

# Геометрическая интерпретация принципа Парето: поверхностный рост и кумулятивное преимущество

---

Г.А. Грачёв

## Аннотация

В статье предлагается геометрически мотивированная феноменологическая интерпретация механизма, лежащего в основе Парето-подобной концентрации результата. В качестве макромодели рассматривается рост снежного кома, при котором увеличение объёма происходит за счёт присоединения новых частиц к внешней поверхности тела. Показано, что естественной координатой такого процесса является эквивалентный радиус, задающий наращивание внешнего слоя, тогда как объём и масса выступают его функциями. Уже накопленный результат становится фактором последующего роста, поскольку определяет площадь активной поверхности захвата и, в более общем случае, способность системы к дальнейшему накоплению. Для самоподобного тела размерности  $D$  это приводит к размерностной формуле концентрации, которая в нормированной линейной координате совпадает с кривой Вигг III при  $a = D$  и при  $D = 3$  естественным образом даёт пропорцию, близкую к правилу 20/80. Тем самым принцип снежного кома получает не только наглядную метафорическую, но и геометрически обоснованную интерпретацию как механизм кумулятивного накопления. При этом сама аналитическая форма концентрации определяется самоподобной геометрией роста, тогда как поверхностное присоединение придаёт ей естественный физический смысл.

Ключевые слова: принцип Парето; снежный ком; поверхностный рост; кумулятивное преимущество; самоподобие; распределение Вигг III.

## 1. Введение

Открытый Вильфредо Парето принцип высокой концентрации ресурса [1] традиционно трактуется как эмпирическая закономерность, согласно которой сравнительно малая доля причин, усилий или элементов системы обеспечивает основную долю совокупного эффекта. В прикладной литературе эта закономерность обычно выражается приближённой пропорцией 20/80 и используется как эвристика при анализе неравенства, производительности, управления ресурсами, качеством и организационных процессов [2]. Однако сама повторяемость таких концентраций ещё не объясняет механизма их возникновения.

Современные исследования принципа Парето развиваются по трём взаимосвязанным направлениям: выявление систем с Парето-подобной концентрацией и факторов, определяющих её степень [3–5]; выбор моделей, адекватно описывающих высокую

концентрацию ресурса в системах различной природы [6–8]; и анализ механизмов, способных породить или усилить такую концентрацию [9–20]. В последнем направлении особенно важны работы о поверхностной аккреции и росте интерфейсов [27,28], о предпочтительном присоединении в растущих сетях [29,30] и о пропорциональном росте [31]. Именно это направление переводит обсуждение от статистического описания к объяснению.

В работе [21] впервые сделан вывод о зависимости концентрации ресурса от размерности системы и показано, что во многих случаях высокую концентрацию ресурса адекватно описывает однопараметрическая кривая Парето распределения Вигг III [22]. Эта же кривая в [21] предлагается в качестве нормативной модели распределения ресурса между элементами системы. В вопросе о механизме, порождающем высокую концентрацию ресурса, в работах [9–20] закрепились базовая идея: уже достигнутый результат может повышать вероятность последующего роста. В популярном языке это выражается метафорой снежного кома: начальное преимущество при определённых условиях усиливается, потому что уже достигнутый результат облегчает дальнейший рост. Однако сама эта метафора обычно остаётся качественной.

С нашей точки зрения, именно соединение этих двух линий — размерностного подхода и идеи кумулятивного преимущества — позволяет перейти от описания концентрации к объяснению её возможного геометрического механизма. В этом состоит основной вклад настоящей работы: показать, что однопараметрическая кривая Вигг III с параметром  $a = D$  возникает здесь не как внешне навязанная аппроксимация, а как результат геометрии самоподобного поверхностного наращивания, записанной в нормированной линейной координате.

При этом настоящая статья не повторяет результаты работ [8,21], а развивает их в ином направлении. В монографии [8] и в препринте [21] основной акцент сделан на размерностной интерпретации самой концентрации и на аналитических формах соответствующих кривых. Здесь же впервые рассматривается иной вопрос — какой геометрический механизм может приводить к такой форме концентрации. Поэтому предметом настоящей статьи является не повторный вывод размерностной зависимости как таковой, а её кинематическая и феноменологическая интерпретация через поверхностный рост и кумулятивное преимущество.

В настоящей работе метафора снежного кома рассматривается не как образное сравнение, а как макромодель кумулятивного накопления. Исходной посылкой служит прилипание снега к внешней поверхности шара. Следовательно, скорость роста определяется площадью активной поверхности захвата. Это означает, что уже накопленный объём влияет на последующий прирост не непосредственно, а через геометрию тела: чем больше тело, тем больше его поверхность и тем выше абсолютный приток новых частиц. В этом смысле поверхностное присоединение образует геометрическую форму кумулятивного преимущества.

Цель работы состоит в том, чтобы показать: (i) каким образом из поверхностного присоединения частиц возникает геометрическая форма кумулятивного преимущества; (ii) как временное развитие этого процесса приводит к размерностной формуле концентрации; (iii) почему полученный результат допускает более широкую феноменологическую интерпретацию как частный случай самосогласованного усиления порядка.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 вводятся основные определения и обозначения. Раздел 3 посвящён модели снежного кома, выводу кинематических соотношений поверхностного роста и получению функции концентрации. В разделе 4 обсуждаются интерпретация результата, научная новизна подхода, его границы применимости и феноменологические параллели. В разделе 5 сформулированы основные выводы.

## 2. Основные определения и обозначения

### 2.1 Кривая Парето

Пусть система состоит из  $n$  элементов, упорядоченных по убыванию доли их вклада в суммарный ресурс системы  $(w_r)$ , где  $r$  — ранг элемента,  $r \in [1, n]$ . Кривой Парето (РС) будем называть функцию  $S(p)$ , интерполирующую кумулятивную сумму долей ресурса элементов

$$S(p_i) = \sum_{r=1}^i w_r, \sum_{r=1}^n w_r = 1, 0 \leq p_i \leq 1. \quad (1)$$

где  $p = r/n$  — доля ранга элемента.

Основные аксиомы РС имеют вид:

$$S(0) = 0, S(1) = 1, S_{+i}(p) \geq 0, S_{+i}(p) \leq 0, p \in [0, 1], i \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Из условий (2) следует, что РС является неубывающей вогнутой кривой концентрации. Именно в этом классе кривых удобно описывать ситуации, когда существенная часть суммарного ресурса сосредоточена у сравнительно малой доли элементов системы.

Обозначим  $PR = S(0.2)$ . В прикладных науках  $PR$  называют коэффициентом Парето. Он представляет собой долю ресурса, аккумулированную верхними 20 % элементов, и широко используется для сравнения концентрации ресурсов в системах.

### 2.2 Кривая Парето распределения Burr III

В 1942 году Irving W. Burr предложил семейство распределений, включающее двенадцать типов кумулятивных функций распределения [22]. Среди них особый интерес для задач концентрации представляет распределение Burr III, также известное как распределение Дагума. В контексте настоящей работы оно важно не только как удобная аппроксимационная модель, но и как аналитическая форма, возникающая из геометрического механизма роста.

Однопараметрическая кривая Парето, соответствующая распределению Вигг III, имеет вид:

$$S(p) = [1 - (1-p)^a]^{1/a}, \quad a \geq 1, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (3)$$

Помимо аналитической простоты, кривая (3) обладает рядом свойств, которые важны для дальнейшей интерпретации:

- $S(p)$  симметрична относительно альтернативной диагонали  $y = 1 - p$ ;
- Точка максимального удаления РС от эгалитарной линии ( $y = p$ ) совпадает с точкой пересечения альтернативной диагонали  $(p_\mu, S_\mu)$ , в которой выполняется равенство  $p_\mu + S_\mu = 1$ ;
- Абсцисса  $p_\mu$  равна относительному рангу среднего по величине элемента системы;
- Центр масс РС  $p_c \leq p_\mu$ , что говорит о том, что увеличение неравенства концентрации ресурса усиливает устойчивость состояния системы;
- Критический показатель степени ( $\beta$ ), определяющий режим нарастания

концентрации в области малых  $p$ ,  $\beta = \frac{\lim_{p \rightarrow 0} \ln S(p)}{\ln p} = \frac{1}{D}$ .

РС имеет явные выражения для  $p_\mu$  и коэффициента Джини ( $G$ ):

$$p_\mu(a) = 1 - 0.5^{\frac{1}{a}}, \quad G(a) = \frac{\Gamma(1/a)^2}{a \Gamma(2/a)} - 1. \quad (4)$$

Подставляя в (3)  $a = 3$  и  $p = 0.2$ , получаем  $PR = 0.787$  (точнее 0.78735...), то есть величину, близкую к правилу 20/80. Однако более корректной формулировкой принципа Парето в данном случае является правило 21/79 [3].

Тем самым кривая (3) оказывается важной не только как удобная параметрическая аппроксимация, но и как форма, допускающая содержательную физико-геометрическую интерпретацию. Для настоящей работы принципиально важно, что далее она будет получена как результат кинематики поверхностного роста при  $a = D$ , а не просто использована как заранее выбранная модель.

### 3. Снежный ком

Снежный ком — это скатанный в округлую форму плотный снег. В данной работе он рассматривается как простейшая макро модель накопления, в которой уже достигнутый результат влияет на последующий рост через изменение геометрии тела.

#### 3.1 Временное развитие накопления

Обозначим радиус скатанного снежного кома в момент времени  $t$   $R(t)$ , а площадь поверхности, через которую происходит захват новых частиц, и объем круглого кома соответственно  $A(t)$  и  $V(t)$ . В общем случае, объем и площадь поверхности кома можно записать в виде:

$$V = c R^D, \quad A = k V^{(D-1)/D}, \quad (5)$$

где  $c$  и  $k$  — геометрические константы. Для случая  $D = 3$  имеем  $c = 4\pi/3$  и  $k = 4\pi$ . В более общем виде эти соотношения задают модель самоподобного тела размерности  $D$ , для которого объём и площадь поверхности выражаются через одну линейную координату.

При постоянной плотности снежного кома активная поверхность, через которую происходит захват новых частиц, определяется как производная объёма по линейному размеру:

$$\frac{dV}{dt} = Av = k V^{(D-1)/D}. \quad (6)$$

где  $v$  — скорость присоединения частиц к поверхности.

Интегрируя (6):  $V^{(1-D)/D} dV = k dt$ , получаем

$$V(t) = \left( V_0^{1/D} + \frac{k}{D} t \right)^D, \quad (7)$$

$$R(t) = R_0 + ut, \quad (8)$$

где  $R_0$  — радиус снежного кома до скатки,  $u = v/c^{1/D}$ .

Следовательно, при чисто поверхностном росте радиус увеличивается линейно со временем, тогда как объём возрастает как степень  $D$  от времени. Это означает, что именно линейная координата  $R$  является первичной кинематической переменной процесса, а объём и масса — производными характеристиками накопления. Для дальнейшего вывода это принципиально: нормировка должна производиться не по объёму как таковому, а по линейному размеру, который непосредственно задаёт наращивание внешнего слоя.

### 3.2 Функция концентрации

Полученный результат важен и в методическом отношении. Если рост описывается через радиус как через естественную координату наращивания внешнего слоя, то и последующая нормировка по линейному размеру не является искусственным преобразованием объёма, а представляет собой прямое описание структуры уже сформировавшегося тела. Поэтому долю эффекта, связанную с увеличением размера кома, естественно сначала выражать через долю линейного размера, а затем — через соответствующую ей долю объёма.

Отметим, что максимальный радиус снежного кома определяется не временем накопления как таковым, а условиями, при которых сохраняется возможность прилипания частиц к поверхности. В этом смысле он задаётся пределом реализуемого роста. Такая оговорка важна, поскольку рассматриваемая модель описывает не любую динамику накопления, а именно режим устойчивого поверхностного присоединения.

Обозначим максимальный радиус кома  $R_{max}$ , относительную толщину внешнего слоя —  $p$ . Тогда распределение объёма снега между слоями, нормированное на максимальный объём снежного кома, равно  $R_{max} p = R / R_{max}$

$$Q(p) = 1 - (1 - p)^D. \quad (9)$$

Формула (9) показывает, что внешний слой, занимающий лишь малую долю по линейному размеру, способен содержать существенно большую долю полного объёма. Именно здесь возникает геометрическая основа концентрации: при самоподобном росте прирост эффекта распределяется по линейной координате неравномерно, а к внешним слоям смещается всё большая доля полного результата.

Чтобы перейти от распределения объёма между слоями к кривой концентрации, необходимо выразить накопленный эффект в той же линейной метрике, которая использовалась для описания роста. Поэтому кумулятивная сумма объёмов слоёв переводится в эквивалентный радиус сферы, имеющей такой же объём. В результате получается функция концентрации:

$$S(p) = [1 - (1 - p)^D]^{1/D}, \quad D \geq 1, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (10)$$

Именно этот переход является центральным для всей работы: он показывает, что кривая Парето возникает как отображение поверхностного роста в нормированной линейной координате. Тем самым аналитическая форма концентрации не навязывается извне, а связывается с геометрией самоподобного наращивания.

В частности, формула (10) совпадает с формулой (3) при  $a = D$ .

При этом важно подчеркнуть, что сама формула (10) определяется не одной лишь кинематикой линейного роста радиуса, а совместным действием самоподобной геометрии  $V \propto R^D$  и нормировки накопленного эффекта по эквивалентному линейному размеру. В этом смысле модель поверхностного роста не подменяет геометрический вывод, а придаёт ему естественную физическую интерпретацию: при накоплении через внешнюю поверхность именно линейный размер выступает естественной координатой кумулятивного преимущества.

#### 4. Обсуждение: интерпретация, новизна и пределы применимости

Предложенная модель связывает три уровня описания, которые в литературе нередко рассматриваются отдельно: кинематику роста, геометрию накапливающегося тела и итоговую форму концентрации. Сначала поверхностное присоединение частиц задаёт линейный закон роста радиуса; затем самоподобная геометрия переводит этот рост в степенное возрастание объёма; наконец, нормировка по линейному размеру приводит к функции концентрации, совпадающей с кривой Burr III при параметре  $a = D$ . Благодаря этому правило типа 20/80 оказывается не исходным эмпирическим постулатом, а частным случаем размерностно обусловленной концентрации.

Научная новизна работы состоит в том, что широко используемая метафора «снежного кома» получает здесь строгую геометрическую интерпретацию. Обычно cumulative advantage описывается качественно: уже достигнутый результат облегчает дальнейший рост. В предлагаемой постановке этот тезис раскрывается через конкретный механизм. Уже накопленный объём увеличивает площадь активной поверхности, а значит, повышает

абсолютный приток новых частиц. Тем самым преимущество возникает не как внешнее допущение, а как следствие геометрии поверхностного роста, а кривая Burr III с параметром  $a = D$  получает содержательную физико-геометрическую интерпретацию.

С этой точки зрения статья продолжает линию работ [8,21], но не дублирует их. Если там основной акцент был сделан на размерностной форме концентрации и её аналитическом описании, то здесь предметом рассмотрения становится механизм её возникновения в процессе накопления. Новизна настоящей постановки состоит в переходе от описания формы к объяснению геометрической кинематики её формирования.

Разумеется, речь идёт о макромодели, а не о микрофизическом описании. Она не претендует на воспроизведение всех деталей реальных процессов накопления и не заменяет специальные стохастические, социальные или физические модели. Её назначение иное: выделить общий морфологический механизм, при котором уже накопленный результат систематически усиливает дальнейшее накопление. Поэтому уместно говорить о кинематической модели самосогласованного роста, а не об универсальной микротеории концентрации.

Именно в этом качестве модель дополняет класс стохастических описаний кумулятивного преимущества — от схем Yule–Simon и Price до preferential attachment, multiplicative processes и подходов, связанных с self-organized criticality [4,5,9–15,20]. В отличие от них, рассматриваемая конструкция является детерминистической: она не задаёт вероятностные правила присоединения и не описывает флуктуации на микроуровне, а показывает, что сама геометрия поверхностного наращивания уже способна породить форму концентрации типа Burr III.

В этом смысле предлагаемая схема занимает промежуточное положение между моделями роста интерфейсов и моделями cumulative advantage. С одной стороны, она близка к классическим представлениям о поверхностной аккреции и развитии границы [27,28]; с другой — разделяет с моделями предпочтительного присоединения и пропорционального роста идею о том, что уже достигнутый размер облегчает дальнейшее накопление [29–31]. Однако в отличие от вероятностных моделей присоединения речь здесь идёт не о стохастическом правиле выбора, а о детерминированной макросхеме, в которой источник усиления задаётся самой геометрией растущего тела.

В этом отношении показательна аналогия с самомагничиванием (рис. 1). Как и в задачах поверхностного роста, текущая величина порядка влияет на дальнейшее развитие процесса: состояние системы начинает поддерживать собственное усиление. Однако данная аналогия имеет здесь феноменологический и эвристический характер. Она не предполагает тождества микроскопических механизмов, а лишь подчёркивает общий принцип самосогласованности, при котором уже сформировавшийся результат становится фактором дальнейшей эволюции. Поэтому принцип Парето в рамках данной модели уместно трактовать как частное проявление более общего механизма самоусиливающегося роста, не отождествляя его напрямую с уравнениями ферромагнетизма.

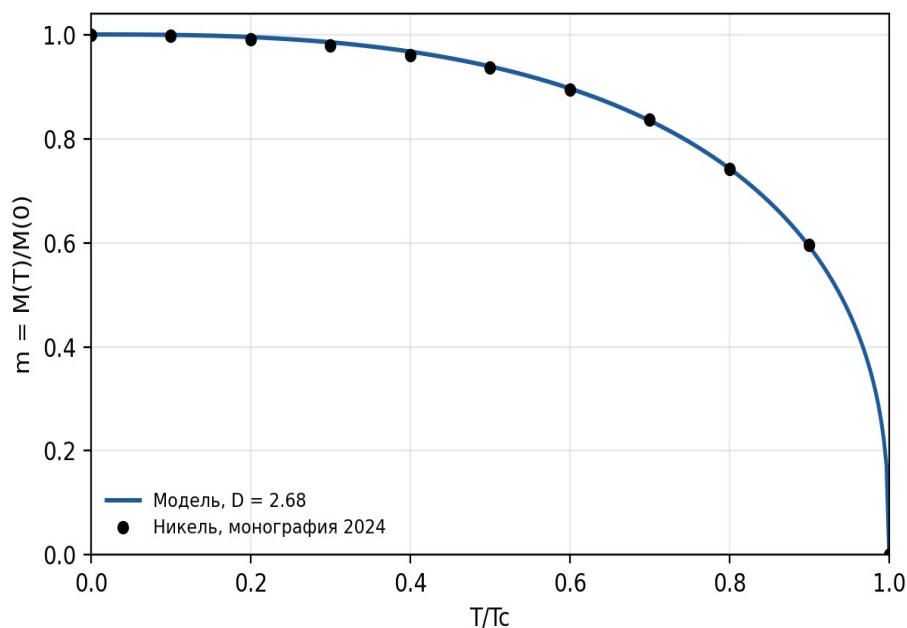


Рисунок 1 Аппроксимация эмпирических данных самонамагничивания никеля (воспроизведено по [8] на основе данных [26]).

## 5. Заключение

В работе предложена геометрически мотивированная интерпретация принципа Парето, основанная на поверхностном присоединении новых частиц к растущему телу. Показано, что естественной координатой такого процесса является эквивалентный радиус, задающий наращивание внешнего слоя, тогда как объём и масса выступают его функциями. В этой постановке уже накопленный результат через увеличение поверхности захвата становится фактором последующего роста, а Парето-подобная концентрация оказывается макроскопическим следствием самоподобного поверхностного развития.

Главный вывод работы состоит в том, что правило типа 20/80 не должно рассматриваться как универсальная константа, одинаково применимая ко всем системам, а должно пониматься как частный случай более общей размерностной схемы концентрации. Для трёхмерного тела соответствующая функция естественно приводит к пропорции, близкой к 21/79, тогда как при иной размерности меняется и степень концентрации. Тем самым метафора снежного кома переводится из качественного языка в язык геометрически и феноменологически обоснованной макромоделю. Её значение состоит не в замене специальных стохастических или социальных теорий, а в выявлении общего морфологического механизма, при котором уже накопленный результат через рост доступной поверхности становится фактором дальнейшего накопления.

Именно в этом смысле предложенный подход позволяет рассматривать принцип Парето не только как эмпирическое правило высокой концентрации, но и как физически содержательную схему самосогласованного усиления в системах заданной эффективной размерности.

## Финансирование

Это исследование не получило никакой конкретной финансовой поддержки от общественных, коммерческих или некоммерческих организаций.

## Декларация конкурирующих интересов

Автор заявляет, что не существует конкурирующих финансовых интересов или личных отношений, которые могли бы повлиять на результаты, представленные в этой работе.

## Доступность данных

Новых первичных данных для этого исследования не было создано. Аналитическая часть статьи основана на теоретических выводах, а эмпирическая иллюстрация использует опубликованные внешние источники, цитируемые в списке литературы и в тексте статьи. Этой информации достаточно для воспроизведения опубликованных результатов.

## Декларация о генеративном ИИ и технологиях с поддержкой ИИ в процессе написания

Во время подготовки этой работы автор использовал ChatGPT (OpenAI) для помощи в переводе на английский язык, улучшении языка и стиля, а также для совершенствования подачи рукописи. После использования этого инструмента автор тщательно изучал и редактировал материал по мере необходимости, беря на себя полную ответственность за содержание публикации.

## Литература

1. V. Pareto, *Cours d'économie politique*, vols. 1–2, F. Rouge, Lausanne, 1896–1897.
2. J.M. Juran, The Non-Pareto Principle; mea culpa, *Qual. Prog.* 8 (5) (1975) 8–9.
3. Г.А. Грачёв, Моделирование принципа Парето, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 2011.
4. S.S. Manna, S. Biswas, B.K. Chakrabarti, Near universal values of social inequality indices in self-organized critical models, *Physica A* 593 (2022) 127121. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.127121>.
5. A. Ghosh, B.K. Chakrabarti, Limiting value of the Kolkata index for social inequality and a possible social constant, *Physica A* 573 (2021) 125944. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.125944>.
6. M.E.J. Newman, Power laws, Pareto distributions and Zipf's law, *Contemp. Phys.* 46 (5) (2005) 323–351.
7. С.А. Крашаков, А.Б. Теслюк, Л.Н. Щур, Об универсальности рангового распределения популярности веб-серверов, *Вестн. РФФИ* 35 (1) (2004) 46–66.
8. Г.А. Грачёв, Принцип Парето: предсказуемые концентрации ресурса в самоорганизующихся системах, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону–Таганрог, 2024.

9. G.U. Yule, A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of Dr. J.C. Willis, F.R.S., *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B* 213 (1925) 21–87. <https://doi.org/10.1098/rstb.1925.0002>.
10. H.A. Simon, On a class of skew distribution functions, *Biometrika* 42 (3–4) (1955) 425–440. <https://doi.org/10.1093/biomet/42.3-4.425>.
11. R.K. Merton, The Matthew Effect in Science, *Science* 159 (3810) (1968) 56–63. <https://doi.org/10.1126/science.159.3810.56>.
12. P.D. Allison, J.A. Stewart, Productivity differences among scientists: Evidence for accumulative advantage, *Am. Sociol. Rev.* 39 (4) (1974) 596–606. <https://doi.org/10.2307/2094424>.
13. D.J. de Solla Price, A general theory of bibliometric and other cumulative advantage processes, *J. Am. Soc. Inf. Sci.* 27 (5) (1976) 292–306. <https://doi.org/10.1002/asi.4630270505>.
14. K. Tanabe, Pareto’s 80/20 rule and the Gaussian distribution, *Physica A* 510 (2018) 635–640. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.07.023>.
15. P.K. Rawlings, D. Reguera, H. Reiss, Entropic basis of the Pareto law, *Physica A* 343 (2004) 643–652. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.06.152>.
16. L. Zaninetti, M. Ferraro, On the truncated Pareto distribution with applications, *Open Phys.* 6 (1) (2008) 1–6. <https://doi.org/10.2478/s11534-008-0008-2>.
17. I.A. Bonnell, C.J. Clarke, M.R. Bate, J.E. Pringle, Accretion in stellar clusters and the initial mass function, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 324 (3) (2001) 573–579. <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04311.x>.
18. S. Basu, C.E. Jones, On the power-law tail in the mass function of protostellar condensations and stars, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 347 (3) (2004) L47–L51. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.07405.x>.
19. P. Hennebelle, M.Y. Grudić, The physical origin of the stellar initial mass function, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 62 (2024) 63–111. <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-052622-031748>.
20. R.M. D’Souza, C. Borgs, J.T. Chayes, N. Berger, R.D. Kleinberg, Emergence of tempered preferential attachment from optimization, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 104 (15) (2007) 6112–6117. <https://doi.org/10.1073/pnas.0606779104>.
21. Г.А. Грачёв, Размерная интерпретация правила 20/80 в задачах распределения ресурсов, препринт, 2026. <https://doi.org/10.24108/preprints-3114705>.
22. I.W. Burr, Cumulative frequency functions, *Ann. Math. Stat.* 13 (2) (1942) 215–232.
23. J.M. Henle, N.J. Horton, S.J. Jakus, Modelling inequality with a single parameter, in: D. Chotikapanich (Ed.), *Modeling Income Distributions and Lorenz Curves*, Springer, New York, 2008, pp. 255–269.
24. G.A. Grachev, Managing the structure of household monetary income on the basis of the Pareto principle, *Terra Econ.* 11 (1) (2013) 57–63.
25. G.A. Grachev, Size distribution of states, counties, and cities in the USA: New inequality form information, *Physica A* 592 (2022) 126831. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.126831>.

26. R. Becker, W. Döring, *Ferromagnetismus*, J. Springer, Berlin, 1939.
27. M. Eden, A two-dimensional growth process, in: J. Neyman (Ed.), *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 4: Biology and Problems of Health*, University of California Press, Berkeley, 1961, pp. 223–239.
28. M. Kardar, G. Parisi, Y.-C. Zhang, Dynamic scaling of growing interfaces, *Phys. Rev. Lett.* 56 (9) (1986) 889–892. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.889>.
29. A.-L. Barabási, R. Albert, Emergence of scaling in random networks, *Science* 286 (5439) (1999) 509–512. <https://doi.org/10.1126/science.286.5439.509>.
30. P.L. Krapivsky, S. Redner, F. Leyvraz, Connectivity of growing random networks, *Phys. Rev. Lett.* 85 (21) (2000) 4629–4632. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.4629>.
31. X. Gabaix, Zipf’s law for cities: An explanation, *Q. J. Econ.* 114 (3) (1999) 739–767. <https://doi.org/10.1162/003355399556133>.