

# ProLab: психофизически равномерная проективная система цветовых координат

<p>И. А. Коноваленко ИППИ РАН, ООО Смарт Эндженс Сервис konovalenko@smartengines.com</p> <p>Д. П. Николаев ИППИ РАН, ООО Смарт Эндженс Сервис dimonstr@iitp.ru</p>	<p>А. А. Смагина ИППИ РАН smagina@visillect.com</p> <p>П. П. Николаев ИППИ РАН, МФТИ nikol@iitp.ru</p>
--	--

## Аннотация

В работе предлагается ввести новое пространство цветовых координат proLab, связанное с CIE XYZ трехмерным проективным преобразованием. В статье показывается, что по психофизической равномерности, оцениваемой с помощью метрики STRESS по отношению к формуле цветовых различий CIEDE2000, предлагаемое пространство значительно опережает широко используемую систему координат CIELAB, хотя и уступает современной CAM16-UCS. Угловые метрики ошибок определения цветности, обычно используемые в линейных цветовых пространствах, могут использоваться и в proLab, поскольку проективное преобразование сохраняет линейность многообразий. При этом, в отличие от линейных пространств, угловые ошибки, различные по цветовому тону, в proLab нормированы в соответствии с погорами цветоразличения человека. В работе также показывается, что гетероскедастичность дробового шума в proLab оказывается меньшей, чем в CAM16-UCS и стандартных цветовых пространствах. Это делает proLab удобной координатной системой для линейного цветового анализа – решения задач линейной регрессии в цветовом пространстве.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №№ 17-29-03370 и 19-29-09075.

**Ключевые слова:** цветовые пространства, цветовые различия, психофизическая равномерность, линейный цветовой анализ, проективные преобразования цвета, шум цветных изображений, гетероскедастичность шума.

# 1 Введение

## 1.1 Цветовые пространства и системы цветовых координат

Цветовые ощущения человека зависят от пространственного распределения спектральной освещенности его сетчатки и внутреннего состояния его зрительной системы. При этом зрительная система оперирует не значениями спектральной освещенности, а скалярными реакциями светочувствительных клеток на нее. В фотоптических условиях наблюдения активны три типа колбочек, а их реакции можно считать непрерывно зависящими от освещенности. Рассмотрим приближение равномерно распределенных пренебрежимо малых фоторецепторов. В этих условиях цветовые ощущения от равномерно освещенного участка сетчатки будут принадлежать определенному трехмерному многообразию вне зависимости от сложности зрительной системы и ее внутреннего состояния. Это многообразие мы и будем называть цветовым пространством, а его элементы – цветами.

Для картирования цветов используются те или иные координатные системы. В любой из них координаты цветового вектора  $\mathbf{c}$  связаны со спектральной освещенностью  $F(\lambda)$  некоторым вектор-функционалом  $\Psi$ , который может быть дополнительно параметризован информацией о зрительном контексте и внутреннем состоянии зрительной системы  $\theta$ :

$$\mathbf{c} = \Psi[F(\lambda)|\theta]. \quad (1)$$

Пространство цветовых координат называется линейным, если таковым является  $\Psi$  при фиксированном  $\theta$ .

В 1853 году Грассман экспериментально показал [1], что при  $\theta$ , соответствующем колориметрическим условиям наблюдения, линейную трехмерную систему цветовых координат для зрительной системы человека можно построить. Этот факт позволил свести задачу определения цветового пространства человека к установлению трехмерного базиса линейных цветовых координат в пространстве спектральных освещенностей  $F(\lambda)$ .

На сегодняшний день предложено множество координатных систем для цветов так называемого стандартного наблюдателя [2], отличающихся удобством при тех или иных применениях. Некоторые из них подразумевают колориметрические условия, другие связаны с различными моделями цветового восприятия, тем или иным образом параметризующими  $\theta$ . Обычно модели цветового восприятия как минимум учитывают в  $\theta$  адаптацию зрительной системы к доминирующему освещению. При любом фиксированном  $\theta$  вектора всех этих координатных систем могут быть выражены друг через друга без дополнительной информации о  $F(\lambda)$ . Для определенности принято произвольные цветовые координаты  $\mathbf{c}_\Phi$  связывать с линейными цветовыми координатами  $\mathbf{c}_x$  системы CIE XYZ, спектральный базис которой известен [2]:

$$\mathbf{c}_\Phi = \Phi(\mathbf{c}_x|\theta). \quad (2)$$

## 1.2 Метрика и психофизическая равномерность

Психофизические эксперименты позволяют не только установить спектральный базис цветового пространства человека, но и определить его метрические параметры. Это можно делать, например, измеряя пороговые для человека изменения спектральных стимулов в разных точках цветового пространства. Пространство цветовых координат называется психофизически равномерным (далее – равномерным), если евклидово расстояние в нём соответствует ощущаемой человеком разнице между соответствующими цветами. При этом длины векторов пороговых изменений во всех точках и во всех направлениях такого пространства равны. Базовая линейная система координат CIE XYZ дает цветовому пространству естественное евклидово представление, однако является существенно неравномерной в этом смысле.

Попытки создания равномерных пространств цветовых координат имеют длинную историю. Первое пространство, претендующее на равномерность, – Hunter Lab – было предложено Ричардом Хантером в 1948 году [3]. Позднее Дэвидом Макадамом на основании исследований Дина Джадда было предложено пространство, стандартизованное в 1960 году CIE как равномерное пространство цветности (CIE 1960 UCS) [4]. Как следует из названия, эта система координат не включала яркостной компоненты. Вскоре на ее основе Гюнтером Вышецки было предложено пространство [5], которое было принято как CIE 1964 ( $U^*$ ,  $V^*$ ,  $W^*$ ) Color Space (или CIEUVW). Оно уже позволяло рассчитывать цветовые различия и при несовпадающей яркости. Наконец, в 1976 году на основе Hunter Lab было разработано пространство CIELAB [6], которое до сих является наиболее употребимым в качестве равномерной системы цветовых координат при анализе сложных стимулов (изображений).

При этом пространство CIELAB все же является равномерным лишь приближенно, поэтому с момента его появления продолжались попытки построить более равномерные системы координат (например, [7]). Параллельно предлагались формулы моделирования цветовых различий, не являющиеся евклидовыми расстояниями в известных цветовых координатах, но при этом гораздо точнее описывающие результаты психофизических экспериментов. Венцом этих усилий стала формула CIEDE2000 [8, 9], до последнего времени считающаяся наиболее точной среди известных [10]. Тем не менее, пространства цветовых координат с равномерной метрикой для некоторых приложений являются предпочтительными (например, в них можно строить эффективные поисковые структуры). Поэтому разработка равномерных пространств продолжается, и стандартом точности среди них на данный момент считается разработанное в 2016 году пространство CAM16-UCS [11].

Все упомянутые равномерные системы цветовых координат учитывают адаптацию зрительной системы к освещению. При использовании модели фон Криса [12] это выражается в преобразовании (2) как покомпонентное деление координат входного вектора  $\mathbf{c}_x$  на цветовые координаты источника света. Преобразование координат между системами с одинаковой моделью

адаптации минуя CIE XYZ, очевидно, не требует информации об освещении.

### 1.3 Цветовые пространства камер видимого диапазона

Все вышесказанное с некоторыми оговорками можно соотнести и с техническими зрительными системами. Разумеется, говорить об «ощущениях» технической системы бессмысленно, и под цветом при рассмотрении таких систем обычно понимается сигнал зрительной системы, передаваемый ею на обработку далее. Кроме того, внутренним состоянием  $\theta$  в случае технической системы обычно можно пренебречь, или, по крайней мере, считать его известным. Но наиболее существенно то, что спектральный базис цветового пространства камеры почти всегда существенно отличается от базиса стандартного наблюдателя. Более того, камеры разных производителей, как правило, имеют несовпадающие цветовые пространства.

Чтобы использовать цветовые координаты одного цветового пространства в другом, необходимо построить отображение между этими цветовыми пространствами. В общем случае это некорректная операция: элементу любого цветового пространства соответствует бесконечное множество метамерных спектральных освещенностей, и это множество может отображаться в значимый объем другого цветового пространства.

Тем не менее, то или иное отображение из цветового пространства бытовой камеры видимого диапазона в цветовое пространство стандартного наблюдателя необходимо для обеспечения адекватной цветопередачи. Для его построения предлагаются различные методики и математические модели. Наиболее известной моделью является линейное отображение [13]. Известны и нелинейные модели цветового отображения: полиномиальная [14] и дробно-степенная [15]. В экспериментах они показывают большую точность, при этом последняя модель отличается инвариантностью к изменению яркости, подобно линейной. Интересный подход рассматривается в работе [16]: параметры линейного отображения ставятся в зависимость от оценки доминирующего освещения, полученной некоторым алгоритмом на основе анализа входного изображения (появляется зависимость от  $\theta$ ). Помимо модели преобразования, обсуждаются возможные уточнения экспериментальной методики [17], а также выбор функционала, оптимизируемого для определения параметров модели [18].

При работе с бытовыми камерами видимого диапазона калибровочное преобразование в цветовое пространство стандартного наблюдателя считается известным, что позволяет приписывать цветам, регистрируемым устройством, координаты цветового пространства человека. При этом метод получения его параметров (а иногда – и модель) остаются, как правило, неизвестными для пользователя.

## 1.4 Роль линейных многообразий в анализе цветных изображений

Алгоритмы анализа и обработки цветных изображений, используемые в технических системах, опираются не только на данные психофизики, но и на физические модели формирования изображений. Пожалуй, наиболее известной такой моделью является дихроматическая модель отражения, предложенная Шефером [19]. Эта модель утверждает, что цветовое распределение от однородно окрашенного глянцевого объекта, освещенного одним источником, целиком лежит в некоторой плоскости линейного пространства цветовых координат. Утверждение о линейном вырождении цветового распределения формулировалось и ранее – как минимум, в 1975 году [20], но модель Шефера уточняла и форму распределения внутри плоскости. Эта модель впоследствии развивалась и обобщалась, рассматривая различные условия, в которых цветовые распределения однородно окрашенного объекта являются линейными многообразиями различной размерности [21, 22]. Все модели этого семейства мы будем называть линейными моделями формирования цветных изображений.

Линейные модели используются, например, в цветовой сегментации [23, 24, 22, 25], а также при решении задач вычислительной цветовой константности. Основной проблемой цветовой константности является необходимость определения цветности источника света в сцене. Один из методов ее решения состоит в нахождении пересечения двух дихроматических плоскостей в линейном пространстве цветовых координат. Направляющий вектор прямой, по которой пересекаются плоскости, согласно линейной модели имеет цветность, совпадающую с цветностью источника [26]. Этот прием использовался во многих алгоритмах цветовой константности [27, 28].

Хотя сначала в работах по этой теме рассматривались только случаи, когда цветовое распределение лежит в двумерном линейном подпространстве, впоследствии алгоритмы уже учитывали более реалистическую модель с наличием рассеянного света, где рассматриваемые многообразия уже не проходят через начало координат [29]. Обобщения этого подхода используются и при анализе сцен с несколькими источниками света [22, 30], а также при обработке мультиспектральных изображений [31].

Предположение о линейности взаимодействия света с веществом имеет и более простое и фундаментальное следствие: изменение интегральной яркости освещения не меняет цветности пикселей изображения, вне зависимости от числа переотражений в сцене, а также окрасок объектов и цветности источника. На этом основываются используемые в вычислительной цветовой константности угловые метрики ошибки, такие как т.н. угловая ошибка восстановления [32, 33, 34], которая представляет собой угол между истинным цветом освещения и его оценкой, и т.н. угловая ошибка репродукции [35]. Последняя представляет собой угол между цветом белой поверхности под эквиэнергетическим источником и цветом, полученным в результате показанной коррекции цвета белой поверхности под истинным освещением по оценке этого освещения.

И алгоритмы цветовой константности, основанные на инцидентности линейных многообразий, и угловые метрики точности применяются в линейных пространствах цветовых координат, поскольку теряют смысл в пространствах, не сохраняющих линейность.

## 1.5 Постановка задачи

Линейный анализ цветовых распределений подразумевает решение двух задач. Первая заключается в оценивании с помощью тех или иных методов регрессии параметров линейных кластеров в цветовом пространстве, и здесь ключевую роль играет толерантность к цветовым различиям, вызываемым шумом. Вторая задача – анализ взаимного расположения найденных примитивов в цветовом пространстве. Здесь цветовые различия уже несут важную информацию, и в тех задачах, в которых поведение алгоритма должно соответствовать человеческому восприятию, метрику цветовых различий желательно согласовывать с человеческой.

Применение стандартных методов статистического анализа к цветовой гистограмме изображения подразумевает, что цветовой шум является гомоскедастичным: аддитивное отклонение аппроксимируется случайной величиной с нулевым средним, распределение которой не зависит от координат наблюдения и инвариантно к вращениям. Очевидно, что даже аффинные преобразования цветовых координат могут влиять на анизотропию аддитивного шума, а нелинейные – и на зависимость параметров распределения от координат. То есть адекватность применения стандартных статистических методов существенно зависит от координатной системы, в которой анализируется цветовое распределение.

Ситуация осложняется тем, что шум на изображении не является гомоскедастичным и в пространстве линейных откликов сенсора [36]. Это означает, что стандартные методы регрессии будут давать неоптимальные значения даже в линейных пространствах цветовых координат.

В результате использование любого из известных пространств цветовых координат оказывается необоснованным: в психофизически равномерных усложняются представления линейных физических моделей, а шум является гетероскедастичным [37], тогда как в линейных пространствах метрики фактически произвольны, причем гомоскедастичность шума не гарантирована и здесь.

Ситуация с угловыми ошибками аналогична: в линейных цветовых пространствах не гарантируется смысловое равенство отклонений в разных направлениях, а в равномерных пространствах линии постоянной цветности не являются прямыми, поэтому понятие угла для них слабо применимо.

Теперь мы можем сформулировать нашу цель: построить психофизически равномерное пространство цветовых координат, сохраняющее линейность подпространств и многообразий, причем желательно, чтобы сенсорный шум был в нем как можно более гомоскедастичным.

## 1.6 Проективное преобразование трехмерных цветовых координат

Если бы сохранность линейных многообразий влекла за собой линейность (или, чуть шире, аффинность) преобразования, вряд ли поставленная задача имела бы приемлемое решение. Во-первых, аффинные преобразования не могут гетероскедастичный шум сделать гомоскедастичным, поскольку их якобиан не меняется от точки к точке. (При этом они теоретически могут исправить анизотропию шума.) Также аффинные преобразования не могут существенно улучшить психофизическую равномерность пространства. Действительно, цвета, расположенные на ахроматической оси и равноотстоящие в координатах CIE XYZ, не являются психофизически равномерными, а аффинные преобразования сохраняют отношение длин отрезков, расположенных на одной прямой.

В действительности класс допустимых преобразований шире: это любые проективные преобразования. А если бы мы требовали сохранения линейности только для подпространств, то появились бы и дополнительные решения. Например, прямые, проходящие в CIE XYZ через начало координат, в пространстве CIE xyY [2] преобразуются в прямые, параллельные осям яркости Y, при том что преобразование из CIE XYZ в CIE xyY не является проективным.

В отличие от аффинных, проективные преобразования по-разному изменяют метрику в разных точках пространства. На рис. 1 видно, как проективное преобразование, сохранив все прямые, может сжимать пространство в одной точке и растягивать в другой. Это позволяет надеяться, что решение с приемлемым качеством все же можно найти.

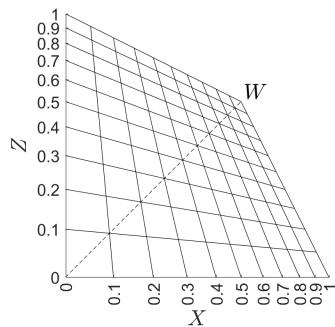


Рис. 1: Плоскость XZ системы цветовых координат CIE XYZ в пространстве проективных цветовых координат. Точка W обозначает проекцию белой точки.

Следует заметить, что проективные преобразования цветовых координат уже достаточно широко используются в различных приложениях [38], но, как правило, речь идет о преобразовании только плоскости цветности.

Можно отметить несколько работ, где преобразуется все пространство. Первая из них, по-видимому, вышла в 2003 году. В ней трехмерное проективное преобразование использовалось для сопоставления цветовых тел различных проекционных аппаратов [39]. Позже этот же подход был использован для фотореалистичного переноса цветовой палитры между изображениями [40]. В обоих случаях речь идет о взаимной калибровке двух изображений, а не о переходе в некоторое эталонное пространство. В [41] проективное преобразование использовалось уже именно для перехода в пространство с другой метрикой. В этой работе было показано, что фиксированное трехмерное проективное преобразование цветовых координат может улучшить результаты цветовой сегментации.

## 1.7 Что же мы предлагаем?

В данной работе мы предлагаем новую равномерную систему цветовых координат стандартного наблюдателя, основанную на трехмерном проективном преобразовании координат CIE XYZ. Как будет показано ниже, она обладает следующими достоинствами:

- по психофизической равномерности proLab превосходит широко распространенную равномерную систему CIELAB (хотя и уступает CAM16-UCS);
- дробовой шум на изображении в proLab оказывается ближе к гомоскедастическому приближению, чем в других равномерных пространствах;
- единственная среди равномерных систем, proLab сохраняет линейность цветовых многообразий, что позволяет корректно использовать в ней угловые оценки точности цветопередачи, а также проводить линейный цветовой анализ в согласии с метрикой цветоразличения человека;
- преобразование из CIE XYZ в proLab обладает аналитической элегантностью и простотой вычисления в сравнении с CAM16-UCS и даже с более примитивной CIELAB.

Впервые идея построения системы координат proLab была представлена нами на симпозиуме Международного общества цветового зрения в 2019 году [42], но методика ее построения и численное исследование ее свойств публикуется впервые. Кроме того, с момента сообщения на симпозиуме параметры модели были уточнены.

## 1.8 Структура статьи

Основная часть статьи организована следующим образом. Следующие четыре раздела посвящены построению системы координат proLab. В разделе 2 вводятся необходимые обозначения, задается общий вид преобразования из CIE XYZ в proLab, а также обсуждается, как определять те па-

раметры искомого преобразования, которые не влияют на метрику. В разделе 3 рассматриваются априорные ограничения на метрические параметры proLab. В разделе 4 вводится функционал, количественно оценивающий психофизическую равномерность цветовых координат. В разделе 5 излагается методика определения оптимальных параметров proLab и приводятся их значения.

Далее исследуются свойства полученной системы цветовых координат. В разделе 6 строится функционал, оценивающий отклонение параметров шума цветовых координат от гомоскедастичных. В разделе 7 строится модель шума цветовых реакций сенсора и определяются ее параметры на сыром изображении, взятом из открытого набора данных. В разделе 8 проводится численное сравнение свойств proLab и ранее предложенных координатных систем по равномерности и гомоскедастичности шума. В обсуждении рассматриваются некоторые качественные свойства предлагаемого координатного пространства, а также излагаются соображения о дальнейшей возможной оптимизации его параметров. Наконец, в заключении кратко излагаются основные результаты работы.

## 2 Общая цветовая модель proLab

Итак, мы будем строить систему координат цветов стандартного наблюдателя, образующих трехмерное координатное пространство, такое, что линейные в CIE XYZ многообразия цветов сохраняют линейность и в этом пространстве. При этом поставим целью, чтобы евклидово расстояние в этом пространстве аппроксимировало цветовые различия, определяемые некоторым фиксированным образом.

Введем необходимые обозначения. Пространство цветовых координат CIE XYZ будем обозначать  $C_x$ , пространство координат CIELAB –  $C_l$ , а искомое пространство –  $C_p$ . Преобразование из  $C_x$  в  $C_l$  будем обозначать L, а из  $C_x$  в  $C_p$  – P.

Из требования сохранения линейности многообразий следует, что P – проективное преобразование трехмерного пространства. Будем параметризовать все проективные преобразования в стандартной матричной форме. В частности, зададим преобразование P матрицей гомографии  $P \stackrel{\text{def}}{=} (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ .

Введем функции  $T_h$  и  $T_c$  перехода из декартовых координат в однородные и обратно:

$$\begin{aligned} T_h(\mathbf{c}) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, \\ T_c(\mathbf{h}) &\stackrel{\text{def}}{=} [I_3 \quad \mathbf{0}] \frac{\mathbf{h}}{h_4}, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^4, \quad h_4 \neq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда

$$P(\mathbf{c}_x) \stackrel{\text{def}}{=} T_c(P T_h(\mathbf{c}_x)), \quad \mathbf{c}_x \in C_x, \quad P(\mathbf{c}_x) \in C_p. \tag{4}$$

Требования к метрике  $C_p$  задают  $P$  с точностью до подобия в  $C_p$ . Действительно, преобразование движения является проективным и не изменяет расстояний, а изотропное масштабирование эквивалентно выбору единиц измерения расстояния. Доопределим преобразование  $P$ .

Будем строить систему цветовых координат, которая может заменить CIELAB в его применениях. Тогда, во-первых, расстояние в  $C_p$  должно моделировать и адаптацию к доминирующему источнику света. По аналогии с CIELAB воспользуемся моделью фон Криса [12]: будем покомпонентно делить координаты входного вектора  $\mathbf{c}_x$  на цветовые координаты  $\mathbf{c}_x^* \in C_x$  источника света. Обозначим это преобразование как  $N$ . Оно проективно, а соответствующая матрица преобразования  $N$  записывается следующим образом:

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}(\mathbf{T}_h(\mathbf{c}_x^*))^{-1}. \quad (5)$$

Теперь  $P$  можно декомпозировать на преобразование адаптации и преобразование, не зависящее от доминирующего источника света:

$$P = QN. \quad (6)$$

Дополнительно потребуем, чтобы чёрная точка  $\mathbf{0}$  после преобразования осталась в начале координат:

$$P(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Тогда  $Q$  можно записать в следующем виде:

$$Q(\varphi, \rho, \mu) = R_1(\varphi_1)R_2(\varphi_2)R_3(\varphi_3)Z(\rho)M(\mu), \quad (8)$$

где  $R_i(\varphi)$  – матрица поворота вокруг оси  $i$  на угол  $\varphi$ ,  $Z(\rho)$  – матрица изотропного масштабирования с коэффициентом  $\rho > 0$ , а  $M(\mu)$  – матрица специального вида, определяющая метрические свойства  $C_p$ :

$$M(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_4 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mu_6 & \mu_7 & \mu_8 & 1 \end{bmatrix}, \quad |M| > 0, \quad (9)$$

где  $\mu \in \mathbb{R}^8$  – вектор метрических параметров. Разложение (8) позволяет разделить задачу определения метрических параметров  $\mu$  и параметров выбора системы координат  $\varphi$  и  $\rho$ . При этом мы исключили из рассмотрения отражения системы координат, поскольку одновременное выполнение двух условий  $|M| > 0$  и  $\rho > 0$  заведомо сохраняет порядок обхода цветовых тонов вокруг ахроматической оси таким же, как в CIE XYZ и CIELAB. Дополнительно заметим, что матрицы  $R_i(\varphi)$  и  $Z(\rho)$  определены с точностью до умножения на ненулевой скаляр. Доопределим их, потребовав, чтобы их нижний правый элемент был равен 1. Тогда

$$p_{44} = q_{44} = 1. \quad (10)$$

Пусть метрические параметры  $\mu$  известны. Зафиксируем теперь остальные параметры. Зададим направление и общий масштаб оси светлоты аналогично CIELAB:

$$P(\mathbf{c}_x^*) = [100 \ 0 \ 0]^T. \quad (11)$$

Это условие однозначно задает параметры  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  и  $\rho$ , оставляя произвольным угол поворота  $\varphi_1$  вокруг оси светлоты. Чтобы зафиксировать и его, потребуем, чтобы расположение тонов насыщенных цветов примерно соответствовало CIELAB. Для определенности возьмем в пространстве CIELAB четверку точек  $C_l^{key} \subset C_l$  с половиной светлотой, с одной нулевой координатой цветности, имеющие равные насыщенности и не выходящие за пределы цветового тела источника D65 (см. рис. 2):

$$C_l^{key} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} 50 \\ -80 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ -80 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 80 \end{bmatrix} \right\}. \quad (12)$$

Теперь выберем такое  $\varphi_1$ , чтобы координаты в  $C_p$  у выбранных точек как можно меньше отличались от исходных в  $C_l$ :

$$\varphi_1^{opt} = \arg \min_{\varphi_1} \sum_{\mathbf{c}_l \in C_l^{key}} \left\| \mathbf{c}_l - T_c \left( P(\varphi, \rho, \mu) T_h(L^{-1}(\mathbf{c}_l)) \right) \right\|_2^2. \quad (13)$$

Эта задача может быть решена аналитически с использованием метода поиска оптимального поворота [43].

Итак, искомое преобразование  $P$  будем строить следующим образом: будем искать метрические параметры  $\mu$  матрицы  $M$  (9), оптимальные с точки зрения требований к метрике, после чего приведем масштаб и ориентацию оси светлот к стандартному положению (11), определим ориентацию осей цветности согласно (13), и, наконец, учтем нормировку (6).

### 3 Дополнительные ограничения на параметры proLab

Найдем теперь область в пространстве метрических параметров  $\mu$ , в которой цветовая модель proLab может быть разумно интерпретируема. Начнем с того, что не всякое проективное преобразование отобразит исходное цветовое тело в конечную область. Потребуем наличия этого естественного свойства.

Плоскость пространства  $C_x$  с уравнением

$$[p_{41} \ p_{42} \ p_{43}] \mathbf{c}_x + p_{44} = 0 \quad (14)$$

будем называть «горизонтом» пространства  $C_p$  (в  $C_x$ ). Знаменатель преобразования  $P$  на горизонте обращается в ноль. Образ цветового тела будет конечной областью тогда и только тогда, когда его прообраз не пересекается горизонтом.

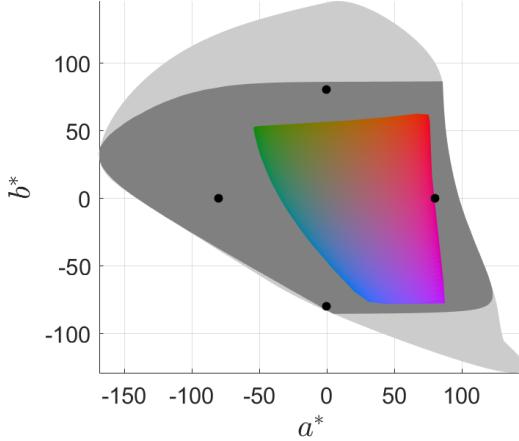


Рис. 2: Проекция четырех выбранных точек ориентации цветового тона на плоскость  $(a^*, b^*)$ . Светло-серая область соответствует проекции цветового тела D65, темно-серая – его сечению плоскостью  $L^* = 50$ , содержащей выбранные точки, а радужная – такое же сечение цветового тела sRGB.

Сформулируем теперь простое достаточное условие конечности цветового тела в  $C_p$ , не требующее знания формы цветового тела. Заметим, что для произвольного источника света его цветовое тело не выходит в  $C_x$  за пределы ортотропного прямоугольного параллелепипеда с главной диагональю, соединяющей вершины  $\mathbf{0}$  и  $\mathbf{c}_x^*$ . Все 8 вершин этого параллелепипеда можно перечислить следующим образом:

$$\text{diag}(\mathbf{c}_x^*) \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \in \{0, 1\}^3. \quad (15)$$

Используя такую запись и учитывая нормировку (10), условие конечности цветового тела в  $C_p$  можно записать следующим образом:

$$[p_{41} \ p_{42} \ p_{43}] \text{diag}(\mathbf{c}_x^*) \mathbf{b} + 1 \geq 0, \quad \mathbf{b} \in \{0, 1\}^3. \quad (16)$$

Теперь выясним, при каких  $\mu$  выполняется это условие. Из (5), (6) и (8) следует, что

$$[\mu_6 \ \mu_7 \ \mu_8] = [q_{41} \ q_{42} \ q_{43}] = [p_{41} \ p_{42} \ p_{43}] \text{diag}(\mathbf{c}_x^*), \quad (17)$$

поэтому условие (16) можно переписать как

$$[\mu_6 \ \mu_7 \ \mu_8] \mathbf{b} + 1 \geq 0, \quad \mathbf{b} \in \{0, 1\}^3. \quad (18)$$

Заметим, что для  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  это условие верно для любых  $\mu$ , то есть является избыточным.

Теперь введем еще одно ограничение. Как известно, координата  $L^*$  пространства CIELAB имеет смысл светлоты или яркости. Нашей целью является замена CIELAB, и желательно, чтобы первая координата proLab также имела этот смысл. Поэтому потребуем следующее:

$$\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1 \in R(\mathbf{c}_x^*), \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \implies (\mathbf{P}(\mathbf{c}_1) - \mathbf{P}(\mathbf{c}_0))^T \hat{\mathbf{e}}_L \geq 0, \quad (19)$$

где  $\hat{\mathbf{e}}_L \stackrel{\text{def}}{=} [1 \ 0 \ 0]^T$  – орт светлоты. Другими словами, увеличение любой координаты в CIE XYZ не должно приводить к уменьшению светлотной (первой) координаты пространства proLab, если мы не вышли за пределы цветового тела.

Легко видеть, что из выполнения этого условия автоматически следует выполнение аналогичных условий для координат в linRGB. Действительно, все элементы матрицы перехода из linRGB в CIE XYZ неотрицательны, а

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n, A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n} \implies A\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n, \quad (20)$$

то есть неотрицательное приращение координат в linRGB означает неотрицательное приращение и в CIE XYZ. Отсюда следует и неубывание светлотной координаты при увеличении координат в sRGB, поскольку преобразование из sRGB в linRGB покомпонентно монотонно. При этом аналогичное поведение относительно координат в LMS не гарантируется, поскольку матрица перехода из LMS в CIE XYZ содержит отрицательные элементы.

Упростим требование (19). Для этого рассмотрим множество плоскостей равной «светлоты» (первой координаты) proLab. В  $C_p$  все они имеют уравнения вида

$$L^+ = L_s^+, \quad L^+ \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{e}}_L^T \mathbf{c}_p. \quad (21)$$

В силу проективности  $P$  прообразами этих плоскостей в  $C_x$  являются плоскости, образующие пучок. При  $0 \leq L_s^+ \leq 100$  прообразы в  $C_x$  пересекают  $R(\mathbf{c}_x^*)$ . Поскольку мы уже потребовали (16), можно утверждать, что в этом диапазоне угол поворота прообраза вокруг оси пучка является монотонной и непрерывной функцией аргумента  $L_s^+$ . Тогда условие (19) эквивалентно требованию, чтобы координаты нормалей ко всем этим плоскостям имели одинаковый знак. Поскольку знак координаты нормали не может поменяться дважды, то это эквивалентно требованию неотрицательности координат нормалей для крайних плоскостей с уравнениями  $L^+ = 0$  и  $L^+ = 100$ .

Определим, при каких ограничениях на  $\mu$  это требование выполняется. Для этого введём еще одно координатное пространство  $C_b$ , задаваемого проективным преобразованием из  $C_x$  с матрицей  $B \stackrel{\text{def}}{=} MN$ :

$$B(\mathbf{c}_x) \stackrel{\text{def}}{=} T_c(MNT_h(\mathbf{c}_x)), \quad \mathbf{c}_x \in C_x, \quad B(\mathbf{c}_x) \in C_b. \quad (22)$$

Из (6) и (8) следует

$$P = R_1 R_2 R_3 ZB, \quad (23)$$

то есть пространство  $C_b$  связано с пространством  $C_p$  подобием.

Параметрами плоскости с уравнением  $\mathbf{l}_\Phi \mathbf{T}_h(\mathbf{c}_\Phi) = 0$  в произвольном пространстве цветовых координат  $C_\Phi$  ( $\mathbf{c}_\Phi \in C_\Phi$ ) будем называть вектор  $\mathbf{l}_\Phi$ . Тогда в соответствии с определением (22) имеем следующую связь между коэффициентами  $\mathbf{l}_x$  плоскостей в пространстве  $C_x$  и коэффициентами  $\mathbf{l}_b$  их образов в пространстве  $C_b$ :

$$\mathbf{l}_x = \mathbf{l}_b M N. \quad (24)$$

Поэтому ограничение на параметры прямой в пространстве  $C_b$ , влекущее неотрицательность координат нормали ее образа в пространстве  $C_x$ , можно записать так:

$$\mathbf{l}_b M N \geq [0 \ 0 \ 0 \ -\infty]. \quad (25)$$

Матрица  $N$  в силу своего определения (5) не влияет на это неравенство, и его можно упростить:

$$\mathbf{l}_b M \geq [0 \ 0 \ 0 \ -\infty]. \quad (26)$$

Наложим теперь это ограничение на плоскости  $L^+ = 0$  и  $L^+ = 100$  пространства  $C_p$ . Для этого рассмотрим образ белой точки в пространстве  $C_b$ . Обозначим его  $\mathbf{c}_b^*$ :

$$\mathbf{c}_b^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}(\mathbf{c}_x^*). \quad (27)$$

Поскольку плоскости пучка  $L^+ = L_s^+$  пространства  $C_p$  ортогональны направлению на белую точку этого пространства  $\mathbf{c}_p^*$ , то это же верно для их прообразов в  $C_b$ . Значит, параметры плоскостей этого пучка в  $C_b$  имеют вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_b^{*T} & l_4(L_s^+) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Прообраз плоскости  $L^+ = 0$  проходит через  $\mathbf{0}$ , а плоскости  $L^+ = 100$  – через белую точку  $\mathbf{c}_b^*$  пространства  $C_b$ , значит, их параметры соответственно равны  $\begin{bmatrix} \mathbf{c}_b^{*T} & 0 \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} \mathbf{c}_b^{*T} & -\mathbf{c}_b^{*T} \mathbf{c}_b^* \end{bmatrix}$ .

Подставим эти параметры в условие (26) и раскроем  $M$  по определению (9):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_b^{*T} & 0 \\ \mathbf{c}_b^{*T} & -\mathbf{c}_b^{*T} \mathbf{c}_b^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \mu_4 & \mu_5 \\ 0 & 0 & 1 \\ \mu_6 & \mu_7 & \mu_8 \end{bmatrix} \geq 0_{2,3}. \quad (29)$$

Из определения (5) следует, что  $N \mathbf{T}_h(\mathbf{c}_x^*) = \mathbf{1}$ , откуда

$$\mathbf{c}_b^* = \mathbf{T}_c(M N \mathbf{T}_h(\mathbf{c}_x^*)) = \mathbf{T}_c(M \mathbf{1}). \quad (30)$$

С учетом (9) окончательно получим:

$$\mathbf{c}_b^* = \mathbf{m}/m, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \\ \mu_4 + \mu_5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad m = \mu_6 + \mu_7 + \mu_8 + 1. \quad (31)$$

Поскольку  $m \geq 0$  в силу условия (18), то (29) эквивалентно

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{m}^T & 0 \\ m\mathbf{m}^T & -\mathbf{m}^T\mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \mu_4 & \mu_5 \\ 0 & 0 & 1 \\ \mu_6 & \mu_7 & \mu_8 \end{bmatrix} \geq 0_{2,3}. \quad (32)$$

Итак, с учетом 7 ограничений на  $\boldsymbol{\mu}$ , полученных ранее (16) и 6 ограничений (32), мы получили 13 дополнительных ограничений вида

$$f_i(\boldsymbol{\mu}) \geq 0, \quad (33)$$

где  $f_i(\boldsymbol{\mu})$  – многочлены степени не выше 3.

## 4 Критерий психофизической неравномерности

В области, ограниченной введенными выше условиями, будем искать вектор  $\boldsymbol{\mu}$ , максимизирующий психофизическую равномерность. Под психофизической равномерностью пространства цветовых координат подразумевают точность моделирования психофизических цветовых различий евклидовым расстоянием в этом пространстве. Для количественной оценки неравномерности обычно используется критерий STRESS (standardised residual sum of squares): чем больше его значение, тем хуже равномерность [44, 45, 10, 46].

Пусть  $\mathbf{a}$  – вектор цветовых различий, оцененных в одном приближении, а  $\mathbf{b}$  – вектор других оценок тех же цветовых различий, причем  $\|\mathbf{a}\| \neq 0$  и  $\|\mathbf{b}\| \neq 0$ . Тогда критерий STRESS определяется для них следующим образом:

$$\text{STRESS}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\mathbf{ka} - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}, \quad k = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|_2^2}, \quad (34)$$

причем нетрудно заметить, что STRESS равен модулю синуса угла между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\text{STRESS}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}{\|\mathbf{a}\|_2^2 \|\mathbf{b}\|_2^2}} = \left| \sin \widehat{\mathbf{ab}} \right|. \quad (35)$$

Этот критерий симметричен и инвариантен к масштабированию любой из двух сравниваемых оценок:

$$\text{STRESS}(k\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{STRESS}(\mathbf{b}, \mathbf{a}), \quad k \neq 0. \quad (36)$$

Отсюда следует, что априорная фиксация масштаба цветовых координат, задаваемая условием (11), не влияет на оценки соответствия по критерию STRESS.

Также этот критерий инвариантен к согласованным перестановкам компонент векторов различий:

$$\text{STRESS}(M_\pi \mathbf{a}, M_\pi \mathbf{b}) = \text{STRESS}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (37)$$

где  $M_\pi$  – произвольная матрица перестановки, то есть STRESS может быть задан на мультимножестве упорядоченных пар различий. Пусть  $\omega = \{(a_i, b_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ ,  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  – конечная выборка упорядоченных пар действительных чисел. Определим критерий STRESS для этой выборки очевидным образом:

$$\text{STRESS}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \text{STRESS}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (38)$$

Значение STRESS может существенно зависеть от распределения, которому подчиняется выборка, использованная для его подсчета. В качестве эталона цветовых различий могут выбираться как непосредственно измеренные в психофизических экспериментах величины (как в [10]), так и формулы цветового различия (как в [47, 48]). Недостатком первого подхода является фиксированность и ограниченность выборки (3657 пар цветов в сумме по всем наборам данных по состоянию на 2001 год [9]), что ставит под сомнение как полноту покрытия пространства пар, так и отсутствие нежелательных «перекосов» в распределении выборки. Недостатком второго подхода является дополнительная ошибка аппроксимации. В настоящей работе используется второй подход с эталоном в виде формулы CIEDE2000 [8, 9].

По аналогии с работой [48] будем строить пары из цветовых векторов, равномерно распределенных в пространстве CIELAB в границах цветового тела источника света. Но, в отличие от [48], не будем ограничивать сверху цветовое различие в паре, поскольку нас интересуют не только малые различия.

Обозначим  $G \subset C_l$  цветовое тело источника D65, а  $G_n$  – равномерную выборку из него ( $G_n \subset G, |G_n| = n$ ). Аналогично равномерную выборку цветовых пар из цветового тела обозначим  $G_n^2$  ( $G_n^2 \subset G^2 \subset C_l^2, |G_n^2| = n$ ). Наконец, обозначим  $\Phi$  преобразование в исследуемое пространство  $C_\phi$  из  $C_x$ ,  $\Phi_L$  – из  $C_l$  ( $\Phi_L = \Phi \circ L^{-1}$ ), где  $\circ$  – операция суперпозиции преобразований, а  $\Delta E_{00}^*(p)$  – эталонное цветовое различие CIEDE2000 на паре цветов  $p \in C_l^2$ . Тогда критерий неравномерности восприятия пространства цветовых координат  $C_\phi$  на выборке  $G_n^2$  будет записываться следующим образом:

$$\begin{aligned} U[\Phi, G_n^2] &\stackrel{\text{def}}{=} \text{STRESS}(\omega), \\ \omega &= \left\{ (\|\Phi_L(\mathbf{c}_a) - \Phi_L(\mathbf{c}_b)\|_2, \Delta E_{00}^*(p)) \mid p = (\mathbf{c}_a, \mathbf{c}_b) \in G_n^2 \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

## 5 Определение оптимальных параметров proLab

Предлагаемые в данной работе параметры proLab были получены следующим образом:

1. Методом, изложенным в монографии В. Максимова [49], была вычислена сетка точек, лежащих на границе цветового тела  $G$  источника D65. Для этих точек была построена двумерная триангуляция, что позволило приблизить  $G$  многогранником с числом граней около 20 000. Поскольку  $G$  выпукло, для проверки принадлежности точки

телу  $G$  в дальнейшем использовалась система линейных неравенств, каждое из которых проверяет положение точки относительно одной из граней.

2. Была сгенерирована выборка  $G_{2n_1}$ , состоящая из  $2n_1$  независимо и равномерно распределенных в CIELAB цветов, принадлежащих цветовому телу  $G$ , где  $n_1 = 10\ 000$ . Разбиением выборки  $G_{2n_1}$  на  $n_1$  пар была сформирована выборка пар  $G_{n_1}^2$ .
3. Для нахождения вектора метрических параметров  $\mu^{opt}$  решалась оптимизационная задача со штрафными функциями [50]:

$$\mu^{opt} = \arg \min_{\mu \in \mathbb{R}^8} U[C_m(\mu), G_{n_1}^2] + \sigma \sum_{i=1}^{14} \max(0, -f_i(\mu))^2, \quad (40)$$

где  $\sigma$  – параметр метода штрафных функций, а  $\mathbf{f}$  – вектор функций, соответствующих сформулированным выше условиям:  $f_1 = |M| = \mu_1 \mu_4$  – условию (9),  $\{f_2, \dots, f_8\}$  – 7 нетривиальным линейным условиям (18), а  $\{f_9, \dots, f_{14}\}$  – 6 кубическим условиям (32). Значения  $\Delta E_{00}^*$ , требуемые для вычисления критерия  $U$ , были получены с помощью процедур, взятых из работы [51]. Задача (40) была решена численно методом последовательного квадратичного программирования [52] с мультистартами [53]. В результате получилась следующая матрица метрических параметров (9):

$$M = \begin{bmatrix} 2.1591 & -1.7823 & -0.0713 & 0 \\ 0 & 2.0866 & 0.2103 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7554 & 3.8666 & 1.6739 & 1 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

4. Параметры выбора системы координат  $\varphi$  и  $\rho$ , необходимые для дополнения матрицы  $Q$  (8), были найдены аналитически в соответствии с разделом 2. В результате получилась следующая матрица  $Q$ :

$$Q = \begin{bmatrix} 75.5362 & 486.661 & 167.387 & 0 \\ 617.7141 & -595.4477 & -22.2664 & 0 \\ 48.3433 & 194.9377 & -243.281 & 0 \\ 0.7554 & 3.8666 & 1.6739 & 1 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

Для источника света с координатами  $\mathbf{c}_x^* = [0.9505 \ 1 \ 1.0888]^T$  [54] окончательно были получены следующие параметры пространства proLab:

$$P = \begin{bmatrix} 79.4725 & 486.6610 & 153.7311 & 0 \\ 649.9038 & -595.4477 & -20.4498 & 0 \\ 50.8625 & 194.9377 & -223.4334 & 0 \\ 0.7947 & 3.8666 & 1.5373 & 1 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

## 6 Критерий гетероскедастичности шума цветовых координат

Как мы говорили во введении, измеряемые цветовые значения являются случайными величинами, а некоторые статистические методы, применяемые для анализа цветовых распределений, обоснованы для гомоскедастичных моделей шума. Построим критерий, позволяющий численно оценить гетероскедастичность шума цветовых векторов в том или ином пространстве цветовых координат.

Рассмотрим пространство цветовых координат  $C_\phi$ , для которого известно преобразование  $\Phi : C_x \rightarrow C_\phi$ . Будем считать, что шум в каждой точке  $\mathbf{c}_x \in C_x$  можно приблизить в пространстве  $C_x$  аддитивным шумом с нулевым средним и известной матрицей ковариации  $\Sigma_x(\mathbf{c}_x)$ . Тогда в первом приближении ковариацию шума в пространстве  $C_\phi$  можно выразить следующим образом:

$$\Sigma_\phi(\mathbf{c}_\phi) = J_\Phi(\mathbf{c}_x) \Sigma_x(\mathbf{c}_x) J_\Phi^T(\mathbf{c}_x), \quad \mathbf{c}_x = \Phi^{-1}(\mathbf{c}_\phi), \quad (44)$$

где  $J_\Phi$  – матрица Якоби преобразования  $\Phi$ .

Будем считать шум гомоскедастичным, если все три собственных числа его ковариационной матрицы равны друг другу по всему пространству. Тогда на выборке цветов  $G_n$  можно оценить гетероскедастичность аппаратного шума в пространстве  $C_\phi$  следующим образом:

$$\begin{aligned} H[\Phi, G_n] &\stackrel{\text{def}}{=} \text{STRESS}(\omega), \\ \omega &= \left\{ \left( \lambda_i^{1/2} [\Sigma_\phi(\Phi_L(\mathbf{c}_l))]_i, 1 \right) \mid \mathbf{c}_l \in G_n, 1 \leq i \leq 3 \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

где  $\lambda_i[A]$  –  $i$ -ое собственное число матрицы  $A$ .

## 7 Параметры шума в цветовом пространстве сенсора и других пространствах

Построим теперь модель шума для исходного цветового пространства сенсора. В [36] Яне приводит достаточно простую модель выходных значений для одноканального изображения, хорошо согласующуюся с экспериментальными данными:

$$s = g n + \varepsilon, \quad n \sim \text{Pois}(s_0), \quad \mathbb{E}(\varepsilon) = 0, \quad (46)$$

где  $s$  – случайный отклик сенсора,  $g$  – коэффициент усиления,  $n$  – случайное число зарегистрированных электронов,  $s_0$  – ожидаемое значение отклика сенсора при единичном усилении, а  $\varepsilon$  – независимый от освещенности сенсора аддитивный шум. Из (46) следует, что связь между средним и дисперсией выходного значения линейна:

$$\mathbb{V}(s) = g \mathbb{E}(s) + \mathbb{V}(\varepsilon). \quad (47)$$

Верифицируем эту модель на датасете MLSDCR (Multiple Light Source Dataset for Colour Research) [55], данные которого получены с фотоаппарата Canon 5D Mark III. Среди прочего, в MLSDCR есть необработанные («raw») изображения цветовой таблицы (см. рис. 3), а также приведены параметры калибровочного преобразования из цветового пространства камеры в цветовое пространство стандартного наблюдателя (в координатах sRGB).

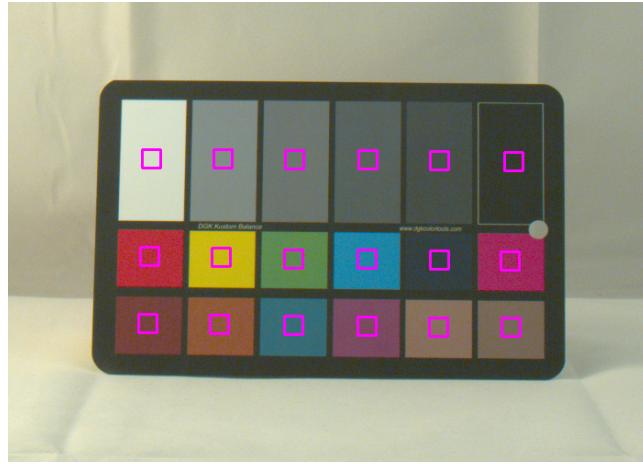


Рис. 3: Фотография цветовой таблицы, сделанная фотоаппаратом Canon 5D Mark III. Фиолетовыми рамками ограничены области, по которым оценивались средние и дисперсии откликов сенсора.

Будем оценивать параметры шума в каждой равномерно окрашенной области цветовой таблицы. Известно, что в экспериментах по цветовой калибровке точность измерений может оказаться ограниченной неравномерностью освещения [17]. В нашем случае критическим является только возможная неравномерность внутри одной области. Чтобы уменьшить влияние этого фактора, от каждой области возьмем по небольшому центральному участку размером  $42 \times 42$  пикселей мозаичного изображения (см. рис. 3). Также учтем, что разные элементы мозаики могут иметь различные параметры шума. В фотоаппарате Canon 5D Mark III используется стандартная (RGGB) мозаика Байера, поэтому для набора из 18 областей сформируем выборку  $S_i$  ( $1 \leq i \leq 72$ ) откликов сенсора на его равномерное освещение, разделяя значения по 4 возможным положениям в мозаике. Построение совместных гистограмм цветовых координат элементов выборки демонстрирует существенную гетероскедастичность шума (см. рис. 4).

Теперь по выборкам  $S_i$  оценим средние и соответствующие им дисперсии откликов сенсора:

$$\hat{\mathbb{E}}_i = \overline{S_i}, \quad \hat{\mathbb{V}}_i = \overline{(S_i - \overline{S_i})^2}, \quad 1 \leq i \leq 72, \quad (48)$$

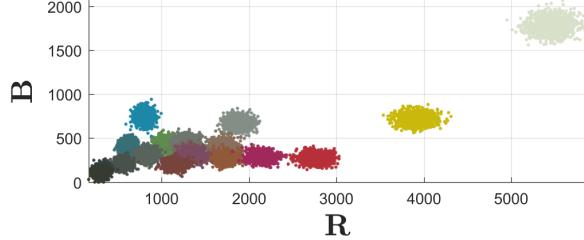


Рис. 4: Выборки откликов сенсора для различных окрасок цветовой таблицы.

Используя метод главных компонент, оценим параметры модели (47):

$$\hat{g} = 3.38, \quad \hat{\mathbb{V}}(\varepsilon) = 744. \quad (49)$$

Соответствующая линейная зависимость, приведённая на рис. 5, хорошо приближает выборочные оценки  $\hat{\mathbb{E}}(s)$  и  $\hat{\mathbb{V}}(s)$  для всех типов пикселей. Таким образом, мы получили следующую оценку дисперсии для значений необработанного мозаичного изображения фотоаппарата Canon 5D Mark III в режиме, использованном для получения нашего изображения:

$$\hat{\mathbb{V}}(s) = 3.38 s + 744. \quad (50)$$

Перейдем теперь в пространство  $C_x$ . Для этого воспользуемся преобразованием, приведенным в работе [55], откуда мы взяли экспериментальные данные. Для корректного перехода в  $C_x$  необходимо учесть влияние процедуры дебайеринга. Простейший дебайеринг заключается в усреднении двух G-элементов мозаики и агрегации результата с одним R- и одним B-элементом. Пространство полученных таким образом цветовых координат будем называть deviceRGB и обозначать  $C_d$ . С учетом ранее полученной модели (50) запишем ковариационную матрицу шума в  $C_d$ :

$$\Sigma_d(\mathbf{c}_d) = \text{diag}([1 \quad 1/2 \quad 1]) (3.38 \text{ diag}(\mathbf{c}_d) + 744 I_3), \quad \mathbf{c}_d \in C_d. \quad (51)$$

В [55] приведена следующая матрица перехода из deviceRGB в linRGB стандартного наблюдателя:

$$D_1 = \frac{0.03}{2^{16}} \begin{bmatrix} 41.93 & -2.08 & -37.24 \\ -14.32 & 39.13 & 10.79 \\ -0.02 & -35.39 & 185.52 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Учитывая, что переход из linRGB в CIE XYZ по определению линеен [56] и задается матрицей

$$D_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0.4125 & 0.3576 & 0.1804 \\ 0.2127 & 0.7152 & 0.0722 \\ 0.0193 & 0.1192 & 0.9503 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

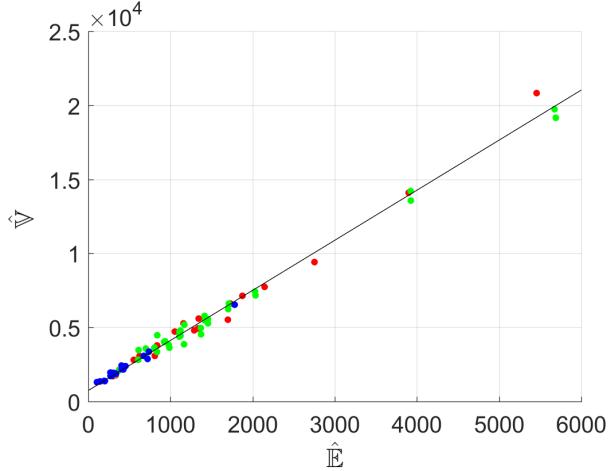


Рис. 5: Линейная зависимость дисперсии откликов сенсора от их выборочного среднего. Цвета точек условно соответствуют различным каналам сенсора.

получим следующую матрицу перехода из  $C_d$  в  $C_x$ :

$$D^{-1} = D_2 D_1 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 5.5711 & 3.0892 & 10.0585 \\ -0.6066 & 11.4383 & 6.0363 \\ -0.4189 & -13.2786 & 80.9631 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

При этом матрица ковариации сенсорного шума в пространстве CIE XYZ будет равна

$$\Sigma_x(\mathbf{c}_x) = D^{-1} \Sigma_d(D\mathbf{c}_x) D^{-T}, \quad \mathbf{c}_x \in C_x. \quad (55)$$

Подставляя в (55) значения параметров из (51) и (54), получим численную модель цветового шума нашей камеры в пространстве  $C_x$ .

## 8 Сравнение цветовых координат по психофизической неравномерности и гетероскедастичности шума

Для оценивания психофизической неравномерности сформируем независимую тестовую выборку пар цветов  $G_{n_2}^2$  размером  $n_2 = 100\ 000$  пар точек по методике, описанной в разделе 5. В дальнейшем на этой выборке для каждой системы цветовых координат, задаваемой преобразованием  $\Phi$ , будем оценивать воспринимаемую неравномерность по критерию (39):  $U_T[\Phi] \stackrel{\text{def}}{=} U[\Phi, G_{n_2}^2]$ .

Также сформируем выборку цветов  $G_{n_2}$ , на которой будем оценивать гетероскедастичность шума. При этом будем требовать не только принадлежности цветовых векторов цветовому телу источника D65, но и реализуемости всех рассматриваемых цветов камерой, то есть их покомпонентной неотрицательности в пространстве deviceRGB:

$$\mathbf{c}_1 \in G_{n_2} \implies DL^{-1}(\mathbf{c}_1) \geq 0. \quad (56)$$

На реализуемой подобласти цветового тела сделаем выборку  $G_{n_2}$  равномерной и будем оценивать гетероскедастичность согласно критерию (45):  $H_T[\Phi] \stackrel{\text{def}}{=} H[\Phi, G_{n_2}]$ . Для вычисления  $H_T[\Phi]$  требуется матрица ковариации шума  $\Sigma_\phi(\mathbf{c}_\phi)$ , для её получения будем использовать приближение (44), а также модель (55) цветового шума в пространстве  $C_x$ .

Таблица 1: Сравнение цветовых координат. Зелёным цветом показаны наилучшие достигнутые значения критериев, жёлтым – вторые по порядку, красным – все остальные.

Пространство $C_\Phi$	Коллинеация	$U_T[\Phi]$	$H_T[\Phi]$
LMS	Да	0.475	0.720
deviceRGB	Да	0.474	0.470
CIE XYZ	Да	0.479	0.722
CIE xyY	Для центрального пучка	0.296	0.822
linRGB	Да	0.381	0.607
sRGB	Нет	0.316	0.830
CIELAB	Нет	0.259	0.848
CAM16-UCS	Нет	0.177	0.696
proLab	Да	0.209	0.565

Для сравнения будем использовать следующие широко используемые системы координат цветового пространства человека:

- CIE XYZ [2] – базовую систему цветовых координат стандартного наблюдателя;
- CIE xyY [2] – систему с явно выделенными координатами цветности;
- LMS [57] – систему координат, моделирующую линеаризованные отклики колбочек человека;
- sRGB [56] – цветовые координаты, используемые при воспроизведении цветов на дисплеях и принтерах (большинство фото- и видеофайлов содержат информацию о цветах в этих координатах);
- linRGB [56] – промежуточное (без гамма-коррекции) представление воспроизводимых цветов, линейно связанное с CIE XYZ;
- CIELAB [6] – широко распространенную систему психофизически равномерных цветовых координат;
- CAM16-UCS [11] – систему координат, считающуюся на данный момент наиболее психофизически равномерной.

Будем сравнивать proLab с ними, а также с линейными цветовыми координатами сенсора камеры по критериям  $U_T$  и  $H_T$ , а также укажем, какие из них сохраняют линейность цветовых многообразий (см. таблицу 1). Среди цветовых координат только CIE xyY имеет нетривиальную классификацию по коллинеации, поскольку сохраняет форму прямых, проходящих через **0**. ProLab, как и линейные системы координат, обладает свойством сохранять прямые по построению, остальные системы цветовых координат не сохраняют даже центральный пучок. По воспринимаемой равномерности proLab значительно превосходит общепринятое равномерное пространство CIELAB, хотя и уступает CAM16-UCS – последней и наиболее успешной на сегодняшний день попытке построения психофизически равномерного пространства цветовых координат. По гомоскедастичности шума proLab уступило в нашем эксперименте только пространству deviceRGB, свойства которого существенно меняются от камеры к камере.

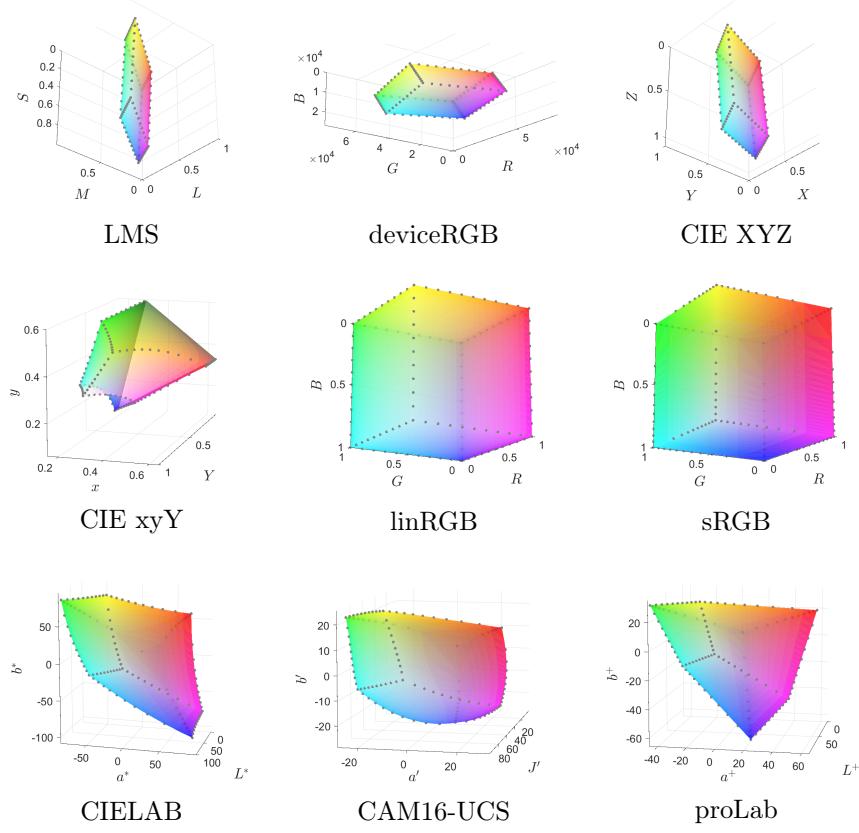


Рис. 6: Вид цветового тела sRGB-дисплея в различных пространствах цветовых координат.

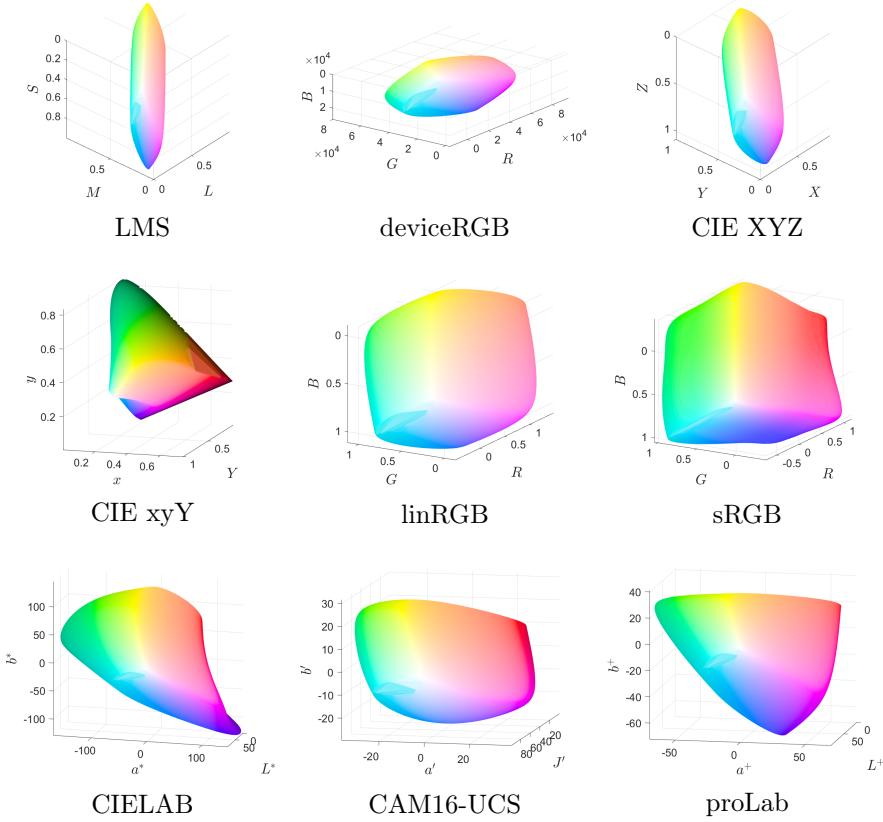


Рис. 7: Вид цветового тела источника света D65 в различных пространствах цветовых координат.

Рассмотрим теперь различия между пространствами цветовых координат более наглядно, используя различные визуализации. На рис. 6 изображено цветовое тело sRGB-дисплея в различных пространствах цветовых координат. Можно видеть, что в пространстве proLab цветовое тело sRGB сохраняет форму гексаэдра. Аналогичные диаграммы для цветового тела источника света D65 представлены на рис. 7. Из-за ограничений на цветовой охват насыщенность цветов, использованных для визуализации, на этой иллюстрации была существенно занижена. На этих двух рисунках видно еще одно достоинство proLab: в отличие от CIELAB, эта координатная система сохраняет выпуклость цветовых тел.

На рис. 8 с помощью эллипсов МакАдама [58] проиллюстрирована неравномерность рассматриваемых пространств цветовых координат по цветности. Эллипсы МакАдама представляют из себя увеличенные в 10 раз эллипсы погранично-различимых цветовых различий (JND – just noticeable

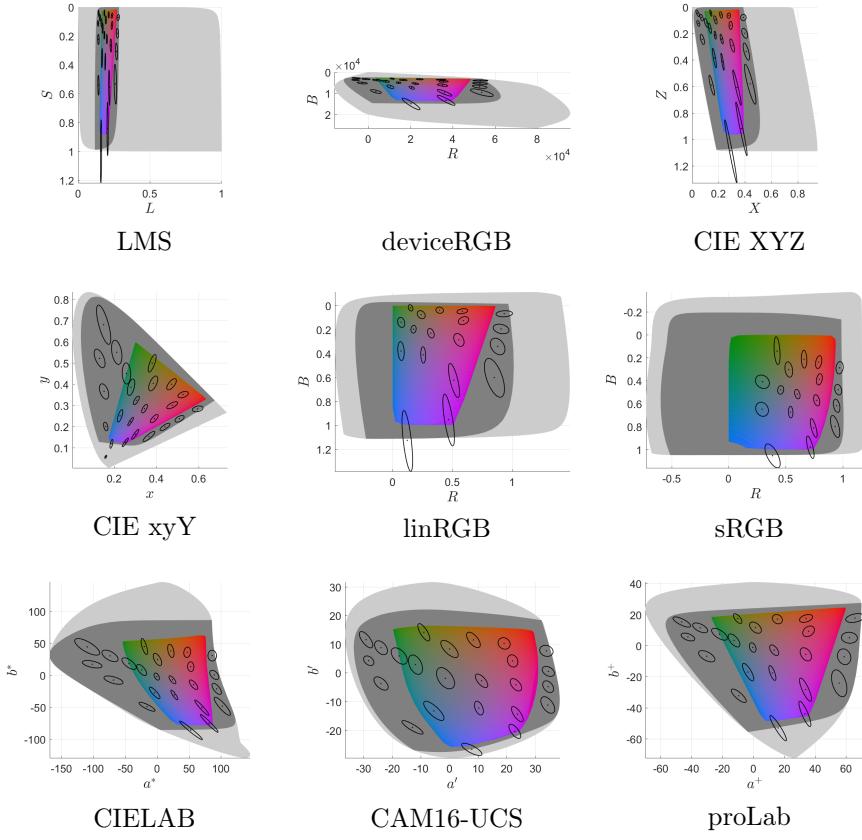


Рис. 8: Неравномерность цветности: эллипсы МакАдама для  $L^* = 50$  на фоне проекций цветового тела источника света D65 (светло-серый), его сечения (темно-серый) и сечения цветового тела sRGB-дисплея (радужный) в различных пространствах цветовых координат.

difference) и исходно определены в пространстве CIE xyY. Для их построения в произвольном пространстве  $C_F$  нами использовалось линейное приближение преобразования  $\Phi$  в центрах эллипсов. Для каждого пространства цветовых координат изображена одна из его координатных плоскостей, на которую спроецированы эллипсы МакАдама для светлоты CIELAB  $L^* = 50$ , цветовое тело источника света D65 (светло-серый), а также сечения эквисветлотной поверхностью  $L^* = 50$  цветовых тел источника (темно-серый) и sRGB-дисплея (радужный).

Другой способ визуально оценить психофизическую неравномерность использован на рис. 9. На нем для каждого пространства цветовых координат изображено совместное распределение его евклидова расстояния

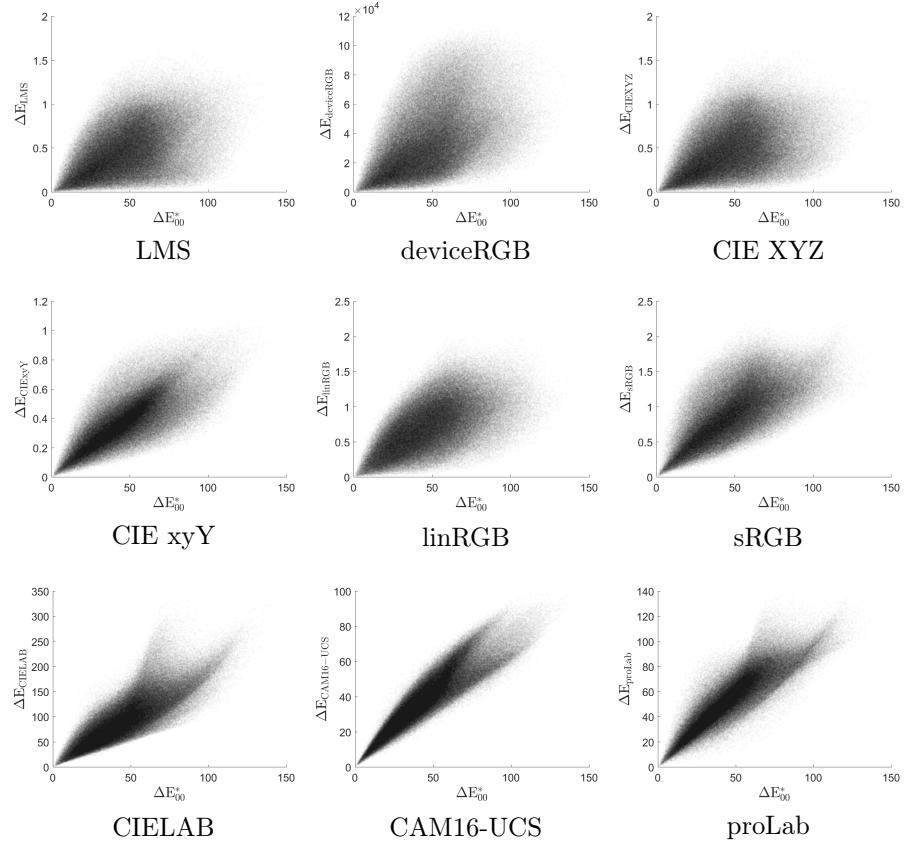


Рис. 9: Совместные распределения цветовых различий CIEDE2000  $\Delta E_{*0}^{*0}$  и евклидовых расстояний  $\Delta E_F$  для различных систем цветовых координат.

$\Delta E_F$  и цветового различия CIEDE2000  $\Delta E_{00}^*$  на тестовой выборке  $G_{n_2}^2$ . Чем равномернее пространство цветовых координат относительно цветового восприятия, тем больше диаграмма должна концентрироваться вдоль прямой, проходящей через **0**. Видно, что диаграммы CAM16-UCS и proLab имеют существенно лучшую форму, чем у конкурирующих пространств цветовых координат, но proLab проигрывает в области средних расстояний. Интересно, что CAM16-UCS имеет два явно различающихся локуса в районе больших расстояний, что означает существенную неравномерность в этом диапазоне. В свою очередь, на диаграммах proLab и CIELAB видны сильно декорелированные области, похожие между собой по расположению и форме, но у CIELAB эта область крупнее и дальше отклоняется от основного локуса.

Для детальной визуализации гетероскедастичности были построены ди-

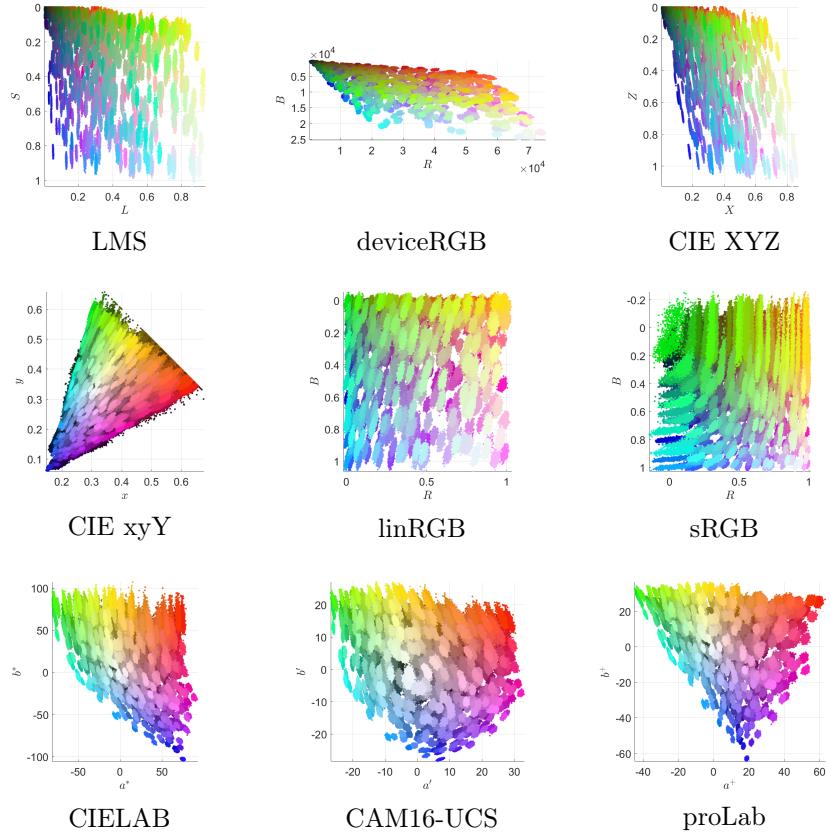


Рис. 10: Визуализация сенсорного шума в различных пространствах цветовых координат в пределах цветового тела sRGB-дисплея. Каждое отдельное облако представляет из себя проекцию выборки измерений определенного цвета с шумом, описываемым моделью Яне.

грамм, подобные эллипсам МакАдама (рис. 10). Для набора цветов из цветового тела sRGB-дисплея с использованием параметров модели (50) были промоделированы распределения зашумленных измерений в пространстве deviceRGB. Каждое из распределений было спроектировано в тестируемое пространство цветовых координат и отображено на координатной плоскости своим усредненным цветом. Порядок отображения от темного к светлому позволяет в некоторых случаях увидеть трехмерную структуру параметров шума.

## 9 Обсуждение

Основным отличием proLab от других метрических пространств цветовых координат является его проективность. Поскольку при этом proLab сохраняет  $\mathbf{0}$ , то центральная проекция на любую плоскость, не проходящую через начало координат, в этом пространстве является корректной диаграммой цветности: все цвета, отличающиеся в исходном линейном пространстве только яркостью, будут отображены в одну точку.

Другое интересное свойство proLab касается квантового шума изображений. Оценивание цвета по зашумленному изображению арифметическим усреднением корректно только в линейных пространствах цветовых координат. Но оценивание цветности линейной регрессией некорректно даже в линейном пространстве, поскольку амплитуда квантового шума цветовых координат зависит от их значения. Поскольку гетероскедастичность шума в proLab меньше, чем в стандартных линейных пространствах, линейная регрессия в нем, по-видимому, является более корректной процедурой.

В данной работе proLab строилась для стандартного источника D65, однако ее, как и CIELAB, можно применять для любых фиксированных источников, причем элементы матрицы  $Q$  при этом остаются прежними (42), а окончательно  $P$  определяется согласно модели адаптации фон Криса (6).

В принципе, сохранив общий вид proLab, можно модифицировать и ее метрические параметры, в зависимости от конкретной задачи. В частности, не очевидно, что при решении оптимизационной задачи пары с различной цветовой разностью  $\Delta E_{00}^*$  должны иметь одинаковый вес. Можно себе представить приложения, в которых большие цветовые различия (или, напротив, малые) не имеют значения. В таких случаях следует оптимизировать параметры proLab тем же методом, но на иной выборке  $G_n^2$ . Кроме того, ограничение на «светлотный смысл» оси  $L^+$  можно ослаблять для увеличения психофизической равномерности результата, либо, напротив, ужесточать. В частности, можно дополнительно потребовать выполнения условия (19) и для цветовых координат LMS.

Важным представляется также дальнейшее исследование параметров шума в различных пространствах, включая proLab. Интересны как новые экспериментальные данные по различным камерам и режимам их работы, так и аналитические модели оценивания гетероскедастичности в тех или иных условиях.

Наличие побочного локуса в совместной диаграмме расстояний на рис. 9 позволяет ставить вопрос о локализации участков цветового тела, где цветовые различия существенно непроективны. С другой стороны, строгое требование проективности было введено нами формально. Дополнительные погрешности регрессии при отклонении модели от проективности могут оказаться незначительными на фоне шума. Поэтому встает вопрос о построении малопараметрической и вычислительно простой цветовой модели, близкой к проективной, и при этом обладающей большей психофизической равномерностью и меньшей гетероскедастичностью шума в ней.

## 10 Заключение

Итак, мы предложили новую систему цветовых координат proLab, которая по психофизической равномерности превосходит CIELAB, и сохраняет при этом линейность цветовых многообразий. Последним свойством не обладают ни CIELAB, ни CAM16-UCS. В proLab, подобно линейным пространствам, можно использовать угловые метрики ошибок цветовой продукции. При этом, в отличие от них, угловые отклонения в направлении различных цветовых тонов психофизически выравнены за счет привязки к CIEDE2000. Нами также показано, что, по крайней мере в некоторых случаях, шум в proLab оказывается более гомоскедастичным, чем в стандартных пространствах, включая линейные.

Все это делает proLab предпочтительной системой координат для анализа структуры цветовых гистограмм: инцидентность линейных многообразий в нем сохранена (например, в proLab можно определять направление на источник по пересечению плоскостей, определяющих цветовые распределения глянцевых поверхностей); координаты линейных многообразий в нем можно определять довольно точно без дополнительного учета гетероскедастичности шума (как обычно и поступают); взаимное расположение линейных элементов (в том числе углы между прямыми) выражаются в единицах, связанных с человеческим восприятием.

## Список литературы

- [1] H. Grassmann. Zur theorie der farbenmischung. *Annalen der Physik*, 165(5):69–84, 1853. (In German).
- [2] T. Smith and J. Guild. The c.i.e. colorimetric standards and their use. *Transactions of the Optical Society*, 33(3):73–134, 1931.
- [3] R. S. Hunter. Accuracy, precision, and stability of new photoelectric color-difference meter. *J. Opt. Soc. Am.*, 38(12):1094–1094, 1948.
- [4] International Commission on Illumination. "Official Recommendations". *Publication No. 004*. Proceedings of the CIE Session 1959 in Bruxelles. 14th Session, 1960.
- [5] G. Wyszecki. Proposal for a new color-difference formula. *JOSA*, 53(11):1318–1319, 1963.
- [6] K. McLaren. XIII—the development of the CIE 1976 ( $L^* a^* b^*$ ) uniform colour space and colour-difference formula. *Journal of the Society of Dyers and Colourists*, 92(9):338–341, 1976.
- [7] R. G. Kuehni. Towards an improved uniform color space. *Color Research & Application: Endorsed by Inter-Society Color Council, The Colour Group (Great Britain), Canadian Society for Color, Color Science Association of*

*Japan, Dutch Society for the Study of Color, The Swedish Colour Centre Foundation, Colour Society of Australia, Centre Français de la Couleur*, 24(4):253–265, 1999.

- [8] ICOI CIE. Improvement to industrial colour-difference evaluation, 2001.
- [9] M. R. Luo, G. Cui, and B. Rigg. The development of the cie 2000 colour-difference formula: Ciede2000. *Color Research & Application: Endorsed by Inter-Society Color Council, The Colour Group (Great Britain), Canadian Society for Color, Color Science Association of Japan, Dutch Society for the Study of Color, The Swedish Colour Centre Foundation, Colour Society of Australia, Centre Français de la Couleur*, 26(5):340–350, 2001.
- [10] H. Wang, G. Cui, M. R. Luo, and H. Xu. Evaluation of colour-difference formulae for different colour-difference magnitudes. *Color Research & Application*, 37(5):316–325, 2012.
- [11] C. Li, Z. Li, Z. Wang, Y. Xu, M. R. Luo, G. Cui, M. Melgosa, M. H Brill, and M. Pointer. Comprehensive color solutions: Cam16, cat16, and cam16-ucs. *Color Research & Application*, 42(6):703–718, 2017.
- [12] M. R. Luo. Cie chromatic adaptation; comparison of von kries, cielab, cmccat97 and cat02. *Encyclopedia of Color Science and Technology*, pages 1–8, 2014.
- [13] H. Can Karaimer and M. S. Brown. Improving color reproduction accuracy on cameras. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 6440–6449, 2018.
- [14] G. Hong, M. R. Luo, and P. A. Rhodes. A study of digital camera colorimetric characterization based on polynomial modeling. *Color Research & Application: Endorsed by Inter-Society Color Council, The Colour Group (Great Britain), Canadian Society for Color, Color Science Association of Japan, Dutch Society for the Study of Color, The Swedish Colour Centre Foundation, Colour Society of Australia, Centre Français de la Couleur*, 26(1):76–84, 2001.
- [15] G. D. Finlayson, M. Mackiewicz, and A. Hurlbert. Color correction using root-polynomial regression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 24(5):1460–1470, 2015.
- [16] S. Bianco, A. R. Bruna, F. Naccari, and R. Schettini. Color correction pipeline optimization for digital cameras. *Journal of Electronic Imaging*, 22(2):023014, 2013.
- [17] A. Kordecki. Practical testing of irradiance-independent camera color calibration. In *Proc. SPIE 11041, Eleventh International Conference on Machine Vision (ICMV 2018)*, volume 11041, pages 340–345, 2019.

- [18] J. Vazquez-Corral, D. Connah, and M. Bertalmío. Perceptual color characterization of cameras. *Sensors*, 14(12):23205–23229, 2014.
- [19] S. A. Shafer. Using color to separate reflection components. *Color Research & Application*, 10(4):210–218, 1985.
- [20] P. P. Nikolaev. Some algorithms for surface color recognition. In *Simulation of learning and behavior*, pages 121–151. Nauka, 1975. (In Russian).
- [21] M. H. Brill. Image segmentation by object color: a unifying framework and connection to color constancy. *J. Opt. Soc. Am. A*, 7(10):2041–2047, 1990.
- [22] D. P. Nikolaev and P. P. Nikolayev. Linear color segmentation and its implementation. *Computer Vision and Image Understanding*, 94(1):115–139, 2004. Special Issue: Colour for Image Indexing and Retrieval.
- [23] G. J. Klinker, S. A. Shafer, and T. Kanade. Image segmentation and reflection analysis through color. In *Proc. SPIE 0937, Applications of Artificial Intelligence VI*, volume 0937, pages 229 – 244, 1988.
- [24] H. D. Cheng, X. H. Jiang, Y. Sun, and J. Wang. Color image segmentation: advances and prospects. *Pattern recognition*, 34(12):2259–2281, 2001.
- [25] Yu. V. Vinogradova, D. P. Nikolaev, and D. G. Slugin. Image segmentation of color documents using color clustering. *Journal of Information Technologies and Computing Systems*, (2):40–49, 2015. (In Russian).
- [26] H.-C. Lee. Method for computing the scene-illuminant chromaticity from specular highlights. *J. Opt. Soc. Am. A*, 3(10):1694–1699, 1986.
- [27] J. Toro and B. Funt. A multilinear constraint on dichromatic planes for illumination estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(1):92–97, 2007.
- [28] J. Toro. Dichromatic illumination estimation without pre-segmentation. *Pattern Recognition Letters*, 29(7):871–877, 2008.
- [29] S. Woo, S. Lee, J. Yoo, and J. Kim. Improving color constancy in an ambient light environment using the phong reflection model. *IEEE Transactions on Image Processing*, 27(4):1862–1877, 2018.
- [30] T. Zickler, S. P. Mallick, D. J. Kriegman, and P. N. Belhumeur. Color subspaces as photometric invariants. *International Journal of Computer Vision*, 79(1):13–30, 2008.
- [31] A. V. Nikonorov. Spectrum shape elements model for correction of multichannel images. *Computer Optics*, 38(2):304–313, 2014. (In Russian).
- [32] G. D. Finlayson, B. V. Funt, and K. Barnard. Color constancy under varying illumination. In *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 720–725. IEEE, 1995.

- [33] A. Gijsenij, T. Gevers, and J. Van De Weijer. Computational color constancy: Survey and experiments. *IEEE Transactions on Image Processing*, 20(9):2475–2489, 2011.
- [34] G. Hemrit, G. D. Finlayson, A. Gijsenij, P. Gehler, S. Bianco, B. Funt, M. Drew, and L. Shi. Rehabilitating the colorchecker dataset for illuminant estimation. In *26th Color and Imaging Conference Final Program and Proceedings*, pages 350–353, 2018.
- [35] G. D. Finlayson and R. Zakizadeh. Reproduction angular error: An improved performance metric for illuminant estimation. *perception*, 310(1):1–26, 2014.
- [36] J. Bernd. *Digital Image Processing*. Springer, 6th revised and extended edition edition, 2005.
- [37] J. Liang, K. Xiao, M. R. Pointer, X. Wan, and C. Li. Spectra estimation from raw camera responses based on adaptive local-weighted linear regression. *Optics express*, 27(4):5165–5180, 2019.
- [38] G. Finlayson, H. Gong, and R. B. Fisher. Color homography: theory and applications. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 41(1):20–33, 2017.
- [39] G. Wallace, H. Chen, and K. Li. Color gamut matching for tiled display walls. In *Proceedings of the workshop on Virtual environments 2003*, pages 293–302. ACM, 2003.
- [40] H. Gong, G. D. Finlayson, R. B. Fisher, and F. Fang. 3D color homography model for photo-realistic color transfer re-coding. *The Visual Computer*, pages 1–11, 2017.
- [41] A. Smagina, V. P. Bozhkova, S. Gladilin, and D. Nikolaev. Linear colour segmentation revisited. In *Proc. SPIE 11041, Eleventh International Conference on Machine Vision (ICMV 2018)*, volume 11041, pages 107–119, 2019.
- [42] I. Konovalenko, A. Smagina, V. Kokhan, and D. Nikolaev. Prolab: perceptually uniform projective colour coordinates system. In *The 25th Symposium of the International Colour Vision Society. Abstract Book*, page 70, 2019.
- [43] P. J. Besl and N. D. McKay. Method for registration of 3-d shapes. In *Sensor fusion IV: control paradigms and data structures*, volume 1611, pages 586–606. International Society for Optics and Photonics, 1992.
- [44] J. B. Kruskal. Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis. *Psychometrika*, 29(1):1–27, 1964.

- [45] P. A. Garcia, R. Huertas, M. Melgosa, and G. Cui. Measurement of the relationship between perceived and computed color differences. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24(7):1823–1829, 2007.
- [46] Q. Pan and S. Westland. Comparative evaluation of color differences between color palettes. In *Color and Imaging Conference*, volume 2018, pages 110–115. Society for Imaging Science and Technology, 2018.
- [47] K. Thomsen. A euclidean color space in high agreement with the cie94 color difference formula. *Color Research & Application: Endorsed by Inter-Society Color Council, The Colour Group (Great Britain), Canadian Society for Color, Color Science Association of Japan, Dutch Society for the Study of Color, The Swedish Colour Centre Foundation, Colour Society of Australia, Centre Français de la Couleur*, 25(1):64–65, 2000.
- [48] P. Urban, M. R. Rosen, R. S. Berns, and D. Schleicher. Embedding non-euclidean color spaces into euclidean color spaces with minimal isometric disagreement. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24(6):1516–1528, 2007.
- [49] Б. В. Максимов. *Трансформация цвета при изменении освещения*. Наука, 1984.
- [50] T. Bäck, D. B. Fogel, and Z. Michalewicz. *Handbook of evolutionary computation*. CRC Press, 1997.
- [51] G. Sharma, W. Wu, and E. N. Dalal. The ciede2000 color-difference formula: Implementation notes, supplementary test data, and mathematical observations. *Color Research & Application*, 30(1):21–30, 2005.
- [52] J. Nocedal and S. Wright. *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [53] R. Mart'i, J. A Lozano, A. Mendiburu, and L. Hernando. Multi-start methods. *Handbook of Heuristics*, pages 1–21, 2016.
- [54] N. Ohta and A. R. Robertson. *CIE Standard Colorimetric System*, chapter 3, pages 63–114. John Wiley & Sons, Ltd, 2006.
- [55] A. Smagina, E. Ershov, and A. Grigoryev. Multiple light source dataset for colour research. In *Proc. SPIE 11433, Twelfth International Conference on Machine Vision (ICMV 2019)*, volume 11433, pages 635–642, 2020.
- [56] M. Stokes, M. Anderson, S. Chandrasekar, and R. Motta. A standard default color space for the internet-srgb. <http://www.color.org/contrib/sRGB.html>, 1996.
- [57] M. D. Fairchild. *Color appearance models*. John Wiley & Sons, 2013.
- [58] D. L. MacAdam. Visual sensitivities to color differences in daylight\*. *J. Opt. Soc. Am.*, 32(5):247–274, 1942.