

## Об элементарном методе решения бинарной гипотезы Гольдбаха\*

Федоткин Андрей Иванович

Россия, г.Москва  
fedotkinmipt93@gmail.com

*В статье представлено решение знаменитой открытой задачи теории чисел – бинарной гипотезы Гольдбаха. Приводится элементарное доказательство бинарной гипотезы Гольдбаха, основанное на комбинаторном принципе покрытия. Показано, что доказательство бинарной гипотезы Гольдбаха сводится к доказательству гипотезы о покрытии множества всех натуральных чисел, больше 1, множеством сумм пар натуральных чисел, каждому из которых соответствует своё простое число или пара простых чисел-близнецов. Строится порождающее множество  $\mathbb{K}$  целых чисел и доказывается Лемма о покрытии, которая утверждает, что множество  $\mathbb{K}$  является аддитивным базисом порядка 2 для множества всех натуральных чисел больше 1. Доказательство леммы проводится методом от противного с использованием постулата Бертрана (теоремы Бертрана-Чебышёва), который исключает возможность существования контрпримера. Из Леммы о покрытии непосредственно следует доказательство бинарной гипотезы Гольдбаха. Предлагаемый подход не использует аналитические методы или сложный математический аппарат.*

*Ключевые слова:* гипотеза Гольдбаха; бинарная гипотеза Гольдбаха; аддитивный базис порядка 2; порождающее множество  $\mathbb{K}$ ; лемма о покрытии; постулат Бертрана; теорема Бертрана-Чебышёва; функция Гольдбаха; простые числа; теория чисел.

### 1. Введение

Бинарная гипотеза Гольдбаха (любое чётное число, большее 2, является суммой двух простых чисел) остается одной из самых известных нерешенных проблем теории чисел, несмотря на неоднократные обширные проверки численными методами и близкие промежуточные результаты, такие как теорема Чена. В этой статье приводится элементарное доказательство, основанное на комбинаторном принципе покрытия. Предлагаемый подход не использует аналитические методы или сложный математический аппарат. Представленное решение бинарной гипотезы Гольдбаха базируется на следующих теоремах о простых числах, которые к настоящему моменту доказаны (различными методами) и признаны профессиональным математическим сообществом как бесспорно истинные:

---

\* Данная публикация является расширенной, исправленной и объединённой версией двух ранее опубликованных на Zenodo.org препринтов: версии 1 на русском языке, и версии 2.0 (исправленной и дополненной) на английском языке. Настоящая статья не содержит дополнительных новых научных результатов, но является завершённым, выверенным двуязычным изданием. Предыдущие версии доступны на Zenodo.org: версия v1 от 31 марта 2026г, на русском языке: DOI 10.5281/zenodo.19356729; версия v2.0 от 8 апреля 2026г, на английском языке: DOI 10.5281/zenodo.19466377.

1. Теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел [1];
2. Постулат Бертрана (теорема Бертрана-Чебышёва) о существовании по крайней мере одного простого числа  $p$  такого, что  $n < p < 2n$  для любого натурального числа  $n > 1$  [2,3].

Работа содержит следующие разделы. Раздел 2 вводит необходимые определения и понятие порождающего множества  $\mathbb{K}$ . Раздел 3 представляет лемму о покрытии, в которой доказывается, что множество  $\mathbb{K}$  является аддитивным базисом порядка 2 для натуральных чисел больше 1. Раздел 4 составляет доказательство основной теоремы – бинарной гипотезы Гольдбаха. В разделе 5 рассмотрен пример использования Леммы о покрытии и Бинарной теоремы Гольдбаха для формализации поиска значений функции Гольдбаха  $g(n)$ . В разделе 6 приведено краткое резюме представленного доказательства бинарной гипотезы Гольдбаха. В разделе 7 обсуждаются свойства множества  $\mathbb{K}$  как аддитивного базиса и редкость таких разреженных покрывающих множеств. В конце статьи приведен список используемых источников информации.

## 2. Определение порождающего множества $\mathbb{K}$

Все простые числа  $p_k \in \mathbb{P}$ , кроме 2, представимы в виде  $4k+1$  и  $4k-1$ , где  $k$  – целое число. Определим «порождающее множество»  $\mathbb{K}$  как бесконечное подмножество натуральных чисел  $\mathbb{N}$ , состоящее из множества всех целых чисел  $k_i$ , каждому из которых соответствует свое простое число, кроме 2, или пара простых чисел-близнецов по формулам  $4k \pm 1$ :

$$\mathbb{K} = \{k_i\} \subset \mathbb{N} : \forall k_i \in \mathbb{K} \rightarrow p_k^+ = 4k_i + 1 \text{ или } p_k^- = 4k_i - 1 \text{ или } p_k^\pm = 4k_i - 1, p_{k+1}^\pm = 4k_i + 1 \quad (1)$$

Образно говоря, целое число  $k_i$  «порождает» простое число. Для краткости, далее по тексту будем пользоваться этой метафорой. Каждый член  $k_i$  множества  $\mathbb{K}$  может порождать либо одно простое число, либо пару простых чисел-близнецов (заметим, что простые числа-близнецы необязательно порождаются одним и тем же  $k$ ).

Каждый член  $k_i$  множества  $\mathbb{K}$ , порождающий одно простое число по формуле  $p_k^+ = 4k_i + 1$ , обозначим  $k_i^+$  и будем называть «однополярным  $k^+$ », а подмножество всех таких чисел  $\{k_i^+\}$  будем обозначать  $\mathbb{K}^+$ .

Каждый член  $k_i$  множества  $\mathbb{K}$ , порождающий одно простое число по формуле  $p_k^- = 4k_i - 1$ , обозначим  $k_i^-$  («однополярный  $k^-$ »), а подмножество всех чисел  $\{k_i^-\}$  –  $\mathbb{K}^-$ .

Каждый член  $k_i$  множества  $\mathbb{K}$ , порождающий пару простых чисел-близнецов по формуле  $(p_k^\pm = 4k_i - 1, p_{k+1}^\pm = 4k_i + 1)$ , обозначим  $k_i^\pm$  и будем называть «биполярным», а подмножество всех чисел  $\{k_i^\pm\}$  будем обозначать  $\mathbb{K}^\pm$ .

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}^+ \cup \mathbb{K}^- \cup \mathbb{K}^\pm$$

Пару простых чисел-близнецов  $(p_k^\pm = 4k_i - 1, p_{k+1}^\pm = 4k_i + 1)$ , порожденную только одним, биполярным  $k_i^\pm \in \mathbb{K}^\pm$ , будем называть парой «чистых» простых-близнецов, в отличие от остальных пар простых близнецов  $(p_k^+ = 4k_{i-1} + 1, p_{k+1}^- = 4k_{i+1} - 1)$ , образованных обязательно разными и разнополярными  $k$ , которые назовем парой «сводных» простых-близнецов.

Приведем для примера первые 25 членов множества  $\mathbb{K}$ :

$$\mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 32, \dots\}$$

$$\mathbb{K}^+ = \{4, 7, 9, 10, 13, 22, 24, 25, 28, \dots\}$$

$$\mathbb{K}^- = \{2, 5, 6, 8, 11, 12, 17, 20, 21, 26, 32, \dots\}$$

$$\mathbb{K}^\pm = \{1, 3, 15, 18, 27, \dots\}$$

Натуральные числа 14, 16, 19, 23, 29, 30, 31, ... не являются порождающими (т.е. «образующими по формулам  $4k \pm 1$ ») простое число (простые числа). Назовем такие числа «пустыми числами»  $\bar{g}$ , соответствующее множество всех пустых чисел обозначим  $\bar{G}$ .

В силу бесконечности и счетности множества всех простых чисел  $\mathbb{P} = \{p_k\}$ , порождающее множество  $\mathbb{K}$  и множество пустых чисел  $\bar{G}$  являются бесконечными и счетными.

Для порождающего множества  $\mathbb{K}$ , определенного вышеуказанным способом, справедливо следующее утверждение:

### **3. Лемма о покрытии порождающим множеством $\mathbb{K}$ множества всех натуральных чисел (Лемма о покрытии)**

*Порождающее множество  $\mathbb{K}$ , состоящее из целых чисел  $k_i$ , образующих все простые числа  $\{p_k\} = \mathbb{P}$  по формулам  $4k \pm 1$ , т.е.  $\mathbb{K} = \{k \in \mathbb{Z} \mid 4k \pm 1 - \text{простое}\}$  (см. (1)), покрывает всё множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$  таким образом, что для любого натурального числа  $n > 1$  существует как минимум одна неупорядоченная пара чисел  $(k_i, k_j)$  (необязательно разных) из множества  $\mathbb{K}$ , сумма которых равна  $n$ :*

$$\forall n \in \mathbb{N} (n > 1) \exists k_i \in \mathbb{K} \text{ и } k_j \in \mathbb{K} : k_i + k_j = n, \text{ где } i \neq j \text{ или } i = j \quad (2)$$

Комментарий: Отнюдь не каждое бесконечное подмножество натуральных чисел может покрыть (в смысле (2)) суммами пар своих членов всё множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$ . Например, подмножеством четных чисел или подмножеством чисел  $\{1, 2, 3, 10, 11, 12, \dots\}$  нельзя покрыть множество  $\mathbb{N}$ : в первом случае суммой пар четных чисел нельзя представить нечетные числа, во втором случае – числами подмножества невозможно покрыть натуральные числа 7, 8, 9.

Из того, что математики знают к настоящему моменту о простых числах и их свойствах, логично полагать, что определенное в соответствии с (1) множество  $\mathbb{K}$  – весьма «дырявое» (*разреженное*) и для больших простых чисел может иметь пустые лакуны (пропуски, интервалы натуральных чисел, не принадлежащих  $\mathbb{K}$ ) *любого* конечного размера. Следовательно, необходимо доказать, что несмотря на свою разреженность, множество  $\mathbb{K}$  все-таки «достаточно плотное» для целей утверждения настоящей леммы – то есть, что члены множества  $\mathbb{K}$  расположены на оси натуральных чисел так, что *все* и *любого возможного* размера лакуны, существующие в множестве

$\mathbb{K}$ , не мешают его членам  $k_i$  покрывать (в смысле определения (2)) весь ряд натуральных чисел.

Перейдем к доказательству леммы.

*Доказательство.* Доказательство леммы проведем методом от противного. Пусть существует некоторое натуральное число  $n > 1$ , не представимое суммой никакой пары чисел  $(k_i, k_j)$  из  $\mathbb{K}$ , т.е.

$$\exists n \in \mathbb{N} (n > 1) \nexists (k_i, k_j) \in \mathbb{K} : k_i + k_j = n, \forall i \neq j \text{ или } i = j \quad (3)$$

Существование такого  $n > 1$  обусловлено отсутствием в  $\mathbb{K}$  членов  $k_i$ , образующих пары вида

$$(1, (n-1)), (2, (n-2)), \dots, ((n-2), 2), ((n-1), 1),$$

равные в сумме  $n$ , что для неупорядоченных пар чисел означает:

- для четного  $n$  – отсутствие в  $\mathbb{K}$  членов  $k_i$  в интервале чисел  $[n/2, (n-1)]$ ;
- для нечетного  $n$  – отсутствие в  $\mathbb{K}$  членов  $k_i$  в интервале чисел  $[(n+1)/2, (n-1)]$ .

Графически в общем виде это иллюстрирует рисунок 1:

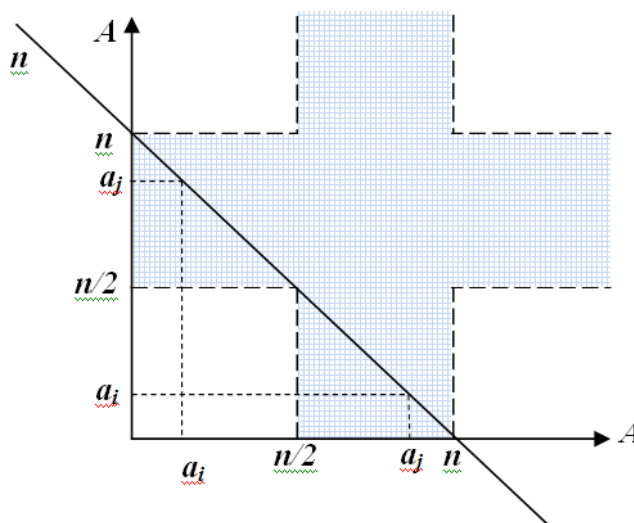


Рис.1 Условие существования натурального  $n$ , не представимого в виде суммы каких-либо членов числового множества  $A$ , – лакуна в  $A$  размером  $[n/2, n]$

То есть, искомое число  $n > 1$ , определенное в (3), существует тогда и только тогда, когда в множестве  $\mathbb{K}$  существует лакуна (интервал натуральных чисел, не принадлежащих  $\mathbb{K}$ ) между последовательными его членами  $k_i$  и  $k_{i+1}$ , такими что:

$$\text{для четного } n > 2 : k_i = n/2 - 1, k_{i+1} = n \text{ (при } n=2 \text{ в } \mathbb{K} \text{ отсутствует } k=1) \quad (4.1)$$

$$\text{для нечетного } n > 1 : k_i = (n-1)/2, k_{i+1} = n \quad (4.2)$$

Этим порождающим числам  $k_i$ , и  $k_{i+1}$  соответствуют простые числа:

$$\text{для четного } n > 2 : p_{k_i} = 4k_i \pm 1 = 2(n-2) \pm 1 \text{ и } p_{k_{i+1}} = 4k_{i+1} \pm 1 = 4n \pm 1 \quad (5.1)$$

$$\text{для нечетного } n > 1 : p_{k_i} = 4k_i \pm 1 = 2(n-1) \pm 1 \text{ и } p_{k_{i+1}} = 4k_{i+1} \pm 1 = 4n \pm 1 \quad (5.2)$$

(при  $n=2$   $p_k=1$  «условно простое»). Тогда, во всех возможных комбинациях,  $2p_{k_i}$  равен:

$$\text{для четного } n > 2 : 2p_{k_i} = 4(n-2) \pm 2 \quad (6.1)$$

$$\text{для нечетного } n > 1 : 2p_{k_i} = 4(n-1) \pm 2 \quad (6.2)$$

Из (5) и (6) следует, что во всех возможных вышеуказанных комбинациях выполняется

$$p_{k_{i+1}} > 2p_{k_i}, \text{ где } p_{k_i} \text{ и } p_{k_{i+1}} - \text{последовательные простые числа} \quad (6.3)$$

С другой стороны, согласно *постулату Бертрана* (теореме Бертрана-Чебышёва), для любого натурального  $r > 1$  между  $r$  и  $2r$  всегда есть хотя бы одно простое число. Значит, *существует* простое число  $p^*$  такое, что:

$$p_{k_i} < p^* < 2p_{k_i} < p_{k_{i+1}} \quad (7)$$

Такому простому числу  $p^*$  соответствует некоторое порождающее  $k_a^*$  такое, что для четных и нечетных  $n$ , соответственно,  $k_a^*$  располагается в интервале:

$$n/2 \leq k_a^* \leq (n-1) \text{ или } (n+1)/2 \leq k_a^* \leq (n-1) \quad (8)$$

Однако, согласно (4), между двумя последовательными членами  $k_i$  и  $k_{i+1}$  множества  $\mathbb{K}$  – пусто, а значит, никакого числа  $k_a^*$  *не может существовать* в  $\mathbb{K}$ , и никакого простого числа  $p^*$  *не существует*, что противоречит (7) и (8).

Полученное противоречие означает, что исходное ***предположение о существовании числа  $n$ , не представимого суммой пары чисел  $(k_i, k_j)$  из  $\mathbb{K}$  – ложно.***

Таким образом, *любое* натуральное число (кроме 1) *представимо* не менее чем одной суммой двух чисел из множества  $\mathbb{K}$  (необязательно разных), и *бесконечное подмножество натуральных чисел – множество  $\mathbb{K}$  – покрывает* (в смысле определения (2)) *всё множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$  (кроме 1).* □

Доказав лемму, мы тем самым выявили критически важное свойство порождающего множества  $\mathbb{K}$ , а именно, что  $\mathbb{K}$  – действительно «достаточно плотное» для целей утверждения истинности настоящей леммы: для любого  $n > 1$  члены  $k_i$  множества  $\mathbb{K}$  расположены на оси натуральных чисел так, что *все и любого возможного* размера лакуны  $Gap_{\mathbb{K}}(n) = (k_{i-1}(n), k_i(n))$ , существующие в  $\mathbb{K}$ , не превышают интервал  $\approx n/2$ , точнее:

- для четного числа  $n$  – лакуны не превышают интервал  $[n/2, (n-1)]$ ;

- для нечетного числа  $n$  – лакуны не превышают интервал  $[(n+1)/2, (n-1)]$ .

Для натурального  $n$ , назовем лакуну, максимально допустимого (по лемме) размера, ***критической лакуной*** и обозначим  $Gap_{\mathbb{K}}^{MAX}(n)$ ; множество  $\mathbb{K}$  назовем множеством, «*плотным в смысле леммы о покрытии*».

Из Леммы о покрытии непосредственно следует доказательство бинарной гипотезы Гольдбаха.

#### 4. Теорема о представлении любого четного числа больше 2 в виде как минимум одной суммы двух простых чисел (Бинарная теорема Гольдбаха)

Любое чётное число больше 2 можно представить в виде как минимум одной суммы двух простых (необязательно разных) чисел.

*Доказательство.* Каждое простое число  $p > 2$  представимо в виде  $4k+1$  или в виде  $4k-1$ , где  $k$  – целое число. Представим любое четное число  $n=2m$  больше 4 (случай  $n=4=2+2$  - тривиальный) в виде некоторой суммы двух простых чисел  $p_{k_i}$  и  $p_{k_j}$ , порожденных целыми числами  $(k_i, k_j) \in \mathbb{K}$  (где  $i \neq j$  или  $i=j$ ,  $\mathbb{K}$  определено в (1)), и покажем, что как минимум одна такая пара простых чисел  $(p_{k_i}, p_{k_j})$  всегда существует.

$$\forall n = 2m \in 2\mathbb{N} (n > 4) \quad n = p_{k_i} + p_{k_j} = \begin{cases} 4k_i + 1 \\ 4k_i - 1 \end{cases} + \begin{cases} 4k_j + 1 \\ 4k_j - 1 \end{cases}, \text{ где } k_i, k_j \in \mathbb{K}, i \neq j \text{ или } i=j$$

Указанное четное число  $n > 4$  представимо через  $(k_i, k_j)$  одним из трех возможных способов:

$$\Rightarrow \forall n = 2m \in 2\mathbb{N} (n > 4) \quad n = \begin{cases} 4(k_i+k_j) + 2 \\ 4(k_i+k_j) \\ 4(k_i+k_j) - 2 \end{cases}$$

а натуральное число  $m=n/2 > 2$ :

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} (m > 2) \quad m = \begin{cases} 2(k_i+k_j) + 1 \\ 2(k_i+k_j) \\ 2(k_i+k_j) - 1 \end{cases}$$

Натуральное число  $m$  может быть как нечетным, так и четным. Тогда,

а) Если  $m$  четное, то,

$$\Rightarrow \forall m \in 2\mathbb{N} (m > 2) \quad m = 2(k_i+k_j)$$

а исходное  $n$  представляет собой сумму «разнополярных» простых чисел  $p_{k_i}$  и  $p_{k_j}$

$$\forall n = 2m \in 2\mathbb{N} (n > 4) \quad n = p_{k_i} + p_{k_j} = \begin{cases} (4k_i + 1) + (4k_j - 1) \\ (4k_i - 1) + (4k_j + 1) \end{cases}, \quad k_i, k_j \in \mathbb{K}, i \neq j \text{ или } i=j$$

Представив четное  $m > 2$  в виде  $m=2w$ , где  $w > 1$  – натуральное число, получаем:

$$\forall w \in \mathbb{N} (w > 1) \quad w = (k_i+k_j), \quad k_i, k_j \in \mathbb{K}, i \neq j \text{ или } i=j \quad (9.1)$$

б) Если  $m$  нечетное, то, с учетом  $m > 2$ ,

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}_{\text{odd}} (m > 2) \quad m = 2(k_i+k_j) \pm 1$$

а исходное  $n$  представляет собой сумму «однополярных» простых чисел  $p_{k_i}$  и  $p_{k_j}$

$$\forall n = 2m \in 2\mathbb{N} (n > 4) \quad n = p_{k_i} + p_{k_j} = \begin{cases} (4k_i + 1) + (4k_j + 1) \\ (4k_i - 1) + (4k_j - 1) \end{cases}, \quad k_i, k_j \in \mathbb{K}, i \neq j \text{ или } i=j$$

Представив нечетное  $m > 2$  в виде  $m=2w \pm 1$ , где  $w > 1$  – натуральное число, получаем:

$$\forall w \in \mathbb{N} (w > 1) \quad w = (k_i + k_j), \quad k_i, k_j \in \mathbb{K}, \quad i \neq j \text{ или } i = j \quad (9.2)$$

Из (9.1) и (9.2) следует, что для любого (четного или нечетного) натурального  $m > 2$  (и для любого исходного четного  $n = 2m > 4$ ), соответствующее ему число  $w > 1$  всегда имеет вид:

$$\forall w \in \mathbb{N} (w > 1) \quad w = (k_i + k_j), \quad k_i, k_j \in \mathbb{K}, \quad i \neq j \text{ или } i = j \quad (10)$$

Таким образом, истинность бинарной гипотезы Гольдбаха свелась к требованию истинности выражения (10), т.е. требованию покрытия множества натуральных чисел  $\{w\} = \mathbb{N}$  (где  $w > 1$ ) суммами пар чисел  $(k_i, k_j)$  из множества  $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$ .

Так как выражение (10) истинно в силу доказанной выше Леммы о покрытии порождающим множеством  $\mathbb{K}$  множества всех натуральных чисел  $\mathbb{N}$ , и любое натуральное число  $w > 1$  представимо не менее чем одной суммой пары чисел  $(k_i, k_j)$  из множества  $\mathbb{K}$ , то четное число  $n > 2$  (с учетом тривиального  $n = 4 = 2 + 2$ ), соответствующее числу  $w$ , всегда представимо в виде как минимум одной суммы двух простых (необязательно разных) чисел  $p_{k_i}$  и  $p_{k_j}$ .

Бинарная гипотеза Гольдбаха доказана.  $\square$

## 5. Формальный поиск значения функции Гольдбаха $g(n)$ для четного $n > 2$

Рассмотрим, как Лемма о покрытии и Бинарная теорема Гольдбаха работают для четных чисел  $n > 2$  по выявлению неупорядоченных пар простых чисел  $(p_{k_i}, p_{k_j})$ :  $p_{k_i} + p_{k_j} = n$  и определению количества  $g(n)$  таких пар (называемых количеством представлений функции Гольдбаха для  $n$ ) на примере четных чисел 100 и 102.

а) Для  $n = 100$  выпишем подмножество простых чисел  $\{p_k\} < 100$ , и соответствующие ему подмножества для  $\mathbb{K}$ :

$$\{p_k\} = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$$

$$\mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 24\}$$

$$\mathbb{K}^+ = \{4, 7, 9, 10, 13, 22, 24\}$$

$$\mathbb{K}^- = \{2, 5, 6, 8, 11, 12, 17, 20, 21\}$$

$$\mathbb{K}^\pm = \{1, 3, 15, 18\}$$

1.  $n = 100 \Rightarrow m = n/2 = 50$  – четное  $\Rightarrow n$  представляет собой сумму разнополярных простых чисел:

$$n = (p_k^+ + p_k^-) \Rightarrow w = \kappa_i^+ + \kappa_j^-$$

числа  $k$  выбираются из подмножеств так:  $\kappa_i^+$  из  $\mathbb{K}^+ \cup \mathbb{K}^\pm$  и  $\kappa_j^-$  из  $\mathbb{K}^- \cup \mathbb{K}^\pm$ , соответственно;

2.  $w = m/2 = 25$  – нечетное  $\Rightarrow$  поисковый диапазон чисел  $\kappa_i^+$  и  $\kappa_j^-$  равен:

$$[(w+1)/2, (w-1)] = [13, 24];$$

3. В  $\mathbb{K}^+$  в диапазоне  $[13, 24]$  находятся числа  $\{13^+, 22^+, 24^+\}$ ,  
в  $\mathbb{K}^-$  в диапазоне  $[13, 24]$  находятся числа  $\{17^-, 20^-, 21^-\}$ ,

- в  $\mathbb{K}^\pm$  в диапазоне  $[13, 24]$  находятся числа  $\{15^\pm, 18^\pm\}$  ;
4.  $\Rightarrow w = 25 = \{(\kappa_i^+ + \kappa_j^-)\} = \{(13^+ + 12^-), (22^+ + 3^\pm), (24^+ + 1^\pm), (21^- + 4^+), (15^\pm + 10^+), (18^\pm + 7^+)\}$   
 для потенциальной пары  $(17^-, ..)$  нет числа  $(w-17)=8$  в  $\mathbb{K}^+ \cup \mathbb{K}^\pm$  (т.е.  $100-67=33$  – составное нечетное число),  
 для потенциальной пары  $(20^-, ..)$  нет числа  $(w-20)=5$  в  $\mathbb{K}^+ \cup \mathbb{K}^\pm$  (т.е.  $100-79=21$  – составное нечетное число);
5.  $\Rightarrow$  для четного 100 имеется 6 пар чисел  $p_{k_i}$  и  $p_{k_j}$ , то есть  $g(100) = 6$  :  
 $\{(53,47), (89,11), (97,3), (83,17), (59,41), (71,29)\}$

Сюда можно было бы добавить пару  $(99,1)$ , но 1 по действующему определению не является простым числом.

б) Для  $n = 102$  выпишем подмножество простых чисел  $\{p_k\} < 102$ , и соответствующие ему подмножества для  $\mathbb{K}$ :

$$\{p_k\} = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101\}$$

$$\mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25\}$$

$$\mathbb{K}^+ = \{4, 7, 9, 10, 13, 22, 24, 25\}$$

$$\mathbb{K}^- = \{2, 5, 6, 8, 11, 12, 17, 20, 21\}$$

$$\mathbb{K}^\pm = \{1, 3, 15, 18\}$$

1.  $n = 102 \Rightarrow m = n/2 = 51$  – нечетное  $\Rightarrow n$  представляет собой сумму *однополярных* простых чисел:

$$n = (p_k^+ + p_k^+), w = \kappa_i^+ + \kappa_j^+ \text{ и } n = (p_k^- + p_k^-), w = \kappa_i^- + \kappa_j^-$$

числа  $k$  выбираются из подмножеств так:  $\kappa^+$  из  $\mathbb{K}^+ \cup \mathbb{K}^\pm$  и  $\kappa^-$  из  $\mathbb{K}^- \cup \mathbb{K}^\pm$ , соответственно;

2.  $w_1 = (m-1)/2 = 25$  – нечетное  $\Rightarrow$  поисковый диапазон чисел  $\kappa^+$  и  $\kappa^-$  равен:

$$[(w+1)/2, (w-1)] = [13, 24],$$

$w_2 = (m+1)/2 = 26$  – четное  $\Rightarrow$  поисковый диапазон чисел  $\kappa^+$  и  $\kappa^-$  равен:

$$[w/2, (w-1)] = [13, 25];$$

3. В  $\mathbb{K}^+$  в диапазоне  $[13, 25]$  находятся числа  $\{13^+, 22^+, 24^+, 25^+\}$  ,

в  $\mathbb{K}^-$  в диапазоне  $[13, 25]$  находятся числа  $\{17^-, 20^-, 21^-\}$  ,

в  $\mathbb{K}^\pm$  в диапазоне  $[13, 25]$  находятся числа  $\{15^\pm, 18^\pm\}$  ;

4.  $\Rightarrow w_1 = 25 = \{(\kappa_i^+ + \kappa_j^+)\} = \{(22^+ + 3^\pm), (24^+ + 1^\pm), (15^\pm + 10^+), (18^\pm + 7^+)\}$

$$w_2 = 26 = \{(\kappa_p^- + \kappa_q^-)\} = \{(20^- + 6^-), (21^- + 5^-), (15^\pm + 11^\pm), (18^\pm + 8^-)\}$$

для потенциальных пар  $(13^+, ..)$  и  $(17^-, ..)$  разность  $(n-p)$  дает составные числа; для числа  $25^+$  - число  $p_k=101$  и разность  $(102-101)=1$  – не является простым числом;

5.  $\Rightarrow$  для четного 102 имеется 8 пар чисел  $p_{k_i}$  и  $p_{k_j}$ , то есть  $g(102) = 8$  :

$$\{(89,13), (97,5), (61,41), (73,29), (79,23), (83,19), (59,43), (71,31)\}$$

Сюда можно было бы добавить пару  $(101,1)$ , но 1 по действующему определению не является простым числом.

## 6. Краткое резюме представленного доказательства

В Лемме о покрытии методом от противного доказывається, что порождающее множество  $\mathbb{K}$ , определённое в разделе 2, является *аддитивным базисом порядка 2* для множества натуральных чисел  $\mathbb{N}$  (для  $n > 1$ ). Действительно, для того чтобы данное натуральное число  $n > 1$  было представимо в виде  $k_i + k_j = n$  где  $(k_i, k_j) \in \mathbb{K}$ , необходимо существование хотя бы одной пары вида  $(k, n-k)$  внутри интервала  $\approx [n/2, n]$ . Следовательно, существование контрпримера было бы равносильно существованию в множестве  $\mathbb{K}$  *лакуны* (разрыва) размера  $\approx [n/2, n]$ , не содержащей элементов  $\mathbb{K}$ . Транслируя эту лакуну  $[n/2, n]$  из  $\mathbb{K}$  на множество простых чисел  $\mathbb{P}$  с помощью соотношений  $4k \pm 1$ , получаем в множестве простых чисел  $\mathbb{P}$  лакуну размером  $[p, 2p]$ , не содержащую ни одного простого числа, что противоречит *теореме Бертрана–Чебышёва (постулату Бертрана)*. Значит, такой контрпример не может существовать, и  $\mathbb{K}$  действительно является аддитивным базисом порядка 2 для  $\mathbb{N}$  ( $n > 1$ ).

Далее, в основной *теореме* с помощью элементарных, но аккуратных преобразований показано, что свойство, постулируемое бинарной гипотезой Гольдбаха (а именно: множество простых чисел  $\mathbb{P}$  является аддитивным базисом порядка 2 для *четных* натуральных чисел,  $n > 2$ ), сводится к свойству, что множество  $\mathbb{K}$  является аддитивным базисом порядка 2 для *всех* натуральных чисел,  $n > 1$ . Поскольку последнее свойство доказано в Лемме о покрытии, бинарная гипотеза Гольдбаха – доказана.

Важно отметить, что Лемма о покрытии является не только достаточным, но и *необходимым* условием для доказательства бинарной теоремы Гольдбаха в следующем смысле: если бы Лемма о покрытии была ложной, то бинарная гипотеза Гольдбаха также была бы ложной, так как заведомо существовал бы контрпример. Таким образом, истинность бинарной гипотезы Гольдбаха логически эквивалентна покрывающему свойству порождающего множества  $\mathbb{K}$ . По сути, доказательство утверждает, что если бы бинарная гипотеза Гольдбаха была ложной, то постулат Бертрана был бы нарушен. Следовательно, истинность бинарной гипотезы Гольдбаха покоится на постулате Бертрана. Иными словами, *постулат Бертрана* (доказанный П.Л. Чебышёвым, также известный как *теорема Бертрана–Чебышёва*) – это *ключ* к бинарной гипотезе Гольдбаха.

## 7. Замечания о свойствах порождающего множества $\mathbb{K}$

Как уже было сказано, порождающее множество  $\mathbb{K}$ , определённое в разделе 2 (*см. (1)*), обладает замечательным свойством: оно образует *аддитивный базис порядка 2* для всех натуральных чисел  $n > 1$ . Иными словами, любое натуральное число, больше 1, может быть представлено в виде суммы двух (не обязательно различных) элементов порождающего множества  $\mathbb{K}$ . Аддитивные базисы порядка 2 являются классическим объектом теории чисел, тесно связанным с проблемой Гольдбаха. Тривиальные примеры включают само множество всех натуральных чисел  $\mathbb{N}$ , или любую арифметическую прогрессию с разностью 1. Однако *разреженные* аддитивные базисы (имеющие нулевую асимптотическую плотность) встречаются гораздо реже, и их *явное* построение – непростая задача.

Первые результаты о существовании разреженных базисов были получены Эрдёшем и Тураном [4], которые показали, что существуют базисы порядка 2 с медленно растущими функциями представлений. Однако их доказательства были экзистенциальными (вероятностными) и не давали явной конструкции. Позже Эрдёш доказал существование «тонких» аддитивных базисов (с  $\sim \log \log(n)$  представлениями) [5], но снова без их явной конструкции. Важно отметить, что знаменитое множество простых чисел  $\mathbb{P}$  само по себе не является аддитивным базисом порядка 2 для всех натуральных чисел, но является таковым для чётных чисел (это в точности бинарная гипотеза Гольдбаха для чётных чисел). Доказательство этого свойства для чётных чисел представлено в настоящей работе. Историческая справка о гипотезе Гольдбаха содержится в работах Харди и Литтлвуда [6], а также Чена [7].

Что делает множество  $\mathbb{K}$  особенно примечательным, так это то, что оно представляет собой *явный, детерминированный пример* разреженного аддитивного базиса порядка 2 для  $\mathbb{N}$  ( $n > 1$ ) с нулевой асимптотической плотностью. Его структура непосредственно выводится из простых чисел с помощью элементарного соотношения  $4k \pm 1$ . Конструирование хотя бы одного явного базиса – это *нетривиальное явление* в аддитивной теории чисел, и множество  $\mathbb{K}$  является таким ярким явным примером.

Ещё одна, на наш взгляд, примечательная особенность порождающего множества  $\mathbb{K}$  состоит в свойствах его подмножеств  $\mathbb{K}^+$ ,  $\mathbb{K}^-$ ,  $\mathbb{K}^\pm$ , и в том, что разбиение  $\mathbb{K} = \mathbb{K}^+ \cup \mathbb{K}^- \cup \mathbb{K}^\pm$  естественным образом индуцирует разбиение множества простых чисел  $\mathbb{P}$  на  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^+ \cup \mathbb{P}^- \cup \mathbb{P}^\pm$  и соответствующее им разложение функции распределения простых чисел:

$$\pi(x) = \pi^+(x) + \pi^-(x) + \pi^\pm(x),$$

где функция  $\pi^\pm(x)$  – *не является* классической функцией распределения пар простых чисел-близнецов  $\pi_2(x)$ , поскольку  $\pi^\pm(x) = \#\{p \leq x \mid p \in \mathbb{P}^\pm\}$  – это функция распределения пар *чистых* простых-близнецов  $p^\pm$ , каждая пара которых соответствует одному и тому же  $k^\pm$  из подмножества  $\mathbb{K}^\pm$ .

В контексте открытой проблемы доказательства бесконечности пар простых-близнецов, представляется интересным наблюдение, что, если бы пар простых-близнецов было конечное число, то подмножество  $\mathbb{K}^\pm$  было бы конечным, также и подмножество  $\mathbb{P}^\pm$  было бы конечным, а функция  $\pi^\pm(x)$  стремилась бы к конечному пределу – принимала бы значение равное некоторой константе с момента «исчезновения» пар близнецов и далее для всех больших  $x$ , в то время как функции  $\pi^+(x)$  и  $\pi^-(x)$  меняли бы свою асимптотику (*чистые пары* близнецов исчезали бы совсем, а оставшиеся без пары простые числа могли переходить в подмножество  $\mathbb{K}^+$  или подмножество  $\mathbb{K}^-$ ). Потенциально, этот факт, вероятно, можно было бы использовать для переформулировки проблемы бесконечности пар простых-близнецов в терминах оценки асимптотического поведения роста  $\pi^\pm(x)$  и поиска слома (изменения) асимптотики в функциях распределения простых чисел  $\pi^+(x)$  и  $\pi^-(x)$ . Детальная проработка выявленных особенностей множества  $\mathbb{K}$  – тема отдельного исследования.

### Список источников

1. *Начала Евклида*. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. - М.-Л.: ГТТИ. 1949-1951, - (Классики естествознания) Книга IX, Предложение 20, стр. 89.
2. Бертран Дж. Записка о числе значений, которые может принимать функция при перестановке её аргументов. *Журнал Королевской Политехнической школы* (на французском языке). 1845, 18 (тетрадь 30), стр. 123–140.
3. Чебышёв П.Л. О простых числах. *Журнал чистой и прикладной математики* (на французском языке). 1852, 1-я серия, том 17, стр. 366-390. ISSN 1776-3371.
4. Erdős, P.; Turán, P. On a problem of Sidon in additive number theory and some related questions. *J. London Math. Soc.* 1941, vol. 16, pp. 212–215.
5. Erdős, P. Problems and results in additive number theory. *Colloque sur la Théorie des Nombres*. Bruxelles. 1955, pp. 127–137.
6. Hardy, G. H.; Littlewood, J. E. Some problems of 'partitio numerorum' III: On the expression of a number as a sum of primes. *Acta Math.* 1923, vol. 44, pp. 1–70.
7. Shen, M. K. On checking the Goldbach conjecture. *Nordisk Tidskr. Informationsbehandling (BIT)*. 1964, vol. 4, pp. 243–245.

\* \* \* \* \*

## On the Elementary Solution of Goldbach's Binary Conjecture<sup>\*</sup>

**Andrei Fedotkin**

*Independent Researcher, Russia, Moscow*  
*fedotkinmipt93@gmail.com*

### Abstract

In this paper, we present a solution to a famous open problem of number theory - Goldbach's binary conjecture. The proof of Goldbach's binary conjecture is elementary and based on a combinatorial covering argument. We show that the proof of Goldbach's binary conjecture is reduced to the proof of a conjecture on the covering for the set of natural numbers except 1 by means of the set of sums of pairs of natural numbers, each of which corresponds to a prime or twin primes. We construct a Generating set  $\mathbb{K}$  of integers and prove a Covering lemma, which shows that the set  $\mathbb{K}$  is an additive basis of order 2 for the set of natural numbers  $\mathbb{N}$  except 1. The proof of this lemma proceeds by contradiction, using Bertrand's Postulate (the Bertrand – Chebyshev theorem) to rule out the existence of a counterexample.

---

<sup>\*</sup> This publication is an extended, corrected, and combined version of two previously published preprints on Zenodo.org: version 1 (in Russian, unpolished) and version 2.0 (in English, extended). It contains no additional new scientific results but is a complete, verified bilingual edition. The previous versions are available at DOI: 10.5281/zenodo.19356729 (version v1 in Russian, created 31.03.2026); 10.5281/zenodo.19466377 (version v2.0 in English, created 08.04.2026).

From this lemma, Goldbach's binary conjecture follows directly. The approach does not rely on analytic methods or heavy machinery.

*Keywords:* Goldbach conjecture; Goldbach's binary conjecture; additive basis of order 2; Generating set  $\mathbb{K}$ ; Covering lemma; Bertrand's Postulate; Bertrand–Chebyshev theorem; Goldbach's function; prime numbers; number theory.

## 1. Introduction

Goldbach's binary conjecture (every even number greater than 2 is the sum of two primes) remains one of the most famous unsolved problems in number theory, despite extensive numerical verification and partial results such as Chen's theorem. In this paper, we propose an elementary proof based on a combinatorial covering argument. The approach does not rely on analytic methods or heavy machinery. The proposed solution to Goldbach's binary conjecture is based on the following well-established theorems on prime numbers, which have been proven (by various methods) and are accepted by the professional mathematical community as indisputably true:

- Euclid's theorem on the infinite set of prime numbers [1];
- Bertrand's Postulate (the Bertrand–Chebyshev theorem) on the existence of at least one prime number  $p$  such that  $n < p < 2n$  for every natural number  $n > 1$  [2,3].

The paper is organized as follows. Section 2 introduces the necessary definitions and a generating set  $\mathbb{K}$ . Section 3 presents the results: Covering Lemma, which shows that the set  $\mathbb{K}$  is an additive basis of order 2 for the natural numbers  $\mathbb{N}$  (except 1); the proof of the main theorem - Goldbach's binary conjecture; a method for identifying the values of Goldbach's function  $g(n)$  for even  $n > 2$ . Section 4 provides a brief summary of the proof (Conclusion). Section 5 discusses the additive basis properties of the set  $\mathbb{K}$  and the rarity of such covering sets (Discussion). Conflicts of interest and References are given at the end.

## 2. Definition of the Generating set $\mathbb{K}$

All prime numbers  $p_k$ , except 2, can be represented in the form  $4\kappa+1$  and  $4\kappa-1$ , where  $\kappa$  is an integer. We define the **generating set  $\mathbb{K}$**  as an infinite subset of the natural numbers  $\mathbb{N}$  consisting of the set of all integers  $\kappa_i$ , each of which corresponds to a prime (except 2) or a twin primes via the relation  $4k \pm 1$ :

$$\mathbb{K} = \{\kappa_i\} \subset \mathbb{N} : \forall \kappa_i \in \mathbb{K} \rightarrow p_k^+ = 4\kappa_i + 1 \text{ or } p_k^- = 4\kappa_i - 1 \text{ or } p_k^\pm = 4\kappa_i - 1, p_{k+1}^\pm = 4\kappa_i + 1 \quad (1)$$

For simplicity, we will say that  $\kappa_i$  "generates" a prime number, understanding the term *figuratively*. Each element  $\kappa_i$  of the generating set  $\mathbb{K}$  can generate either a single prime or a pair of twin primes (note that twin primes are not necessarily generated by the same  $\kappa_i$ ).

Each element  $\kappa_i$  of the set  $\mathbb{K}$  that generates a single prime according to the function  $p_k^+ = 4\kappa_i + 1$  will be denoted by  $\kappa_i^+$  and will be called as **unipolar  $\kappa^+$** , and the corresponding subset of all numbers  $\{\kappa_i^+\}$  will be denoted by  $\mathbb{K}^+$ .

Each element  $\kappa_i$  of the set  $\mathbb{K}$  that generates a single prime according to the function  $p_k^- = 4k_i - 1$  will be denoted by  $\kappa_i^-$  (**unipolar  $\kappa^-$** ), and the subset of all numbers  $\{\kappa_i^-\}$  will be denoted by  $\mathbb{K}^-$ .

Each element  $\kappa_i$  of the set  $\mathbb{K}$  that generates twin primes according to  $(p_k^\pm = 4k_i - 1, p_{k+1}^\pm = 4k_i + 1)$  will be denoted by  $\kappa_i^\pm$  and will be called as **bipolar**, and the subset of all numbers  $\{\kappa_i^\pm\}$  will be denoted by  $\mathbb{K}^\pm$ .

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}^+ \cup \mathbb{K}^- \cup \mathbb{K}^\pm$$

A twin prime pair  $(p_k^\pm = 4k_i - 1, p_{k+1}^\pm = 4k_i + 1)$  generated by exactly the same *bipolar*  $\kappa_i^\pm$  is said to consist of the **pure twin primes**, as opposed to twin primes  $p_k^+ = 4k_{i-1} + 1, p_{k+1}^- = 4k_{i+1} - 1$  that are necessarily generated by different  $\kappa$  with different polarities (**steptwin primes**).

As an example, we list the first 25 elements of the Generating set  $\mathbb{K}$ :

$$\mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 32, \dots\}$$

$$\mathbb{K}^+ = \{4, 7, 9, 10, 13, 22, 24, 25, 28, \dots\}$$

$$\mathbb{K}^- = \{2, 5, 6, 8, 11, 12, 17, 20, 21, 26, 32, \dots\}$$

$$\mathbb{K}^\pm = \{1, 3, 15, 18, 27, \dots\}$$

The numbers 14, 16, 19, 23, 29, 30, 31, etc., are not generators for primes, i.e. they do not generate prime numbers via the relation  $4\kappa \pm 1$ . We call such numbers **idle numbers  $\bar{g}$**  (i.e., “non-generating” numbers), and we denote the set of all idle numbers by  $\bar{G}$ .

By virtue of the infinitude and countability of the set of prime numbers  $\{p_k\} = \mathbb{P}$  (denote by  $\mathbb{P}$  the set of all prime numbers), the generating set  $\mathbb{K}$  and the set of idle numbers  $\bar{G}$  are also infinite and countable.

### 3. Results

For the generating set  $\mathbb{K}$  defined in the above manner, the following statement holds:

**Lemma (Covering Lemma).** *On the Covering of the Set of Natural Numbers  $\mathbb{N}$  by the Generating Set  $\mathbb{K}$ .*

*Let the generating set  $\mathbb{K}$  be the set of integers  $\kappa_i$  where  $\{\kappa_i\}$  generates all prime numbers  $\{p_k\} = \mathbb{P}$  by the form  $4\kappa \pm 1$ :  $\mathbb{K} = \{k \in \mathbb{Z} \mid 4k \pm 1 \text{ is prime}\}$  (see eq.(1)). The set  $\mathbb{K}$  **covers** the set of natural numbers  $\mathbb{N}$  in the sense that for every natural number  $n > 1$  there exists at least one unordered pair  $(\kappa_i, \kappa_j)$  (not necessarily distinct) of elements of  $\mathbb{K}$  whose sum equals  $n$ :*

$$\forall n \in \mathbb{N} (n > 1) \exists \kappa_i, \kappa_j \in \mathbb{K} : \kappa_i + \kappa_j = n, \text{ where } i \neq j \text{ or } i = j \quad (2)$$

**Remark 1.** By no means every infinite subset of natural numbers can cover  $\mathbb{N}$  (in the sense of equation (2)) by sums of pairs of its elements. Such subsets are, in fact, extremely rare. For example, the subset of even numbers or the subset  $\{1, 2, 3, 10, 11, 12, \dots\}$  fails to cover  $\mathbb{N}$ : in the first case, the sum of two even numbers is always even, so odd numbers cannot be

represented; in the second case, the numbers 7, 8, 9 cannot be expressed as sums of two elements from the subset.

From what mathematicians currently know about prime numbers and their properties, it is natural to assume that the set  $\mathbb{K}$  defined in eq. (1) is highly “sparse” (*porous*) and may contain **lacunae** (i.e., intervals of natural numbers not belonging to  $\mathbb{K}$ ) of arbitrarily large finite length for sufficiently large primes. Consequently, it is necessary to prove that, despite this sparsity, the set  $\mathbb{K}$  is nevertheless *sufficiently dense* for the purposes of the lemma stated above. More precisely, we must show that the elements of  $\mathbb{K}$  are distributed along the natural numbers in such a way that any lacunae, regardless of their size, do not prevent the elements  $\kappa_i \in \mathbb{K}$  from covering the entire set of natural numbers in the sense of definition (see eq. (2)).

Now we prove the lemma.

**Proof of Lemma.** We prove the lemma by contradiction. Suppose there exists a natural number  $n > 1$  that cannot be expressed as a sum of any pair  $(\kappa_i, \kappa_j)$  with  $(\kappa_i, \kappa_j) \in \mathbb{K}$ . That is,

$$\exists n \in \mathbb{N} (n > 1) \nexists (k_i, k_j) \in \mathbb{K} : (k_i + k_j = n), \forall i \neq j \text{ or } i = j. \quad (3)$$

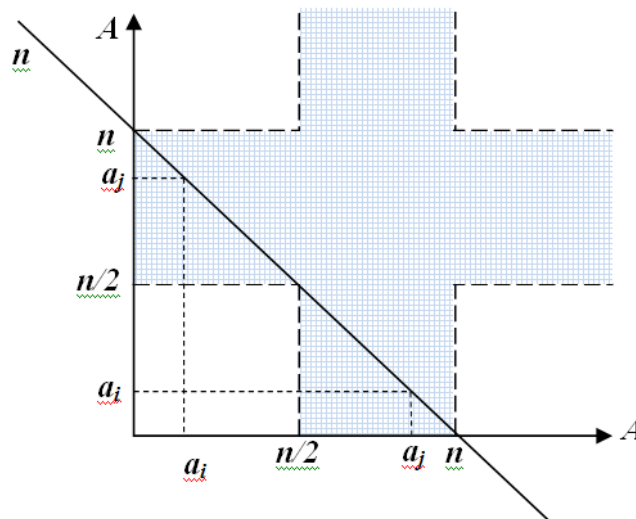
The existence of such  $n > 1$  means that  $\mathbb{K}$  contains no elements  $\kappa_i$  that form pairs such as

$$(1, (n-1)), (2, (n-2)), \dots, ((n-2), 2), ((n-1), 1),$$

whose sum equals  $n$ . For unordered pairs of numbers, this condition is equivalent to the following:

- If  $n$  is even: there are no elements  $\kappa_i \in \mathbb{K}$  in the integer interval  $[n/2, (n-1)]$ ;
- If  $n$  is odd: there are no elements  $\kappa_i \in \mathbb{K}$  in the integer interval  $[(n+1)/2, (n-1)]$ .

In general form, this is illustrated schematically in Figure 1:



**Figure 1.** Condition for the existence of a natural number  $n$  that cannot be expressed as a sum of any two elements of a numerical set  $A$  is a lacuna (gap) in  $A$  of size  $[n/2, n]$ .

That is, the desired number  $n > 1$  defined in (3) exists **if and only if** there exists a lacuna (an interval of natural numbers not belonging to  $\mathbb{K}$ ) in the set  $\mathbb{K}$  between two consecutive elements  $\kappa_i$  and  $\kappa_{i+1}$  such that:

$$\text{for even } n > 2 : \kappa_i = n/2 - 1, \kappa_{i+1} = n \text{ (for } n=2, \kappa = 1 \text{ is absent from } \mathbb{K}), \quad (4.1)$$

$$\text{for odd } n > 1 : \kappa_i = (n-1)/2, \kappa_{i+1} = n. \quad (4.2)$$

To these generating numbers  $\kappa_i$  and  $\kappa_{i+1}$  there correspond the following primes:

$$\text{for even } n > 2 : p_{\kappa_i} = 4\kappa_i \pm 1 = 2(n-2) \pm 1 \text{ and } p_{\kappa_{i+1}} = 4\kappa_{i+1} \pm 1 = 4n \pm 1, \quad (5.1)$$

$$\text{for odd } n > 1 : p_{\kappa_i} = 4\kappa_i \pm 1 = 2(n-1) \pm 1 \text{ and } p_{\kappa_{i+1}} = 4\kappa_{i+1} \pm 1 = 4n \pm 1, \quad (5.2)$$

(for  $n=2$ ,  $p_{\kappa=1}$  is treated as a “conventional prime”). Then, in all possible sign combinations,  $2p_{\kappa_i}$  equals:

$$\text{for even } n > 2 : 2p_{\kappa_i} = 4(n-2) \pm 2, \quad (6.1)$$

$$\text{for odd } n > 1 : 2p_{\kappa_i} = 4(n-1) \pm 2. \quad (6.2)$$

From (5) and (6), it follows that in all possible combinations of the above, the following holds:

$$p_{\kappa_{i+1}} > 2p_{\kappa_i}, \text{ where } p_{\kappa_i} \text{ and } p_{\kappa_{i+1}} \text{ are consecutive primes.} \quad (6.3)$$

On the other hand, according to Bertrand's Postulate (the Bertrand–Chebyshev theorem), for every natural number  $r > 1$  there is always at least one prime between  $r$  and  $2r$ . Consequently, there exists a prime  $p^*$  such that:

$$p_{\kappa_i} < p^* < 2p_{\kappa_i} < p_{\kappa_{i+1}}. \quad (7)$$

For such a prime  $p^*$ , there exists a corresponding generating number  $\kappa_a^*$  such that, for even and odd  $n$  respectively,  $\kappa_a^*$  lies in the interval:

$$n/2 \leq \kappa_a^* \leq (n-1) \text{ or } (n+1)/2 \leq \kappa_a^* \leq (n-1). \quad (8)$$

However, according to (4), the interval between two consecutive elements  $\kappa_i$  and  $\kappa_{i+1}$  of  $\mathbb{K}$  is empty – that is, no element of  $\mathbb{K}$  lies there. Hence no such number  $\kappa_a^*$  can exist in  $\mathbb{K}$ , and consequently no such prime  $p^*$  can exist. This contradicts (7) and (8).

The contradiction obtained shows that the initial assumption – that there exists a natural number  $n$  which cannot be written as a sum  $(\kappa_i + \kappa_j)$  with  $(\kappa_i, \kappa_j) \in \mathbb{K}$  – is **untenable**. Consequently, every natural number (except 1) admits at least one representation as a sum of two (not necessarily distinct) elements of  $\mathbb{K}$ . Hence the infinite set  $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$  covers  $\mathbb{N}$  in the sense of definition (2). In other words,  $\mathbb{K}$  is an *additive basis of order 2* for the set of natural numbers  $\mathbb{N}$  (except 1).  $\square$

Having proved the lemma, we have thereby identified a critically important property of the Generating set  $\mathbb{K}$ , namely that  $\mathbb{K}$  is indeed *sufficiently dense* for the purposes of the lemma. Specifically: for every  $n$ , the elements of  $\mathbb{K}$  are distributed along the natural numbers in such a way that all lacunae (gaps)

$$Gap_{\mathbb{K}}(n) = (\kappa_{i-1}(n), \kappa_i(n))$$

that exist in the set  $\mathbb{K}$  do not exceed a size of approximately  $n/2$ . More precisely:

- for even  $n$ : the gap does not exceed  $[n/2, (n-1)]$ ;

- for odd  $n$ : the gap does not exceed  $[(n+1)/2, (n-1)]$ .

For a natural number  $n$ , we call a lacuna of maximum size allowed by the lemma a **critical lacuna** and denote it by  $Gap_K^{MAX}(n)$ . The set  $\mathbb{K}$  will be called **dense in the sense of Covering Lemma**.

From Covering Lemma, the proof of Goldbach's Binary Theorem follows directly.

**Theorem (Goldbach's Binary Theorem).** *Every even integer greater than 2 can be expressed as at least one sum of two primes (not necessarily distinct).*

**Proof of Theorem.** Every prime number  $p > 2$  is representable either as  $4\kappa+1$  or as  $4\kappa-1$ , where  $\kappa$  is an integer. Consider any even number  $n=2m$  greater than 4 (case  $n=4=2+2$  is trivial) and write it as a sum of two primes  $p_{k_i}$  and  $p_{k_j}$  generated by integers  $\kappa_i, \kappa_j \in \mathbb{K}$ , (where  $i \neq j$  or  $i=j$ ,  $\mathbb{K}$  is defined in eq. (1)). We will show that at least one such pair of primes  $(p_{k_i}, p_{k_j})$  always exists.

$$\forall n = 2m \in 2\mathbb{N} (n > 4) \quad n = p_{k_i} + p_{k_j} = \begin{cases} 4k_i + 1 \\ 4k_i - 1 \end{cases} + \begin{cases} 4k_j + 1 \\ 4k_j - 1 \end{cases}, \quad \kappa_i, \kappa_j \in \mathbb{K}, \quad i \neq j \text{ or } i=j$$

The specified even number  $n > 4$  is representable via  $(\kappa_i, \kappa_j)$  in one of three possible ways:

$$\Rightarrow \forall n = 2m \in 2\mathbb{N} (n > 4) \quad n = \begin{cases} 4(k_i + k_j) + 2 \\ 4(k_i + k_j) \\ 4(k_i + k_j) - 2 \end{cases},$$

and the natural number  $m = n/2 > 2$  is:

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} (m > 2) \quad m = \begin{cases} 2(k_i + k_j) + 1 \\ 2(k_i + k_j) \\ 2(k_i + k_j) - 1 \end{cases}.$$

The natural number  $m$  can be either odd or even. Then,

a) If  $m$  is even, then we obtain the following expression

$$\Rightarrow \forall m \in 2\mathbb{N} (m > 2) \quad m = 2(k_i + k_j),$$

and the original number  $n$  is the sum of a pair of *opposite-polar* primes  $p_{k_i}$  and  $p_{k_j}$

$$\forall n = 2m \in 2\mathbb{N} (n > 4) \quad n = p_{k_i} + p_{k_j} = \begin{cases} (4k_i + 1) + (4k_j - 1) \\ (4k_i - 1) + (4k_j + 1) \end{cases}, \quad \kappa_i, \kappa_j \in \mathbb{K}, \quad i \neq j \text{ or } i=j.$$

Representing even  $m > 2$  as  $m = 2w$ , where  $w > 1$  is a natural number, we obtain

$$\forall w \in \mathbb{N} (w > 1) \quad w = (k_i + k_j), \quad \kappa_i, \kappa_j \in \mathbb{K}, \quad i \neq j \text{ or } i=j. \quad (9.1)$$

b) If  $m$  is odd, then, given that  $m > 2$ , we obtain the following expression

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}_{odd} (m > 2) \quad m = 2(k_i + k_j) \pm 1,$$

and the original number  $n$  is the sum of a pair of *same-polar* primes  $p_{k_i}$  and  $p_{k_j}$

$$\forall n = 2m \in 2\mathbb{N} (n > 4) \quad n = p_{k_i} + p_{k_j} = \begin{cases} (4k_i + 1) + (4k_j + 1) \\ (4k_i - 1) + (4k_j - 1) \end{cases}, \quad \kappa_i, \kappa_j \in \mathbb{K}, i \neq j \text{ or } i=j.$$

Representing odd  $m > 2$  as  $m = 2w \pm 1$ , where  $w > 1$  is a natural number, we obtain

$$\forall w \in \mathbb{N} (w > 1) \quad w = (k_i + k_j), \quad \kappa_i, \kappa_j \in \mathbb{K}, i \neq j \text{ or } i=j. \quad (9.2)$$

From (9.1) and (9.2) it follows that for *any* natural number  $m > 2$  (whether even or odd) (and for any original even  $n = 2m > 4$ ), the corresponding number  $w > 1$  always has the form:

$$\forall w \in \mathbb{N} (w > 1) \quad w = (k_i + k_j), \quad \kappa_i, \kappa_j \in \mathbb{K}, i \neq j \text{ or } i=j. \quad (10)$$

Thus, the validity of Goldbach's binary conjecture reduces to the requirement that expression (10) be true, i.e., to the requirement that the set of natural numbers  $\{w\} = \mathbb{N} (w > 1)$  be representable as sums of a pair of numbers  $(\kappa_i, \kappa_j)$  from the set  $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$ .

Since expression (10) is true by virtue of Covering Lemma (the generating set  $\mathbb{K}$  covers the set of all natural numbers  $\mathbb{N}$  except 1), and every natural number  $w > 1$  is representable by at least one sum of a pair  $(\kappa_i, \kappa_j)$  from the set  $\mathbb{K}$ , then the even number  $n > 4$  corresponding to  $w$  (and even  $n=4$ , taking into account the trivial case  $4 = 2+2$ ) is always representable as at least one sum of two (not necessarily different) primes  $p_{k_i}$  and  $p_{k_j}$ .

Goldbach's binary conjecture is proved.  $\square$

**Remark 2. A method for identifying the values of Goldbach's function  $g(n)$  (even  $n > 2$ ).**

Consider how Covering Lemma and Goldbach's Binary Theorem work for even numbers  $n > 2$  in identifying unordered pairs of primes  $(p_{k_i}, p_{k_j}) : p_{k_i} + p_{k_j} = n$ , and in determining the number  $g(n)$  of such pairs (called the *number of Goldbach representations* for  $n$ ), using the even numbers 100 and 102 as examples.

a) For the number  $n = 100$ , we write out the subset of primes  $\{p_k\} < 100$ , together with the subsets of the generating set  $\mathbb{K}$  that correspond to these primes:

$$\{p_k\} = \{ 2, \mathbf{3}, 5, 7, 9, \mathbf{11}, 13, \mathbf{17}, 19, 23, \mathbf{29}, 31, 37, \mathbf{41}, 43, \mathbf{47}, \mathbf{53}, \mathbf{59}, 61, 67, \mathbf{71}, 73, 79, \mathbf{83}, \mathbf{89}, \mathbf{97} \}$$

$$\mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \mathbf{13}, \mathbf{15}, \mathbf{17}, \mathbf{18}, \mathbf{20}, \mathbf{21}, \mathbf{22}, \mathbf{24}\}$$

$$\mathbb{K}^+ = \{4, 7, 9, 10, \mathbf{13}, \mathbf{22}, \mathbf{24}\}$$

$$\mathbb{K}^- = \{2, 5, 6, 8, 11, 12, \mathbf{17}, \mathbf{20}, \mathbf{21}\}$$

$$\mathbb{K}^\pm = \{1, 3, \mathbf{15}, \mathbf{18}\}$$

1.  $n = 100 \Rightarrow m = n/2 = 50$  is even  $\Rightarrow n$  represents the sum of *opposite-polar* primes:

$$n = (p_k^+ + p_k^-) \Rightarrow w = \kappa_i^+ + \kappa_j^-.$$

The numbers  $\kappa$  must be taken from the subsets  $\mathbb{K}^+, \mathbb{K}^-, \mathbb{K}^\pm$  as follows:

$$\kappa_i^+ \text{ from } \mathbb{K}^+ \cup \mathbb{K}^\pm \text{ and } \kappa_j^- \text{ from } \mathbb{K}^- \cup \mathbb{K}^\pm, \text{ respectively;}$$

2.  $w = m/2 = 25$  is odd  $\Rightarrow$  the search range for  $\kappa_i^+$  and  $\kappa_j^-$  is equal to the interval

$$[(w + 1)/2, (w - 1)] = [13, 24];$$

3. In the subset  $\mathbb{K}^+$ , within the range  $[13, 24]$ , there are the numbers  $\{13^+, 22^+, 24^+\}$ ,  
 In the subset  $\mathbb{K}^-$ , within the range  $[13, 24]$ , there are the numbers  $\{17^-, 20^-, 21^-\}$ ,  
 In the subset  $\mathbb{K}^\pm$ , within the range  $[13, 24]$ , there are the numbers  $\{15^\pm, 18^\pm\}$ ;
4.  $\Rightarrow w=25 = \{(\kappa_i^+ + \kappa_j^-)\} = \{(13^+ + 12^-), (22^+ + 3^\pm), (24^+ + 1^\pm), (21^- + 4^+), (15^\pm + 10^+), (18^\pm + 7^+)\}$ ,  
 for candidate pair  $(17^-, ..)$  there is no  $(w-17)=8$  in  $\mathbb{K}^+ \cup \mathbb{K}^\pm$  (i.e.  $100-67=33$  - composite odd),  
 for candidate pair  $(20^-, ..)$  there is no  $(w-20)=5$  in  $\mathbb{K}^+ \cup \mathbb{K}^\pm$  (i.e.  $100-79=21$  -composite odd);
5.  $\Rightarrow$  for even 100, there exist 6 pairs of numbers  $p_{k_i}$  and  $p_{k_j}$ , that is,  $g(100) = 6$  :
- $$\{(53,47), (89,11), (97,3), (83,17), (59,41), (71,29)\}.$$

A pair  $(99,1)$  could be added here, but 1, under the current definition, is not prime.

6) For the number  $n = 102$ , we write out the subset of primes  $\{p_k\} < 102$ , together with the subsets of the generating set  $\mathbb{K}$  that correspond to these primes:

$$\{p_k\} = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101\}$$

$$\mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25\}$$

$$\mathbb{K}^+ = \{4, 7, 9, 10, 13, 22, 24, 25\}$$

$$\mathbb{K}^- = \{2, 5, 6, 8, 11, 12, 17, 20, 21\}$$

$$\mathbb{K}^\pm = \{1, 3, 15, 18\}$$

1.  $n = 102 \Rightarrow m = n/2 = 51$  is odd  $\Rightarrow n$  represents the sum of *same-polar* primes:

$$n = (p_k^+ + p_k^+), w = \kappa_i^+ + \kappa_j^+ \text{ and } n = (p_k^- + p_k^-), w = \kappa_i^- + \kappa_j^- .$$

The numbers  $\kappa$  must be taken from the subsets  $\mathbb{K}^+, \mathbb{K}^-, \mathbb{K}^\pm$  as follows:

$$\kappa^+ \text{ from } \mathbb{K}^+ \cup \mathbb{K}^\pm \text{ and } \kappa^- \text{ from } \mathbb{K}^- \cup \mathbb{K}^\pm, \text{ respectively;}$$

2.  $w_1 = (m-1)/2 = 25$  is odd  $\Rightarrow$  the search range for  $\kappa^+$  and  $\kappa^-$  is equal to the interval

$$[(w+1)/2, (w-1)] = [13, 24];$$

$w_2 = (m+1)/2 = 26$  is even  $\Rightarrow$  the search range for  $\kappa^+$  and  $\kappa^-$  is equal to the interval

$$[w/2, (w-1)] = [13, 25];$$

3. In the subset  $\mathbb{K}^+$ , within the range  $[13, 25]$ , there are the numbers  $\{13^+, 22^+, 24^+, 25^+\}$ ,  
 In the subset  $\mathbb{K}^-$ , within the range  $[13, 25]$ , there are the numbers  $\{17^-, 20^-, 21^-\}$ ,  
 In the subset  $\mathbb{K}^\pm$ , within the range  $[13, 25]$ , there are the numbers  $\{15^\pm, 18^\pm\}$ ;

4.  $\Rightarrow w_1 = 25 = \{(\kappa_i^+ + \kappa_j^+)\} = \{(22^+ + 3^\pm), (24^+ + 1^\pm), (15^\pm + 10^+), (18^\pm + 7^+)\}$ ,

$$w_2 = 26 = \{(\kappa_p^- + \kappa_q^-)\} = \{(20^- + 6^-), (21^- + 5^-), (15^\pm + 11^\pm), (18^\pm + 8^-)\},$$

for candidate pairs  $(13^+, ..)$  and  $(17^-, ..)$ , the difference  $(n - p)$  yields composite numbers, for the number  $25^+$  it gives prime  $p_k=101$  but the difference  $(102 - 101)=1$  is not a prime;

5.  $\Rightarrow$  for even 102, there exist 8 pairs of numbers  $p_{k_i}$  and  $p_{k_j}$ , that is,  $g(102) = 8$  :

$$\{(89,13), (97,5), (61,41), (73,29), (79,23), (83,19), (59,43), (71,31)\}.$$

A pair  $(101,1)$  could be added here, but 1, under the current definition, is not prime.

## 4. Conclusion

*Brief summary of the proof of Goldbach's binary conjecture presented in this work.*

Covering Lemma proves that the set  $\mathbb{K}$  (defined in Section 2) is an additive basis of order 2 for the set of natural numbers  $\mathbb{N}$  (except 1). Indeed, for a given natural number  $n > 1$  to be representable as  $\kappa_i + \kappa_j = n$  with  $\kappa_i, \kappa_j \in \mathbb{K}$ , there must exist at least one pair of the form  $(\kappa, n - \kappa)$  inside the interval  $\approx [n/2, n]$ . Consequently, the existence of a counterexample would be equivalent to the existence of a lacuna (gap) in the set  $\mathbb{K}$  of the form  $\approx [n/2, n]$  containing no elements of the set  $\mathbb{K}$ . Translating this gap  $[n/2, n]$  in the set  $\mathbb{K}$  to the set of primes  $\mathbb{P}$  via the relation  $4\kappa \pm 1$  yields a lacuna of the form  $[p, 2p]$  containing no prime numbers, which contradicts the Bertrand–Chebyshev theorem (Bertrand's Postulate). Hence such a counterexample cannot exist, and the set  $\mathbb{K}$  is indeed an additive basis of order 2 for  $\mathbb{N}$  ( $n > 1$ ).

In the main theorem, elementary but careful transformations show that the property stated in Goldbach's binary conjecture – namely that the set of primes  $\mathbb{P}$  is an additive basis of order 2 for the **even** natural numbers ( $n > 2$ ) – reduces to the property that the set  $\mathbb{K}$  is an additive basis of order 2 for **all** natural numbers (except 1). Since the latter property is proved in Covering Lemma, Goldbach's binary conjecture follows.

It is worth noting that Covering Lemma is not only sufficient for the proof of Goldbach's Binary Theorem but also necessary in the following sense: if Covering Lemma were false, then Goldbach's binary conjecture would also be false (because a counterexample definitely exist). Thus, the truth of the conjecture is logically equivalent to the covering property of the set  $\mathbb{K}$ . In essence, the proof shows that if Goldbach's binary conjecture were false, Bertrand's Postulate would be violated. Hence the truth of Goldbach's binary conjecture rests on Bertrand's Postulate. In short, **Bertrand's Postulate** (proved by Chebyshev; also known as the Bertrand–Chebyshev theorem) **is the key that unlocks Goldbach's binary conjecture**.

## 5. Discussion

*On additive basis properties and the rarity of covering sets.*

As already noted, the Generating set  $\mathbb{K}$  defined in eq. (1) has the following remarkable property: it forms an **additive basis of order 2** for all natural numbers  $n > 1$ . In other words, every natural number greater than 1 can be expressed as the sum of two (not necessarily distinct) elements of the set  $\mathbb{K}$ . Additive bases of order 2 are a classical object in number theory, intimately connected with Goldbach's problem. Trivial examples include the set of all natural numbers  $\mathbb{N}$  itself, or any arithmetic progression with difference 1. However, *sparse* additive bases – those with zero asymptotic density – are far less common and are notoriously difficult to construct explicitly.

The first results on the existence of sparse bases were obtained by Erdős and Turán [4], who showed that there exist bases of order 2 with slowly growing representation functions. However, their proofs were existential (probabilistic) and did not provide an explicit construction. Later, Erdős proved the existence of “thin” additive bases (with about  $\log \log(n)$  representations) [5], but again non-constructively. It is important to note that the famous set  $\mathbb{P}$  of primes itself is not an additive basis of order 2 for all natural numbers, but for even

numbers (this is exactly Goldbach’s binary conjecture for even numbers). A proof of this property for even numbers is given in the present work. For historical background on Goldbach’s conjecture, see Hardy and Littlewood [6], and Shen [7].

What makes the Generating set  $\mathbb{K}$  particularly noteworthy is that it provides an *explicit, deterministic* example of a **sparse** additive basis of order 2 for  $\mathbb{N}$  ( $n > 1$ ) with *zero asymptotic density*. Moreover, its structure is directly derived from the primes via the simple relation  $4\kappa \pm 1$ . The existence of even one explicit basis is a *non-trivial phenomenon* in additive number theory, and the set  $\mathbb{K}$  is a prominent natural *instance*.

Another noteworthy feature of the Generating set  $\mathbb{K}$  lies in the properties of its subsets  $\mathbb{K}^+$ ,  $\mathbb{K}^-$ ,  $\mathbb{K}^\pm$ , and in the fact that the partition  $\mathbb{K} = \mathbb{K}^+ \cup \mathbb{K}^- \cup \mathbb{K}^\pm$  naturally induces a partition of the set of primes  $\mathbb{P}$  into  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^+ \cup \mathbb{P}^- \cup \mathbb{P}^\pm$  and the corresponding decomposition of the prime counting function:

$$\pi(x) = \pi^+(x) + \pi^-(x) + \pi^\pm(x),$$

where the function  $\pi^\pm(x)$  is *not* the classical twin prime counting function  $\pi_2(x)$  because  $\pi^\pm(x) = \#\{p \leq x \mid p \in \mathbb{P}^\pm\}$  is the counting function of *pure* twin primes  $p^\pm$  that arise from the same  $\kappa^\pm$  in the subset  $\mathbb{K}^\pm$ .

It is an interesting observation that, in the context of the open problem on the infinitude of twin primes, if the set of twin primes were finite, then the subset  $\mathbb{K}^\pm$  would be finite, and the subset  $\mathbb{P}^\pm$  would also be finite, and the function  $\pi^\pm(x)$  would tend to a finite limit – it would take a constant value from the moment the twin primes “disappear” and thereafter for all large  $x$ , while  $\pi^+(x)$  and  $\pi^-(x)$  would change their asymptotic behavior (the pure twin primes would disappear completely, and the remaining unpaired primes could move to  $\mathbb{K}^+$  or  $\mathbb{K}^-$ ). Potentially, this observation could likely be used to reformulate the twin prime problem in terms of estimating the asymptotic growth behavior of  $\pi^\pm(x)$  and detecting a breakdown (change) in the asymptotics of  $\pi^+(x)$  and  $\pi^-(x)$ . A detailed elaboration of the identified features of the set  $\mathbb{K}$  is a topic for a separate study.

## Conflicts of Interest

The author declares no conflict of interest.

## References

1. *The Elements of Euclid. With Dissertations*. Clarendon Press: Oxford, James Williamson (translator and commentator), 1782, p. 63.
2. Bertrand, Joseph. Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme. *Journal de l'École Royale Polytechnique* (in French) 1845, 18 (Cahier 30), pp. 123–140.
3. Tchebichef, P.L. Mémoire sur les nombres premiers. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1 série*. 1852, XVII, pp. 366–390. (in French) ISSN 1776-3371. Retrieved 26 November 2024. English translation by Mike Bertrand (November 5, 2020).

4. Erdős, P.; Turán, P. On a problem of Sidon in additive number theory and some related questions. *J. London Math. Soc.* 1941, vol. 16, pp. 212–215.
5. Erdős, P. Problems and results in additive number theory. *Colloque sur la Théorie des Nombres*. Bruxelles 1955, pp. 127–137.
6. Hardy, G.H.; Littlewood, J. E. Some problems of 'partitio numerorum' III: On the expression of a number as a sum of primes. *Acta Math.* 1923, vol. 44, pp. 1–70.
7. Shen, M.K. On checking the Goldbach conjecture. *Nordisk Tidskr. Informationsbehandling (BIT)*, 1964, vol. 4, pp. 243–245.