] имеет под собой строгое математическое обоснование. Тем самым ясно, что в ряде случаев оказывается возможным получить решение сложной системы уравнений включающей уравнение теплопроводности и ряд дополнительных к нему граничных условий с помощью решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом получают обоснование эмпирические коэффициенты принятые в [2], а также становится ясной взаимосвязь факторов, которая влияет на процесс образования и плавления таких структур как образующийся вокруг проволоки слиток и оболочка.

В заключении авторы выражают благодарность О.Б. Шагову за введение термина квазистационарный процесс для пояснения процесса инъекции, так как он описан в п.3, а также за указание на то, что кристаллизующийся вокруг проволоки слиток удовлетворяет всем критериям понятия -солитон.

Приложение 1. Рассмотрим выражение $d/dt(\int_{v=v(t)} dx dy dz * F)$,
(п1.1)

здесь $F=F(x,y,z,t)$, причем, объем области, где производится интегрирование зависит от времени по известному соотношению $v=v(t)$. Используем вначале одномерный аналог этого соотношения:

$$d/dt(\int_{x_0}^{x=x(t)} dx * F) = (\int_{x_0}^{x=x(t)} dx * \partial F / \partial t) + d/dt(t(x_0)) \int_{x_0}^{x=x(t)} dt * (dx/dt) * F = (\int_{x_0}^{x=x(t)} dx * \partial F / \partial t) + (dx/dt) * F \quad (п1.2)$$

Аналогично (п2) рассматриваем исходный трехмерный интеграл:

$d/dt(\int_{v=v(t)} dx dy dz * F)$ = так как полная производная равна сумме производных, а в качестве таковых можно рассматривать трехмерные аналоги выражения (п2) по аналогии расписываем =
 $(\int_{v=v(t)} dx dy dz * \partial F / \partial t) + d/dt(t(x_0)) \int_{t(x_0)}^{t(x)} dt * (dx/dt) (\int \int dy dz * F) + d/dt(t(y_0)) \int_{t(y_0)}^{t(y)} dt * (dy/dt) (\int \int dx dz * F) +$
 $d/dt(t(z_0)) \int_{t(z_0)}^{t(z)} dt * (dz/dt) (\int \int dy dx * F) = (\int_{v=v(t)} dx dy dz * \partial F / \partial t) + d/dt(t(x_0)) \int_{t(x_0)}^{t(x)} dt * (dx/dt) (\int \int dy dz * F) +$
 $d/dt(t(y_0)) \int_{t(y_0)}^{t(y)} dt * (dy/dt) (\int \int dx dz * F) + d/dt(t(z_0)) \int_{t(z_0)}^{t(z)} dt * (dz/dt) (\int \int dy dx * F) = (\int_{v=v(t)} dx dy dz * \partial F / \partial t) +$
 $(\int \int dy dz * F * (dx/dt)) + (\int \int dx dz * F * (dy/dt)) + (\int \int dy dx * F * (dz/dt))$, и окончательно,

$$d/dt(\int_{v=v(t)} dx dy dz * F) = (\int_{v=v(t)} dx dy dz * \partial F / \partial t) + \int \int (-ds^{-} * \vec{v}_1^{-}) * F \quad (п1.3)$$

Приложение 2.

Рассмотрим решение уравнения (16):

$$(dt_s/dR_s) * ((3R_s^2 + 1)/(2R_s)) + (R_s^2 - 1)/2R_s * d^2(t_s)/dR_s^2 = 2 * (-\beta/\alpha)/R_s = \text{Const}/R_s = D/R_s \quad (п2.1).$$

Так как в левой части стоит полный дифференциал, то (п2.1) удобно записать так:

$$d/dR_s [ts + (R_s^2 - 1)/2R_s * d(t_s)/dR_s] = D/R_s \quad (п2.2)$$

Отсюда интегрируя:

$$dt_s/dR_s + 2R_s/(R_s^2 - 1) * t_s = 2R_s/(R_s^2 - 1) * (F + D * \ln(R_s)), \quad F - \text{произвольная константа.} \quad (п2.3)$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решение ищем в виде:

$$t = t_0(R_s)/(R_s^2 - 1), \quad t_0(R_s) - \text{неизвестная функция} \quad (п2.4)$$

Подставляем (п2.4) в (п2.3), получаем:

$$t_0(R_s) = t_0 + (R_s^2 - 1) * F + \int dR_s * (2R_s) * \ln(R_s) = t_0 + (R_s^2 - 1) * F + (R_s^2) * \ln(R_s) \Big|_{R_s=1}^{R_s} - \int dR_s * R_s^2 / R_s, \quad (п2.5)$$

t_0 - константа интегрирования. Выполняя интегрирование в (2.5) и используя начальные условия, получаем, окончательно:

$$t_s = 1 + D * (R_s^2 * \ln(R_s) / (R_s^2 - 1) - 0,5) \quad (2.6)$$

Литература.

1. Edgar-Ivan Castro (Affival SAS) and other participants of the conference on processing and casting of liquid metals 2017 A Thermal Model of Cored Wire Injection.

2. Борисов А., Найденов Р. К теории плавления тонкостенных порошковых проволок.
www.preprints.ru/ Физика, X имия, 2025г.