К основному уравнению магнитостатики

Зафар Туракулов

25 апреля 2026 г.

Аннотация

Построение решений уравнения магнитостатики $\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \vec{J}$ сводится к представлению обеих сторон уравнения в виде разложений по собственным векторным полям оператора $\nabla\times\nabla\times$. В настоящей работе поеказан метод построения этих полей путем добавления времени как четвертого измерения и построения в пространстве-времени полей замкнутых самодуальных 2-форм с определенной формой зависимости от времени. Полный набор таких полей 2-форм построен, в частности, в нашей работе [1]. Ниже будет предполагаться, что они известны в различных пространственных системах координат.

Уравнение магнитостатики $\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \vec{J}$ во многом подобно уравнению Пуассона. Оба уравнения играют роль основных уравнений в своих теориях – соответственно электростатике и магнитостатике; решения обоих по определению предназначены для описания статических полей. Последнее означает, что в этих теориях поля определены на пространстве и никаких причин вводить время как еще одну независимую переменную в этих теориях нет. Оба уравнения линейны и это означает, что их полные решения представляют собой разложения по базисам в соответствующих функциональных пространствах. Разницу составляет то, что одно из них скалярное, а другое – векторное, и следовательно, линейное функциональное пространство, которому принадлежат решения последнего – это пространство линейных векторных полей, базис которого составляют собственные векторные поля оператора $\nabla\times\nabla\times$, так что для того, чтобы его построить, необходимо прежде всего построить полную теорию этих полей. Как будет показано ниже, это проще всего сделать, располагая полями замкнутых самодуальных 2-форм в пространстве-времени Минковского. Пример полного набора таких 2-форм приведен в нашей работе [1].

В проводимых ниже рассуждениях будут использоваться следующие представления. Пространство – это типичная 3-мерная гиперплоскость в пространстве-времени. Эти гиперплоскости параллельны и каждое отмечено единственным значением параметра t, представляющем собой лоренцево время. Будем полагать, что 1-форма $\mathrm{d}t$ нормирована на единицу. Хотя обычно оно используется как одна из координат, в данном случае это –

единственная координата, т.к. в наших рассуждениях какая-либо система координат не используется. Будет использоваться только поле ортонормированных ко-реперов $\{\nu^a\}$ в пространстве, так что в пространстве-времени также задано поле ортонормированных ко-реперов $\{\mathrm{d}t, \nu^a\}$.

Пусть теперь Φ – замкнутая самодуальная 2-форма, зависящая от времени как $e^{\imath\omega t}$. Представим ее как

$$\Phi = \mathrm{d}t \wedge E + H, \tag{1}$$

где E и H – чисто пространственные формы:

$$E = E_a \nu^a, \quad H = H_{ab} \nu^a \wedge \nu^b. \tag{2}$$

Ее самодуальность выражается в том, что

$$^*(\mathrm{d}t \wedge E) = \imath H, \quad {}^*H = -\imath \mathrm{d}t \wedge E. \tag{3}$$

Из того, что она замкнута, следует, что

$$H = 0, \quad -\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}E - \mathrm{d}t \wedge H = 0.$$

Заметим теперь, что в этом равенстве сомножитель $\mathrm{d}E$ не содержит производной по времени и поэтому из него нельзя просто убрать сомножитель $\mathrm{d}t$. Или, если это делать, то следует понимать сомножитель $\mathrm{d}E$ как если он взят не в пространстве-времени, а в пространстве. Действительно, если исключить четвертое измерение, то получается чисто пространственное равенство

$$\mathrm{d}E = -\omega H. \tag{4}$$

Исключая это измерение, следует заменить второе равенство в формулах(3) чисто пространственным $^*H = -\imath \mathrm{d}t \wedge E$ и тогда из равенства (4) следует $^*\mathrm{d}E = -\imath\omega E$. Применив к обеим частям этого равенства оператор $^*\mathrm{d}$ и подставив в него, находим, что 1-форма E в пространстве удовлетворяет уравнению

$$^*\mathrm{d}\,^*\mathrm{d}E = -\omega^2 E.$$

Оно эквивалентно уравнению на собственные векторные поля оператора $\nabla \times \nabla$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\omega^2 \vec{E},$$

, что и требовалось. Таким образом, если Φ – замкнутая самодуальная 2-форма, зависящая от времени как $e^{\imath\omega t}$ и представенная в виде 1), то первое слагаемое в нем есть собственное векторное поле оператора $\nabla \times \nabla\times$, выраженное как 1-форма, умноженное на $\mathrm{d}t$.

Список литературы

[1] Z. Y. Turakulov. An Approach to Maxwell Equations in Circular Paraboloidal Coordinates by Newman-Penrose Method. January 1997 Turkish Journal of Physics 21(11) Z. Y. Turakulov, DOI: 10.55730/1300-0101.2413