

Универсальная симметрия и мгновенная инверсия в гиперкомплексных системах произвольной размерности.

Часть 1.

Автор: М. В. Костюк

ORCID: 0009-0007-1155-9060

Дата: 10 апреля 2026

Аннотация

В работе вводится понятие РОВ-чисел (Разностей Обратных Величин)

$$\Delta_n = 1/n - 1/(n+1) = 1/(n(n+1)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Величина $n(n+1)$ называется прямоугольным числом (произведение двух последовательных натуральных чисел). Таким образом, δ_n – обратные прямоугольные числа.

Исследуются их фундаментальные свойства: телескопичность, блочное масштабирование и единственность – никакая другая последовательность положительных чисел, представимая в виде $f(n) - f(n+1)$, не удовлетворяет этим условиям (с точностью до константы). На основе РОВ-чисел строятся реки – суммы геометрических прогрессий по декадам. Показано, что для любого целого основания $B \geq 2$ сумма первых $B-1$ рек в вещественном случае равна 1. Затем конструкция обобщается на гиперкомплексные системы произвольной размерности $d \geq 1$, где определены

$$U_d = 1 + \sum_{i=1}^{d-1} e_i, \quad \bar{U}_d = 1 - \sum_{i=1}^{d-1} e_i,$$

И реки имеют вид

$$R_n^{(d)}(B) = (\bar{U}_d / d) \cdot (B/(B-1)) \cdot \delta_n = (1/(2T_n)) \cdot (B/(B-1)) \cdot (\bar{U}_d / d),$$

Где $T_n = n(n+1)/2$ – треугольные числа. Доказано, что

$$\sum_{n=1}^{B-1} R_n^{(d)}(B) = U_d^{-1}.$$

Для гиперкомплексной системы, в которой мнимые единицы антикоммутируют и $e_i^2 = -1$ (без требований ассоциативности, альтернативности или нормированности), устанавливается фундаментальное тождество

$$(\varepsilon_0 + v)(\varepsilon_0 - v) = d, \quad \text{где } v = \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

На его основе доказывается универсальная формула мгновенной инверсии для знакопередающихся диагональных элементов (вершин гиперкуба) класса I:

$$S = a(\varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i), \quad S^{-1} = (1/(a d))(\varepsilon_0 - \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i e_i).$$

Аналогичная формула получена для чисто мнимых элементов класса II:

$$T = a \sum_{i=1}^d \varepsilon_i e_i, \quad T^{-1} = -(1/(a d)) \sum_{i=1}^d \varepsilon_i e_i.$$

Доказана невырожденность симметричных чисел (отсутствие делителей нуля) для класса I, даже в алгебрах, где есть делители нуля (седенионы, 32-мерные алгебры Кэли-Диксона и любые другие). Установлена биекция между множеством симметричных чисел с фиксированным положительным масштабом и $(\mathbb{Z}_2)^d$, что позволяет интерпретировать каждый такой элемент как диагональный оператор Паули (тензорное произведение I и Z) на d кубитах, устанавливая связь с квантовыми вычислениями.

Построена таблица МИ-1 (мгновенная инверсия №1) – таблица коэффициентов $1/(a d)$ для $a, d = 1, \dots, 8$. Доказаны её свойства: связь с функцией делителей, диагональ $a = d$ даёт $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ (Базельская задача), одна ячейка обслуживает 2^{d+1} элементов.

Пояснение об универсальности. Данная конструкция работает для любого натурального d (1,2,3,4,5,...), не требуя ни ассоциативности, ни нормированности, ни отсутствия делителей нуля. Достаточно, чтобы мнимые единицы антикоммутировали и имели квадрат -1 . Формулы инверсии, таблица МИ-1, РОВ-числа и реки справедливы для всех размерностей без исключения, включая $d=16$ (седенионы), $d=32$, $d=109$ и любые другие.

Ключевые слова: прямоугольные числа, разности обратных величин, антикоммутативные алгебры, мгновенная инверсия, знакопередающиеся диагональные элементы, вершины гиперкуба, функция делителей, Базельская задача, делители нуля, универсальность.

1. РОВ-числа: определение и фундаментальные свойства

1.1. Определение РОВ-чисел и их представление по декадам

Определение 1.1. Для любого натурального числа n (то есть $n = 1,2,3, \dots$) положим

$$\delta_n = 1/n - 1/(n+1).$$

После приведения к общему знаменателю получается эквивалентная форма

$$\delta_n = 1/(n(n+1)).$$

Числа δ_n называются РОВ-числами (сокращение от Разности Обратных Величин). Величина $n(n+1)$ есть прямоугольное число (произведение двух последовательных натуральных чисел). Таким образом, δ_n – обратные прямоугольные числа.

Пояснение символов:

- $1/n$ – обратная величина натурального числа n .
- $1/(n+1)$ – обратная величина следующего натурального числа.
- Разность этих двух обратных величин даёт дробь $1/(n(n+1))$, знаменатель которой – прямоугольное число.

Зачем это нужно: РОВ-числа являются «атомами» конструкции. Их свойства (телескопичность и блочное масштабирование) позволяют строить «реки» – суммы геометрических прогрессий, которые затем обобщаются на гиперкомплексные системы и дают алгебраические разложения обратных элементов.

Примеры первых девяти значений ($n = 1, \dots, 9$):

$$n \delta_n = 1/(n(n+1))$$

$$1 \ 1/2$$

$$2 \ 1/6$$

$$3 \ 1/12$$

$$4 \ 1/20$$

$$5 \ 1/30$$

$$6 \ 1/42$$

$$7 \ 1/56$$

$$8 \ 1/72$$

$$9 \ 1/90$$

Вторая декада (10-100). Разности на границах (10-20, 20-30, ..., 90-100):

$$1/10 - 1/20 = 1/20 = \delta_1/10,$$

$$1/20 - 1/30 = 1/60 = \delta_2/10,$$

...

$$1/90 - 1/100 = 1/900 = \delta_9/10.$$

Таблица значений для второй декады:

$$n \delta_n/10 = 1/(10 n(n+1))$$

$$1 \ 1/20$$

$$2 \ 1/60$$

$$3 \ 1/120$$

$$4 \ 1/200$$

$$5 \ 1/300$$

$$6 \ 1/420$$

$$7 \ 1/560$$

$$8 \ 1/720$$

$$9 \ 1/900$$

Третья декада (100-1000). Разности на границах (100-200, 200-300, ..., 900-1000):

$$1/100 - 1/200 = 1/200 = \delta_1/100,$$

...

$$1/900 - 1/1000 = 1/9000 = \delta_9/100.$$

Таблица значений для третьей декады:

$$n \delta_n/100 = 1/(100 n(n+1))$$

- 1 1/200
- 2 1/600
- 3 1/1200
- 4 1/2000
- 5 1/3000
- 6 1/4200
- 7 1/5600
- 8 1/7200
- 9 1/9000

Вертикальные суммы (суммы РОВ-чисел по декадам):

- Сумма первого столбца (первая декада): $\sum_{n=1}^9 \delta_n = 9/10$.
- Сумма второго столбца (вторая декада): $\sum_{n=1}^9 (\delta_n/10) = 9/100$.
- Сумма третьего столбца (третья декада): $\sum_{n=1}^9 (\delta_n/100) = 9/1000$.
- Для k-й декады сумма равна $9 / 10^k$.

Определение реки (вещественный случай). Для фиксированного $n = 1, \dots, 9$ река R_n есть сумма геометрической прогрессии по всем декадам:

$$R_n = \delta_n + \delta_n/10 + \delta_n/100 + \dots = \delta_n \cdot 1/(1 - 1/10) = (10/9) \delta_n.$$

Сумма всех девяти рек (полная сумма РОВ-чисел с весами геометрической прогрессии):

$$\sum_{n=1}^9 R_n = (10/9) \sum_{n=1}^9 \delta_n = (10/9) \cdot (9/10) = 1.$$

1.2. Телескопичность

Теорема 1.2 (Телескопичность). Для любого целого $B \geq 2$

$$\sum_{n=1}^{B-1} \delta_n = 1 - 1/B.$$

Пояснение символов:

- $\sum_{n=1}^{B-1}$ - сумма по n от 1 до $B-1$.
- B - произвольное целое основание (например, 10 для десятичной системы).

Доказательство:

Подставляем определение $\delta_n = 1/n - 1/(n+1)$:

$$\sum_{n=1}^{B-1} (1/n - 1/(n+1)) = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + \dots + (1/(B-1) - 1/B).$$

Все промежуточные члены сокращаются, остаётся $1 - 1/B$.

Зачем это нужно: Телескопичность позволяет легко вычислять суммы РОВ-чисел. В частности, при $B=10$ получаем $\sum_{n=1}^9 \delta_n = 9/10$. При $B \rightarrow \infty$ сумма стремится к 1, что даёт нормировку $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = 1$.

1.3. Блочное масштабирование

Теорема 1.3 (Блочное масштабирование). Для любых целых $B \geq 2$ и $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{B-1} \delta_{\{Bn+k\}} = (1/B) \delta_n.$$

Пояснение символов:

- $Bn+k$ – числа, образующие блок длины B : $Bn, Bn+1, \dots, Bn+B-1$.
- Сумма по k от 0 до $B-1$ охватывает весь блок.

Доказательство:

$$\sum_{k=0}^{B-1} \delta_{\{Bn+k\}} = \sum_{k=0}^{B-1} (1/(Bn+k) - 1/(Bn+k+1)).$$

Это телескопическая сумма по k : все члены, кроме первого и последнего, сокращаются. Остаётся

$$1/(Bn) - 1/(Bn+B) = 1/(Bn) - 1/(B(n+1)) = (1/B)(1/n - 1/(n+1)) = (1/B) \delta_n.$$

Зачем это нужно: Это свойство является ключевым для построения рек (суммирование по декадам) и для доказательства единственности РОВ-чисел. Оно показывает, что РОВ-числа масштабируются блоками.

1.4. Единственность

Теорема 1.4 (Единственность). Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, представимая в виде $a_n = f(n) - f(n+1)$ для некоторой функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Если для некоторого $B \geq 2$ выполнены условия

$$\sum_{n=1}^{B-1} a_n = 1 - 1/B, \quad \sum_{k=0}^{B-1} a_{\{Bn+k\}} = (1/B) a_n \quad (\forall n),$$

то существует константа $c > 0$ такая, что $a_n = c \delta_n$ для всех n . Если дополнительно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, то $c = 1$ и $a_n = \delta_n$.

Пояснение символов:

- $f(n)$ – вспомогательная функция, из которой вычитанием получается a_n .
- Условия – это в точности телескопичность и блочное масштабирование.

Доказательство (основные шаги).

1. Из представления $a_n = f(n) - f(n+1)$ и условия блочного масштабирования выводится функциональное уравнение

$$f(Bn) - f(Bn+B) = (1/B)(f(n) - f(n+1)). \quad (1)$$

2. Из положительности a_n следует строгое убывание f . Асимптотический анализ (см. [4, Lemma 2.1]) даёт существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} n f(n) = C$ (конечного).

3. Подставляя асимптотику $f(n) = C/n + o(1/n)$ в (1), находим, что C – константа.

4. Полагаем $h(n) = f(n) - C/n$. Тогда h удовлетворяет однородному уравнению

$$h(Bn) - h(Bn+B) = (1/B)(h(n) - h(n+1)). \quad (2)$$

5. Индукцией по B -адическому разложению числа n доказывается, что $h(n) \equiv 0$. Базовый случай: из $\sum_{n=1}^{B-1} a_n = 1 - 1/B$ получаем $f(1) - f(B) = 1 - 1/B$. С учётом асимптотики находим $h(1) = h(2) = \dots = h(B) = 0$. Шаг индукции использует (2).

6. Следовательно, $f(n) = C/n$ и $a_n = C(1/n - 1/(n+1)) = C \delta_n$.

7. Если $\sum a_n = 1$, то $C \sum \delta_n = C \cdot 1 = 1$, откуда $C = 1$.

Зачем это нужно: Единственность показывает, что РОВ-числа являются единственной (с точностью до масштаба) последовательностью, обладающей свойствами телескопичности и блочного масштабирования. Это оправдывает их выбор в качестве фундаментальных «атомов».

1.5. Сумма квадратов

Теорема 1.5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 = \pi^2/3 - 3.$$

Доказательство:

$$\delta_n^2 = (1/n - 1/(n+1))^2 = 1/n^2 + 1/(n+1)^2 - 2/(n(n+1)).$$

Суммируя по n от 1 до ∞ :

$$\sum \delta_n^2 = \sum 1/n^2 + \sum 1/(n+1)^2 - 2 \sum 1/(n(n+1)).$$

Известно: $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ (Базельская задача),

$$\sum 1/(n+1)^2 = \pi^2/6 - 1,$$

$$\sum 1/(n(n+1)) = 1 \text{ (телескопия).}$$

Подставляя, получаем $\pi^2/6 + (\pi^2/6 - 1) - 2 = \pi^2/3 - 3$.

Зачем это нужно: Сумма квадратов используется, например, для вычисления дисперсии при вероятностной интерпретации РОВ-чисел (как весов).

1.6. Экспоненциальная производящая функция

Теорема 1.6. Для любого $t > 0$

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n e^{-n t} = (e^t - 1) \ln(1 - e^{-t}) + 1.$$

Пояснение символов:

- $e^{-n t}$ – экспонента, убывающая с ростом n .
- $\ln(1 - e^{-t})$ – натуральный логарифм.

Доказательство:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n t}/n - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n t}/(n+1).$$

Первая сумма: $\sum e^{-n t}/n = -\ln(1 - e^{-t})$.

Вторая сумма: сдвиг индекса $m = n+1$ даёт

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n t}/(n+1) = e^t \sum_{m=2}^{\infty} e^{-m t}/m = e^t (-\ln(1 - e^{-t}) - e^{-t}).$$

Подставляя, получаем

$$F(t) = -\ln(1 - e^{-t}) - e^t(-\ln(1 - e^{-t}) - e^{-t}) = (e^t - 1) \ln(1 - e^{-t}) + 1.$$

Это окончательная форма; преобразование к $\ln(e^t - 1) - t$ не требуется, так как оно вносит лишний знак.

Зачем это нужно: Производящая функция позволяет анализировать асимптотику сумм РОВ-чисел и исследовать их связь с дзета-функцией и специальными функциями.

2.1. Алгебры Клиффорда и специальные элементы

Определение 2.1 (Алгебра Клиффорда $Cl(0, d-1)$).

Для любого натурального $d \geq 1$ рассмотрим алгебру (не обязательно ассоциативную), порождённую элементами e_1, e_2, \dots, e_{d-1} (при $d = 1$ множество образующих пусто, алгебра совпадает с \mathbb{R}) с соотношениями:

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j).$$

Пояснение символов:

- e_i – мнимые единицы.
- $e_i^2 = -1$ – квадрат каждой мнимой единицы равен минус единице.
- $e_i e_j = -e_j e_i$ – антикоммутиция: при перестановке произведение меняет знак.

Зачем это нужно: В таких алгебрах выполняются все дальнейшие формулы (фундаментальное тождество, универсальная инверсия). Ни ассоциативность, ни нормированность, ни отсутствие делителей нуля не требуются. Это позволяет охватить любые размерности d , включая $d = 16$ (седенионы), $d = 32$ и т.д.

Определение 2.2 (Специальные элементы U_d и \bar{U}_d).

Положим

$$U_d = 1 + e_1 + e_2 + \dots + e_{d-1},$$

$$\bar{U}_d = 1 - e_1 - e_2 - \dots - e_{d-1}.$$

Пояснение символов:

- 1 – единица алгебры.

· Сумма (или разность) всех мнимых единиц от e_1 до e_{d-1} .

Из универсальной инверсии (будет доказана в пункте 3) следует, что

$$U_d^{-1} = \bar{U}_d / d.$$

Зачем это нужно: U_d и \bar{U}_d – ключевые элементы, через которые выражаются реки в произвольной размерности.

2.2. Реки в размерности d

Определение 2.3 (Реки $R_n^{\{(d)\}}$ для произвольной размерности).

Для каждого $n = 1, 2, \dots, 9$ определим

$$R_n^{\{(d)\}} = (\bar{U}_d / d) \cdot (10/9) \cdot \delta_n.$$

Используя связь $\delta_n = 1/(2 T_n)$ с треугольными числами $T_n = n(n+1)/2$, получаем эквивалентную форму

$$R_n^{\{(d)\}} = (1/(2 T_n)) \cdot (10/9) \cdot (\bar{U}_d / d) = (5/(9 T_n)) \cdot (\bar{U}_d / d).$$

Пояснение символов:

- \bar{U}_d / d – уже известный обратный элемент U_d^{-1} .
- $10/9$ – множитель, возникающий из суммы геометрической прогрессии со знаменателем $1/10$ (как в вещественном случае).
- δ_n – РОВ-число (пункт 1).

Зачем это нужно: Эти реки являются прямым обобщением вещественных рек (пункт 1). Они позволяют разложить обратный элемент U_d^{-1} в сумму девяти слагаемых, каждое из которых имеет ясный геометрический смысл (сумма по декадам).

2.3. Сумма рек

Теорема 2.4 (Сумма рек в размерности d).

$$\sum_{n=1}^9 R_n^{(d)} = U_d^{-1}.$$

Доказательство:

Подставляем определение $R_n^{(d)}$:

$$\sum_{n=1}^9 R_n^{(d)} = (\bar{U}_d / d) \cdot (10/9) \cdot \sum_{n=1}^9 \delta_n.$$

Из телескопичности (Теорема 1.2 при $B = 10$) имеем $\sum_{n=1}^9 \delta_n = 9/10$.

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^9 R_n^{(d)} = (\bar{U}_d / d) \cdot (10/9) \cdot (9/10) = \bar{U}_d / d = U_d^{-1}.$$

Пояснение символов:

- $\sum_{n=1}^9$ – сумма по n от 1 до 9.
- \bar{U}_d / d – уже известное выражение для U_d^{-1} .

Зачем это нужно: Теорема показывает, что конструкция рек, найденная для вещественных чисел ($d=1$), обобщается на любую размерность d без каких-либо дополнительных условий. Это первый шаг к универсальности: сумма девяти рек всегда даёт обратный элемент к U_d .

2.4. Обобщение на произвольное основание B

В вещественном случае (пункт 1) мы использовали основание $B = 10$ (десятичная система). Однако конструкция не зависит от выбора основания. Заменяем 10 на произвольное целое $B \geq 2$.

Определение 2.5 (Реки с основанием B).

$$R_n^{\{(d)\}}(B) = (\bar{U}_d / d) \cdot (B/(B-1)) \cdot \delta_n, \quad n = 1, 2, \dots, B-1.$$

Теорема 2.6 (Сумма рек для основания B).

$$\sum_{n=1}^{B-1} R_n^{\{(d)\}}(B) = U_d^{-1}.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{B-1} R_n^{\{(d)\}}(B) &= (\bar{U}_d / d) \cdot (B/(B-1)) \cdot \sum_{n=1}^{B-1} \delta_n = \\ &= (\bar{U}_d / d) \cdot (B/(B-1)) \cdot (1 - 1/B) = (\bar{U}_d / d) \cdot (B/(B-1)) \cdot ((B-1)/B) = \bar{U}_d / d = \\ &= U_d^{-1}. \end{aligned}$$

Пояснение символов:

- $B/(B-1)$ - множитель, возникающий из суммы геометрической прогрессии со знаменателем $1/B$.

- $\sum_{n=1}^{B-1} \delta_n = 1 - 1/B$ - телескопичность.

Зачем это нужно: Инвариантность относительно выбора основания показывает, что конструкция рек является универсальной: для любого V сумма $V-1$ рек даёт U_d^{-1} . В частности, при $V=2$ одна река уже равна U_d^{-1} ; при $V=10$ получаем 9 рек; при $V=16$ - 15 рек и т.д.

2.5. Примеры для конкретных размерностей

Пример 2.7 ($d = 1$, вещественные числа).

$U_1 = 1, \bar{U}_1 = 1, R_n^{\{(1)\}} = (1/1) \cdot (10/9) \cdot \delta_n = (10/9) \delta_n$ - совпадает с определением реки из пункта 1. Сумма $\sum_{n=1}^9 R_n^{\{(1)\}} = 1$.

Пример 2.8 ($d = 2$, комплексные числа).

$U_2 = 1 + i, \bar{U}_2 = 1 - i, \bar{U}_2/2 = (1 - i)/2 = U_2^{-1}$.

$R_n^{\{(2)\}} = ((1 - i)/2) \cdot (10/9) \cdot \delta_n = (5(1 - i))/(9 T_n)$.

Сумма $\sum_{n=1}^9 R_n^{\{(2)\}} = (1 - i)/2 = U_2^{-1}$.

Пример 2.9 ($d = 4$, кватернионы).

$U_4 = 1 + i + j + k, \bar{U}_4 = 1 - i - j - k, \bar{U}_4/4 = (1 - i - j - k)/4 = U_4^{-1}$.

$R_n^{\{(4)\}} = ((1 - i - j - k)/4) \cdot (10/9) \cdot \delta_n = (5(1 - i - j - k))/(36 T_n)$.

Сумма $\sum_{n=1}^9 R_n^{\{(4)\}} = (1 - i - j - k)/4 = U_4^{-1}$.

Пример 2.10 ($d = 8$, октонионы).

Аналогично с семью мнимыми единицами e_1, \dots, e_7 :

$U_8 = 1 + e_1 + \dots + e_7, \bar{U}_8 = 1 - e_1 - \dots - e_7, \bar{U}_8/8 = U_8^{-1}$.

$R_n^{\{(8)\}} = ((1 - \sum e_i)/8) \cdot (10/9) \cdot \delta_n = (5(1 - \sum e_i))/(72 T_n)$.

Сумма $\sum_{n=1}^9 R_n^{\{(8)\}} = U_8^{-1}$.

Пример 2.11 ($d = 16$, седенионы).

$U_{16} = 1 + e_1 + \dots + e_{15}, \bar{U}_{16} = 1 - e_1 - \dots - e_{15}, \bar{U}_{16}/16 = U_{16}^{-1}$.

Формула рек и сумма остаются справедливыми, несмотря на наличие делителей нуля в седенионах (см. пункт 4 о невырожденности симметричных чисел).

2.6. Таблица рек для комплексных, кватернионных, октонионных и седенионных систем

В нижеследующей таблице приведены значения рек $R_n^{\{(d)\}}$ для размерностей $d = 2$ (комплексные), $d = 4$ (кватернионы), $d = 8$ (октонионы) и $d = 16$ (седенионы). Для каждой размерности указаны треугольные числа T_n , скалярный множитель $5/(9T_n)$ и соответствующий алгебраический множитель (\bar{U}_d / d) . Все реки записаны в виде дроби с числителем 5.

$$n \quad T_n \quad 5/(9T_n) \quad R_n^{\{(2)\}} = 5/(9T_n) \cdot (1-i)/2 \quad R_n^{\{(4)\}} = 5/(9T_n) \cdot (1-i-j-k)/4 \\ R_n^{\{(8)\}} = 5/(9T_n) \cdot (1-\sum_{p=1}^7 e_p)/8 \quad R_n^{\{(16)\}} = 5/(9T_n) \cdot (1-\sum_{p=1}^{15} e_p)/16$$

$$1 \quad 1 \quad 5/9 \quad 5(1-i)/18 \quad 5(1-i-j-k)/36 \quad 5(1-\sum e_p)/72 \quad 5(1-\sum e_p)/144$$

$$2 \quad 3 \quad 5/27 \quad 5(1-i)/54 \quad 5(1-i-j-k)/108 \quad 5(1-\sum e_p)/216 \quad 5(1-\sum e_p)/432$$

$$3 \quad 6 \quad 5/54 \quad 5(1-i)/108 \quad 5(1-i-j-k)/216 \quad 5(1-\sum e_p)/432 \quad 5(1-\sum e_p)/864$$

$$4 \quad 10 \quad 5/90 \quad 5(1-i)/180 \quad 5(1-i-j-k)/360 \quad 5(1-\sum e_p)/720 \quad 5(1-\sum e_p)/1440$$

$$5 \quad 15 \quad 5/135 \quad 5(1-i)/270 \quad 5(1-i-j-k)/540 \quad 5(1-\sum e_p)/1080 \quad 5(1-\sum e_p)/2160$$

$$6 \quad 21 \quad 5/189 \quad 5(1-i)/378 \quad 5(1-i-j-k)/756 \quad 5(1-\sum e_p)/1512 \quad 5(1-\sum e_p)/3024$$

$$7 \quad 28 \quad 5/252 \quad 5(1-i)/504 \quad 5(1-i-j-k)/1008 \quad 5(1-\sum e_p)/2016 \quad 5(1-\sum e_p)/4032$$

$$8 \quad 36 \quad 5/324 \quad 5(1-i)/648 \quad 5(1-i-j-k)/1296 \quad 5(1-\sum e_p)/2592 \quad 5(1-\sum e_p)/5184$$

$$9 \quad 45 \quad 5/405 \quad 5(1-i)/810 \quad 5(1-i-j-k)/1620 \quad 5(1-\sum e_p)/3240 \quad 5(1-\sum e_p)/6480$$

Пояснение символов:

· i, j, k – мнимые единицы кватернионов (для \mathbb{C} только i).

- e_p – мнимые единицы октонионов ($p = 1..7$) и седенионов ($p = 1..15$).
- Σe_p – сумма всех мнимых единиц соответствующей алгебры.
- Все реки имеют в числителе 5, знаменатель – $9T_n$, умноженный на $d/$ (или на 2,4,8,16 в зависимости от алгебраического множителя).

Зачем это нужно: Таблица наглядно демонстрирует единообразие конструкции: для всех d реки отличаются только алгебраическим множителем (\bar{U}_d / d). Это подтверждает универсальность РОВ-подхода.

3. Алгебраическая основа: фундаментальное тождество и универсальная инверсия

3.1. Определение гиперкомплексной системы

Определение 3.1 (Антикоммутативная гиперкомплексная система).

Пусть $d \geq 1$ – натуральное число. Рассмотрим алгебру (не обязательно ассоциативную), порождённую элементами e_1, e_2, \dots, e_{d-1} (при $d = 1$ множество образующих пусто, алгебра совпадает с \mathbb{R}) с соотношениями:

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j).$$

Пояснение символов:

- e_i – мнимые единицы.
- $e_i^2 = -1$ – квадрат каждой мнимой единицы равен минус единице.
- $e_i e_j = -e_j e_i$ – антикоммутация: при перестановке произведение меняет знак.

Зачем это нужно: Эти два условия (антикоммутация и квадрат -1) – единственное, что требуется для дальнейших теорем. Ни ассоциативность, ни нормированность, ни отсутствие делителей нуля

не предполагаются. Поэтому результаты справедливы для любых размерностей d , включая $d=16$ (седенионы), $d=32$ и т.д.

3.2. Класс I – знакопередающиеся диагональные элементы (вершины гиперкуба)

Определение 3.2 (Класс I).

Для любого ненулевого вещественного числа a и любого набора знаков $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1} \in \{+1, -1\}$ определим

$$S = a \cdot (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \dots + \varepsilon_{d-1} e_{d-1}).$$

Пояснение символов:

- a – масштабный множитель ($a \neq 0$).
- ε_j – знаки ± 1 .
- e_j – мнимые единицы из определения 3.1.

Всего существует 2^d таких элементов. Геометрически, если отождествить базис $\{1, e_1, \dots, e_{d-1}\}$ с координатными осями в \mathbb{R}^d , то координаты $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1})$ задают вершину d -мерного гиперкуба $[-1, 1]^d$. Поэтому элементы класса I называют вершинами гиперкуба.

Зачем это нужно: Для этих элементов будет доказана единая формула инверсии, причём коэффициент $1/(ad)$ одинаков для всех 2^d вершин. Это позволяет строить таблицу МИ-1.

3.3. Класс II – чисто мнимые элементы

Определение 3.3 (Класс II).

Для любого ненулевого вещественного числа a и любого набора знаков $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d \in \{+1, -1\}$ определим

$$T = a \cdot (\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \dots + \varepsilon_d e_d).$$

Пояснение символов:

- a – масштабный множитель ($a \neq 0$).
- ε_i – знаки ± 1 .
- e_i – мнимые единицы (теперь их d штук).

Всего существует также 2^d элементов. В отличие от класса I, здесь нет единичного члена (ε_0). Эти элементы называются чисто мнимыми.

Зачем это нужно: Для них тоже существует простая формула инверсии, отличающаяся только знаком. Вместе с классом I они дают 2^{d+1} элементов, обслуживаемых одной ячейкой таблицы МИ-1.

3.4. Фундаментальное тождество

Лемма 3.4 (Фундаментальное тождество).

Пусть $v = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \dots + \varepsilon_{d-1} e_{d-1}$ (сумма по всем мнимым единицам, кроме единицы). Тогда для любых знаков $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1}$ выполняется

$$(\varepsilon_0 + v)(\varepsilon_0 - v) = d.$$

Доказательство:

Раскрываем скобки: $(\varepsilon_0 + v)(\varepsilon_0 - v) = \varepsilon_0^2 - v^2 = 1 - v^2$, потому что $\varepsilon_0^2 = 1$.

Вычисляем v^2 :

$$v^2 = (\sum \varepsilon_i e_i)^2 = \sum (\varepsilon_i e_i)^2 + \sum_{\{i \neq j\}} \varepsilon_i \varepsilon_j e_i e_j.$$

Первая сумма: $(\varepsilon_i e_i)^2 = \varepsilon_i^2 e_i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$. Таких слагаемых $(d-1)$, поэтому первая сумма равна $-(d-1)$.

Вторая сумма: для каждой пары $i \neq j$ слагаемые $\varepsilon_i \varepsilon_j e_i e_j$ и $\varepsilon_j \varepsilon_i e_j e_i = -\varepsilon_i \varepsilon_j e_i e_j$ взаимно уничтожаются из-за антикоммутации. Следовательно, вся вторая сумма равна 0.

Таким образом, $v^2 = -(d-1)$.

Подставляем: $1 - (-(d-1)) = 1 + d - 1 = d$. ■

Зачем это нужно: Это тождество – ключ к мгновенной инверсии. Оно показывает, что произведение $(\varepsilon_0 + v)$ и $(\varepsilon_0 - v)$ равно скаляру d , не зависящему от знаков.

3.5. Универсальная инверсия для класса I

Теорема 3.5 (Универсальная инверсия, класс I).

Для любого элемента $S = a(\varepsilon_0 + v)$ из класса I обратный элемент существует и равен

$$S^{-1} = (1/(a d)) \cdot (\varepsilon_0 - v).$$

Доказательство:

Умножим S на предполагаемый обратный:

$$S \cdot (1/(a d))(\varepsilon_0 - v) = (a/(a d)) (\varepsilon_0 + v)(\varepsilon_0 - v) = (1/d) \cdot d = 1.$$

■

Пояснение символов:

- $1/(a d)$ – скалярный коэффициент, выносимый в таблицу МИ-1.
- $\varepsilon_0 - v$ – тот же набор знаков, но с противоположными знаками у всех мнимых единиц.

Зачем это нужно: Формула работает для любого d , для любых знаков ε_i , для любого ненулевого a . Все 2^d вершин гиперкуба обращаются мгновенно, с одним и тем же коэффициентом. Это и есть мгновенная инверсия.

3.6. Универсальная инверсия для класса II

Теорема 3.6 (Универсальная инверсия, класс II).

Для любого элемента $T = a \cdot (\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \dots + \varepsilon_d e_d)$ из класса II обратный элемент существует и равен

$$T^{-1} = - (1/(a d)) \cdot (\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \dots + \varepsilon_d e_d).$$

Доказательство:

Обозначим $w = \sum \varepsilon_i e_i$. Из определения 3.1 и свойств e_i легко вычислить $w^2 = -d$.

Тогда $T \cdot (-1/(a d)) w = a w \cdot (-1/(a d)) w = -(1/d) w^2 = -(1/d) \cdot (-d) = 1$. ■

Пояснение символов:

- Знак минус перед коэффициентом отличает класс II от класса I.
- Обратный элемент – это тот же чисто мнимый вектор, умноженный на $-1/(ad)$.

Зачем это нужно: Все 2^d чисто мнимых элементов также обращаются по единой формуле. Коэффициент $1/(ad)$ (с точностью до знака)

совпадает с коэффициентом для класса I. Это позволяет объединить оба класса в таблице МИ-1.

3.7. Примеры инверсии для малых d

Пример 3.7 ($d=1$). Мнимых единиц нет, класс I: $S = a \varepsilon_0$. Обратный: $S^{-1} = 1/(a \varepsilon_0)$ (тривиально). Класс II при $d=1$: $T = a \varepsilon_1 e_1$, $e_1^2 = -1$, $T^{-1} = -(1/a) \varepsilon_1 e_1$. Это согласуется с теоремой 3.6.

Пример 3.8 ($d=2$, комплексные числа).

Класс I: $S = a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 i)$. $S^{-1} = (1/(2a))(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 i)$.

Класс II: $T = a \varepsilon_1 i$. $T^{-1} = -(1/(2a)) \varepsilon_1 i$.

Пример 3.9 ($d=4$, кватернионы).

Класс I: $S = a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 i + \varepsilon_2 j + \varepsilon_3 k)$. $S^{-1} = (1/(4a))(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 i - \varepsilon_2 j - \varepsilon_3 k)$.

Класс II: $T = a(\varepsilon_1 i + \varepsilon_2 j + \varepsilon_3 k)$. $T^{-1} = -(1/(4a))(\varepsilon_1 i + \varepsilon_2 j + \varepsilon_3 k)$.

Пример 3.10 ($d=8$, октонионы).

Аналогично с семью мнимыми единицами e_1, \dots, e_7 . Формула работает благодаря антикоммутации и $e_i^2 = -1$, несмотря на неассоциативность.

Пример 3.11 ($d=16$, седенионы).

15 мнимых единиц. Формула остаётся справедливой, хотя в алгебре есть делители нуля. Обратимость каждого элемента класса I гарантируется теоремой 3.5 (см. также пункт 4 о невырожденности).

Зачем это нужно: Примеры показывают, что формулы не зависят от конкретной реализации алгебры – достаточно антикоммутации и $e_i^2 = -1$. Поэтому они работают для любых d .

4. Невырожденность симметричных чисел и комбинаторная структура

4.1. Множество симметричных чисел

Определение 4.1 (Множество S_d).

Пусть $d \geq 1$ – натуральное число. В алгебре $Cl(0, d-1)$ (или в любой гиперкомплексной системе с антикоммутирующими образующими e_i , $e_i^2 = -1$) определим множество симметричных чисел S_d как совокупность всех элементов класса I (см. определение 3.2) с произвольным ненулевым вещественным коэффициентом a :

$$S_d = \{ a \cdot (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \dots + \varepsilon_{d-1} e_{d-1}) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \varepsilon_i = \pm 1 \}.$$

Пояснение символов:

- a – ненулевой вещественный масштабный множитель.
- $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1}$ – знаки ± 1 .
- e_1, \dots, e_{d-1} – мнимые единицы, удовлетворяющие $e_i^2 = -1$ и $e_i e_j = -e_j e_i$ ($i \neq j$).

Зачем это нужно: Именно для этих элементов работает формула универсальной инверсии (теорема 3.5). Изучая S_d , мы выясним, что все они обратимы и не являются делителями нуля, даже если в алгебре есть делители нуля (например, седенионы). Также мы установим взаимно однозначное соответствие между элементами S_d (с точностью до положительного масштаба) и двоичными наборами длины d , что позволяет интерпретировать их как диагональные операторы Паули.

4.2. Невырожденность (отсутствие делителей нуля)

Теорема 4.2 (Отсутствие делителей нуля для S_d).

Для любого $S \in S_d$ и любого ненулевого элемента T из алгебры $Cl(0, d-1)$ выполняются:

$$S \cdot T \neq 0 \quad \text{и} \quad T \cdot S \neq 0.$$

Доказательство.

1. Из теоремы 3.5 (универсальная инверсия для класса I) для любого $S = a(\epsilon_0 + \sum_{i=1}^{d-1} \epsilon_i e_i)$ существует обратный элемент

$$S^{-1} = (1/(a d)) (\epsilon_0 - \sum_{i=1}^{d-1} \epsilon_i e_i).$$

При этом $S \cdot S^{-1} = S^{-1} \cdot S = 1$. Это следует из фундаментального тождества (лемма 3.4) и коммутативности $(\epsilon_0 + v)$ и $(\epsilon_0 - v)$. Обратный элемент является двусторонним.

2. Предположим, что существует ненулевой T такой, что $S \cdot T = 0$. Умножим это равенство слева на S^{-1} :

$$S^{-1} \cdot (S \cdot T) = S^{-1} \cdot 0 = 0.$$

В силу ассоциативности умножения (в алгебрах Клиффорда умножение ассоциативно; в случае неассоциативных алгебр, таких как октонионы или седенионы, достаточно альтернативности, а для тройки (S^{-1}, S, T) она выполняется, так как S и S^{-1} порождают ассоциативную подалгебру) имеем $S^{-1} \cdot (S \cdot T) = (S^{-1} \cdot S) \cdot T = 1 \cdot T = T$.

Следовательно, $T = 0$, что противоречит выбору T . Таким образом, $S \cdot T \neq 0$.

3. Аналогично, если предположить $T \cdot S = 0$, умножаем справа на S^{-1} :

$$(T \cdot S) \cdot S^{-1} = T \cdot (S \cdot S^{-1}) = T \cdot 1 = T = 0 \cdot S^{-1} = 0.$$

Снова получаем $T = 0$, противоречие. Следовательно, $T \cdot S \neq 0$.

Следствие 4.3.

В алгебрах с делителями нуля (например, седенионы, $d = 16$, и любые более высокие размерности) все симметричные числа S_d обратимы и не являются делителями нуля. Формула инверсии $S^{-1} = (1/(ad))(\epsilon_0 - \sum \epsilon_i e_i)$ остаётся справедливой. Это означает, что S_d является «островком безопасности» внутри алгебры, где нет вырожденности.

4.3. Биeкция с $(\mathbb{Z}_2)^{\{d\}}$ (фиксация положительного масштаба)

В дальнейшем для удобства будем рассматривать элементы S_d с фиксированным положительным масштабом $a = 1$. Множество таких элементов обозначим S_{d^+} :

$$S_{d^+} = \{ \varepsilon_0 + \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \dots + \varepsilon_{\{d-1\}} e_{\{d-1\}} \mid \varepsilon_i = \pm 1 \}.$$

Это ровно 2^d различных элементов, поскольку базис $\{1, e_1, \dots, e_{\{d-1\}}\}$ линейно независим, и разные наборы знаков дают разные суммы.

Теорема 4.4 (Биeкция).

Отображение $\Phi: S_{d^+} \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^{\{d\}}$, определённое формулой

$$\Phi(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_{\{d-1\}} e_{\{d-1\}}) = (x_0, x_1, \dots, x_{\{d-1\}}), \text{ где } x_i = 0 \text{ при } \varepsilon_i = +1, x_i = 1 \text{ при } \varepsilon_i = -1,$$

является взаимно однозначным соответствием.

Доказательство.

Каждому набору знаков $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{\{d-1\}})$ соответствует ровно один кортеж из нулей и единиц (замена $+1 \rightarrow 0, -1 \rightarrow 1$). Разные наборы знаков дают разные кортежи, и каждый кортеж получается из некоторого набора. Поскольку элементы S_{d^+} взаимно однозначно соответствуют наборам знаков, отображение Φ биeктивно. ■

Зачем это нужно: Биeкция показывает, что количество различных симметричных элементов (с положительным масштабом) равно $2^{\{d\}}$. Это важно для комбинаторных подсчётов и для связи с квантовыми операторами.

Замечание. Если рассматривать фактор S_d по действию всех ненулевых вещественных чисел (включая отрицательные), то элементы S и $-S$ отождествляются, что уменьшает число классов вдвое. Однако для приложений, связанных с квантовыми операторами, удобнее использовать S_d^+ , чтобы сохранить соответствие 1:1 с двоичными наборами.

4.4. Связь с проективной группой Паули

Определение 4.5 (Группа Паули для одного кубита).

Группа Паули P_1 состоит из 16 матриц 2×2 :

$$P_1 = \{ \pm I, \pm iI, \pm X, \pm iX, \pm Y, \pm iY, \pm Z, \pm iZ \},$$

где

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Умножение – матричное. Центр $Z(P_1) = \{ \pm I, \pm iI \}$ изоморфен циклической группе \mathbb{Z}_4 .

Проективная группа Паули – это фактор $P_1 / \{ \pm I, \pm iI \}$. Она изоморфна $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ и имеет 4 элемента: $[I], [X], [Y], [Z]$ (классы эквивалентности матриц с точностью до умножения на фазу $\pm 1, \pm i$).

Для n кубитов группа Паули P_n – это n -кратное тензорное произведение $P_1^{\otimes n}$. Её проективная версия $\bar{P}_n = P_n / Z(P_n)$ изоморфна $(\mathbb{Z}_2)^{2n}$. Каждый элемент задаётся $2n$ битами: по два бита на кубит – один бит для типа оператора ($I/X/Y/Z$) и один бит для чётности фазы.

Связь с нашей конструкцией.

Множество S_{d^+} ($2^{\{d\}}$ элементов) находится во взаимно однозначном соответствии с подмножеством проективной группы Паули для d кубитов, а именно с подгруппой, состоящей из диагональных операторов Паули (тензорных произведений I и Z). Действительно, кортежу знаков $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1})$ соответствует оператор

$$Z^{\{\varepsilon_0\}} \otimes Z^{\{\varepsilon_1\}} \otimes \dots \otimes Z^{\{\varepsilon_{d-1}\}},$$

где $Z^0 = I$ (единичная матрица), $Z^1 = Z$. В проективной группе фазы (знак $\pm 1, \pm i$) отбрасываются, поэтому указанное соответствие корректно и биективно.

Зачем это нужно: Такая интерпретация позволяет рассматривать каждый симметричный элемент как диагональный оператор Паули на d кубитах. Это открывает возможность использовать РОВ-конструкцию в квантовых вычислениях, например, для моделирования квантовых схем, построения стабилизаторных кодов, исправляющих ошибки, и для геометрического представления кубитов.

5. Таблица МИ-1 (мгновенная инверсия №1)

5.1. Определение таблицы

Определение 5.1.

Таблица МИ-1 (мгновенная инверсия №1) – это таблица, в которой на пересечении строки, соответствующей размерности d , и столбца, соответствующего параметру a , находится число $1/(a \cdot d)$. Здесь a и d пробегает натуральные числа ($a \geq 1, d \geq 1$). Для практического использования приведён фрагмент для $a, d = 1, 2, \dots, 8$, но таблица естественно продолжается неограниченно вправо (увеличение a) и вверх (увеличение d).

Ориентация таблицы (важно!):

- Размерность d располагается по вертикали и возрастает снизу вверх. То есть в самой нижней строке (первая снизу) находится $d = 1$, над ней $d = 2$, и так далее, в самой верхней строке (для фрагмента) $d = 8$.
- Параметр a располагается по горизонтали (слева направо): $a = 1, 2, 3, \dots, 8$.
- В ячейке на пересечении строки d и столбца a указано число $1/(a \cdot d)$.

Пояснение символов:

- a – параметр, входящий в элемент $S = a(\epsilon_0 + \sum \epsilon_i e_i)$ из класса I (или T из класса II).
- d – размерность пространства (число мнимых единиц плюс 1).
- $1/(a \cdot d)$ – скалярный коэффициент, который появляется в формулах универсальной инверсии (теоремы 3.5 и 3.6).

Зачем это нужно: Таблица даёт мгновенный доступ к коэффициенту, который нужно поставить в формулу обратного элемента для любых a и d . Одна ячейка обслуживает сразу 2^{d+1} элементов (2^d из класса I и 2^d из класса II). Это делает таблицу универсальным справочником.

Таблица МИ-1 (фрагмент 8×8):

d	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$
8	$1/8$	$1/16$	$1/24$	$1/32$	$1/40$	$1/48$	$1/56$	$1/64$
7	$1/7$	$1/14$	$1/21$	$1/28$	$1/35$	$1/42$	$1/49$	$1/56$
6	$1/6$	$1/12$	$1/18$	$1/24$	$1/30$	$1/36$	$1/42$	$1/48$
5	$1/5$	$1/10$	$1/15$	$1/20$	$1/25$	$1/30$	$1/35$	$1/40$
4	$1/4$	$1/8$	$1/12$	$1/16$	$1/20$	$1/24$	$1/28$	$1/32$
3	$1/3$	$1/6$	$1/9$	$1/12$	$1/15$	$1/18$	$1/21$	$1/24$
2	$1/2$	$1/4$	$1/6$	$1/8$	$1/10$	$1/12$	$1/14$	$1/16$
1	1	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$	$1/7$	$1/8$

(В таблице строки расположены в порядке возрастания d снизу вверх: внизу $d=1$, наверху $d=8$. Столбцы $a=1..8$ слева направо.)

5.2. Свойства таблицы

Свойство 1. Связь с функцией делителей.

Рассмотрим бесконечную таблицу ($a, d \in \mathbb{N}$). Каждая дробь $1/k$, где k – натуральное число, встречается в таблице ровно $\sigma_0(k)$ раз, где $\sigma_0(k)$ – количество положительных делителей числа k (включая 1 и само k).

Доказательство.

Ячейка (a, d) содержит $1/(a \cdot d)$. Равенство $1/(a \cdot d) = 1/k$ эквивалентно $a \cdot d = k$. Число способов представить k в виде произведения двух натуральных чисел (a, d) равно числу делителей k , потому что каждому делителю a соответствует $d = k/a$. Следовательно, дробь $1/k$ встречается $\sigma_0(k)$ раз. ■

Пример. Для $k = 6$ делители: 1, 2, 3, 6. Пары (a, d) : (1,6), (2,3), (3,2), (6,1). Дробь $1/6$ встречается 4 раза, что совпадает с $\sigma_0(6)=4$.

Свойство 2. Базельская задача (диагональ $a = d$).

Элементы главной диагонали таблицы (где $a = d$) имеют вид $1/n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Сумма всех этих чисел – известный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Этот результат, впервые полученный Эйлером, называется Базельской задачей. В контексте нашей таблицы он возникает естественным образом как сумма диагональных элементов.

Свойство 3. Универсальность (обслуживание 2^{d+1} элементов).

Для фиксированных a и d одна ячейка таблицы (a, d) задаёт коэффициент $1/(a \cdot d)$, который входит в формулы инверсии:

· Для класса I (вершины гиперкуба): $S^{-1} = (1/(a \cdot d))(\varepsilon_0 - \sum \varepsilon_i e_i)$. Всего таких элементов 2^d .

· Для класса II (чисто мнимые): $T^{-1} = -(1/(a \cdot d)) \sum \varepsilon_i e_i$. Всего таких элементов также 2^d .

Таким образом, одна ячейка обслуживает $2^d + 2^d = 2^{d+1}$ гиперкомплексных чисел, для которых обратный элемент вычисляется мгновенно.

5.3. Аналитическое продолжение диагональных сумм (дополнительное свойство)

Для фиксированного целого сдвига $k \geq 0$ рассмотрим сумму элементов таблицы, лежащих на диагонали $d = a + k$ (то есть $a = 1, 2, 3, \dots$; $d = a + k$). Эта сумма равна

$$S_k = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a(a+k)} = \frac{H_k}{k},$$

где $H_k = 1 + 1/2 + \dots + 1/k$ - гармоническое число. При $k = 0$ получаем главную диагональ, и $S_0 = \pi^2/6$.

Заменив целое k на комплексное z ($z \neq 0, -1, -2, \dots$), можно определить аналитическое продолжение:

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+z)} = \frac{\psi(z+1) + \gamma}{z},$$

где $\psi(z)$ – дигамма-функция, γ – постоянная Эйлера–Маскерони. Это даёт возможность вычислять суммы для любых комплексных сдвигов и устанавливает связь таблицы МИ-1 со специальными функциями.

Зачем это нужно: Аналитическое продолжение показывает, что структура таблицы МИ-1 не ограничивается целыми числами, а допускает естественное обобщение на комплексные параметры, что может быть полезно в квантовой теории поля и в теории фракталов.

6. Примеры для конкретных размерностей

В этом разделе приведены явные формулы универсальной инверсии (класс I) и рек для размерностей $d = 1, 2, 3, 4, 8, 16$, а также дано общее выражение для любого d . Все формулы следуют из теорем 3.5 и 2.4. Мнимые единицы e_i удовлетворяют условиям $e_i^2 = -1$ и $e_i e_j = -e_j e_i$ ($i \neq j$); никаких дополнительных предположений (ассоциативность, нормированность, отсутствие делителей нуля) не требуется.

6.1. Общая формула рек для любой размерности d

Для любого натурального $d \geq 1$ реки определяются выражением

$$R_n^{(d)} = \frac{\overline{U}_d}{d} \cdot \frac{10}{9} \cdot \delta_n = \frac{\overline{U}_d}{d} \cdot \frac{5}{9T_n},$$

где

$$U_d = 1 + \sum_{i=1}^{d-1} e_i,$$

$$\overline{U}_d = 1 - \sum_{i=1}^{d-1} e_i,$$

$$T_n = n(n+1)/2,$$

$$\delta_n = 1/(n(n+1)).$$

Эта формула справедлива для любого d , независимо от того, является ли d степенью двойки (1,2,4,8,16,...) или нет (3,5,6,7,9,10,...). Условия $e_i^2 = -1$ и $e_i e_j = -e_j e_i$ ($i \neq j$) выполнены во всех случаях, поэтому все теоремы остаются верными. Сумма рек:

$$\sum_{n=1}^9 R_n^{(d)} = U_d^{-1}.$$

6.2. Размерность $d = 1$ (вещественные числа)

Мнимых единиц нет, алгебра совпадает с \mathbb{R} .

Класс I:

$$S = a \cdot \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \pm 1, \quad a \neq 0.$$

$$\text{Обратный элемент: } S^{-1} = 1/(a \varepsilon_0) = (1/a) \varepsilon_0.$$

Реки:

$$U_1 = 1, \quad \overline{U_1} = 1, \quad \frac{\overline{U_1}}{1} = 1.$$

$$R_n^{(1)} = 1 \cdot \frac{5}{9T_n} = \frac{5}{9T_n}.$$

$$\text{Сумма } \sum_{n=1}^9 R_n^{(1)} = 1.$$

Таблица рек для $d=1$ ($n=1..9$):

$$n \quad T_n \quad R_n^{(1)} = 5/(9T_n)$$

$$1 \quad 1 \quad 5/9$$

$$2 \quad 3 \quad 5/27$$

$$3 \quad 6 \quad 5/54$$

$$4 \quad 10 \quad 5/90 = 1/18$$

$$5 \quad 15 \quad 5/135 = 1/27$$

$$6 \ 21 \ 5/189$$

$$7 \ 28 \ 5/252$$

$$8 \ 36 \ 5/324$$

$$9 \ 45 \ 5/405 = 1/81$$

6.3. Размерность $d = 2$ (комплексные числа)

Мнимая единица $e_1 = i$, $i^2 = -1$.

Класс I:

$$S = a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 i).$$

$$\text{Обратный элемент: } S^{-1} = \frac{1}{2a}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 i).$$

Реки:

$$U_2 = 1 + i, \ \overline{U_2} = 1 - i, \ \frac{\overline{U_2}}{U_2} = \frac{1-i}{1+i}$$

$$R_n^{(2)} = \frac{1-i}{2} \cdot \frac{5}{9T_n} = \frac{5(1-i)}{18 T_n}.$$

$$\text{Сумма } \sum_{n=1}^9 R_n^{(2)} = \frac{1-i}{2} = U_2^{-1}.$$

Таблица рек для $d=2$:

$$n \ T_n \ R_n^{(2)} = 5(1-i)/(18 T_n)$$

$$1 \ 1 \ 5(1-i)/18$$

$$2 \ 3 \ 5(1-i)/54$$

$$3 \ 6 \ 5(1-i)/108$$

$$4 \ 10 \ 5(1-i)/180$$

$$5 \ 15 \ 5(1-i)/270$$

$$6 \ 21 \ 5(1-i)/378$$

$$7 \ 28 \ 5(1-i)/504$$

$$8 \ 36 \ 5(1-i)/648$$

$$9 \ 45 \ 5(1-i)/810$$

6.4. Размерность $d = 3$ (промежуточная, не степень двойки)

Мнимые единицы e_1, e_2 с $e_1^2 = e_2^2 = -1, e_1 e_2 = -e_2 e_1$.
Алгебра существует ($Cl(0,2)$), хотя она не является алгеброй с делением.

Класс I:

$$S = a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2).$$

$$\text{Обратный элемент: } S^{-1} = \frac{1}{3a}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 e_1 - \varepsilon_2 e_2).$$

Реки:

$$U_3 = 1 + e_1 + e_2, \quad \overline{U_3} = 1 - e_1 - e_2, \quad \frac{\overline{U_3}}{3} = \frac{1 - e_1 - e_2}{3}.$$

$$R_n^{(3)} = \frac{1 - e_1 - e_2}{3} \cdot \frac{5}{9T_n} = \frac{5(1 - e_1 - e_2)}{27 T_n}.$$

$$\text{Сумма } \sum_{n=1}^9 R_n^{(3)} = \frac{1 - e_1 - e_2}{3} = U_3^{-1}.$$

Таблица рек для $d=3$:

$$n \ T_n \ R_n^{(3)} = 5(1 - e_1 - e_2)/(27 T_n)$$

$$1 \ 1 \ 5(1 - e_1 - e_2)/27$$

$$2 \ 3 \ 5(1 - e_1 - e_2)/81$$

$$3 \ 6 \ 5(1 - e_1 - e_2)/162$$

$$4 \ 10 \ 5(1 - e_1 - e_2)/270$$

$$5 \ 15 \ 5(1 - e_1 - e_2)/405$$

6 21 5(1 - e₁ - e₂)/567
 7 28 5(1 - e₁ - e₂)/756
 8 36 5(1 - e₁ - e₂)/972
 9 45 5(1 - e₁ - e₂)/1215

6.5. Размерность d = 4 (кватернионы)

Мнимые единицы i, j, k с обычными соотношениями.

Класс I:

$$S = a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 i + \varepsilon_2 j + \varepsilon_3 k).$$

$$\text{Обратный элемент: } S^{-1} = \frac{1}{4a}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 i - \varepsilon_2 j - \varepsilon_3 k).$$

Реки:

$$U_4 = 1 + i + j + k, \quad \overline{U_4} = 1 - i - j - k, \quad \frac{\overline{U_4}}{4} = \frac{1-i-j-k}{4}.$$

$$R_n^{(4)} = \frac{1-i-j-k}{4} \cdot \frac{5}{9T_n} = \frac{5(1-i-j-k)}{36 T_n}.$$

$$\text{Сумма } \sum R_n^{(4)} = \frac{1-i-j-k}{4} = U_4^{-1}.$$

Таблица рек для d=4:

$$n T_n R_n^{(4)} = 5(1-i-j-k)/(36 T_n)$$

$$1 \ 1 \ 5(1-i-j-k)/36$$

$$2 \ 3 \ 5(1-i-j-k)/108$$

$$3 \ 6 \ 5(1-i-j-k)/216$$

$$4 \ 10 \ 5(1-i-j-k)/360$$

$$5 \ 15 \ 5(1-i-j-k)/540$$

$$6 \ 21 \ 5(1-i-j-k)/756$$

$$7 \ 28 \ 5(1-i-j-k)/1008$$

$$8 \ 36 \ 5(1-i-j-k)/1296$$

$$9 \ 45 \ 5(1-i-j-k)/1620$$

6.6. Размерность $d = 8$ (октонионы)

Мнимые единицы e_1, e_2, \dots, e_7 . Алгебра неассоциативна, но альтернативна.

Класс I:

$$S = a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_7 e_7).$$

$$\text{Обратный элемент: } S^{-1} = \frac{1}{8a}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 e_1 - \dots - \varepsilon_7 e_7).$$

Реки:

$$U_8 = 1 + \sum_{p=1}^7 e_p, \quad \overline{U_8} = 1 - \sum e_p, \quad \frac{\overline{U_8}}{U_8} = \frac{1 - \sum e_p}{1 + \sum e_p}.$$

$$R_n^{(8)} = \frac{1 - \sum e_p}{8} \cdot \frac{5}{9T_n} = \frac{5(1 - \sum e_p)}{72 T_n}.$$

$$\text{Сумма } \sum R_n^{(8)} = U_8^{-1}.$$

Таблица рек для $d=8$:

$$n \ T_n \ R_n^{(8)} = \frac{5(1 - \sum e_p)}{72 T_n}$$

$$1 \ 1 \ 5(1 - \sum e_p)/72$$

$$2 \ 3 \ 5(1 - \sum e_p)/216$$

$$3 \ 6 \ 5(1 - \sum e_p)/432$$

$$4 \ 10 \ 5(1 - \sum e_p)/720$$

$$5 \ 15 \ 5(1 - \sum e_p)/1080$$

$$6 \ 21 \ 5(1 - \sum e_p)/1512$$

$$7 \ 28 \ 5(1-\sum e_p)/2016$$

$$8 \ 36 \ 5(1-\sum e_p)/2592$$

$$9 \ 45 \ 5(1-\sum e_p)/3240$$

6.7. Размерность $d = 16$ (седенионы) и любые бóльшие

Мнимые единицы e_1, \dots, e_{15} . Алгебра имеет делители нуля, но симметричные числа обратимы (теорема 4.2). Формулы остаются в силе.

Класс I:

$$S = a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_{15} e_{15}).$$

$$S^{-1} = \frac{1}{16a}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 e_1 - \dots - \varepsilon_{15} e_{15}).$$

Реки:

$$U_{16} = 1 + \sum_{p=1}^{15} e_p, \quad \overline{U_{16}} = 1 - \sum e_p, \quad \frac{\overline{U_{16}}}{U_{16}}.$$

$$R_n^{(16)} = \frac{1 - \sum e_p}{16} \cdot \frac{5}{9T_n} = \frac{5(1 - \sum e_p)}{144 T_n}.$$

$$\text{Сумма } \sum R_n^{(16)} = U_{16}^{-1}.$$

Обобщение для любого $d \geq 1$:

$$R_n^{(d)} = \frac{5(1 - \sum_{i=1}^{d-1} e_i)}{9d}, \quad T_n.$$

$$\text{Сумма девяти рек всегда равна } U_d^{-1}.$$

7. Заключение

В работе получены следующие основные результаты.

1. РОВ-числа. Введены числа $\delta_n = 1/n - 1/(n+1) = 1/(n(n+1))$. Доказаны их фундаментальные свойства:

- телескопичность: $\sum_{n=1}^{B-1} \delta_n = 1 - 1/B$ для любого целого $B \geq 2$;
- блочное масштабирование: $\sum_{k=0}^{B-1} \delta_{Bn+k} = (1/B) \delta_n$;
- единственность: никакая другая последовательность положительных чисел, представимая в виде $f(n)-f(n+1)$, не удовлетворяет этим двум условиям (с точностью до константы);
- сумма квадратов: $\sum \delta_n^2 = \pi^2/3 - 3$;
- экспоненциальная производящая функция: $\sum \delta_n e^{-nt} = (e^t - 1) \ln(1 - e^{-t}) + 1$.

2. Реки. На основе РОВ-чисел построены геометрические прогрессии по декадам (основание 10) – реки. В вещественном случае ($d=1$) реки имеют вид $R_n = (10/9)\delta_n = 5/(9T_n)$, и их сумма равна 1. Конструкция обобщена на произвольную размерность d :

$$R_n^{(d)} = (\bar{U}_d/d) \cdot (10/9) \cdot \delta_n = (\bar{U}_d/d) \cdot (5/(9T_n)), \text{ где } U_d = 1 + \sum_{i=1}^{d-1} e_i, \bar{U}_d = 1 - \sum_{i=1}^{d-1} e_i. \text{ Доказано, что } \sum_{n=1}^9 R_n^{(d)} = U_d^{-1}.$$

Показано, что результат не зависит от выбора основания B : для любого $B \geq 2$ сумма $B-1$ рек также равна U_d^{-1} .

3. Алгебраическая основа. Для гиперкомплексной системы с антикоммутирующими мнимыми единицами ($e_i^2 = -1, e_i e_j = -e_j e_i$) доказано фундаментальное тождество $(\varepsilon_0 + v)(\varepsilon_0 - v) = d$, где $v = \sum \varepsilon_i e_i$.

Из него получена универсальная формула мгновенной инверсии для класса I (вершины гиперкуба):

$$S = a(\varepsilon_0 + \sum \varepsilon_i e_i) \Rightarrow S^{-1} = (1/(ad))(\varepsilon_0 - \sum \varepsilon_i e_i).$$

Для класса II (чисто мнимые элементы) получена аналогичная формула: $T = a \sum \varepsilon_i e_i \Rightarrow T^{-1} = -(1/(ad)) \sum \varepsilon_i e_i$.

Формулы справедливы для любого натурального d и любых знаков ε_i , без требований ассоциативности, нормированности или отсутствия делителей нуля.

4. Невырожденность симметричных чисел. Множество симметричных чисел $S_d = \{ a(\varepsilon_0 + \sum \varepsilon_i e_i) \}$ не содержит делителей нуля: для любого $S \in S_d$ и любого ненулевого T из алгебры выполняются $ST \neq 0$ и $TS \neq 0$. Это свойство сохраняется даже в алгебрах с делителями нуля (седенионы и старшие).

Установлена биекция между множеством элементов с фиксированным положительным масштабом $(\epsilon_0 + \sum \epsilon_i e_i)$ и $(\mathbb{Z}_2)^{\{d\}}$ (замена $+1 \rightarrow 0, -1 \rightarrow 1$). Эта биекция позволяет интерпретировать каждый симметричный элемент как диагональный оператор Паули (тензорное произведение I и Z) на d кубитах, что связывает конструкцию с квантовыми вычислениями.

5. Таблица МИ-1. Построена таблица коэффициентов $1/(a \cdot d)$ для $a, d = 1, \dots, 8$ (с возможностью неограниченного продолжения). Ориентация: d возрастает снизу вверх, a – слева направо. Доказаны её свойства:

- каждая дробь $1/k$ встречается $\sigma_0(k)$ раз ($\sigma_0(k)$ – число делителей k);
- диагональ $a = d$ даёт ряд $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ (Базельская задача);
- одна ячейка (a, d) обслуживает $2^{\{d+1\}}$ элементов (2^d из класса I и 2^d из класса II).

Кроме того, для диагональных сумм получено аналитическое продолжение через дигамма-функцию: $S(z) = (\psi(z+1) + \gamma)/z$.

6. Примеры для конкретных размерностей. Явно выписаны формулы инверсии и рек для $d = 1, 2, 3, 4, 8, 16$, а также общий вид для любого d . Продемонстрировано, что конструкция работает для промежуточных размерностей (например, $d=3$) и для алгебр с делителями нуля ($d=16$). Таблицы рек для этих размерностей показывают единообразие: везде числитель 5, знаменатель $9d T_n$, и алгебраический множитель $(1 - \sum e_i)/d$.

7. Универсальность. Все результаты справедливы для любого натурального d (1, 2, 3, 4, 5, ...). Единственные требования – антикоммутация мнимых единиц и $e_i^2 = -1$. Ни ассоциативность, ни нормированность, ни отсутствие делителей нуля не нужны. Это означает, что РОВ-конструкция, реки, универсальная инверсия и таблица МИ-1 работают во всех гиперкомплексных системах, включая алгебры Клиффорда произвольной размерности, седенионы и любые более высокие алгебры Кэли–Диксона.

Таким образом, в работе создана единая алгебраическая система, связывающая элементарные числовые разности (РОВ-числа) с глубокими структурами: геометрией фракталов (реки, вершины гиперкуба), теорией чисел (делители, $\pi^2/6$), квантовыми вычислениями (группа Паули) и алгебрами с делителями нуля. Полученные

результаты являются полностью универсальными и не имеют ограничений на размерность.

Литература

1. Костюк М. В. Мгновенная инверсия симметричных элементов вида $1 + \sum e_i$ в алгебрах с делением. Препринт, 2026. DOI: 10.24108/preprints-3114411
2. Conway J. H., Smith D. A. On Quaternions and Octonions. AK Peters, 2003.
3. Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge University Press, 2nd ed., 2001.
4. Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Wiley, 3rd ed., 2014.
5. Hardy G. H. Divergent Series. Oxford University Press, 1949.
6. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. 1748.