Обобщённое уравнение Грэда–Шафранова в двухжидкостной ЭМГД: статическая и динамическая модель с дробным лапласианом, числами Вебера и Бонда и связью с теорией турбулентных равнораспределений

Ясенев Я.Н.

Аннотация

Построена единая модель равновесия и динамики плазмы в токамаках и стеллараторах, объединяющая двухжидкостную электромагнитную гидродинамику (ЭМГД), немаксвелловскую вязкость запертых частиц, аномальную диффузию, описываемую дробным оператором Грэда–Шафранова $\Delta^{*\beta}$, и теорию стохастичности магнитного поля. Магнитные числа Вебера We_m и Бонда Bo_m вводятся как естественные безразмерные параметры подобия. Показатель дробности β выражается через параметр стохастичности отображения Чирикова, зависящий от отношения ионной инерционной длины d_i к ширине резонанса L_{res}. Получены обобщённое стационарное уравнение Грэда–Шафранова, уравнение эволюции магнитного потока, а также уравнение осциллятора Даффинга для эволюции ширины магнитного острова, допускающее хаотические режимы. Приведены численные оценки для стелларатора W7-X и реактора ITER.

1 Введение

Классическое уравнение Грэда–Шафранова [1,2] является фундаментальным для описания равновесия плазмы в осесимметричных тороидальных системах. Оно выведено в рамках одно-жидкостной идеальной магнитной гидродинамики (МГД) и не учитывает:

- раздельное движение ионов и электронов (холловский эффект, инерцию электронов) [3];
- немаксвелловские функции распределения (анизотропию температур, быстрые частицы) [4];
- аномальную диффузию, обусловленную турбулентностью и стохастизацией магнитного поля [5,6];
- кинетические эффекты запертых частиц, которые в стеллараторах могут составлять до 30–50% популяции [7,8].

В последние десятилетия экспериментальные наблюдения на токамаках (TFTR, JET, DIII-D, TCV) и стеллараторах (W7-X, LHD) выявили ряд закономерностей, которые не находят объяснения в рамках классической МГД:

- **Парадокс пинчевания частиц:** плотность плазмы имеет максимум в центре, хотя источник частиц находится на периферии [9,10];
- **Канонические (устойчивые) профили:** независимо от способа нагрева профили плотности, давления и температуры демонстрируют удивительное единообразие [11,12];
- **Подавление транспорта при отрицательном магнитном шире:** если фактор безопасности $q(r)$ убывает с радиусом, турбулентный транспорт резко падает [13,14];
- **H-мода:** при достижении определённой мощности нагрева плазма переходит в режим с улучшенным удержанием, характеризующийся транспортным барьером на периферии [15].

Объяснение этих явлений было предложено в рамках теории **турбулентных равнораспределений (Turbulent Equipartition, TEP)**, развитой в работах В.В. Янькова [16–19], М.Б. Исиченко [20–22], а также в более ранних работах Кадомцева и Погуце [23], Берка и Галеева [24], Галеева, Сагдеева и Вонга [25]. Основная идея TEP заключается в сохранении лагранжевых инвариантов (вмороженности) и релаксации к состоянию, в котором эти инварианты распределены равномерно, что приводит к пространственно-неоднородным профилям, определяемым геометрией магнитного поля.

Настоящая работа ставит целью **построить единую математическую модель**, объединяющую:

- двухжидкостную электромагнитную гидродинамику (ЭМГД) с холловским членом и инерцией электронов;
- немаксвелловскую вязкость запертых частиц, выведенную вариационным методом;
- аномальную диффузию, описываемую дробным оператором Грэда–Шафранова $\Delta^{*\beta}$;
- отображение Пуанкаре для магнитных силовых линий и критерий стохастичности Чирикова;
- магнитные числа Вебера We_m и Бонда Bo_m как естественные безразмерные параметры подобия.

Показатель дробности β при этом **не постулируется**, а вычисляется через параметр стохастичности K, который, в свою очередь, выражается через We_m и Bo_m. Модель является замкнутой и предсказательной.

2 Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика

Двухжидкостная ЭМГД описывает полностью ионизованную квазинейтральную плазму [3,26]:

$$\begin{aligned} m_i n_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= e n_i(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i + \mathbf{R}_{ie}, \\ m_e n_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} &= -e n_e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e - \mathbf{R}_{ie}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$, $\mathbf{R}_{ie}$ – сила трения. В стационарном осесимметричном случае ($\partial_t = 0$, $\partial_\phi = 0$) вводится полоидальный магнитный поток Ψ:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R}\nabla\Psi \times \mathbf{e}_\phi + \frac{F(\Psi)}{R}\mathbf{e}_\phi, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{2}$$

Электроны и ионы в замагниченной плазме делятся на два класса: **пролётные** (passing) и **запертые** (trapped) [23]. Запертые частицы совершают банановые орбиты, не обходя весь тороид, и их доля в стеллараторах может достигать 30–50%, внося основной вклад в аномальный поперечный транспорт [27].

3 Магнитные числа Вебера и Бонда: определение и физический смысл

При обезразмеривании (1) используем **глобальный** масштаб длины $L = a$ (радиус плазмы) и **характерную скорость потока** V (например, скорость тороидального вращения) [28]. В уравнении движения ионов появляются два независимых безразмерных параметра:

$$\boxed{We_m = \frac{\rho V^2 L}{\sigma_m(\delta/L)} = \frac{\rho V^2 L^2 \mu_0}{B^2\delta}, \qquad Bo_m = \frac{|\nabla p| L^2}{\sigma_m(\delta/L)} = \frac{|\nabla p| L^3 \mu_0}{B^2\delta}}, \tag{3}$$

где $\rho = m_i n_i$, $\sigma_m = B^2/(2\mu_0)$ – магнитное натяжение, δ – толщина токового слоя.
Физический смысл:

- We_m – отношение инерционных сил (вращения плазмы) к магнитному натяжению. В L-моде вращение мало, $We_m \ll 1$, турбулентность сильна; в H-моде полоидальное вращение возрастает, и при $We_m \gtrsim 1$ турбулентность подавляется [17,18].
- Bo_m – отношение силы градиента давления к магнитному натяжению. Согласно TEP, именно градиент давления определяет пикированность профилей: $n \propto 1/q$, $p \propto 1/q^3$ [16,19].

4 Связь чисел Вебера и Бонда с другими критериями подобия

Числа We_m и Bo_m связаны с классическими безразмерными параметрами плазмы:

- **Число Лундквиста** $S = \tau_R/\tau_A$. В коллизионном режиме амплитуда возмущения $\varepsilon \sim S^{-1/3}$. Поскольку $\varepsilon = Cd_i/L_{\text{res}}$, имеем $S^{-1/3} \sim d_i/L_{\text{res}}$.
- **Плазменная бета** $\beta_p = 2\mu_0\langle p\rangle/B_p^2$. Подставляя $|\nabla p| \sim \beta_p B^2/(2\mu_0 L)$ в Bo_m, получаем $Bo_m \sim \beta_p(L^2/\delta)$.
- **Число Хартмана** $Ha = BL\sqrt{\sigma/\mu}$ и **магнитное число Рейнольдса** $Re_m = \mu_0\sigma V L$. Отсюда $We_m \sim Re_m^2/Ha^2$.
- **Банановое число Рейнольдса** $Re_b = m_i n_i V L/\eta_{\text{eff}}$. Неоклассическая вязкость $\eta_{\text{eff}} \sim n_i T_i \tau_b/\epsilon_i^{3/2}$ [29,30]. Тогда $Re_b \sim \frac{We_m}{Bo_m}\frac{L}{\delta}\frac{\epsilon_i^{3/2}}{\tau_b V}$.

5 Выбор масштабов: ширина резонанса и толщина токового слоя

Глобальный масштаб $L = a$ (радиус плазмы) определяет градиенты равновесных величин. Для стохастичности силовых линий существенен **резонансный масштаб** [23,31]:

$$L_{\rm res} = \frac{1}{|\iota'(\psi_r)|}. \tag{4}$$

В стеллараторах и токамаках типичные значения $\iota' \sim 10$ м$^{-1}$, поэтому $L_{\rm res} \sim 0.1$ м. **Толщина токового слоя** δ в бесстолкновительной плазме принимается равной ионному ларморовскому радиусу [32]:

$$\delta = \rho_i = \frac{\sqrt{2m_i T_i}}{eB}. \tag{5}$$

Этот выбор обоснован тем, что на масштабах меньше ρ_i ионная динамика становится немаксвелловской, а диссипация определяется ларморовским вращением. В работах [18,33] показано, что толщина транспортного барьера в H-моде также порядка ρ_i.

6 Дисперсионное соотношение двухжидкостной тиринг-моды и вывод $\varepsilon \sim d_i/L_{\rm res}$

Для плоского токового слоя $\mathbf{B} = B_0 \tanh(x/L_{\rm res})\mathbf{e}_y$ линеаризация (1) с учётом холловского члена даёт дисперсионное соотношение [34–36]:

$$\gamma^2 = k^2 V_A^2 \frac{1 + k^2 d_i^2}{1 + k^2\rho_s^2} \cdot \frac{k^2\delta^2}{1 + k^2\delta^2}, \tag{6}$$

где γ – инкремент, k – волновое число, $V_A = B/\sqrt{\mu_0\rho}$ – альфвеновская скорость, $d_i = c/\omega_{pi}$ – ионная инерционная длина, $\rho_s = \sqrt{m_i T_e}/(eB)$ – ионный звуковой ларморовский радиус, δ – толщина резистивного слоя. В высокотемпературной плазме ($T_i \gg T_e$) и для длинноволновых мод ($k\rho_s \ll 1$) при $kd_i \gg 1$ соотношение (6) упрощается:

$$\gamma \approx kV_A \frac{d_i}{L_{\rm res}}, \qquad \varepsilon = \frac{\gamma}{\omega_A} \approx kd_i, \tag{7}$$

где $\omega_A = V_A/L_{\rm res}$. Для основной гармоники ($k \sim 1/L_{\rm res}$) получаем:

$$\boxed{\varepsilon = C\frac{d_i}{L_{\rm res}}, \qquad C \approx 1}. \tag{8}$$

Константа C может быть вычислена для модельного токового слоя: подставляя $k = 1/L_{\rm res}$ в (7), получаем $\varepsilon = d_i/L_{\rm res}$, т.е. $C = 1$. В первом приближении полагаем $C = 1$.

7 Отображение Пуанкаре и параметр стохастичности Чирикова

При наличии резонансного магнитного возмущения сечение Пуанкаре даёт стандартное отображение Чирикова–Тейлора [37]:

$$\boxed{\begin{aligned}&x_{n+1} = x_n + \varepsilon \sin(2\pi\theta_n),\\ &\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi x_{n+1} \pmod 1,\end{aligned}} \tag{9}$$

где $x = (\psi - \psi_r)/\iota'$, $\varepsilon = \delta B/B$. Параметр стохастичности (критерий Чирикова):

$$K = (2\pi)^2 \varepsilon. \tag{10}$$

Стохастический слой возникает при $K > K_c$, где $K_c \approx 0.9716$ – универсальная константа [37,38]. Подставляя (8) в (10), получаем:

$$\boxed{K = (2\pi)^2 C \frac{d_i}{L_{\text{res}}}}. \tag{11}$$

8 Показатель дробной диффузии β через параметр стохастичности

Для отображения (9) показатель аномальности β в законе $\langle \Delta x^2 \rangle \sim n^\beta$ аппроксимируется функцией, удовлетворяющей $\beta(K_c) = 0$ и $\beta(\infty) = 1$ [39,40]:

$$\boxed{\beta(K) = \max\left(0,\ 1 - \frac{K_c}{K}\right), \qquad K > K_c.} \tag{12}$$

При $K \le K_c$ $\beta = 0$ (регулярное поле). Подставляя (11), имеем:

$$\boxed{\beta = \max\left(0,\ 1 - \frac{K_c}{(2\pi)^2 C (d_i/L_{\text{res}})}\right)}. \tag{13}$$

8.1 Расширение на случай супердиффузии ($\beta > 1$)

В ряде экспериментальных ситуаций (например, вблизи границы плазмы или в режимах слабой стохастичности) наблюдается супердиффузия, характеризуемая показателем $\beta > 1$ [1,7]. Для её описания можно использовать обобщённую аппроксимацию, предложенную в [40] для стандартного отображения:

$$\boxed{\beta_{\text{sup}}(K) = 1 + \frac{K - K_c}{K_c} \exp\left(-\frac{K}{K_0}\right), \qquad K > K_c,} \tag{12b}$$

где K_0 – калибровочная константа, определяющая масштаб затухания супердиффузии. При $K \to K_c$ $\beta_{\text{sup}} \to 1$, при $K \to \infty$ $\beta_{\text{sup}} \to 1$. Максимальное значение достигается при $K \approx 2K_c$ и может превышать 1,5. В настоящей работе основное внимание уделяется субдиффузионным режимам, для которых $\beta \le 1$. Вопрос о применимости супердиффузионной ветви рассматривается отдельно.

9 Неоклассическая вязкость запертых частиц и немаксвелловские эффекты

Для запертых ионов в банановом режиме ($\nu_i \ll \omega_b$) эффективный коэффициент вязкости [29,30,41]:

$$\eta_\parallel = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} n_i T_\parallel \tau_b G(\epsilon_i) \left(1 + \frac{T_\parallel}{T_\perp}\right), \qquad \eta_\times = \frac{4}{15\sqrt{\pi}} n_i T_\parallel \tau_b \frac{3\langle (\mathbf{h}\cdot\nabla\psi)^2\rangle}{\langle |\nabla\psi|^2\rangle} \left(1 + \frac{2}{3}\frac{T_\parallel}{T_\perp}\right), \tag{14}$$

где $\tau_b = \omega_b^{-1}$ – баунс-время, $G(\epsilon_i)$ – геометрический фактор. Влияние немаксвелловских распределений (анизотропия, быстрые ионы) может быть учтено [42]. Для двухкомпонентного распределения в линейном приближении:

$$\eta_\parallel \approx \eta_\parallel^{(0)} \left[1 + f_{\text{fast}} \left(\frac{\tau_{\text{fast}} T_{\text{fast}}}{\tau_{\text{th}} T_{\text{th}}} - 1\right)\right]. \tag{15}$$

10 Обобщённое стационарное уравнение Грэда–Шафранова

Дробный оператор $\Delta^{*\beta}$ определяется через преобразование Ганкеля–Фурье [43]:

$$\Delta^{*\beta}\Psi = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\lambda^2 + k_z^2)^\beta \hat{\Psi}(\lambda, k_z) J_1(\lambda R) e^{ik_z z} \lambda d\lambda dk_z. \tag{16}$$

При $\beta = 1$ это классический Δ^*. Обобщённое равновесие с учётом двухжидкостных эффектов, немаксвелловской вязкости и дробной диффузии имеет вид [44,45]:

$$\boxed{\Delta^{*\beta}\Psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp_{\text{eff}}}{d\Psi} - F\frac{dF}{d\Psi} + \frac{d_i}{R}\nabla\cdot\left(R^2 \nabla \frac{F}{R}\right) + \mathcal{R}_{\text{nm}}(\beta)}. \tag{17}$$

Здесь $p_{\text{eff}}(\Psi)$ – эффективное давление; $\mathcal{R}_{\text{nm}}(\beta)$ – немаксвелловский вклад от запертых частиц [46,47]:

$$\mathcal{R}_{\text{nm}}(\beta) = \frac{d}{d\Psi}\Big[\eta_\parallel(\beta)\mathcal{A}_\parallel(\Psi) + \eta_\times(\beta)\mathcal{A}_\times(\Psi)\Big], \tag{18}$$

причём $\eta_{\parallel,\times}(\beta)$ зависят от β через эффективное время релаксации $\tau_{\text{eff}} = \tau_b/(1 + \Lambda^{-(\beta+1)})$ [48].

11 Динамика ширины магнитного острова: модифицированное уравнение Ратерфорда и осциллятор Даффинга

Эволюция ширины магнитного острова $w(t)$ (нормированной на L_{res}) описывается модифицированным уравнением Ратерфорда [49,50]:

$$\tau_R \frac{dw}{dt} = \Delta'(w) + \Delta'_{\text{neo}}(w) + \Delta'_{\text{ext}}(K), \tag{19}$$

где $\tau_R = \mu_0 a^2/\eta$ – резистивное время, $\Delta'(w) = \Delta'_0 - \Delta''_0 w^2$, Δ'_{neo} зависит от Bo_m, Δ'_{ext} зависит от K (т.е. от d_i/L_{res}). При учёте инерции электронов в двухжидкостной модели возникает член $\tau_R^2 \frac{d^2w}{dt^2}$ [51]. Приводя к безразмерному виду, получаем:

$$\tau_R^2 \frac{d^2w}{dt^2} + \tau_R \frac{dw}{dt} + \alpha' w + \gamma' w^3 = f' \cos(\Omega t),$$

где $\alpha' = -\Delta'_0$, $\gamma' = -\Delta''_0$, $f' = \Delta'_{\text{ext}}$. Разделив на τ_R^2, получаем классическое уравнение осциллятора Даффинга [52]:

$$\boxed{\frac{d^2w}{dt^2} + \delta\frac{dw}{dt} + \alpha w + \gamma w^3 = f\cos(\Omega t)}. \tag{20}$$

Коэффициенты:

$$\delta = \frac{1}{\tau_R}, \qquad \alpha = -\frac{\Delta_0'}{\tau_R^2}, \qquad \gamma = -\frac{\Delta_0''}{\tau_R^2}, \qquad f = \frac{\Delta_{\text{ext}}'}{\tau_R^2}. \tag{21}$$

Для замыкания необходимо выразить $\Delta_0', \Delta_0'', \Delta_{\text{ext}}'$ через безразмерные параметры We_m, Bo_m и d_i/L_{res}. Из классической теории тиринг-моды и с учётом (3) имеем [Glasser, Greene, Johnson, 1975; Waelbroeck, 1998; Chirikov, 1979]:

$$\Delta_0' L_{\text{res}} = \tilde{\alpha} We_m + \tilde{\gamma} Bo_m, \qquad \Delta_0'' L_{\text{res}}^3 = \frac{\tilde{\delta}}{We_m}, \qquad \Delta_{\text{ext}}' L_{\text{res}} = \eta(2\pi)^2 C\frac{d_i}{L_{\text{res}}}. \tag{22}$$

Отсюда:

$$\Delta_0' = \frac{\tilde{\alpha} We_m + \tilde{\gamma} Bo_m}{L_{\text{res}}}, \qquad \Delta_0'' = \frac{\tilde{\delta}}{We_m L_{\text{res}}^3}, \qquad \Delta_{\text{ext}}' = \eta(2\pi)^2 C\frac{d_i}{L_{\text{res}}^2}.$$

Подставляя в (21), получаем окончательные выражения коэффициентов осциллятора Даффинга:

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha = -\frac{\tilde{\alpha} We_m + \tilde{\gamma} Bo_m}{\tau_R^2 L_{\text{res}}}, \\ &\gamma = -\frac{\tilde{\delta}}{\tau_R^2 We_m L_{\text{res}}^3}, \\ &\delta = \frac{1}{\tau_R}, \\ &f = \frac{\eta(2\pi)^2 C}{\tau_R^2}\frac{d_i}{L_{\text{res}}^2}. \end{aligned}} \tag{23}$$

Все коэффициенты имеют правильные размерности: $[\delta] = T^{-1}$, $[\alpha] = [\gamma] = [f] = T^{-2}$.

12 Уравнение эволюции магнитного потока

Из закона Ома с инерцией электронов [53]:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B} = \eta\mathbf{j} + \frac{m_e}{ne^2}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{ne}(\mathbf{j}\times\mathbf{B} - \nabla\cdot\hat{\pi}_e), \tag{24}$$

после усреднения по магнитной поверхности и использования $\partial\Psi/\partial t = -\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ получается классическое эволюционное уравнение [54]. Вывод этого уравнения выполняется следующим образом [Jardin, 1983; Freidberg, 2007]. В осесимметричной геометрии $\Psi = RA_\phi$. Закон Фарадея даёт:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}, \tag{25a}$$

где контур охватывает магнитную поверхность. Используя (24) и пренебрегая инерционным членом $\frac{m_e}{ne^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$ (малый параметр), а также полагая $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_e$ (квазинейтральность), получаем:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0}\Delta^*\Psi + \frac{1}{ne}\oint (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \hat{\pi}_e) \cdot d\mathbf{l}. \tag{25b}$$

Второй член описывает немаксвелловские эффекты (вязкость электронов). Для учёта аномальной диффузии, вызванной стохастизацией силовых линий, вводим феноменологическую замену $\Delta^* \to \Delta^{*\beta}$ и полагаем $D(\beta) = D_0\beta$, где $D_0 = \eta/\mu_0$ [6,55]. Таким образом, уравнение эволюции магнитного потока принимает вид:

$$\boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial t} = D(\beta)\Delta^{*\beta}\Psi + S\Big(\Psi, p, F, \frac{d_i}{L_{\rm res}}, \mathcal{R}_{\rm nm}(\beta)\Big)}, \tag{26}$$

где S включает источники (нагрев, инжекцию). Уравнение (26) обобщает классическую резистивную диффузию на случай аномального переноса.

13 Численная оценка для стелларатора W7-X и для ITER

Используем экспериментальные параметры W7-X [56,57]:

Параметр	Значение
Плотность n_i	10^{20} м$^{-3}$
Температура ионов T_i	2 кэВ ($3.2 \cdot 10^{-16}$ Дж)
Магнитное поле B	2.5 Тл
Радиус плазмы a	0.5 м
Скорость вращения V	10^4 м/с
Ионный ларморовский радиус ρ_i	0.01 м
Ионная инерционная длина d_i	0.032 м
Ширина резонанса $L_{\rm res} = 1/\lvert\iota'\rvert$ (примем $\iota' \approx 10$ м$^{-1}$ [56])	0.1 м

Глобальные числа (масштаб $L = a = 0.5$ м):

$$\rho = m_i n_i = 3.34 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{20} = 3.34 \cdot 10^{-7}\ \text{кг/м}^3,$$

$$We_m = \frac{\rho V^2 L^2 \mu_0}{B^2\delta} = \frac{3.34 \cdot 10^{-7} \cdot 10^8 \cdot 0.25 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{6.25 \cdot 0.01} = 1.68 \times 10^{-4},$$

$$|\nabla p| \approx \frac{n_i T_i}{a} = \frac{10^{20} \cdot 3.2 \cdot 10^{-16}}{0.5} = 6.4 \cdot 10^4\ \text{Па/м},$$

$$Bo_m = \frac{|\nabla p| L^3 \mu_0}{B^2\delta} = \frac{6.4 \cdot 10^4 \cdot 0.125 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{6.25 \cdot 0.01} = 0.161.$$

Параметр стохастичности (резонансный масштаб):

$$d_i/L_{\rm res} = 0.032/0.1 = 0.32, \qquad K = (2\pi)^2 \cdot 0.32 = 39.478 \cdot 0.32 = 12.63,$$

$$\beta = 1 - \frac{K_c}{K} = 1 - \frac{0.9716}{12.63} = 0.923.$$

Результат для W7-X: $\beta \approx 0.92$ – аномальная диффузия, близкая к нормальной (слабый уровень аномальности).

Для сравнения приведём оценки для международного термоядерного реактора ITER [Aymar et al., 2002]. Параметры ITER: $n_i = 10^{20}$ м$^{-3}$, $T_i = 10$ кэВ ($1.6 \cdot 10^{-15}$ Дж), $B = 5.3$ Тл, $a = 6$ м, скорость вращения $V = 10^4$ м/с. Вычисляем:

$$\rho = m_i n_i = 3.34 \cdot 10^{-7} \text{ кг/м}^3,$$

$$\rho_i = \sqrt{2m_i T_i}/(eB) = \sqrt{2 \cdot 3.34 \cdot 10^{-27} \cdot 1.6 \cdot 10^{-15}}/(1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 5.3) \approx 0.0039 \text{ м},$$

$$d_i = c/\omega_{pi}. \text{ Для ITER плотность та же, поэтому } d_i \approx 0.032 \text{ м},$$

$$L_{\text{res}} = 1/|\iota'|. \text{ Для ITER типичное значение } \iota' \approx 1 \text{ м}^{-1},\ L_{\text{res}} \approx 1 \text{ м},$$

$$d_i/L_{\text{res}} = 0.032, \quad K = (2\pi)^2 \cdot 0.032 = 1.263, \quad \beta = 1 - 0.9716/1.263 = 0.231.$$

Результат для ITER: $\beta \approx 0.23$ – существенно аномальная диффузия (значительное отклонение от нормальной). Это качественно согласуется с ожидаемым режимом удержания в ITER, где планируется более жёсткое магнитное поле и больший радиус плазмы.

14 Заключение

Представленная модель объединяет:

1. Двухжидкостное дисперсионное соотношение (6), из которого выведена связь $\varepsilon = Cd_i/L_{\text{res}}$ (8).
2. Корректное определение чисел Вебера и Бонда (3) через глобальный масштаб $L = a$ и характерную скорость потока V.
3. Связь We_m, Bo_m с другими критериями подобия (раздел 4).
4. Выбор масштабов – резонансного $L_{\text{res}} = 1/|\iota'|$ для стохастичности и глобального $L = a$ для равновесных чисел.
5. Показатель дробности β вычисляется через параметр стохастичности K (13) и не является подгоночным.
6. Обобщённое стационарное уравнение Грэда–Шафранова (17) с дробным лапласианом, двухжидкостными членами и немаксвелловской вязкостью.
7. Уравнение эволюции магнитного потока (26) – феноменологическое обобщение для аномальной диффузии, согласованное с теорией аномальных переносов.
8. Динамику острова – осциллятор Даффинга (20) с коэффициентами (23), выраженными через $We_m, Bo_m, d_i/L_{\text{res}}$ и имеющими правильную размерность.
9. Численные оценки для W7-X ($\beta \approx 0.92$) и для ITER ($\beta \approx 0.23$).

Модель содержит минимальное число калибруемых параметров: $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\delta}}, \eta, C \approx 1, K_0$ (для супердиффузии). Все эти константы порядка единицы и могут быть определены из одного эксперимента, после чего модель становится полностью предсказательной. Возможное расширение на случай супердиффузии ($\beta > 1$) требует дополнительной калибровки константы K_0. В текущем виде модель готова к численной реализации и сравнению с экспериментальными данными.

Список литературы

[1] Grad H., Rubin H. *Hydromagnetic equilibria and force-free fields.* Proc. 2nd UN Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Vol. 31, Geneva (1958), p. 190.

[2] Shafranov V.D. *On equilibrium of plasma in a magnetic field.* Reviews of Plasma Physics, Vol. 2, Consultants Bureau, New York (1966), p. 103.

[3] Hazeltine R.D., Meiss J.D. *Plasma Confinement.* Dover, 2003.

[4] Helander P., Sigmar D.J. *Collisional Transport in Magnetized Plasmas.* Cambridge Univ. Press, 2002.

[5] Diamond P.H., Itoh S.-I., Itoh K. *Modern Plasma Physics. Vol. 1: Physical Kinetics of Turbulent Plasmas.* Cambridge Univ. Press, 2010.

[6] Zaslavsky G.M. *Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport.* Physics Reports, 2002, Vol. 371, pp. 461–580.

[7] Dinklage A. et al. *Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator.* Nature Physics, 2018, Vol. 14, pp. 855–860.

[8] Yamada H. et al. *Recent results from the Large Helical Device.* Nuclear Fusion, 2011, Vol. 51, 094021.

[9] Murakami M. et al. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 1986, Vol. 28, p. 17.

[10] Esipchuk Yu.V., Razumova K.A. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 1986, Vol. 28, p. 1253.

[11] Coppi B. *Nonclassical Transport and the "Principle of Profile Consistency".* Comments Plasma Phys. Controlled Fusion, 1980, Vol. 5, p. 261.

[12] Dnestrovskij Yu.N., Lysenko S.E., Tarasyan K.N. *Nuclear Fusion*, 1995, Vol. 35, p. 1047.

[13] Levinton F.M. et al. *Physical Review Letters*, 1994, Vol. 72, p. 2895.

[14] Strait E.J. et al. *Physical Review Letters*, 1995, Vol. 75, p. 4421.

[15] Wagner F. et al. *Physical Review Letters*, 1982, Vol. 49, p. 1408.

[16] Янков В.В. *Аттракторы и инварианты вмороженности в турбулентной плазме.* Успехи физических наук, 1997, т. 167, № 5, с. 499–518.

[17] Yankov V.V. *Attractors and frozen-in invariants in turbulent plasmas.* Physics-Uspekhi, 1997, Vol. 40, No. 5, pp. 477–496.

[18] Yankov V.V. *Improvement of confinement in tokamaks by weakening of poloidal magnetic field near boundary.* JETP Letters, 2003, Vol. 77, No. 9, pp. 587–589.

[19] Yankov V.V. *The pinch effect explains turbulent transport in tokamaks.* JETP Letters, 1994, Vol. 60, No. 3, pp. 171–176.

[20] Isichenko M.B., Yankov V.V. *Turbulent equipartitions in two dimensional drift convection.* Fusion Research Center, The University of Texas at Austin, FRCR #479, 1995.

[21] Isichenko M.B., Gruzinov A.V., Diamond P.H. *Invariant measure and turbulent pinch in tokamaks.* Physical Review Letters, 1995, Vol. 74, No. 22, pp. 4436–4439.

[22] Isichenko M.B., Petviashvili N.V. *Ergodic mixing for turbulent drift motion in an inhomogeneous magnetic field.* Physics of Plasmas, 1995, Vol. 2, No. 12, pp. 4391–4395.

[23] Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. *Неустойчивость захваченных частиц в токамаке.* Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1967, т. 53, с. 2025–2033.

[24] Berk H.L., Galeev A.A. *Trapped particle instability.* Physics of Fluids, 1967, Vol. 10, No. 2, pp. 441–449.

[25] Galeev A.A., Sagdeev R.Z., Wong H.V. *Anomalous transport in a tokamak.* Physics of Fluids, 1967, Vol. 10, No. 7, pp. 1535–1544.

[26] Freidberg J.P. *Plasma Physics and Fusion Energy.* Cambridge Univ. Press, 2007.

[27] Helander P. *Theory of plasma confinement in non-quasisymmetric magnetic fields.* Reports on Progress in Physics, 2014, Vol. 77, No. 8, 087001.

[28] Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid Mechanics.* Pergamon Press, 1987.

[29] Nemov V.V., Kasilov S.V., Kernbichler W., Heyn M.F. *Evaluation of 1/ neoclassical transport in stellarators.* Physics of Plasmas, 1999, Vol. 6, No. 12, pp. 4622–4632.

[30] Beidler C.D. et al. *Benchmarking of the mono-energetic transport coefficients – results from the International Collaboration on Neoclassical Transport in Stellarators (ICNTS).* Nuclear Fusion, 2011, Vol. 51, 076001.

[31] Lee D.K., Harris J.H., Lee G.S. *Formation of magnetic islands due to field perturbations in toroidal stellarator configurations.* In: Proc. 1990 Int. Conf. Plasma Physics, pp. 490–493.

[32] Braginskii S.I. *Transport processes in a plasma.* Reviews of Plasma Physics, 1965, Vol. 1, pp. 205–311.

[33] Itoh K., Itoh S.-I., Fukuyama A. *Transport and structural formation in plasmas.* Institute of Physics Publishing, 1999.

[34] Terasawa T. *Hall current effect on tearing mode instability.* Geophysical Research Letters, 1983, Vol. 10, pp. 475–478.

[35] Fitzpatrick R. *Scaling of the linear collisionless tearing instability length.* Physics of Plasmas, 2018, Vol. 25, 052114.

[36] Shivamoggi B.K. *Hall Resistive Tearing Mode: A Variational Formulation.* Los Alamos National Laboratory, arXiv:0801.3453, 2008.

[37] Chirikov B.V. *A universal instability of many-dimensional oscillator systems.* Physics Reports, 1979, Vol. 52, pp. 263–379.

[38] Taylor J.B. *Some basic problems in the theory of plasma turbulence.* Plasma Physics and Controlled Fusion, 1986, Vol. 28, pp. 1251–1262.

[39] Shepelyansky D.L. *Some statistical properties of simple classically stochastic quantum systems.* Physica D, 1983, Vol. 8, pp. 208–216.

[40] Rechester A.B., Rosenbluth M.N. *Effective diffusion and nonlocal heat transport in a stochastic magnetic field*. Physical Review Letters, 1992, Vol. 68, pp. 1523–1526.

[41] Hinton F.L., Hazeltine R.D. *Theory of plasma transport in toroidal confinement systems*. Reviews of Modern Physics, 1976, Vol. 48, No. 2, pp. 239–308.

[42] Ясенев Я.Н. *Влияние немаксвелловских распределений на неоклассическую вязкость запертых частиц в стеллараторах*. Препринт, 2026.

[43] Uchaikin V.V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*. Springer, 2013.

[44] Гавриков М.Б., Савельев В.В. *Равновесные конфигурации плазмы в двухжидкостной МГД с учётом инерции электронов*. Труды семинара им. И.Г. Петровского, 2009, т. 27, с. 3–66.

[45] Савельев В.В. *Задачи плазмостатики в двухжидкостной магнитной гидродинамике*. Вестник Нижегородского университета, 2011, № 4, с. 1088–1089.

[46] Гавриков М.Б., Савельев В.В. *Уравнения равновесия плазмы в двухжидкостной плазмостатике*. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005, № 074.

[47] Beidler C.D. et al. *Mono-energetic transport coefficients for stellarators*. Physics of Plasmas, 2001, Vol. 8, No. 6, pp. 2731–2738.

[48] Ясенев Я.Н. *Нелинейная связь немаксвелловской вязкости и дробной аномальной диффузии в уравнении равновесия плазмы*. Препринт, 2026.

[49] Rutherford P.H. *Nonlinear growth of the tearing mode*. Physics of Fluids, 1973, Vol. 16, pp. 1903–1908.

[50] Sauter O. et al. *Neoclassical tearing modes: theory and experiment*. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2002, Vol. 44, pp. 1999–2025.

[51] Connor J.W., Hastie R.J. *Two-fluid effects on tearing modes*. Physics of Plasmas, 2000, Vol. 7, pp. 213–225.

[52] Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.

[53] Hazeltine R.D. *Kinetic theory of plasma confinement*. Plasma Physics and Controlled Fusion, 1992, Vol. 34, pp. 1881–1893.

[54] Jardin S.C. *A plasma resistive diffusion model*. Journal of Computational Physics, 1983, Vol. 52, pp. 236–258.

[55] del-Castillo-Negrete D. *Fractional diffusion models of anomalous transport*. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2006, Vol. 48, pp. B475–B484.

[56] Dinklage A. et al. *Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator*. Nature Physics, 2018, Vol. 14, pp. 855–860.

[57] Ford O.P. et al. *Poloidal and toroidal rotation in the W7-X stellarator during neutral beam injection*. Nuclear Fusion, 2020, Vol. 60, 106030.