

Максим Вячеславович Чурилов

Синтетическая теория меры, вероятности и оптимального транспорта

Локалы, valuations, почти-всюду анализ и
Wasserstein-геометрия в гладких когезивных топосах

Центр Одарённых Детей «Гагарин», г. Оренбург
churilovm1305@gmail.com

Март 2026

Аннотация

Настоящая монография строит синтетическую теорию меры, вероятности, почти-всюду анализа и оптимального транспорта в гладком когезивном топосе. Работа продолжает цикл SOTT-D – CBA – CHA, но не является только обзорным продолжением: её центральная задача состоит в добавлении мерного слоя, без которого невозможны внутренняя семантика “почти всюду”, слабые градиенты, L^p - и Sobolev-пространства, Wasserstein-геометрия, энтропийная регуляризация и вероятностная версия глобальной оптимизации траекторий.

Основной объект теории – локалевая вероятность: вместо внешних σ -алгебр используются Radon-локали $P(X)$, нижние вещественные \mathbf{R}_ℓ , lower-continuous valuations, вероятностная монада Prob и Markov-ядра. Интеграл определяется как Scott-непрерывное продолжение нижних простых аппроксимаций; почти-всюду равенство определяется через μ -нулевые подобъекты; слабые производные задаются интегральной двойственностью; транспортные планы являются valuations на произведениях; Wasserstein-расстояние, энтропия, Schrödinger bridge и JKO-схема формулируются внутренне.

Главные результаты монографии организованы в теоремы I–Q. Теорема I даёт локалевую теорему Рисса-Valuation. Теорема J формулирует Fubini-Disintegration в representable Markov setting. Теорема K замыкает открытую проблему CHA, вводя P -Rademacher-тип и существенные градиенты. Теоремы L–M строят статическую и динамическую теорию оптимального транспорта. Теоремы N–O дают энтропийный транспорт, Schrödinger bridge, Sinkhorn-структуру и JKO-градиентные потоки. Теоремы P–Q поднимают SOTT-D с уровня точечной траектории на уровень закона на пространстве траекторий и заменяют жёсткое требование точечной-уникальности уровнем вероятностных законов дисплейсмент-выпуклость с последующей концентрационной экстракцией.

Методологически работа разделяет доказанные аксиоматические результаты, условные теоремы и программные утверждения. Это разделение принципиально: локалевая мера, дизинтеграция, Radon-регулярность, P -Rademacher, типа Бренье структура и JKO-компактность имеют разный статус строгости и требуют разных модельных предпосылок. В монографии сохранена максимальная амбиция программы, но каждое сильное утверждение получает явный паспорт зависимостей.

Ключевые слова: гладкий когезивный топос; синтетическая дифференциальная геометрия; локали; valuations; нижние вещественные; probability monad; категории Маркова; дизинтеграция; почти всюду; L^p ; Sobolev spaces; BV; слабые градиенты; теорема Радемахера; оптимальный транспорт; геометрия Васерштейна; Benamou–Brenier; дисплейсмент-выпуклость; entropy; Schrödinger bridge; Sinkhorn; JKO; probabilistic SOTT-D; concentration.

Доказательный паспорт результатов

Эта глава фиксирует статус утверждений до входа в техническое изложение. Её цель – исключить смешение трёх разных типов результата: теоремы, доказанные внутри выбранного аксиоматического каркаса; теоремы, доказанные при дополнительных модельных условиях; и программные утверждения, которые являются естественными, но требуют отдельной разработки моделей.

Теорема I (Piss-Valuation).

Строгий аксиоматический результат в каркасе A15–A18. Доказательство использует Scott-непрерывный нижний интеграл, простые аппроксимации и реконструкцию valuation по индикаторам открытых элементов.

Теорема J (Fubini-Disintegration).

Условный результат в каркасе A18–A20. Формула Фубини является строгой частью; дезинтеграция требует representable regular условная структура.

Теорема K (P-Rademacher).

Условный результат при A21–A23, A10 и A26. Нужны предпосылки типа Cheeger-Rademacher; без удвоения меры и неравенства Пуанкаре утверждение не следует.

Теорема L (двойственность Монжа-Канторовича).

Условный результат при A15–A20, A24 и H_{P2} . Ключевые зависимости: tightness семейства планов, нижняя полунепрерывность стоимости и замкнутость множества сцеплений.

Теорема M (формула Бенаму-Бренье).

Условный результат при A18, A20, A24 и функционально-аналитическом слое главы 12. Требуются суперпозиционный принцип и слабая компактность кривых мер.

Теорема N (Schrödinger bridge и Sinkhorn).

Условный результат при A19–A25. Единственность следует из строгой выпуклости энтропии; факторизация требует положительного опорного ядра.

Теорема O (JKO).

Условный результат при A24–A25 и H_{P2} . Это внутренняя форма теории кривых максимального наклона и EVI-поток.

Теоремы P-Q (вероятностная SOTT-D и концентрационная экстракция).

Условные результаты при A24–A26, H_{P1} – H_{P3} . Точечная подтерминальность заменяется уникальностью вероятностного закона при дисплейсмент-выпуклости и последующей концентрацией.

Теоремы типа Бренье и синтетические $CD(K, N)$.

Программные результаты. Они не объявляются доказанными в настоящей монографии и требуют отдельного второго порядка: внутренней теории Александра-Бренье, кривизны и регулярности оптимальных отображений.

Технический инвариант строгости

Во всех последующих главах используется следующий принцип. Если утверждение ссылается только на операции локалей, нижние вещественные, Scott-супремумы, valuations и конечные алгебраические конструкции, оно считается внутренне доказанным в соответствующем аксиоматическом каркасе. Если утверждение использует условные распределения, компактность семейств мер, Rademacher-дифференцируемость, суперпозиционный принцип, отображение Бренье или непрерывный предел JKO, оно помечается как условное, поскольку эти операции не являются формальными следствиями одной лишь внутренней логики гладкого топоса.

Новые усиливающие леммы

Лемма А (нижний интеграл как наименьшее Scott-непрерывное продолжение). Пусть $\mu \in \text{Val}(X)$. Интеграл, определённый на нижних простых функциях формулой

$$\int \sum_i q_i 1_{U_i} d\mu = \sum_i q_i \mu(U_i),$$

имеет единственное Scott-непрерывное монотонное продолжение на $\text{LSC}(X, \mathbf{R}_\ell)$, если каждая P -нижнеполунепрерывная функция является directed supremum своих нижних простых аппроксимаций.

Доказательство. Существование задаётся формулой супремума по простым $\phi \leq f$. Монотонность очевидна. Scott-непрерывность следует из перестановки двух направленных супремумов. Единственность: любое Scott-непрерывное продолжение обязано совпадать на простых функциях и потому на их направленных супремумах. \square

Лемма В (нулевые подобъекты образуют насыщенную идеальную структуру). Пусть μ – Radon-type valuation, а \mathcal{N}_μ задано через покрытия открытыми элементами сколь угодно малой массы. Тогда \mathcal{N}_μ устойчиво относительно подобъектов, конечных объединений и допустимых счётных объединений. Если $f : X \rightarrow Y$ сохраняет покрытия малой массы, то $f_\# \mu$ переводит образ нулевого подобъекта в нулевой подобъект.

Доказательство. Первые два пункта следуют из монотонности и модульности valuation. Счётный пункт требует выбранной формы countable subadditivity или геометрически допустимой σ -аддитивной completion. Утверждение о pushforward есть непосредственное применение формулы $(f_\# \mu)(V) = \mu(f^{-1}V)$. \square

Лемма С (строгая энтропийная выпуклость на аффинном слое маргиналов). Если опорное сцепление R строго положителен и функционал $\pi \mapsto \text{KL}_P(\pi \mid R)$ определён на выпуклом слое $\Pi_P(\mu, \nu)$, то энтропийно-регуляризованная транспортная задача имеет не более одного минимайзера.

Доказательство. Для двух различных планов π_0, π_1 их аффинная смесь сохраняет маргиналы. Строгая выпуклость функции $r \mapsto r \log r$ относительно R даёт строгое уменьшение энтропии на непустой области различия. Линейная транспортная стоимость не разрушает строгую выпуклость. \square

Лемма D (JKO-энергетическая оценка). Пусть μ^{k+1} является JKO-шагом для \mathcal{F} . Тогда

$$\mathcal{F}(\mu^{k+1}) + \frac{1}{2\tau} W_{2,P}^2(\mu^{k+1}, \mu^k) \leq \mathcal{F}(\mu^k).$$

В частности, сумма дискретных действий ограничена падением энергии.

Доказательство. В определении минимизатора подставляем конкурент $\mu = \mu^k$. \square

Лемма Е (концентрационный lower-bound). Если μ_τ минимизирует $\hat{J} + \tau \text{Ent}_P(\cdot \mid \mathcal{R})$, а $J \geq m$ и $J \geq m + \varepsilon$ вне P -окрестности множества $\text{Argmin } J$, то каждая tight-предельная точка μ_0 поддерживана на $\text{Argmin } J$.

Доказательство. Иначе предельная мера дала бы положительную массу области, где $J \geq m + \varepsilon$, и интеграл $\int J d\mu_0$ оказался бы строго больше m . Но сравнение с мерами, сконцентрированными около минимайзеров, даёт предельное значение m . \square

Оглавление

Аннотация	i
Доказательный паспорт результатов	ii
Технический инвариант строгости	iii
Новые усиливающие леммы	iv
1 Предисловие: почему настоящая монография должна была стать теорией меры и вероятности	1
2 Диагноз трёх предыдущих работ и логика продолжения	3
2.1 Что было достигнуто в SOTT-D	3
2.2 Что было достигнуто в СВА	3
2.3 Что было достигнуто в СНА	3
2.4 Логическая неизбежность новой монографии	4
2.5 Главная гипотеза настоящей работы	4
3 Номенклатура, обозначения и карта зависимостей	5
3.1 Базовые категории и объекты	5
3.2 Продолжение системы теорем цикла	5
3.3 Статус результатов	6
I Часть I. Фундамент: от гладкости и негладкости к массе и распределению	7
4 Предел цикла SOTT-D / СВА / СНА и необходимость новой парадигмы	8
4.1 От точки к распределению как новый фундаментальный переход	8
4.2 Почему мера не может быть просто заимствована извне	8
4.3 Почему оптимальный транспорт – не приложение, а центр новой теории	8
4.4 Принцип вероятностной регуляризации	9
4.5 Новая философия: не «точка против меры», а «точка как предел меры»	9
5 Аксиоматический фундамент: от A1-A14 к A15-A26	10
5.1 Наследуемый каркас A1-A14	10
5.2 Новые аксиомы A15-A26	10
5.2.1 A15. Объект valuations	10
5.2.2 A16. Нормировка и вероятностные valuations	10
5.2.3 A17. Локалевая версия теоремы Рисса	10
5.2.4 A18. Произведение, Фубини и Tonelli	11
5.2.5 A19. Вероятностная монада	11
5.2.6 A20. Representable марковская структура и дезинтеграция	11
5.2.7 A21. P -нулевые подобъекты	11
5.2.8 A22. Локалевая полнота функциональных пространств . . .	11

5.2.9 A23. Doubling/Poincaré-режим на \mathbf{R}^n	11
5.2.10A24. Wasserstein-геометрия	12
5.2.11A25. Энтропия и дисплейсмент- выпуклость	12
5.2.12A26. Вероятностная экстракция	12
5.3 Комментарий о природе аксиом	12
5.4 Основные рабочие гипотезы	12
6 Локали, valuations и внутренняя мера	14
6.1 Почему valuations, а не σ -алгебры	14
6.2 Определение valuation	14
6.3 Pushforward и pullback массы	14
6.4 Tightness и Radon-тип регулярности	15
6.5 Плотность Dirac valuations и эмпирическая интерпретация	15
6.6 Теорема I: синтетическая теорема Рисса-Valuation	15
6.6.1 Доказательство (схема)	15
6.7 Последствия Теоремы I	16
7 Интегралы, нижние вещественные и локалевая версия теоремы Рисса	17
7.1 Почему именно lower reals	17
7.2 Интеграл нижнеполунепрерывной функции	17
7.3 Монотонная сходимост	17
7.4 Fatou и нижняя полунепрерывност	17
7.5 Fubini и произведения	18
7.5.1 Доказательство (схема)	18
7.6 Условное математическое ожидание	18
8 Вероятностные объекты, Markov-ядра и дезинтеграция	19
8.1 Вероятност	19
8.2 Markov-ядра	19
8.3 Совместные законы и маргиналы	19
8.4 Теорема J: Fubini-Disintegration в representable Markov setting	20
8.4.1 Доказательство (схема)	20
8.5 Значение Теоремы J	20
8.6 Барицентры и выпуклая геометрия вероятностных объектов	20
8.7 Промежуточный вывод	21
II Часть II. Почти всюду анализ и функциональные пространства	22
9 P-нулевые подобъекты и семантика «почти всюду»	23
9.1 Почему without almost-everywhere теория остаётся незамкнутой	23
9.2 Нулевые подобъекты	23
9.3 Равенство почти всюду и пространство L_P^0	24
9.4 Существенные супремумы, носители и essential hull	24
9.5 Почти-всюду свойства и дезинтеграция	24
9.6 Pushforward и инвариантность нулевых множеств	25
9.7 Почти-всюду как логико-геометрическая модальност	25

10	Пространства L^p, $W_P^{1,p}$, BV_P и слабоградиентный в гладком топосе	26
10.1	От measurable layer к функциональным пространствам	26
10.2	Пространства L^p	26
10.3	Локальная интегрируемость и пространство тестовых функций	27
10.4	Слабые производные через интегральную двойственность	27
10.5	Upper gradients и метрический взгляд	27
10.6	Определение Sobolev-пространств	27
10.7	Эквивалентность слабой и метрической версий градиента	28
10.7.1	Доказательство (схема)	28
10.8	Пространства BV_P и вариация	28
10.9	Нижняя полунепрерывность, компактность и следствия	29
10.10	Значение для предыдущего цикла	29
11	P-Rademacher, существенные градиенты и новый фундамент для США	30
11.1	Почему теорема Радемахера была отсутствующим звеном	30
11.2	Приближённая дифференцируемость	30
11.3	Теорема К: P -Rademacher	30
11.3.1	Доказательство (программа)	31
11.4	Немедленные следствия Теоремы К	31
11.5	Существенные градиенты и weak Hessians: следующий шаг	32
11.6	Главный научный смысл главы 13	32
III	Часть III. Оптимальный транспорт, энтропия и динамика распределений	33
12	Синтетическая проблема Монжа-Канторовича	34
12.1	Транспорт как центральная геометрия пространства мер	34
12.2	Транспортные планы и стоимость	34
12.3	Двойственная задача	34
12.4	Теорема L: синтетическая duality Монжа-Канторовича	35
12.4.1	Доказательство (схема)	35
12.5	c -выпуклость и транспортные потенциалы	35
12.6	Циклическая монотонность и монжевский вопрос	36
12.7	Транспорт и CVA: новый уровень двойственности	36
12.8	Почему Монж-Канторович важнее Монжа	36
13	Динамическая формулировка Бенаму-Бренье и Wasserstein-геометрия	37
13.1	Пространство траекторий и эволюция мер	37
13.2	Continuity equation во внутренней форме	37
13.3	Квадратичная транспортная энергия	37
13.4	Теорема M: синтетическая формула Бенаму-Бренье	38
13.4.1	Доказательство (схема)	38
13.5	Геодезики в пространстве вероятностей	38
13.6	Касательная структура и оттовская картина	38
13.7	Дисплейсмент-интерполяции и новые понятия выпуклости	39

14	Дисплейсмент-выпуклость, энтропия, Schrödinger bridge и Sinkhorn	40
14.1	Относительная энтропия как фундаментальный функционал . . .	40
14.2	Дисплейсмент-выпуклость	40
14.3	Энтропийно-регуляризованный транспорт	40
14.4	Теорема N: Schrödinger bridge и внутренняя Sinkhorn-структура .	41
14.4.1	Доказательство (схема)	41
14.5	Почему Schrödinger bridge принципиально важен для цикла . . .	41
14.6	Энтропия, curvature-dimension и долгосрочная программа	42
14.7	Sinkhorn как алгоритмический мост	42
15	JKO-схема и градиентные потоки в пространстве вероятностных объектов	43
15.1	От статической оптимизации к эволюции распределений	43
15.2	Свободная энергия и JKO-шаг	43
15.3	Теорема O: JKO и градиентные потоки	43
15.3.1	Доказательство (схема)	44
15.4	Примеры внутренних PDE	44
15.5	JKO как новый проксимальный анализ	44
15.6	От JKO к вероятностной версии SOTT-D	45
IV	Часть IV. Синтез с предыдущими работами и новый уровень гарантий	46
16	Подъем СВА и СНА на мерный уровень	47
16.1	Ожидаемые функционалы и вероятностная выпуклость	47
16.2	Мерные версии субградиента и монотонности	47
16.3	Ожидаемые монотонные операторы и стохастические вариационные неравенства	48
16.4	Lift теории Кларка и Моро	48
16.5	Mean-field lift и функционалы взаимодействия	48
16.6	Синтетическая стохастическая оптимизация как внутренняя теория	49
16.7	Научная роль главы 18	49
17	Вероятностная версия SOTT-D: от точечных траекторий к мерам на пространстве траекторий	50
17.1	Почему именно SOTT-D требует мерного подъема сильнее всего .	50
17.2	Пространство траекторных законов	50
17.3	Основной уровень вероятностных законов функционал	50
17.4	Теорема P: вероятностная версия SOTT-D	51
17.4.1	Доказательство (схема)	51
17.5	Сравнение с исходной НЗ	52
17.6	Мера на траекториях как новый физический объект	52
17.7	Вероятностный спуск вместо подтерминальной склейки	52
18	Теорема вероятностной экстракции и концентрации	53
18.1	От геометрической экстракции к геометрико-вероятностной . . .	53
18.2	Вероятностная экстракция через Γ	53
18.3	Теорема Q: концентрация и извлечение траектории	53
18.3.1	Доказательство (схема)	54

18.4	Лапласовский принцип и asymptotic selection	54
18.5	Почему Теорема Q - подлинное продолжение SOTT-D	54
18.6	Ограничения и честные границы Теоремы Q	55
19	Алгоритмы: Sinkhorn, JKO, транспортный проксимальный спуск, стохастический mirror-descent	56
19.1	Общий принцип алгоритмизации	56
19.2	Алгоритм 1: внутренний Sinkhorn	56
19.3	Алгоритм 2: JKO-дискретизация	56
19.4	Алгоритм 3: транспортный проксимальный спуск	57
19.5	Алгоритм 4: стохастический mirror-descent на пространстве мер .	57
19.6	Вычислительная интерпретация: particles, ensembles и global sections	58
19.7	Ограничения алгоритмической части	58
20	Кейс: робастная ансамблевая оптимизация траекторий в духе MGA-DSM / CR3BP	59
20.1	Назначение кейса	59
20.2	От детерминистической траектории к ансамблю траекторий . . .	59
20.3	Что здесь означает априорный закон	59
20.4	Робастностные преимущества новой постановки	59
20.5	Предлагаемый функционал миссии	60
20.6	Транспортная интерпретация миссии	60
20.7	Теоретический pipeline решения	60
20.8	Почему это действительно продолжение SOTT-D, а не смена темы	61
20.9	Ограничение кейса и его ценность	61
V	Часть V. Ограничения и дальнейшая программа	62
21	Главные результаты и их статус строгости	63
21.1	Сводка теорем I-Q	63
21.2	Что уже является фундаментальным вкладом независимо от модели	63
21.3	Что делает работу именно «фундаментальной монографией», а не приложением	64
21.4	Главная теоретическая инновация одной формулой	64
22	Ограничения, условные места и открытые проблемы	65
22.1	Необходимость реальной модели, реализующей A15-A26	65
22.2	Полноценный Radon-Nikodym и абсолютная непрерывность	65
22.3	Дизинтеграция в полной общности	65
22.4	Vrenier-тип теоремы и монжевский транспорт	65
22.5	Бесконечномерные объекты, гауссовы меры и SPDE	65
22.6	Capacity theory и quasi-everywhere analysis	66
22.7	Curvature-dimension в когезивном мире	66
22.8	Нестационарные, неуравновешенные и signed transports	66
22.9	Квантовая вероятность и некоммутативное продолжение	66
22.10	Алгоритмическая верификация и certified numerics	66
22.11	Почему условность не ослабляет, а усиливает работу	67

23 Заключение	68
23.1 Что было построено	68
23.2 Главный смысл серии из четырёх работ	68
23.3 Самый радикальный вывод	68
23.4 Почему это действительно «прорыв»	69
23.5 Последняя формула	69
Финальная редакционная проверка	70
24 Библиография	71
А Приложение А. Свод аксиом A1-A26	73
A.1 Аксиомы A1-A8 (каркас CBA)	73
A.2 Аксиомы A9-A14 (расширение CHA)	73
A.3 Аксиомы A15-A26 (настоящая монография)	74
A.4 Комментарий к аксиоматическому дизайну	74
В Приложение В. Карта теорем I-Q и их зависимостей	76
V.1 Таблица зависимостей	76
V.2 ASCII-карта зависимостей	76
V.3 Как читать эту карту	77
С Приложение С. Индекс обозначений	78
D Послесловие	79

Глава 1

Предисловие: почему настоящая монография должна была стать теорией меры и вероятности

История любого глубокого научного цикла определяется не только тем, что уже построено, но и тем, чего в нём **не хватает** для замыкания картины. В первых трёх работах данного цикла была проведена последовательная, почти неизбежная реконструкция анализа внутри гладкого когезивного топоса.

- В **SOTT-D** было показано, что смена математической вселенной – от ZFC-континуума к гладкому когезивному топосу – позволяет по-новому взглянуть на неинтегрируемость, хаос и глобальную оптимальность, а также сформулировать условные гарантии на уровне геометрической логики и спуска.
- В **СВА** был построен гладкий конструктивный вариационный анализ: выпуклость, двойственность, монотонные операторы, вариационные неравенства.
- В **СНА** был преодолен барьер «внутренней гладкости» через топологию Пенона, локалы значений и *generalized subdifferentials*, что позволило ввести подлинно негладкий анализ, не схлопывающийся к градиенту.

Но к началу 2026 года стало ясно: даже этот тройной фундамент ещё не завершён. Причина проста и фундаментальна. Во всех трёх монографиях присутствовало понятие **локальности**, но отсутствовало полноценное понятие **массы**. Мы умели говорить о точках, пучках, инфинитезимальных, касательных, нормалях, траекториях и функционалах, но не умели внутренне говорить о:

1. том, что верно **почти всюду**;
2. как интегрировать негладкие или слабые объекты;
3. как рассматривать не одну траекторию, а **распределение траекторий**;
4. как строить стохастическую оптимизацию и статистическое обучение не как внешнюю надстройку, а как внутреннюю часть теории;
5. как перевести жёсткую уникальность детерминистического оптимума в более устойчивую уникальность на уровне вероятностного закона.

Эта недостроенность не является технической мелочью. Она затрагивает саму природу математического описания реальности. Физические и вычислительные системы почти никогда не даны как абсолютно точечные. Их естественный язык – распределения, неопределённость, ансамбли, энтропия, концентрация, транспорт массы и информации. Поэтому любая программа, претендующая на фундаментальный статус, обязана включать мерный и вероятностный слой не как приложение, а как один из своих базовых столпов.

В классической математике именно теория меры и вероятности позволила перейти от геометрии к физике XX века: от кривых и поверхностей – к статистической механике, квантовой теории, уравнению теплопроводности, Brownian motion, стохастическим потокам, variational learning и optimal transport. Аналогично, в синтетическом мире гладких когезивных топосов переход от первых трёх работ к мерному слою неизбежно должен был пройти через построение внутренней меры.

Поэтому эта монография исходит из следующего принципа.

Принцип мерного завершения цикла. После геометризации логики, алгебраизации анализа и локализации негладкости следующий фундаментальный шаг – синтетизация массы, вероятности и транспорта.

Именно это делает настоящая работа. Она превращает предыдущий цикл из теории точек, пучков и траекторий в теорию **распределений на точках, пучках и траекториях**. Эта замена одновременно меняет:

- **семантику** (появляется “почти всюду”);
- **функциональный анализ** (появляются L^p , Sobolev, BV);
- **геометрию оптимизации** (появляются Wasserstein-geodesics и дисплейсмент-выпуклость);
- **теорию алгоритмов** (появляются Sinkhorn, JKO, stochastic mirror descent);
- **глобальные гарантии** (появляется возможность сначала доказать уникальность распределения, а затем извлечь точечный предел через концентрацию).

Это не просто расширение. Это качественное изменение всей программы. Если SOTT-D задал вопрос: «Можно ли регуляризовать сложность, сменив математическую вселенную?», то настоящая монография задаёт следующий вопрос: «Можно ли регуляризовать не только сложность, но и **неопределённость**, подняв оптимизацию с уровня точек на уровень мер?»

Мой ответ в этой работе: **да, если объединить SDG, локали, valuations, вероятностная монада и оптимальный транспорт в один внутренний язык.**

Глава 2

Диагноз трёх предыдущих работ и логика продолжения

2.1 Что было достигнуто в SOTT-D

SOTT-D построил наиболее амбициозный каркас цикла: синтетическую гамильтонову механику, модальную регуляризацию хаоса, синтетическую теорию оптимизации и теорему геометрической экстракции. Главным результатом стало утверждение, что хаотическая и фрактальная сложность может быть частично регуляризована при переходе к гладкому когезивному топосу, а задача глобальной оптимизации в принципе допускает конструктивную формализацию. Но одновременно SOTT-D выявил две стратегические проблемы.

Во-первых, жёсткость гипотезы H3: для глобального спуска требовалась подтерминальность Argmin -пучка, то есть, по существу, уникальность оптимума. Во-вторых, сама работа прямо отмечала необходимость дальнейшего развития конструктивной теории меры и Sobolev-пространств внутри SDG, без чего робастный анализ, weak formulations и measure-level dynamics остаются вне досягаемости.

2.2 Что было достигнуто в СВА

СВА дал гладкий вариационный анализ и конструктивную duality theory. Он доказал, что выпуклость, монотонность, сильная duality и вариационные неравенства можно построить во внутренней логике топоса без обращения к Хану-Банаху. Однако именно СВА открыто зафиксировал четыре направления продолжения: негладкий анализ, бесконечномерные пространства, ускоренные гамильтоновы методы и – что особенно важно для настоящей работы – **стохастическую оптимизацию и машинное обучение через синтетическую теорию вероятностей.**

2.3 Что было достигнуто в СНА

СНА решил центральную проблему, которую сам СВА оставил открытой: как построить подлинный негладкий анализ внутри мира, где всякая стрелка $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ гладка. Ответом стала топология Пенона и переход к локалям значений, generalized limits и обобщённым субдифференциалам. Но в самом конце СНА обнаружился следующий разрыв: без понятия меры невозможно полноценно сформулировать P -версию теоремы Радемахера, а без неё generalized differentiation остаётся топологически сильной, но measure-theoretically незавершённой.

2.4 Логическая неизбежность новой монографии

Таким образом, продолжение не является произвольным выбором темы. Оно логически вытекает из структуры уже построенного.

- **SOTT-D** требует measure/Sobolev apparatus для робастности, weak компактность и перехода к ансамблям.
- **СВА** требует synthetic probability для stochastic optimization.
- **СНА** требует almost-everywhere semantics для завершения P -Rademacher programme.

Поэтому настоящая работа не могла быть ни “ещё одной книгой по оптимизации”, ни “ещё одной книгой по HoTT”, ни “ещё одной книгой по PDE”. Её естественный предмет – **мера, вероятность, энтропия и транспорт**.

2.5 Главная гипотеза настоящей работы

Мы формулируем фундаментальную гипотезу, руководящую всей монографией.

Гипотеза Мерного Завершения. В гладком когезивном топосе существует естественный аксиоматический слой локалевой меры и вероятности, совместимый с P -топологией, нижние вещественные, когезивными модальностями и внутренней дифференциальной структурой, причём этот слой:

1. завершает функциональный анализ предыдущего цикла;
2. порождает внутреннюю Wasserstein-геометрию;
3. даёт новый класс глобальных гарантий через дисплейсмент-выпуклость и entropy regularization;
4. позволяет переводить детерминистическую оптимизацию траекторий в оптимизацию на пространстве мер на траекториях, а затем возвращаться назад через концентрацию и геометрическую экстракцию.

Вся монография есть по существу развернутое исследование этой гипотезы.

Глава 3

Номенклатура, обозначения и карта зависимостей

3.1 Базовые категории и объекты

Обозначение	Смысл
\mathcal{E}	фиксированный гладкий когезивный топос
\mathbf{R}	синтетическая прямая
$P(X)$	Репон-локаль P -открытых подобъектов объекта X
$\mathbf{R}_\ell, \mathbf{R}_u$	нижние и верхние вещественные локали
$\overline{\mathbf{R}}_\ell$	расширенные нижние вещественные
$\text{Val}(X)$	объект lower-continuous valuations на $P(X)$
$\text{Prob}(X)$	объект вероятностных valuations на X
$L_P^p(X, \mu)$	синтетическое L^p -пространство относительно μ
$W_P^{1,p}(X, \mu)$	синтетическое Sobolev-пространство
$BV_P(X, \mu)$	синтетическое пространство ограниченной вариации
$W_{2,p}$	синтетическая квадратичная Wasserstein-метрика
$\text{Ent}_P(\mu \nu)$	относительная энтропия
Γ	функтор глобальных сечений
\int, \flat, \sharp	когезивные модальности формы, дискретизации и кодискретизации

3.2 Продолжение системы теорем цикла

Первая монография СВА использовала буквенные теоремы A–D. Вторая монография СНА продолжила эту линию теоремами E–H. Настоящая работа использует продолжение:

- **Теорема I** – синтетическая теорема Рисса–Valuation;
- **Теорема J** – Fubini–Disintegration в representable Markov setting;
- **Теорема K** – P -Rademacher и существенные градиенты;
- **Теорема L** – синтетическая duality Монжа–Канторовича;
- **Теорема M** – синтетическая формула Бенаму–Бренье;
- **Теорема N** – энтропийный transport и Schrödinger bridge;
- **Теорема O** – JKO и градиентные потоки вероятностных объектов;
- **Теорема P** – вероятностная версия SOTT-D и устранение H3 на мерном уровне;

- **Теорема Q** – геометрико-вероятностная экстракция и концентрация.

3.3 Статус результатов

Во избежание ложной строгости мы сразу фиксируем три статуса утверждений.

1. **Строгий результат в аксиоматическом каркасе.** Теорема полностью доказана при явно указанных аксиомах A1–A26.
2. **Условный результат.** Теорема доказана при дополнительных hypotheses о regularity, disintegration, doubling/Poincaré, дисплейсмент-выпуклость и т.п.
3. **Программный результат / гипотеза.** Утверждение сформулировано как следующий шаг; в настоящем изложении оно не объявляется завершённым монографии на завершённое доказательство.

Эта классификация является принципиальной частью научной честности работы: задача настоящей монографии не имитировать завершённость там, где её ещё нет, а построить настолько сильный и прозрачный каркас, чтобы стало очевидно, что уже доказано, что доказывается при разумных допущениях и где проходит истинная линия фронта.

Часть I

Часть I. Фундамент: от гладкости и негладкости к массе и распределению

Глава 4

Предел цикла SOTT-D / CBA / CHA и необходимость новой парадигмы

4.1 От точки к распределению как новый фундаментальный переход

Классический анализ обычно развивается в последовательности:

1. геометрия точек и кривых;
2. дифференциальный и вариационный анализ;
3. функциональный анализ;
4. теория меры и вероятности;
5. статистическая и транспортная динамика.

Три предыдущие монографии цикла в синтетическом мире прошли первые три с половиной шага: геометрия, вариация, негладкость и частично функциональный анализ были построены, но теория меры ещё отсутствовала. Следовательно, рассматриваемый переход – это не произвольная смена темы, а аналог исторически неизбежного перехода от классического анализа XIX века к математической физике и вероятности XX века.

4.2 Почему мера не может быть просто заимствована извне

Может возникнуть соблазн сказать: «Зачем строить внутреннюю меру? Достаточно взять внешнюю классическую меру на $\Gamma(X)$ и работать там». Но этот путь разрушает саму цель программы по трём причинам.

Во-первых, внешняя мера не видит внутреннюю логику топоса. Она не знает ничего о P -неразличимости, локалях значений и когезивных модальностях.

Во-вторых, внешняя мера разрывает correspondence “существование = вычислимость”, которое лежит в основании всей конструктивной архитектуры цикла.

В-третьих, внешняя мера не взаимодействует естественным образом с внутренними обобщёнными производными, пучками, morphism-level transport и геометрической логикой. Она может использоваться для интерпретации, но не для построения самой теории.

Следовательно, требуется не внешний импорт, а **внутренняя реконструкция** меры.

4.3 Почему оптимальный транспорт – не приложение, а центр новой теории

На первый взгляд, оптимальный транспорт можно было бы считать частной темой внутри вероятности. В действительности именно он оказывается центральным узлом всей монографии, потому что связывает сразу четыре мира.

1. **Меру**: транспорт работает с вероятностными объектами и планами.

2. **Выпуклость и duality:** transport duality продолжает идеи CBA.
3. **Негладкость:** транспортные потенциалы, subdifferential структура и метрические наклоны продолжают идеи CHA.
4. **Динамику и оптимизацию:** Benamou–Brenier и ЖКО напрямую продолжают идеи SOTT-D.

Поэтому transport geometry играет здесь ту же роль, какую симплектическая геометрия играла в SOTT-D: это не частный технический модуль, а структурная ось всей новой работы.

4.4 Принцип вероятностной регуляризации

Мы вводим второй guiding principle, который станет ключевым в главах 18–20.

Принцип вероятностной регуляризации. Если детерминистическая задача глобальной оптимизации страдает от неуникальности, негладкости или чрезмерной чувствительности, то переход к оптимизации на пространстве мер с энтропийной и транспортной регуляризацией может восстановить выпуклость и уникальность на уровне распределений; точечное решение затем восстанавливается как предел концентрации.

Этот принцип формально обобщает идеи SOTT-D. Там сложность регуляризовалась модально, за счёт перехода к форме. Здесь неуникальность и робастность регуляризуются дополнительно – за счёт перехода от точек к распределениям.

4.5 Новая философия: не «точка против меры», а «точка как предел меры»

В классической математике мера часто воспринималась как вторичный объект, построенный на точках. В настоящей монографии используется обратную перспективу: в задачах сложной оптимизации и динамики **мера является первичной**, а детерминистическая точка – предельным, концентрированным случаем.

Это философское смещение имеет огромные последствия.

- В SOTT-D вместо единственной оптимальной траектории можно сначала искать оптимальный **закон на траекториях**.
- В CHA generalized gradient можно сначала строить как almost-everywhere-объект, а потом брать его essential hull.
- В CBA stochastic optimization уже не выглядит внешним приложением, а оказывается прямым продолжением внутренней геометрии выпуклости.

Именно в этом смысле настоящая монография замыкает цикл не технически, а мировоззренчески.

Глава 5

Аксиоматический фундамент: от A1-A14 к A15-A26

5.1 Наследуемый каркас A1-A14

Мы принимаем без изменения базовый каркас предыдущих монографий.

- **A1-A8** – аксиомы СВА: Коск–Lawvere, микролинейность, структуры позитивности, принцип интегрирования, совместимость порядка и интегрирования, достаточность первого и второго порядка, хорошая адаптированность модели.
- **A9-A14** – аксиомы СНА: нетривиальность Репон-структуры, мост к классике на глобальных сечениях, евклидова структура, P -Weierstrass для сильно выпуклых функционалов, конечномерная полярность и, опционально, P -вариант принципа Экеланда.

Все они остаются в силе. Настоящая монография не меняет логический фундамент, а достраивает поверх него **мерный слой**.

5.2 Новые аксиомы A15-A26

Ниже приведён минимальный пакет новых допущений. Его задача – не скрыть трудности, а сделать их явными.

5.2.1 A15. Объект valuations

Для каждого конечномерного микролинейного объекта X существует объект

$$\text{Val}(X)$$

нижнеполу непрерывных valuations на локалы $P(X)$, то есть отображений

$$\nu : P(X) \rightarrow \mathbf{R}_\ell$$

удовлетворяющих монотонности, конечной аддитивности на конечных объединениях и Scott-непрерывности относительно направленных супремумов.

5.2.2 A16. Нормировка и вероятностные valuations

Подобъект

$$\text{Prob}(X) \leftrightarrow \text{Val}(X)$$

состоит из normalized valuations, для которых $\nu(X) = 1$. Объект $\text{Prob}(X)$ трактуется как пространство вероятностных законов на X .

5.2.3 A17. Локалевая версия теоремы Рисса

Положительные линейные функционалы на объекте bounded P -нижнеполу непрерывных функций $\text{LSC}_b(X, \mathbf{R}_\ell)$ эквивалентны valuations из $\text{Val}(X)$. Эта эквивалентность должна быть натуральной по X и совместимой с pushforward вдоль морфизмов.

5.2.4 A18. Произведение, Фубини и Tonelli

Для любых X, Y существуют естественные product-valuations и операции интегрирования, удовлетворяющие внутренним формам Fubini и Tonelli для неотрицательных и интегрируемых функций:

$$\int_{X \times Y} f d\pi = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\pi_x(y) \right) d\mu(x),$$

где π - valuation на произведении, а π_x - условное семейство.

5.2.5 A19. Вероятностная монада

Функтор $X \mapsto \text{Prob}(X)$ образует коммутативную аффинную монаду с unit

$$\eta_X : X \rightarrow \text{Prob}(X), \quad x \mapsto \delta_x,$$

и multiplication

$$\mu_X : \text{Prob}(\text{Prob}(X)) \rightarrow \text{Prob}(X),$$

совместимой с барицентрической структурой.

5.2.6 A20. Representable марковская структура и дезинтеграция

Kleisli-категория монадического функтора Prob является representable Markov category в достаточном для наших целей смысле: существуют ядра, условные распределения и дезинтеграции для joint laws на стандартных для теории объектов (конечномерные микролинейные объекты, их r -локальные компакты и экспоненциалы траекторного типа).

5.2.7 A21. P -нулевые подобъекты

Для каждой вероятности $\mu \in \text{Prob}(X)$ существует идеал \mathcal{N}_μ нулевых подобъектов. Предикат

$$A \in \mathcal{N}_\mu$$

интерпретируется как « A имеет μ -меру ноль». Он устойчив относительно подобъектов, счётных объединений в геометрически допустимых контекстах и pushforward.

5.2.8 A22. Локальная полнота функциональных пространств

Для $1 \leq p < \infty$ пространства $L^p_p(X, \mu)$ существуют как объекты/локали значений и являются полными; определены слабые градиенты и Sobolev-closures через интегральную двойственную структуру.

5.2.9 A23. Doubling/Poincaré-режим на \mathbf{R}^n

Для объектов, соответствующих конечномерным евклидовым пространствам, выполняется локальная версия удвоения меры и $(1, p)$ -Poincaré inequality. Эта аксиома необходима для P -Rademacher и weak differentiability.

5.2.10 A24. Wasserstein-геометрия

Для вероятностей конечного второго момента определён объект

$$\text{Prob}_2(X) \subseteq \text{Prob}(X)$$

и квадратичная Wasserstein-метрика $W_{2,P}$; пространство $(\text{Prob}_2(X), W_{2,P})$ геодезически полно в нужных классах объектов.

5.2.11 A25. Энтропия и дисплейсмент-выпуклость

Относительная энтропия

$$\text{Ent}_P(\mu \mid \nu)$$

определена как нижнеполунепрерывный функционал со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, совместимый с pushforward и geodesic выпуклостью вдоль $W_{2,P}$ -геодезик.

5.2.12 A26. Вероятностная экстракция

Функтор глобальных сечений Γ сохраняет вероятностные объекты, интегралы геометрически определимых функционалов, а также предельные процедуры концентрации в тех ситуациях, где определения построены геометрическими или геометризующими формулами.

5.3 Комментарий о природе аксиом

A15–A26 не следует читать как произвольные желания. Каждая из них имеет независимую опору в современной литературе по SDG, локалям, valuations, constructive analysis, категории Маркова и оптимальный транспорт [4–12, 17–20, 34].

- A15–A18 укоренены в locale/valuation tradition и constructive Riesz-type подходах.
- A19–A20 связаны с вероятностная монада и категории Маркова.
- A21–A23 продолжают constructive metric-measure analysis.
- A24–A25 являются внутренним транспортным аналогом классической геометрии Вассерштейна.
- A26 – прямое продолжение экстракционного протокола SOTT-D, но уже на probabilistic objects.

Тем самым новый слой аксиом не привносит чуждую философию; он является естественным развёртыванием уже использованной ранее методологии.

5.4 Основные рабочие гипотезы

Помимо аксиом мы фиксируем три рабочие гипотезы, используемые в поздних главах.

- **H_P1 (геометризуемость измеримых предикатов):** почти-всюду свойства, существенные супремумы и weak closures формулируются через локальные конструкции, совместимые с Γ .
- **H_P2 (плотность/теснота/компактность):** семейства вероятностных объектов с равномерным контролем момента и энтропии являются $W_{2,P}$ -предкомпактными.

- **H_P3 (концентрационный предел):** если энтропийно-регуляризованный функционал имеет уникальный минимизатор μ_τ , то при $\tau \rightarrow 0$ его предельные точки поддерживаются на множестве минимизаторов исходного функционала.

H_P1-H_P3 будут выступать транспортно-вероятностными аналогами гипотез H1-H3 из SOTT-D.

Глава 6

Локалы, valuations и внутренняя мера

6.1 Почему valuations, а не σ -алгебры

Внутри гладкого топоса язык σ -алгебр неудобен по крайней мере по двум причинам. Во-первых, он плохо согласуется с геометрической логикой: счётные операции традиционной measure theory не всегда естественно интерпретируются. Во-вторых, σ -алгебра – это структура на множестве подмножеств, тогда как локальный подход позволяет работать с наблюдаемыми открытыми и их логической структурой без примата точек.

Valuation-theory решает обе проблемы. Вместо “measure on all measurable sets” рассматривается **массу на открытые элементы**, то есть valuation как обобщённую внутреннюю меру на локалы. В классических регулярных ситуациях это восстанавливает привычные Radon measures, но в синтетическом мире сохраняет согласие с конструктивностью и point-free topology.

6.2 Определение valuation

Определение 8.2.1 (нижняя valuation). Пусть X – объект топоса. Нижней valuation на $P(X)$ называется морфизм

$$\nu : P(X) \rightarrow \mathbf{R}_\ell,$$

удовлетворяющий следующим условиям:

1. $\nu(\emptyset) = 0$;
2. $U \leq V \Rightarrow \nu(U) \leq \nu(V)$;
3. $\nu(U \vee V) + \nu(U \wedge V) = \nu(U) + \nu(V)$;
4. для любого направленного семейства (U_i)

$$\nu\left(\bigvee_i U_i\right) = \sup_i \nu(U_i).$$

Определение 8.2.2 (вероятностная valuation). Valuation ν называется вероятностной, если

$$\nu(X) = 1.$$

6.3 Pushforward и pullback массы

Если $f : X \rightarrow Y$ – морфизм, то naturally определён pushforward

$$f_\# : \text{Val}(X) \rightarrow \text{Val}(Y),$$

задаваемый формулой

$$(f_\# \nu)(V) := \nu(f^{-1}(V)).$$

Здесь критически важно, что valuation действует на открытые элементы, а inverse image для открытые элементы является геометрически естественной конструкцией. Это делает pushforward внутренне беспроблемным, тогда как pullback меры в классическом смысле часто требует дополнительной абсолютной непрерывности.

6.4 Tightness и Radon-тип регулярности

Для последующего анализа нужна не произвольная valuation, а конструктивно хорошая – аналог Radon measure.

Определение 8.4.1 (Radon-type valuation). Вероятностная valuation μ на конечномерном объекте X называется Radon-type, если для всякого P -открытого U величина $\mu(U)$ аппроксимируется снизу массами компактов внутри U , а для всего X существует tight family компактов, поглощающая всю массу.

Внешне это выглядит как стандартная regularity. Внутренне же именно эта regularity позволяет определить интегрирование не только простых, но и нижнеполунепрерывных функций, а позднее – доказать компактность в пространствах вероятностных объектов.

6.5 Плотность Dirac valuations и эмпирическая интерпретация

Одним из самых важных философских и технических фактов является то, что в богатых моделях вероятностные valuations допускают approximation finite samples. Это означает, что пространство вероятностей – не «мистическое множество законов», а completion по отношению к эмпирическим комбинациям Dirac-масс.

Это особенно важно для нашей программы, поскольку связывает constructive probability с вычислимостью: распределение интерпретируется как предел конечных выборок, а не как внешняя платоническая сущность.

6.6 Теорема I: синтетическая теорема Рисса-Valuation

Теорема I (Рисс-Valuation correspondence).

(Строгий результат в каркасе A15-A18.)

Пусть X – конечномерный микролинейный объект. Тогда существует натуральное биективное соответствие между:

1. положительными линейными функционалами

$$I : \text{LSC}_b(X, \mathbf{R}_\ell) \rightarrow \mathbf{R}_\ell,$$

сохраняющими направленные супремумы и $I(1) = 1$;

2. вероятностными valuations

$$\mu \in \text{Prob}(X).$$

Соответствие задаётся формулами

$$I_\mu(f) = \int_X f d\mu,$$

и

$$\mu_I(U) = \sup\{I(\varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq 1_U, \varphi \text{ simple/LSC}\}.$$

6.6.1 Доказательство (схема)

1. Из valuation μ строится интеграл сначала на нижних простых функциях

$$\phi = \sum_{k=1}^m a_k 1_{U_k}, \quad a_k \in \mathbf{Q}_{\geq 0},$$

по формуле

$$\int \phi d\mu = \sum_k a_k \mu(U_k).$$

Корректность следует из additivity valuation.

2. Для общей нижнеполу непрерывной функции f используем directed supremum её простых нижних аппроксимаций:

$$\int f d\mu := \sup \left\{ \int \phi d\mu \mid \phi \leq f, \phi \text{ simple} \right\}.$$

Scott-непрерывность valuation гарантирует good behaviour suprema.

3. В обратную сторону, имея функционал I , определяем массу open-подобъекта через нижнее приближение индикатора 1_U . Линейность и сохранение направленные супремумы обеспечивают valuation axioms.
4. Натуральность по X следует из определения pushforward через inverse image открытые элементы.
5. Биактивность получается стандартным аргументом взаимной реконструкции простые аппроксимации и индикаторы открытых элементов.
-

6.7 Последствия Теоремы I

Теорема I имеет фундаментальное значение, потому что превращает measure theory из внешней техники в внутреннюю duality между mass и observables. Она позволяет в дальнейшем свободно переходить между двумя языками:

- языком valuations (масс на открытые элементы);
- языком интегралов (функционалов на нижнеполу непрерывный observables).

Именно это двойное описание делает возможным перенос идей СВА и СНА на мерный уровень.

Глава 7

Интегралы, нижние вещественные и локалевая версия теоремы Рисса

7.1 Почему именно lower reals

Уже в SOTT-D и СНА нижние вещественные играли решающую роль: они сохраняют геометричность порядка, естественны для инфимумов, нижняя полунепрерывность и вариационного анализа. Теперь их роль становится ещё глубже. Measure-theoretic objects в point-free setting естественно принимают значения именно в \mathbf{R}_ℓ , поскольку интеграл нижнеполунепрерывной функции должен быть сам нижнеполунепрерывным по мере и по подынтегральному объекту.

Это означает, что choice of codomain не является стилистическим. Он встроен в саму логику теории.

7.2 Интеграл нижнеполунепрерывной функции

Определение 9.2.1. Для $\mu \in \text{Val}(X)$ и нижнеполунепрерывной $f : X \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ определяем

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \sum_{k=1}^m q_k \mu(U_k) \mid \sum_{k=1}^m q_k 1_{U_k} \leq f, q_k \in \mathbf{Q}_{\geq 0} \right\}.$$

Эта формула является локалевой конструктивной версией интеграла типа Шоке.

7.3 Монотонная сходимость

Лемма 9.3.1 (monotone convergence). Пусть $f_n \uparrow f$ - направленно возрастающее семейство нижнеполунепрерывных функций. Тогда

$$\int f d\mu = \sup_n \int f_n d\mu.$$

Доказательство. Прямая сторона тривиальна по монотонности интеграла. Обратная следует из того, что всякая simple lower approximation к f уже ограничена некоторым f_n , поскольку lower reals интерпретируют directed lower information. \square

7.4 Fatou и нижняя полунепрерывность

Лемма 9.4.1 (Fatou-type inequality). Для нижнеполунепрерывного \liminf имеем

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

В point-free setting это не просто классическая мера, а проявление того, что интеграл сам является нижнеполу непрерывным функционалом на наблюдаемых. Эта лемма будет базовым инструментом для transport duality и JKO-компактность.

7.5 Fubini и произведения

Пусть $\mu \in \text{Prob}(X)$ и $\nu \in \text{Prob}(Y)$. Product valuation $\mu \otimes \nu$ определяется на basic открытые элементы $U \times V$ как

$$(\mu \otimes \nu)(U \times V) = \mu(U)\nu(V),$$

после чего продолжается Scott-непрерывностью.

Теорема 9.5.1 (Fubini-Tonelli).

(Строгий результат при A18.) Для любой nonnegative нижнеполу непрерывной функции $f : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ выполнено

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

7.5.1 Доказательство (схема)

1. Для indicator-rectangles и rational simple functions утверждение проверяется напрямую.
2. Для возрастающих направленные супремумы переносятся по Scott-непрерывности интеграла.
3. Lower-semicontinuity внутренней операции интегрирования обеспечивает корректность итерации. \square

7.6 Условное математическое ожидание

Внутри representable Markov setting условное ожидание удобно понимать как morphism

$$\mathbb{E}[f \mid Y] : Y \rightarrow \mathbf{R}_\ell,$$

получающийся после дезинтеграции совместный закон π на $X \times Y$ в семейство ядра π_y и формулы

$$\mathbb{E}[f \mid Y](y) = \int_X f(x, y) d\pi_y(x).$$

Это определение совместимо и с measure-theoretic intuition, и с categorical viewpoint: conditioning становится просто композиционной операцией в вероятностной монаде.

Глава 8

Вероятностные объекты, Markov-ядра и дизинтеграция

8.1 Вероятность как монада

Одно из самых глубоких преимуществ категориального подхода к вероятности состоит в том, что probability theory перестаёт быть набором частных конструкций и становится единым algebraic effect. В нашем контексте это особенно важно: уже три предыдущие монографии работали с adjunctions, monads, descent и geometric logic. Поэтому вероятность должна входить в теорию не как «сверху приложенная measure», а как естественная монада.

Определение 10.1.1 (вероятностная монада). Объекты $\text{Prob}(X)$ вместе с операциями η и μ образуют коммутативную аффинную монаду на подкатегории допустимых объектов гладкого топоса.

Интуитивно:

- $\eta_X(x) = \delta_x$ - чистое состояние;
- μ_X - усреднение распределения распределений;
- morphism $X \rightarrow \text{Prob}(Y)$ - это Markov-ядро.

8.2 Markov-ядра

Определение 10.2.1. Markov-ядро из X в Y - это морфизм

$$K : X \rightarrow \text{Prob}(Y).$$

Для каждого $x \in X$ ядро задаёт вероятность $K(x)$ на Y . Composition ядра определяется через bind/integration:

$$(L \odot K)(x) = \int_Y L(y) dK(x)(y).$$

Это даёт внутренний язык случайных переходов, стохастических итераций и conditionals.

8.3 Совместные законы и маргиналы

Если $K : X \rightarrow \text{Prob}(Y)$ и $\mu \in \text{Prob}(X)$, то induced совместный закон на $X \times Y$ задаётся формулой

$$\pi(dx, dy) = \mu(dx)K(x, dy).$$

Внутренне это означает valuation на открытые элементы произведения, получаемую из итерационного интеграла по Fubini.

Marginals π_X и π_Y определяются pushforward вдоль projections. Таким образом, базовая статистическая конструкция “joint vs marginal vs conditional” полностью интернализуется.

8.4 Теорема J: Fubini-Disintegration в representable Markov setting

Теорема J (Fubini-Disintegration).

(Условный результат при A18-A20.)

Пусть $\pi \in \text{Prob}(X \times Y)$ – совместный закон, а Y принадлежит классу объектов, для которых существует representable условная структура. Тогда существует ядро

$$\kappa : Y \rightarrow \text{Prob}(X),$$

такой что

1. π восстанавливается из второго маргинала $\nu := \pi_Y$ и κ по формуле

$$\pi(dx, dy) = \kappa(y)(dx) \nu(dy);$$

2. для всякой нижнеполунепрерывный $f : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}_\ell$

$$\int_{X \times Y} f d\pi = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\kappa(y)(x) \right) d\nu(y).$$

8.4.1 Доказательство (схема)

1. По A20 representability probabilities обеспечивает существование объекта conditionals.
2. Совместный закон рассматривается как morphism $1 \rightarrow \text{Prob}(X \times Y)$.
3. Через universal собственный representable марковская структура строится factorization через $Y \rightarrow \text{Prob}(X)$.
4. Fubini identity then follows from A18 and definition of ядро composition. \square

8.5 Значение Теоремы J

Теорема J – это точка, где теория меры переходит в теорию вероятности в строгом смысле. До неё у нас была масса и интеграл. После неё появляются:

- условные распределения;
- условные ожидания;
- байесовская обратимость;
- стохастические алгоритмы как композиции ядра;
- возможность говорить о вероятностных потоках на пространствах траекторий.

Именно эта теорема делает возможными главы 16–22.

8.6 Барцентры и выпуклая геометрия вероятностных объектов

Вероятностная монада обладает не только measure-theoretic, но и convex-geometric смыслом. Для suitable линейных/аффинных объектов определён barycenter map

$$\text{bar} : \text{Prob}(V) \rightarrow V,$$

совместимый с affine morphisms. Это фундаментально связывает новую теорию с CVA:

- expectation становится barycenter-операцией;

- Jensen-type неравенства оказываются геометрическими свойствами barycentric monad;
- stochastic optimization можно трактовать как оптимизацию barycentric lifts функционалов.

8.7 Промежуточный вывод

На этом этапе мерный слой уже сформирован. У нас есть:

1. valuations и интегралы;
2. probability objects;
3. ядра и условная структура;
4. Fubini/disintegration;
5. барицентрическая выпуклость.

Но пока ещё не хватает того, ради чего всё это строилось: понятия almost everywhere, функциональных пространств и generalized differentiability “по мере”. Этому посвящена следующая часть.

Часть II

Часть II. Почти всюду анализ и функциональные пространства

Глава 9

***P*-нулевые подобъекты и семантика «почти всюду»**

9.1 Почему without almost-everywhere теория остаётся незамкнутой

В США негладкость была интернализирована через *P*-локали, но отсутствовало мерное различие между «патологией на тонком множестве» и «структурным нарушением на массивном множестве». Именно это различие и выражает фраза «почти всюду».

Без almost-everywhere semantics невозможны по крайней мере пять центральных операций:

1. факторизация функций по модулю нулевых множеств;
2. weak derivatives и интегрирование по частям;
3. корректное определение L^p - и Sobolev-пространств;
4. формулировка теоремы Радемахера;
5. различие поточечного и существенного выпуклого корпуса в теории Кларка.

Следовательно, понятие «почти всюду» – не техническая надстройка, а мост между США и подлинным функциональным анализом.

9.2 Нулевые подобъекты

Определение 11.2.1. Пусть $\mu \in \text{Prob}(X)$. Подобъект $N \hookrightarrow X$ называется μ -нулевым, если для всякого *P*-открытого $U \supseteq N$ выполнено

$$\inf_{U \supseteq N} \mu(U) = 0.$$

Если модель допускает регулярность Radon-типа, это эквивалентно условию $\mu^*(N) = 0$, где μ^* – внешняя ёмкость, индуцированная valuation.

Такое определение принципиально локалево: нулевой является не просто «множество без точек массы», а подобъект, который можно покрыть открытые элементы сколь угодно малой массы.

Лемма 11.2.2. Класс \mathcal{N}_μ всех μ -нулевых подобъектов образует идеал: 1. если $A \subseteq B$ и $B \in \mathcal{N}_\mu$, то $A \in \mathcal{N}_\mu$; 2. если $A, B \in \mathcal{N}_\mu$, то $A \cup B \in \mathcal{N}_\mu$; 3. если (A_n) – геометрически допустимая счётная семья и $A_n \in \mathcal{N}_\mu$, то $\bigcup_n A_n \in \mathcal{N}_\mu$.

Доказательство. Пункты (1) и (2) следуют непосредственно из монотонности valuation и субаддитивности внешней ёмкости. Пункт (3) требует либо явной σ -аддитивности на построенной measurable completion, либо локалевой формы теоремы Бэра-Леви, допустимой в выбранной модели. Именно здесь видно, почему формализация «почти всюду» должна быть встроена в аксиоматику, а не оставлена на уровне интуиции. \square

9.3 Равенство почти всюду и пространство L_P^0

Определение 11.3.1. Две measurable functions $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ называются μ -почти всюду равными, если

$$\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{N}_\mu.$$

Мы пишем

$$f = g \quad \mu\text{-п.в.}$$

Отношение almost-everywhere equality совместимо с algebraic operations, sup/inf и интегралом на классе μ -интегрируемых функций.

Определение 11.3.2. Пространством

$$L_P^0(X, \mu)$$

называется фактор-класс measurable functions по отношению μ -п.в.-равенства.

Это пространство – первичный measurable layer, из которого позже выделяются L^p , Sobolev и BV. В отличие от пространств с поточечным равенством, оно сразу «забывает» о структурно несущественных патологиях на нулевых множествах.

9.4 Существенные супремумы, носители и essential hull

Определение 11.4.1 (essential supremum). Для $f \in L_P^0(X, \mu)$ её существенный супремум определяется как

$$\operatorname{ess\,sup}_\mu f = \inf \left\{ a \in \overline{\mathbf{R}}_\ell \mid \mu(\{f > a\}) = 0 \right\}.$$

Аналогично определяется $\operatorname{ess\,inf}_\mu f$.

Определение 11.4.2 (essential support). Для μ -класса функции f её существенный носитель – наименьший с точностью до μ -нулевых множеств P -замкнутый подобъект $\operatorname{ess\,supp}_\mu(f)$, вне которого $f = 0$ почти всюду.

Эти определения играют в нашей теории ту же роль, какую в США играли P -замыкание и P -граница: они извлекают истинную геометрию объекта после факторизации по логически тонким и мерно несущественным слоям.

9.5 Почти-всюду свойства и дизинтеграция

Одним из преимуществ того, что вероятность организована как монада и Markov-структура, является естественность almost-everywhere semantics относительно условных распределений.

Предложение 11.5.1 (Fubini almost everywhere).

(Строгий результат при A18–A21 и Теореме J.)

Пусть $\pi \in \operatorname{Prob}(X \times Y)$, $\nu = \pi_Y$, а $\kappa : Y \rightarrow \operatorname{Prob}(X)$ – ядро дизинтеграции. Если подобъект $E \hookrightarrow X \times Y$ является π -нулевым, то для ν -почти всех y сечение

$$E_y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$$

является $\kappa(y)$ -нулевым.

Схема доказательства. Рассмотрим индикаторную lower-approximation 1_E и применим Теорему J к функции $f = 1_E$. Из

$$0 = \pi(E) = \int_Y \kappa(y)(E_y) d\nu(y)$$

и неотрицательности подинтегральной функции следует, что $\kappa(y)(E_y) = 0$ для ν -почти всех y . \square

Это предложение является фундаментальным: оно позволяет корректно говорить о слабых производных по переменным, о PDE «почти по времени», о ядро-valued algorithmics и о transport plans, определённых с точностью до нуля.

9.6 Pushforward и инвариантность нулевых множеств

Предложение 11.6.1. Если $f : X \rightarrow Y$ - морфизм и $N \in \mathcal{N}_\mu$, то $f(N) \in \mathcal{N}_{f_*\mu}$ при условии, что f геометрически измерим и не разрушает нулевые множества.

Это свойство не всегда автоматически верно без условий регулярности; поэтому в общей теории мы держим его как часть A21/H_P1. Но в конечно-мерных хорошо адаптированных моделях именно оно делает возможной корректную формулировку почти-всюду свойств на пространствах траекторий.

9.7 Почти-всюду как логико-геометрическая модальность

На концептуальном уровне можно рассматривать almost-everywhere semantics как новую модальность, зависящую от выбранной вероятности μ :

$$\text{AE}_\mu(\varphi) \iff \mu(\{x \mid \neg\varphi(x)\}) = 0.$$

Эта модальность не заменяет внутреннюю логику топоса, но обогащает её: к геометрической истинности и P -истинности добавляется truth up с точностью до нулевой структуры.

Именно этот трёхслойный взгляд - - геометрически; - P -топологически; - почти всюду - и составляет новый фундамент, без которого функциональный анализ в цикле не может считаться завершённым.

Глава 10

Пространства L^p , $W_P^{1,p}$, BV_P и слабоградиентный в гладком топосе

10.1 От measurable layer к функциональным пространствам

После введения almost-everywhere equivalence следующая естественная задача – построить пространства, где можно измерять размер и регулярность функций. В классике это роль L^p , Sobolev и BV. В синтетическом мире мы стремимся сохранить три принципа одновременно:

1. **конструктивность**: определения должны использовать lower/upper reals и локальные супремумы;
2. **совместимость с СНА**: слабая регулярность должна улавливать негладкие функции;
3. **совместимость с transport geometry**: пространства должны быть пригодны для continuity equations, ЖКО и entropy methods.

10.2 Пространства L^p

Определение 12.2.1. Для $1 \leq p < \infty$ и класса $f \in L_P^0(X, \mu)$ определим

$$\|f\|_{L_P^p(\mu)} := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

где правая часть понимается в lower-real sense с последующей Dedekind-реализацией, если требуется двусторонняя метрика.

Пространство

$$L_P^p(X, \mu) := \{f \in L_P^0(X, \mu) \mid \|f\|_{L_P^p(\mu)} < \infty\}$$

факторизуется по almost-everywhere равенству и снабжается естественной псевдометрикой, которая становится метрикой на факторе.

Лемма 12.2.2 (Гёльдер). Если $1 < p, q < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$, то

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_{L_P^p(\mu)} \|g\|_{L_P^q(\mu)}.$$

Доказательство. Конструктивная версия стандартного доказательства через Young inequality и интегрирование. Все используемые неравенства геометричны и совместимы с \mathbf{R}_ℓ . \square

Лемма 12.2.3 (Минковский). Для $f, g \in L_P^p(X, \mu)$

$$\|f + g\|_{L_P^p(\mu)} \leq \|f\|_{L_P^p(\mu)} + \|g\|_{L_P^p(\mu)}.$$

Тем самым $L_P^p(X, \mu)$ является нормированным объектом; полнота содержится в A22.

10.3 Локальная интегрируемость и пространство тестовых функций

Для weak formulations требуется тестовый класс, одновременно достаточно гладкий и достаточно плотный.

Определение 12.3.1. Пусть $U \hookrightarrow X$ - P -открытый подобъект. Тогда

$$\mathcal{D}_P(U)$$

обозначает объект compactly supported smooth test functions на U в синтетическом смысле: функции $\phi : U \rightarrow \mathbf{R}$, чьи носители лежат в P -компакте и которые являются внутренне гладкими стрелками.

В гладком топосе тестовые функции технически гораздо проще классических, потому что гладкость встроена в саму семантику стрелок. Но теперь гладкость тестовых функций сталкивается с негладкостью самих объектов $u \in L^p_P$, и именно их взаимодействие создаёт weak analysis.

10.4 Слабые производные через интегральную двойственность

Пусть $X = \mathbf{R}^n$ или конечномерный евклидов объект.

Определение 12.4.1 (weak derivative). Функция $u \in L^1_{\text{loc},P}(X, \mu)$ имеет слабую производную $G_i \in L^1_{\text{loc},P}(X, \mu)$ по i -й координате, если для всякой $\phi \in \mathcal{D}_P(X)$ выполнено

$$\int_X u \partial_i \phi \, d\mu = - \int_X G_i \phi \, d\mu.$$

Вектор $G = (G_1, \dots, G_n)$ называется weak gradient и обозначается $\nabla^w u$.

Это определение прямо продолжает идеи СВА: вместо точечный infinitesimals используется интегральную duality между объектом функции и объектом тестовых полей.

10.5 Upper gradients и метрический взгляд

В транспортно-геометрических задачах часто полезно альтернативное, метрическое описание weak regularity.

Определение 12.5.1 (p -weak upper gradient). Неотрицательная measurable function $g \in L^p_P(X, \mu)$ называется p -weak upper gradient для u , если для P -почти всякой абсолютно непрерывной кривой $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ выполнено

$$|u(\gamma(1)) - u(\gamma(0))| \leq \int_0^1 g(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| \, dt.$$

В классическом metric-measure analysis (Shanmugalingam, Cheeger) upper gradients являются наиболее гибким способом определения Sobolev spaces. В нашей теории они особенно естественны, потому что напрямую совместимы с continuity equations, Benamou–Brenier и JKO.

10.6 Определение Sobolev-пространств

Определение 12.6.1 (Sobolev-пространство). Для $1 \leq p < \infty$ задаём

$$W^{1,p}_P(X, \mu) := \{u \in L^p_P(X, \mu) \mid \exists g \in L^p_P(X, \mu) : g - p\text{-weak upper gradient для } u\}.$$

Минимальный такой g (если он существует) обозначается $|\nabla u|_{w,p}$ и называется минимальным weak gradient.

Норма определяется формулой

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \| |\nabla u|_{w,p} \|_{L^p}.$$

10.7 Эквивалентность слабой и метрической версий градиента

Теорема 12.7.1 (распределительный = верхне-градиентный).

(Условный результат при A22–A23.)

Пусть $X = \mathbf{R}^n$ или конечномерный микролинейный объект с удвоением меры и Poincaré inequality. Тогда для $u \in L^p_P(X, \mu)$ следующие условия эквивалентны:

1. u имеет weak gradient $\nabla^w u \in L^p_P$ в смысле Определения 12.4.1;
2. u допускает p -weak upper gradient $g \in L^p_P$;
3. u является пределом в L^p_P последовательности локально P -липшицевых функций (u_k) с равномерно контролируруемыми градиентами.

Более того, минимальный upper gradient совпадает с $|\nabla^w u|$ почти всюду.

10.7.1 Доказательство (схема)

1. Импликация (3) \Rightarrow (1) следует из интегрирования по частям для приближающих липшицевых функций и замкнутости weak derivative.
2. Переход (1) \Rightarrow (2) использует внутреннюю версию фундаментальной оценки вдоль кривых и локальную Poincaré inequality.
3. Переход (2) \Rightarrow (3) следует из плотности липшицевых функций в Newtonian/Sobolev классе на удваивающихся пространствах с Poincaré inequality.
4. Совпадение минимального upper gradient и weak gradient получается из минимальности и стандартного релаксационного аргумента. \square

Эта теорема – один из центральных конструктивных мостов всей работы: она показывает, что Sobolev-структура может быть прочитана и вариационно, и геометрически, и транспортно.

10.8 Пространства BV^p и вариация

Для многих приложений США и оптимальный транспорт класса $W^{1,1}$ недостаточно. Необходимо пространство функций ограниченной вариации.

Определение 12.8.1. Для $u \in L^1_P(X, \mu)$ полная вариация определяется как

$$|Du|_P(X) = \sup \left\{ \int_X u \operatorname{div} \Phi \, d\mu \mid \Phi \in \mathcal{D}_P(X, \mathbf{R}^n), |\Phi| \leq 1 \right\}.$$

Тогда

$$BV^p_P(X, \mu) := \{u \in L^1_P(X, \mu) \mid |Du|_P(X) < \infty\}.$$

Предложение 12.8.2. Если $u \in W^{1,1}_P(X, \mu)$, то

$$|Du|_P(X) = \int_X |\nabla^w u| \, d\mu.$$

В частности, Sobolev-пространство вложено в BV^p_P .

10.9 Нижняя полунепрерывность, компактность и следствия

Теорема 12.9.1 (слабая компактность и l.s.c.).

(Условный результат при A22–A23 и H_P2.)

Пусть (u_k) ограничена в $BV^p(X, \mu)$ или в $W^{1,p}(X, \mu)$ при $1 < p < \infty$. Тогда существует подпоследовательность, сходящаяся в L^1 (для BV^p) или слабо в L^p (для $W^{1,p}$), причём полная вариация и L^p -энергия слабонижнеполунепрерывны.

Это является внутренним функционально-аналитическим аналогом принципа компактности, критически необходимого для ЖКО и вариационных схем на пространствах вероятностей.

10.10 Значение для предыдущего цикла

С точки зрения логики всей серии монографий глава 12 делает сразу три шага.

1. **Замыкает СНА:** теперь generalized derivatives могут быть weak/measurable, а не только pointfree-topological.
2. **Усиливает СВА:** вариационные неравенства и монотонные операторы получают measure-level formulations.
3. **Готовит SOTT-D на новом уровне:** функции стоимости на пространствах траекторий могут иметь слабую регулярность, а не только классическую гладкость.

Именно поэтому пространство $W^{1,p}$ в этой монографии является не техническим определением, а новым центральным объектом программы.

Глава 11

P-Rademacher, существенные градиенты и новый фундамент для США

11.1 Почему теорема Радемахера была отсутствующим звеном

Классическая теорема Радемахера утверждает, что локально липшицева функция на \mathbf{R}^n почти всюду дифференцируема [28, 30–32]. Для негладкого анализа это фундаментально: именно она позволяет определять Clarke-subdifferential как выпуклую оболочку предельных градиентов на множестве точек дифференцируемости.

В США этот шаг сознательно остался открытым. Мы получили *P*-Clarke и *P*-Moreau объекты через локальную/топологическую конструкцию, но не располагали внутренним measure-theoretic фактом, который позволил бы отождествить их с essential limits almost-everywhere gradients.

Глава 13 закрывает именно этот разрыв.

11.2 Приближённая дифференцируемость

Определение 13.2.1. Пусть $f : X \rightarrow \mathbf{R}$, $X = \mathbf{R}^n$, и $\mu \in \text{Prob}(X)$ удовлетворяет условиям A23. Говорят, что f *P*-приближённо дифференцируема в точке x , если существует линейный функционал $L_x : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ такой, что

$$\text{aplim}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L_x(h)}{|h|} = 0,$$

где предел понимается не точечный, а относительно фильтра complements of μ -нулевых множеств в малых *P*-окрестностях точки x .

В этом определении уже виден синтез США и measure theory: differentiability формулируется через сочетание *P*-локальности и almost-everywhere исключения тонких множеств.

11.3 Теорема К: *P*-Rademacher

Теорема К (*P*-Rademacher и существенный градиент).

(Условный результат при A21–A23, A26 и bridge-аксиомах A10–A12 в хорошо адаптированных моделях.)

Пусть $U \subseteq \mathbf{R}^n$ – *P*-открытый подобъект, $\mu \in \text{Prob}(U)$ – Radon-type valuation, удовлетворяющая local doubling и (1, *p*)-Poincaré inequality, а $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ – локально *P*-липшицева функция. Тогда:

1. существует μ -нулевой подобъект $N_f \hookrightarrow U$, вне которого f *P*-приближённо дифференцируема;
2. отображение

$$\nabla_{\text{ess}} f : U \setminus N_f \rightarrow (\mathbf{R}^n)^*$$

принадлежит $L_{\text{loc}, P}^\infty(U, \mu)$ и совпадает почти всюду с минимальным weak gradient;

3. если f внутренне гладка, то $\nabla_{\text{ess}} f = \nabla f$ почти всюду;

4. для каждого $x \in U$ синтетический субдифференциал Кларка из СНА удовлетворяет формуле

$$\partial_C^S f(x) = \text{conv} \left(\text{EssLim}_{x_k \rightarrow Px, x_k \notin N_f} \nabla_{\text{ess}} f(x_k) \right),$$

где EssLim означает множество всех предельных точек существенного градиента по P -сходящимся сетям вне нулевого множества.

Иными словами, P -Clarke-субдифференциал перестаёт быть чисто topological/localic объектом и получает желаемую measure-theoretic интерпретацию.

11.3.1 Доказательство (программа)

Существенно, что в настоящем изложении это утверждение является **условным**, но не произвольным. Его доказательная программа состоит из трёх этапов.

Этап 1. По Теореме 12.7.1 локально P -липшицевы функции лежат в $W_P^{1,\infty}$, а их minimal слабые градиенты контролируются локальной липшицевой константой.

Этап 2. Используя A23, строим measurable differentiable структура типа Чигера на локальном евклидовом объекте. В хорошо адаптированных моделях этот шаг может быть осуществлён двумя путями: - либо внутренне, через charts и Poincaré/doubling machinery; - либо внешне, через глобальные сечения и классическую теорему Радемахера с последующей реинтернализацией по A10 и A26.

Этап 3. Формула Кларка выводится из замкнутости графа ∂_C^S (СНА), almost-everywhere differentiability и идентификации directed derivatives с essential support-function of gradient limits. \square

11.4 Немедленные следствия Теоремы К

Следствие 13.4.1 (новое прочтение Теоремы Е из СНА).

Нетривиальность ∂_C^S больше не является только следствием топологии Пеннана. Теперь она получает мерное содержание: $\partial_C^S f(x)$ есть выпуклый корпус существенных градиентов на полном-массовом множестве точек дифференцируемости.

Следствие 13.4.2 (правило цепочки almost everywhere).

Если $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ - C^1 -функция с локально липшицевой производной, а f локально P -липшицева, то

$$\nabla_{\text{ess}}(g \circ f) = g'(f) \nabla_{\text{ess}} f \quad \mu\text{-П.В.}$$

В частности,

$$\partial_C^S(g \circ f)(x) \subseteq g'(f(x)) \partial_C^S f(x),$$

а при знакоопределённости g' получается равенство.

Следствие 13.4.3 (точка минимума и essential stationarity).

Если x^* - локальный минимум локально P -липшицевой функции f , то

$$0 \in \partial_C^S f(x^*) = \text{conv} \text{EssLim} \nabla_{\text{ess}} f(x_k).$$

Тем самым условия оптимальности из СНА получают интерпретацию как предельное усреднение почти-всюду существующих градиентов.

11.5 Существенные градиенты и weak Hessians: следующий шаг

После появления almost-everywhere gradients естественно задаться вопросом о second-order theory. Мы формулируем здесь только программу.

Программа 13.5.1 (второй порядок). При дополнительных предположениях о локалевой регулярности и Sobolev-вложениях можно ожидать существование: - approximate Hessians для $W_{p'}^{2,p}$ -классов; - BV-структуры для градиентов; - measure-valued second-order subdifferentials.

Этот шаг будет особенно важен для дальнейшего развития внутренней теории curvature-dimension и Ricci lower bounds.

11.6 Главный научный смысл главы 13

Именно здесь настоящая монография окончательно замыкает третью. Если СНА открыл негладкость как локальную топологическую реальность, то настоящая работа показывает, что эта негладкость одновременно имеет **мерную** структуру. В результате обобщённые производные приобретают три равноправные интерпретации:

1. **локалево-топологическую** - через Penon-открытые множества;
2. **вариационно-двойственную** - через опорные функционалы и эпиграфы;
3. **мерно-существенную** - через almost-everywhere gradients и их essential hull.

Такой тройной фундамент и есть настоящий признак зрелости теории.

Часть III

Часть III. Оптимальный транспорт, энтропия и динамика распределений

Глава 12

Синтетическая проблема Монжа-Канторовича

12.1 Транспорт как центральная геометрия пространства мер

После построения almost-everywhere calculus естественным следующим шагом становится геометрия самих вероятностных объектов. Здесь ключевым объектом является оптимальный транспорт [17–20]. Его роль в настоящей работе принципиально двояка.

Во-первых, он создаёт внутреннюю метрику на пространстве вероятностей, то есть превращает probability theory из purely measure-theoretic языка в геометрию. Во-вторых, он даёт новую форму duality, продолжающую СВА и одновременно готовящую ЯКО и вероятностную версию SOTT-D.

12.2 Транспортные планы и стоимость

Пусть X, Y – допустимые объекты, а

$$c : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$$

– нижнеполу непрерывная функция стоимости.

Определение 14.2.1. Для $\mu \in \text{Prob}(X)$ и $\nu \in \text{Prob}(Y)$ транспортным планом называется вероятность

$$\pi \in \text{Prob}(X \times Y)$$

такая, что

$$(\text{pr}_X)_* \pi = \mu, \quad (\text{pr}_Y)_* \pi = \nu.$$

Множество всех таких планов обозначается

$$\Pi_P(\mu, \nu).$$

Определение 14.2.2 (прямая транспортная задача). Оптимальная стоимость переноса:

$$\text{OT}_{c,P}(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi_P(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y).$$

Эта формула на удивление мало отличается от классической. Вся глубина скрыта в том, что и вероятность, и нижняя полу непрерывность, и интеграл понимаются внутренне.

12.3 Двойственная задача

Определение 14.3.1. Двойственная транспортная задача состоит в вычислении

$$\text{DK}_{c,P}(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu \mid \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y) \right\},$$

где

$$\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell, \quad \psi : Y \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$$

принадлежат suitable class of P -нижнеполунепрерывный potentials.

Двойственная формула особенно важна для цикла монографий, потому что она представляет оптимальный транспорт как частный случай более общей двойственности Фенхеля-Рокафеллара из СВА.

12.4 Теорема I: синтетическая duality Монжа-Канторовича

Теорема I (Monge-Kantorovich duality в гладком топосе).

(Условный результат при A15–A20, A24 и H_P2.)

Пусть c – нижнеполунепрерывная, ограниченная снизу стоимость с конечным вторым моментом относительно допустимых маргиналов μ, ν . Тогда:

1. множество планов $\Pi_P(\mu, \nu)$ непусто, выпукло и $W_{2,P}$ -предкомпактно;
2. прямая задача достигает минимума:

$$\exists \pi^* \in \Pi_P(\mu, \nu) : \text{OT}_{c,P}(\mu, \nu) = \int c d\pi^*;$$

3. отсутствует duality gap:

$$\text{OT}_{c,P}(\mu, \nu) = \text{DK}_{c,P}(\mu, \nu);$$

4. существует пара оптимальных потенциалов (φ^*, ψ^*) , удовлетворяющая условию комплементарности

$$\varphi^*(x) + \psi^*(y) = c(x, y) \quad \pi^*\text{-п.в.}$$

12.4.1 Доказательство (схема)

1. **Непустота планов.** Достаточно взять product coupling $\mu \otimes \nu$.
2. **Существование минимума.** Используется H_P2: плотность/теснота семейства планов с ограниченной стоимостью, а также нижняя полунепрерывность функционала $\pi \mapsto \int c d\pi$.
3. **Двойственность.** Рассматриваем индикаторное ограничение на множество $\Pi_P(\mu, \nu)$ и применяем синтетическую duality theory СВА к выпуклому функционалу на пространстве measures. Теорема I переводит планы в линейные функционалы на observables, после чего работает обычный convex-analytic механизм.
4. **Комплементарность.** Выводится стандартным способом из оптимальности и subdifferential calculus на пространстве мер. \square

12.5 c -выпуклость и транспортные потенциалы

Как и в классике, duality естественно приводит к c -преобразованию.

Определение 14.5.1. Для потенциала $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ его c -сопряжение:

$$\varphi^c(y) = \inf_{x \in X} (c(x, y) - \varphi(x)).$$

Функция называется c -выпуклой, если $\varphi = \psi^c$ для некоторой ψ .

В условиях Теоремы I оптимальные потенциалы можно выбирать c -выпуклыми. Это важно потому, что c -выпуклость является транспортным аналогом выпуклости СВА и одновременно предшественником дисплейсмент-выпуклость.

12.6 Циклическая монотонность и монжевский вопрос

Предложение 14.6.1. Опора оптимального плана π^* является c -циклически монотонной в синтетическом/локалевом смысле.

Это утверждение переносит на внутренний уровень ещё один краеугольный факт оптимальный транспорт. В частности, для квадратичной стоимости на евклидовых объектах оно указывает на существование глубокой связи между оптимальными планами и градиентами выпуклых потенциалов.

Программа 14.6.2 (типа Бренье result).

При дополнительных предположениях о абсолютной непрерывности μ , внутренней строгой выпуклости квадратичной стоимости и second-order regularity можно ожидать теорему вида:

$$\pi^* = (\text{id}, \nabla\Phi)_*\mu$$

для некоторого выпуклого потенциала Φ . В данной монографии мы честно маркируем этот шаг как **программный**: он естественен, но требует ещё не построенной внутренней Alexandrov/Brenier machinery.

12.7 Транспорт и СВА: новый уровень двойственности

Теорема L показывает, что transport duality не является отдельной дисциплиной, а встроена в уже созданную в СВА архитектуру. Это имеет два следствия.

1. Пространство вероятностей оказывается новым convex object, на котором работают аналоги Fenchel-Rockafellar theory.
2. Стохастическая оптимизация перестаёт быть внешним приложением: она становится оптимизацией **не на точках, а на законах**, но по тем же вариационным принципам.

12.8 Почему Монж-Канторович важнее Монжа

Классическая проблема Монжа ищет транспортное отображение, тогда как проблема Канторовича - план. В контексте нашей программы это различие приобретает фундаментальный смысл.

- **План** соответствует первичности распределений.
- **Отображение** соответствует восстановлению детерминистического предела.

Следовательно, порядок теории должен быть именно таким, каким он реализован в этой монографии: сначала Канторович, потом Brenier/Monge как возможный концентрированный случай.

Глава 13

Динамическая формулировка Бенаму-Бренье и Wasserstein-геометрия

13.1 Пространство траекторий и эволюция мер

Пусть $I = [0, 1]$ - внутренний временной интервал, а

$$\text{Path}(X) = X^I$$

- объект траекторий. Для каждого $t \in I$ существует evaluation morphism

$$e_t : \text{Path}(X) \rightarrow X, \quad \gamma \mapsto \gamma(t).$$

Определение 15.1.1. Динамическим планом между $\mu_0, \mu_1 \in \text{Prob}(X)$ называется вероятность

$$\pi \in \text{Prob}(\text{Path}(X))$$

такая, что

$$(e_0)_* \pi = \mu_0, \quad (e_1)_* \pi = \mu_1.$$

Эта конструкция является точкой встречи SOTT-D и measure theory: именно здесь траектории становятся не просто решениями уравнений, а носителями вероятностного закона.

13.2 Continuity equation во внутренней форме

Пусть $(\rho_t)_{t \in I}$ - семейство вероятностей на X , а v_t - измеримое семейство скоростей.

Определение 15.2.1. Говорят, что (ρ_t, v_t) удовлетворяет continuity equation

$$\partial_t \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t v_t) = 0$$

в слабом синтетическом смысле, если для всякой гладкой тестовой функции $\phi = \phi(t, x)$ выполнено

$$\int_0^1 \int_X \left(\partial_t \phi(t, x) + \langle \nabla_x \phi(t, x), v_t(x) \rangle \right) d\rho_t(x) dt + \int_X \phi(0, x) d\mu_0 - \int_X \phi(1, x) d\mu_1 = 0.$$

Этот weak form напрямую использует построенные ранее L^p_P и weak gradients.

13.3 Квадратичная транспортная энергия

Определение 15.3.1. Действие Бенаму-Бренье:

$$A_P(\rho, v) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_X |v_t(x)|^2 d\rho_t(x) dt.$$

Если (ρ, v) удовлетворяет continuity equation, то эта величина измеряет кинетическую цену деформации одной вероятности в другую.

13.4 Теорема М: синтетическая формула Бенаму–Бренье

Теорема М (динамический транспорт).

(Условный результат при A18, A20, A24 и функционально-аналитических результатах главы 12; концептуально опирается на Benamou–Brenier и последующую Wasserstein-литературу [20–24].)

Для любых $\mu_0, \mu_1 \in \text{Prob}_2(X)$

$$W_{2,P}^2(\mu_0, \mu_1) = \inf_{(\rho, v)} \left\{ \int_0^1 \int_X |v_t|^2 d\rho_t dt \mid \partial_t \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t v_t) = 0, \rho_0 = \mu_0, \rho_1 = \mu_1 \right\}.$$

Эквивалентно,

$$W_{2,P}^2(\mu_0, \mu_1) = \inf_{\pi} \int_{\text{Path}(X)} \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|^2 dt d\pi(\gamma),$$

где инфимум берётся по динамическим планам.

13.4.1 Доказательство (схема)

1. Из динамического плана строится семейство маргиналов $\rho_t = (e_t)_* \pi$ и скорость в смысле суперпозиционного принципа.
2. В обратную сторону, из Eulerian data (ρ, v) строится probability закон на пространстве траекторий, решая уравнение непрерывности как перенос массы.
3. Равенство минимальных стоимостей опирается на convexity action functional и нижняя полунепрерывность в пространстве curves of measures.
4. Существенную роль играет weak компактность главы 12, без которой переход к пределу невозможен. \square

13.5 Геодезики в пространстве вероятностей

Следствие 15.5.1. Пространство $(\text{Prob}_2(X), W_{2,P})$ является геодезическим: для любых μ_0, μ_1 существует кривая $(\mu_t)_{t \in [0,1]}$, такая что

$$W_{2,P}(\mu_s, \mu_t) = |t - s| W_{2,P}(\mu_0, \mu_1).$$

Эта кривая – уже не набор промежуточных мер, а новый геометрический объект, играющий ту же роль для вероятностей, какую геодезики на многообразии играют для точек.

13.6 Касательная структура и отговская картина

В евклидовых контекстах естественно определять касательное пространство к μ как замыкание градиентных полей в $L^2(\mu)$:

$$T_{\mu} \text{Prob}_2(X) := \overline{\{\nabla \phi \mid \phi \in \mathcal{D}_P(X)\}}^{L^2(\mu)}.$$

Это позволяет читать continuity equation как «обыкновенное дифференциальное уравнение» на бесконечномерном многообразии вероятностей. Такая картина известна как Otto calculus. В нашей монографии используется её осторожно: не как доказательную основу, а как guiding geometry, которая объясняет, почему JKO работает как проксимальный шаг на пространстве распределений.

13.7 Дисплейсмент-интерполяции и новые понятия выпуклости

В обычном линейном пространстве выпуклость определяется по линейным сегментам. В Wasserstein-мире естественными «сегментами» становятся geodesic interpolations между вероятностями. Отсюда рождается ключевое понятие следующей главы – дисплейсмент-выпуклость.

Именно она позволит заменить точечную сильную выпуклость SVA и жёсткую H3 из SOTT-D на выпуклость на пространстве мер.

Глава 14

Дисплейсмент-выпуклость, энтропия, Schrödinger bridge и Sinkhorn

14.1 Относительная энтропия как фундаментальный функционал

Пусть $\nu \in \text{Prob}(X)$ – опорная мера. Если μ абсолютно непрерывна относительно ν , то пишем $\mu = \rho \nu$.

Определение 16.1.1 (относительная энтропия).

$$\text{Ent}_P(\mu | \nu) = \int_X \rho \log \rho d\nu,$$

если $\mu \ll \nu$ и $\rho \log \rho$ интегрируема; иначе

$$\text{Ent}_P(\mu | \nu) = +\infty.$$

Энтропия является, возможно, самым важным функционалом всей монографии [20, 25–27]. Она одновременно:

1. регуляризует транспортные задачи;
2. обеспечивает строгую выпуклость;
3. создаёт естественную связь с стохастической механикой и Schrödinger bridges;
4. даёт новый механизм устранения неуникальности.

14.2 Дисплейсмент-выпуклость

Определение 16.2.1. Функционал

$$\mathcal{F} : \text{Prob}_2(X) \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$$

называется λ -дисплейсмент-выпуклым, если для всякой $W_{2,P}$ -геодезики (μ_t)

$$\mathcal{F}(\mu_t) \leq (1-t)\mathcal{F}(\mu_0) + t\mathcal{F}(\mu_1) - \frac{\lambda}{2}t(1-t)W_{2,P}^2(\mu_0, \mu_1).$$

Лемма 16.2.2. Если $\lambda > 0$, то у λ -дисплейсмент-выпуклого, собственный и l.s.c. функционала может быть не более одного минимайзера.

Это простое наблюдение имеет решающее значение для всей дальнейшей программы: уникальность теперь возникает не через точечную подтерминальность, а через геометрию пространства мер.

14.3 Энтропийно-регуляризованный транспорт

Пусть $R \in \text{Prob}(X \times Y)$ – опорное сцепление с full support, а $\varepsilon > 0$.

Определение 16.3.1. Энтропийно-регуляризованная транспортная задача:

$$\text{EOT}_{\varepsilon,P}(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi_P(\mu, \nu)} \left[\int c d\pi + \varepsilon \text{KL}_P(\pi | R) \right].$$

Если R имеет вид

$$dR(x, y) \propto e^{-c(x, y)/\varepsilon} d(\alpha \otimes \beta)(x, y),$$

то задача эквивалентна минимизации одной лишь относительной энтропии относительно R при фиксированных маргиналах – это и есть абстрактная форма Schrödinger bridge problem.

14.4 Теорема N: Schrödinger bridge и внутренняя Sinkhorn-структура

Теорема N (энтропийный transport и Schrödinger bridge).

(Условный результат при A19–A25 и достаточной положительности опорное ядро.)

Пусть R – опорное сцепление, абсолютно непрерывный и строго положительный на допустимых открытых элементах. Тогда для любых маргиналов μ, ν :

1. задача Schrödinger/entropic transport имеет единственное решение π^ε ;
2. существуют потенциалы масштабирования $u : X \rightarrow \mathbf{R}$ и $v : Y \rightarrow \mathbf{R}$ такие, что

$$d\pi^\varepsilon(x, y) = e^{u(x)} dR(x, y) e^{v(y)};$$

3. двойственная задача имеет вид

$$\sup_{u, v} \left[\int u d\mu + \int v d\nu - \varepsilon \int (e^{u \oplus v / \varepsilon} - 1) dR \right];$$

4. попеременное масштабирование маргиналов (Sinkhorn iteration) сходится к π^ε .

14.4.1 Доказательство (схема)

1. Существование и единственность следуют из строгой выпуклости $\text{KL}_P(\cdot | R)$ на аффинном пространстве планов.
2. Формула факторизации является условием оптимальности первого порядка в терминах лагранжевых множителей на маргиналы.
3. Сходимость Sinkhorn выводится либо через contraction in Hilbert projective metric, либо как чередование Bregman-проекций в пространстве мер. \square

14.5 Почему Schrödinger bridge принципиально важен для цикла

Энтропийный транспорт важен не только вычислительно. Его более глубокая роль в нашей программе состоит в том, что он даёт **универсальный механизм вероятностной регуляризации**.

- Там, где детерминистическая задача имеет много близких минимумов, энтропия выделяет единственный «наиболее распределённый, но всё ещё оптимальный» закон.
- Там, где хаотическая динамика делает точечный поиск нестабильным, Schrödinger bridge отбирает устойчивый уровень вероятностных законов object.
- Там, где SOTT-D требовал глобальной уникальности точечного оптимума, entropic transport делает уникальность естественной почти автоматически.

14.6 Энтропия, *curvature-dimension* и долгосрочная программа

В классической Wasserstein-геометрии дисплейсмент-выпуклость энтропии тесно связана с нижними оценками Ricci curvature и условиями $CD(K, N)$. Внутренний аналог этой связи в гладком когезивном топосе представляется одной из самых перспективных будущих программ.

Если он будет построен, то настоящая монография даст не только measure theory и transport, но и подлинную synthetic metric-measure curvature theory.

14.7 Sinkhorn как алгоритмический мост

По вычислительным причинам именно Sinkhorn-тип схемы обеспечивают практический мост между внутренней теорией и внешними дискретными реализациями. В этом состоит одна из самых сильных сторон предлагаемой программы: даже если топосная теория остаётся фундаментальной и абстрактной, она естественно порождает численно реализуемые схемы после дискретизации глобальных сечений.

Глава 15

JKO-схема и градиентные потоки в пространстве вероятностных объектов

15.1 От статической оптимизации к эволюции распределений

JKO-схема (Jordan-Kinderlehrer-Otto) [20, 22, 24] – это одно из самых глубоких открытий современной вариационной математики: она показывает, что эволюционные PDE можно понимать как последовательность вариационных шагов в пространстве вероятностей.

Для настоящей монографии это особенно важно. С одной стороны, JKO – естественное продолжение проксимальных схем СВА. С другой – она переводит transport geometry в динамику, то есть даёт язык для законов на траекториях и mean-field evolution, необходимых вероятностной версии SOTT-D.

15.2 Свободная энергия и JKO-шаг

Пусть

$$\mathcal{F} : \text{Prob}_2(X) \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_\ell$$

– собственный нижнеполу непрерывный функционал, например

$$\mathcal{F}(\mu) = \int_X V(x) d\mu(x) + \beta \text{Ent}_P(\mu | \nu) + \frac{1}{2} \int_{X \times X} W(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Определение 17.2.1 (JKO-шаг). Для шага времени $\tau > 0$ и текущего состояния μ^k следующее состояние определяется как

$$\mu^{k+1} \in \operatorname{argmin}_{\mu \in \text{Prob}_2(X)} \left\{ \mathcal{F}(\mu) + \frac{1}{2\tau} W_{2,P}^2(\mu, \mu^k) \right\}.$$

Это есть точный транспортный аналог проксимального шага

$$x^{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau f}(x^k)$$

из СВА.

15.3 Теорема О: JKO и градиентные потоки

Теорема О (градиентный поток свободной энергии).

(Условный результат при A24–A25, H_P2 и соответствующей completeness of кривые максимального наклона.)

Пусть \mathcal{F} – собственный, коэрцитивный, нижнеполу непрерывный и λ -дисплейсмент-выпуклый функционал на $\text{Prob}_2(X)$. Тогда:

1. для любого $\tau > 0$ и любого начального μ^0 JKO-шаг определён;
2. кусочно-постоянные и De Giorgi interpolation, построенные по JKO, предкомпактны;
3. при $\tau \downarrow 0$ они сходятся к кривой $(\mu_t)_{t \geq 0}$ в $\text{Prob}_2(X)$, являющейся градиентным потоком \mathcal{F} ;

4. эта кривая удовлетворяет energy dissipation inequality

$$\mathcal{F}(\mu_T) + \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\mu}_t|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T |\partial \mathcal{F}|^2(\mu_t) dt \leq \mathcal{F}(\mu_0);$$

5. если $\lambda > 0$, поток единственен и удовлетворяет EVI-неравенству:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} W_{2,P}^2(\mu_t, \nu) + \frac{\lambda}{2} W_{2,P}^2(\mu_t, \nu) + \mathcal{F}(\mu_t) \leq \mathcal{F}(\nu) \quad \forall \nu.$$

15.3.1 Доказательство (схема)

1. Существование дискретных минимизаторов – следствие coercivity и lower semicontinuity.
2. Энергетические оценки JKO-шагов дают суммируемость дискретных скоростей.
3. Компактность по H_{P2} обеспечивает предельную кривую.
4. Переход к пределу проводится через теорию кривые максимального наклона в metric spaces.
5. EVI следует из λ -дисплейсмент-выпуклости. \square

15.4 Примеры внутренних PDE

Теорема О немедленно порождает внутренние версии ряда фундаментальных уравнений.

Пример 17.4.1 (Fokker-Planck). Если

$$\mathcal{F}(\mu) = \int V d\mu + \beta \text{Ent}_P(\mu | \text{Leb}),$$

то градиентный поток должен удовлетворять

$$\partial_t \rho_t = \nabla \cdot (\rho_t \nabla V) + \beta \Delta \rho_t.$$

Пример 17.4.2 (porous medium). Если

$$\mathcal{F}(\mu) = \int U(\rho) dx \quad \text{с} \quad U(r) = \frac{r^m}{m-1},$$

то JKO-градиентный поток интерпретируется как внутренний аналог уравнения пористой среды.

Пример 17.4.3 (mean-field aggregation-diffusion). Если в \mathcal{F} присутствует взаимодействующий потенциал $W(x, y)$, то получаем McKean-Vlasov/aggregation flow.

Существенно: здесь речь идёт не о «переводе готовых PDE» во внутренний язык, а о порождении PDE из геометрии вероятностного пространства.

15.5 JKO как новый проксимальный анализ

Одним из сильнейших концептуальных достижений монографии является осознание того, что JKO – это не отдельная «транспортная техника», а продолжение проксимальной философии CVA:

- в CVA прох-шаг измеряется квадратом линейной нормы;
- в настоящей монографии прох-шаг измеряется квадратом Wasserstein-метрики.

Следовательно, transport geometry можно понимать как нелинейный, мерный и статистический апгрейд вариационного анализа.

15.6 От JKO к вероятностной версии SOTT-D

Именно через JKO становятся понятны две ключевые идеи позднейших глав:

1. уровень вероятностных законов optimization можно реализовывать последовательностью транспортных проксимальных шагов;
2. динамика законов на траекториях становится не эвристикой, а строго вариационной схемой.

В этом смысле JKO – это алгоритмическое сердце настоящей монографии.

Часть IV

Часть IV. Синтез с предыдущими работами и новый уровень гарантий

Глава 16

Подъём СВА и СНА на мерный уровень

16.1 Ожидаемые функционалы и вероятностная выпуклость

Пусть $f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ - нижнеполунепрерывный функционал. Его естественный подъём на пространство вероятностей задаётся формулой

$$\widehat{f}(\mu) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

На первый взгляд это простая линейная операция. Но в действительности именно она и есть первый механизм превращения точечной оптимизации в вероятностную. Если f - энергия на конфигурациях, то \widehat{f} - энергия на законах конфигураций.

Лемма 18.1.1. Если f выпукла на линейном объекте V , то \widehat{f} выпукла относительно барицентрической структурой на $\text{Prob}(V)$:

$$\widehat{f}((1-t)\mu_0 + t\mu_1) \leq (1-t)\widehat{f}(\mu_0) + t\widehat{f}(\mu_1).$$

Замечание. Линейная выпуклость на $\text{Prob}(V)$ - лишь самый первый слой. Гораздо глубже дисплейсмент-выпуклость, зависящая от транспортной геометрии, а не от барицентрических комбинаций.

16.2 Мерные версии субградиента и монотонности

В СВА центральным объектом был субдифференциал выпуклого функционала. На пространстве вероятностей его естественным аналогом становится transport subdifferential.

Определение 18.2.1 (транспортный субградиент). Для функционала

$$\mathcal{F} : \text{Prob}_2(X) \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$$

поле $\xi \in L^2_P(\mu; TX)$ называется элементом транспортного субдифференциала $\partial_W \mathcal{F}(\mu)$, если для любой ν и любого оптимального плана $\pi \in \Pi_o(\mu, \nu)$ выполнено

$$\mathcal{F}(\nu) - \mathcal{F}(\mu) \geq \int_{X \times X} \langle \xi(x), y - x \rangle d\pi(x, y) + o(W_{2,P}(\mu, \nu)).$$

Это определение является точным transport-level продолжением subdifferential philosophy СВА.

Предложение 18.2.2. Если

$$\mathcal{F}(\mu) = \int_X f d\mu$$

и f локально P -липшицева, то

$$\partial_W \mathcal{F}(\mu) = \overline{\partial_C^S f}^{L^2(\mu)}$$

в естественном смысле: транспортный субградиент получается из почти всюду определённые точечные обобщённые градиенты, построенных в главе 13.

Тем самым СНА поднимается на мерный уровень без разрыва языка.

16.3 Ожидаемые монотонные операторы и стохастические вариационные неравенства

Пусть задано семейство максимальных P -монотонных операторов A_θ и параметр θ распределён по вероятности η .

Определение 18.3.1. Ожидаемый оператор

$$\bar{A}(x) := \int_{\Theta} A_\theta(x) d\eta(\theta)$$

определяется как barycentric/selection-wise интеграл многозначных значений, когда это допустимо.

Программа 18.3.2. При условии существования measurable selections и замкнутости графов можно ожидать переноса теорем СВА о вариационных неравенствах в стохастический режим:

$$0 \in \bar{A}(x) + \partial g(x)$$

или, в более общем виде,

$$\langle \bar{A}(x^*), y - x^* \rangle + g(y) - g(x^*) \geq 0 \quad \forall y.$$

Этот перенос особенно важен для машинного обучения и stochastic optimization: он показывает, что стохастическая аппроксимация не внешний шум над уже готовой теорией, а внутренняя вариационная структура на законах.

16.4 Lift теории Кларка и Моро

Пусть f негладка в смысле СНА. Тогда её Moreau-envelope и проксимальные операторы могут быть подняты на пространство мер несколькими способами.

Определение 18.4.1 (мерная Moreau-оболочка).

$$\mathcal{M}_{\tau, P} \mathcal{F}(\mu) = \inf_{\nu \in \text{Prob}_2(X)} \left\{ \mathcal{F}(\nu) + \frac{1}{2\tau} W_{2, P}^2(\nu, \mu) \right\}.$$

Это точный transport-analog Moreau-Yosida regularization.

Следствие 18.4.2. ЖКО-шаг для \mathcal{F} есть проксимальный оператор Moreau-типа на пространстве вероятностей.

Это утверждение формально объединяет СВА и главу 17 в одну теорию.

16.5 Mean-field lift и функционалы взаимодействия

Одной из важнейших особенностей вероятностного уровня является возможность описывать взаимодействие между частицами или агентами через функционалы вида

$$\mathcal{F}(\mu) = \int V d\mu + \frac{1}{2} \int W(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Такие функционалы не редуцируются к подъёму одной точечной функции и порождают genuinely new geometry. Именно они наиболее важны для: - mean-field control; - ансамблевой оптимизации траекторий; - взаимодействующих ройных и гравитационных систем; - вариационного вывода нелинейных PDE.

16.6 Синтетическая стохастическая оптимизация как внутренняя теория

После построения transport subgradients можно сформулировать общий принцип.

Принцип 18.6.1. Стохастическая оптимизация внутри гладкого топоса есть не оптимизация «случайной реализации», а вариационная эволюция закона в вероятностном пространстве, управляемая энтропией, транспортом и слабой регулярностью.

Это определение сразу ставит настоящую монографию в прямой контакт с современными направлениями математики и машинного обучения, но на более фундаментальном уровне, чем обычные евклидовы алгоритмы.

16.7 Научная роль главы 18

Глава 18 делает то, что не могла сделать ни одна из предыдущих монографий [1-3]: она переводит и гладкий, и негладкий вариационный анализ в язык вероятностные законы. Тем самым впервые появляется единый объект, в котором:

- выпуклость СВА;
 - негладкость СНА;
 - динамика SOTT-D;
 - weak calculus главы 12;
 - transport geometry главы 14-17
- оказываются частями одной структуры.
-

Глава 17

Вероятностная версия SOTT-D: от точечных траекторий к мерам на пространстве траекторий

17.1 Почему именно SOTT-D требует мерного подъёма сильнее всего

Из трёх предыдущих монографий именно SOTT-D наиболее явно нуждалась в новом мерном языке. Причин несколько.

1. Работа с хаотической динамикой почти никогда не устойчива на уровне одной траектории.
2. Глобальная оптимальность в сложных многомодальных задачах редко естественно выражается через уникальную точку.
3. Гипотеза НЗ требовала фактически уникальности оптимума уже на детерминистическом уровне, что в реальных системах слишком жёстко.

Эти три ограничения естественно преодолеваются, если вместо одной траектории рассматривать **закон на траекториях**.

17.2 Пространство траекторных законов

Пусть \mathcal{T} – объект допустимых траекторий, например подпространство M^I или объект управляемых дуг $(x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющих внутренним уравнениям движения.

В SOTT-D [1] минимизировался функционал

$$J : \mathcal{T} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_{\ell}.$$

Теперь мы поднимаем его на пространство вероятностей:

$$\hat{J}(\mu) = \int_{\mathcal{T}} J(\gamma) d\mu(\gamma).$$

Но этого недостаточно. Чтобы получить новую геометрию и новую уникальность, необходимы регуляризаторы.

17.3 Основной уровень вероятностных законов функционал

Мы вводим семейство вероятностных функционалов

$$\mathcal{F}_{\tau, \varepsilon}(\mu) = \int_{\mathcal{T}} J(\gamma) d\mu(\gamma) + \tau \text{Ent}_P(\mu | \mathcal{R}) + \frac{\varepsilon}{2} W_{2,P}^2(\mu, \mu_{\text{ref}}) + \lambda \mathcal{C}(\mu),$$

где:

- \mathcal{R} – опорный закон, кодирующий априорную физику, измерительную неопределённость или априорный ансамбль;
- μ_{ref} – опорный закон, задающий геометрическую привязку;

- $C(\mu)$ – возможно, дополнительный выпуклый моментный/робастностный штраф;
- $\tau, \varepsilon, \lambda > 0$ – параметры регуляризации.

В этой формуле видна новая философия целиком: - средняя стоимость вместо точечной стоимости; - энтропия вместо грубой селекции; - Wasserstein-близость вместо локального евклидова штрафа; - выпуклость на уровне вероятностных законов вместо точечной НЗ.

17.4 Теорема P: вероятностная версия SOTT-D

Теорема P (устранение НЗ на мерном уровне).

(Условный результат при A24–A26, H_P1–H_P3 и коэрцитивной и дисплейсмент-выпуклой структуре функционала $\mathcal{F}_{\tau, \varepsilon}$.)

Пусть пространство траекторий \mathcal{T} допускает вероятностную структуру, а функционал уровня вероятностных законов $\mathcal{F}_{\tau, \varepsilon}$ является собственным, нижнеполунепрерывным и Λ -дисплейсмент-выпукл для некоторого $\Lambda > 0$. Тогда:

1. существует единственный минимизатор

$$\mu_{\tau, \varepsilon}^* \in \underset{\mu \in \text{Prob}_2(\mathcal{T})}{\text{argmin}} \mathcal{F}_{\tau, \varepsilon}(\mu);$$

2. уникальность минимизатора следует из транспортно-энтропийной геометрии и **не требует** подтерминальности точечного пучка Argmin;
3. если $\tau, \varepsilon > 0$ малы, но фиксированы, то $\mu_{\tau, \varepsilon}^*$ представляет собой робастный ансамбль оптимальных траекторий;
4. при режиме концентрации $(\tau, \varepsilon) \downarrow 0$ любой предельный закон поддерживается на множестве детерминистических минимизаторов исходного J ;
5. если исходный детерминистический минимум единственен, то

$$\mu_{\tau, \varepsilon}^* \rightarrow \delta_{\gamma^*}.$$

Итак, вероятностная форма SOTT-D использует новую схему гарантий: вместо требования НЗ, то есть заранее заданной единственности оптимальной траектории, сначала доказывается единственность оптимального вероятностного закона, а точечная траектория извлекается затем как концентрационный предел.

17.4.1 Доказательство (схема)

1. **Существование.** Из coercivity и H_P2 следует плотность/теснота минимизирующих последовательностей; l.s.c. обеспечивает достижение минимума.
2. **Уникальность.** Следует из строгой дисплейсмент-выпуклость, создаваемой комбинацией энтропии и Wasserstein-квадрата.
3. **Поддержка на минимизаторах при исчезающей регуляризации.** Это стандартный аргумент Γ -сходимости: $\mathcal{F}_{\tau, \varepsilon}$ стремится к \hat{J} в смысле variational limit.
4. **Концентрация в Dirac.** При единственности точечный минимизирующий закон не может распределять массу иначе, не увеличивая предельную стоимость. \square

17.5 Сравнение с исходной НЗ

Новая схема особенно наглядна в сравнительной таблице.

Параметр	SOTT-D (детерминистический режим)	Мерный режим настоящей монографии
Объект оптимизации	траектория γ	закон μ на траекториях
Гарантия уникальности	подтерминальность Argmin и НЗ	дисплейсмент-выпуклость + entropy
Робастность к шуму/неопределённости	внешняя, ограниченная	внутренняя, встроенная в закон
Многомодальность	проблема	естественная часть модели
Возврат к точке	непосредственный, но хрупкий	через концентрацию и экстракцию

Эта таблица выражает, пожалуй, главную научную новизну всей монографии.

17.6 Мера на траекториях как новый физический объект

Философски вероятностная форма SOTT-D меняет сам смысл оптимизации сложной динамики. В хаотических и резонансных системах часто нет физического смысла требовать, чтобы теория сразу выбрала единственную траекторию. Более естественно требовать, чтобы она сначала описала **стабильный ансамбль хороших траекторий**, а затем уже, при необходимости, извлекла точечный представитель.

Это особенно важно в задачах астродинамики, где ансамбли решений часто физически реалистичнее, чем одна «идеальная» дуга.

17.7 Вероятностный спуск вместо подтерминальной склейки

В SOTT-D спуск локальных свидетелей к глобальному объекту зависел от подтерминальности. Теперь роль спуска играет другое явление: если локальные куски функционала совместимы с одним и тем же глобальным дисплейсмент-выпуклый объект уровня вероятностных законов, то склейка обеспечивается **единственностью меры**, а не единственностью точки.

Это, возможно, важнейший логический сдвиг всей серии работ.

Глава 18

Теорема вероятностной экстракции и концентрации

18.1 От геометрической экстракции к геометрико-вероятностной

SOTT-D завершалась теоремой геометрической экстракции: синтетический оптимум должен был переноситься назад в классический мир посредством Γ , при условии аккуратной геометрической формулировки и выполнения ВСС.

В настоящей монографии ситуация усложняется и одновременно становится богаче. Теперь нужно экстрагировать не точку, а вероятностный объект, а затем понять, когда он концентрируется в точечный предел.

18.2 Вероятностная экстракция через Γ

Пусть $\mu \in \text{Prob}(\mathcal{T})$ – внутренний закон на пространстве траекторий. При A26 существует внешний/глобально-сечённый закон

$$\Gamma_*\mu \in \text{Prob}(\Gamma(\mathcal{T})),$$

сохраняющий интегралы геометрически определимых observables:

$$\int_{\Gamma(\mathcal{T})} \Gamma(F) d(\Gamma_*\mu) = \Gamma \left(\int_{\mathcal{T}} F d\mu \right).$$

Это есть мерный аналог коммутирования Γ с теми конструкциями, которые в SOTT-D использовались для переноса оптимума.

18.3 Теорема Q: концентрация и извлечение траектории

Теорема Q (геометрико-вероятностная экстракция).

(Условный результат при A26, H_P3 и стандартных предположениях о плотности/теснота/Laplace principle.)

Пусть $(\mu_\tau)_{\tau>0}$ – семейство уникальных минимизатор-ов функционала уровня вероятностных законов

$$\mathcal{F}_\tau(\mu) = \hat{J}(\mu) + \tau \text{Ent}_P(\mu | \mathcal{R}),$$

где $\tau \downarrow 0$. Тогда:

1. всякая предельная точка μ_0 семейства (μ_τ) поддерживается на множестве

$$\text{Argmin}(J) \subseteq \mathcal{T};$$

2. если $\text{Argmin}(J) = \{\gamma^*\}$, то

$$\mu_\tau \rightarrow \delta_{\gamma^*} \quad \text{в } W_{2,P} \text{ и в узкой топологии};$$

3. после применения глобальных сечений

$$\Gamma_*\mu_\tau \Rightarrow \delta_{\Gamma(\gamma^*)}$$

как классические вероятностные меры на $\Gamma(\mathcal{T})$;

4. если множество минимизаторов конечно и априорный закон \mathcal{R} различает их массы, то предельный закон есть селекция типа Гиббса-Лапласа на этом конечном множестве.

18.3.1 Доказательство (схема)

1. **Lower bound.** Для любой μ

$$\mathcal{F}_\tau(\mu) \geq \widehat{J}(\mu).$$

2. **Upper bound.** Если γ^* - минимизатор J , то

$$\mathcal{F}_\tau(\delta_{\gamma^*}) = J(\gamma^*) + \tau \text{Ent}_P(\delta_{\gamma^*} | \mathcal{R}).$$

Поэтому минимальные значения \mathcal{F}_τ стремятся к $\min J$.

3. **Поддержка пределов.** Если предельный закон давал бы положительную массу множеству, где $J > \min J + \varepsilon$, то средняя стоимость оставалась бы выше минимума, что противоречит оптимальности.

4. **Единственный минимизатор.** Тогда единственная мера, поддержанная на $\{\gamma^*\}$, есть δ_{γ^*} .

5. **Коммутация с Γ .** Следует из A26. \square

18.4 Лапласовский принцип и asymptotic selection

Формально Теорема Q является transport-topos аналогом классического лапласовского принципа:

$$d\mu_\tau(\gamma) \propto e^{-J(\gamma)/\tau} d\mathcal{R}(\gamma).$$

При малом τ закон концентрируется на минимайзерах.

Но в нашей теории важнее не сама асимптотика Гиббса, а то, что она теперь встроена в когезивный и геометрический контекст. Это означает, что selection among минимизаторов может стать частью логики и геометрии, а не только внешнего статистического вычисления.

18.5 Почему Теорема Q - подлинное продолжение SOTT-D

SOTT-D умела сказать: «если точечная геометрия и H1-H3 согласованы, то можно извлечь классический оптимум».

Настоящая монография формулирует более тонкий принцип: «сначала получи единственный уровень вероятностных законов object, затем извлеки точку как концентрированный предел».

Это существенно сильнее, потому что:

- закон существует даже там, где точечная единственность отсутствует;
- концентрация может служить регулярным селектором;
- внешняя статистика и внутренняя геометрия теперь согласованы.

18.6 Ограничения и честные границы Теоремы Q

Существенно, что Теорема Q опирается на несколько сильных, хотя и естественных предположений: - наличие достаточной плотности/теснота; - корректность предельного перехода $\tau \downarrow 0$; - совместимость Γ с выбранными вероятностными конструкциями; - отсутствие скрытых non-geometric обструкций в модели.

Тем не менее именно в такой форме она уже представляет собой фундаментальное усиление программы SOTT-D.

Глава 19

Алгоритмы: Sinkhorn, ЖКО, транспортный проксимальный спуск, стохастический mirror-descent

19.1 Общий принцип алгоритмизации

Хотя настоящая монография носит фундаментально-теоретический характер, она не должна оставаться чисто декларативной. Сильная сторона построенной теории в том, что каждая её центральная вариационная идея соответствует известной или естественно возникающей вычислительной схеме.

При этом важно разделять два уровня: 1. **внутренний алгоритм** как морфизм/итерация в топосе; 2. **внешняя дискретизация** через глобальные сечения, частицы, сетки или sample-based approximations.

Ниже мы описываем алгоритмы именно как внутренние схемы, допускающие внешние реализации.

19.2 Алгоритм 1: внутренний Sinkhorn

Пусть задан опорное ядро

$$K(x, y) = e^{-c(x, y)/\varepsilon}$$

или более общий положительный coupling R .

Алгоритм 21.2.1 (Synthetic Sinkhorn).

Вход: маргиналы μ, ν ; положительный ядро K ; параметр $\varepsilon > 0$.
Инициализация: $a_0(x) \equiv 1, b_0(y) \equiv 1$.

Для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_{k+1}(x) &:= d\mu / (K b_k)(x) \\ b_{k+1}(y) &:= d\nu / (K^T a_{k+1})(y) \end{aligned}$$

Конец

Выход: $\pi_k(dx, dy) = a_k(x) K(x, y) b_k(y) d\alpha(x) d\beta(y)$.

Здесь выражения вида $d\mu / (K b_k)$ интерпретируются как scaling updates в классе плотностей относительно опорных маргиналов.

Теорема 21.2.2 (сходимость Sinkhorn).

(Условный алгоритмический результат.)

При строгой положительности K и конечности энтропийных моментов последовательность (π_k) сходится к единственному entropic optimal coupling π^ε .

19.3 Алгоритм 2: ЖКО-дискретизация

Алгоритм 21.3.1 (ЖКО / Wasserstein proximal step).

Вход: начальная вероятность μ^θ , функционал F , шаг $\tau > 0$.

Для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mu^{\{k+1\}} \in \operatorname{argmin}_\mu [F(\mu) + (1/(2\tau)) W_{2,P}^2(\mu, \mu^k)]$$

Конец

Эта схема является прямым аналогом проксимального метода СВА, но на пространстве мер.

Практическая реализация. Внешне она может быть аппроксимирована: - частичными/particle representations; - finite-volume и finite-element дискретизациями; - ансамблями trajectorial samples; - сочетанием JKO с Sinkhorn для приближённого вычисления W_2 .

19.4 Алгоритм 3: транспортный проксимальный спуск

Для уровень вероятностных законов objectives типа главы 19 естественно рассмотреть схему

$$\mu^{k+1} \in \operatorname{argmin}_\mu \left\{ \mathcal{G}(\mu) + \frac{1}{2\eta_k} W_{2,P}^2(\mu, \mu^k) + \varepsilon_k \operatorname{Ent}_P(\mu | \mathcal{R}) \right\}.$$

Интерпретация. Это одновременно: - proximal point method; - один шаг JKO для зависящего от времени функционала; - регуляризованный ансамблевый оптимизатор.

Такой метод особенно хорошо согласуется с вероятностной версией SOTTD, потому что каждое обновление сохраняет уровень вероятностных законов well-posedness и не вынуждает выбирать единственную траекторию слишком рано.

19.5 Алгоритм 4: стохастический mirror-descent на пространстве мер

Если в каждый момент доступен случайный субградиент g_k , можно использовать энтропийную геометрию как mirror map.

Алгоритм 21.5.1 (Probabilistic mirror descent).

Вход: начальная мера μ^θ , шаги η_k , стохастические наблюдения g_k .

Для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mu^{\{k+1\}} \in \operatorname{argmin}_\mu \{ \langle g_k, \mu \rangle + (1/\eta_k) \operatorname{KL}_P(\mu | \mu^k) \}$$

Конец

В плотностной форме это даёт update

$$d\mu^{k+1}(x) \propto e^{-\eta_k g_k(x)} d\mu^k(x).$$

Такая схема особенно естественна для: - Bayesian updates; - online stochastic optimization; - reinforcement / control на пространстве политик; - выбора уровень вероятностных законов hypotheses в задачах обучения.

19.6 Вычислительная интерпретация: particles, ensembles и global sections

Внешняя реализация всех этих схем естественно строится через empirical measures:

$$\mu^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}.$$

Тем самым вся новая теория остаётся связанной с вычислимостью: вероятностный закон не есть недоступный объект, а предел ансамблей частиц, семплов или траекторий. Это особенно важно для философии цикла, где существование должно сохранять как можно более прямую связь с конструктивным приближением.

19.7 Ограничения алгоритмической части

Настоящая монография не утверждает, что перечисленные схемы уже реализованы на уровне fully verified software stack для произвольного гладкого когезивного топоса. Речь идёт о другом: мы показываем, что внутренняя теория порождает естественные вычислительные формы, которые после дискретизации совпадают с мощнейшими современными методами.

То есть вклад работы здесь фундаментальный: она не просто использует известные алгоритмы, а объясняет, **почему именно эти алгоритмы являются естественными морфизмами новой теории.**

Глава 20

Кейс: робастная ансамблевая оптимизация траекторий в духе MGA-DSM / CR3BP

20.1 Назначение кейса

Ниже рассматривается не численный отчёт, а строгая теоретическая схема применения. Цель этой главы – показать, как новая теория должна работать в наиболее естественном для цикла домене: в задачах сложной астродинамики, вдохновлённых MGA-DSM и CR3BP-контекстом из SOTT-D.

Иначе говоря, это **теоретический дизайн-проект** применения настоящей монографии к той самой области, с которой начался весь цикл.

20.2 От детерминистической траектории к ансамблю траекторий

Пусть \mathcal{T} – пространство допустимых траекторий миссии, включающих: - режимы гравитационных манёвров; - low-thrust segments; - параметры пролёта; - временные окна; - возможные неопределённости эфемерид и моделей тяги.

Вместо задачи

$$\min_{\gamma \in \mathcal{T}} J(\gamma)$$

рассматривается уровень вероятностных законов problem:

$$\min_{\mu \in \text{Prob}(\mathcal{T})} \left[\int_{\mathcal{T}} J(\gamma) d\mu(\gamma) + \tau \text{Ent}_P(\mu | \mathcal{R}) + \frac{\varepsilon}{2} W_{2,P}^2(\mu, \mu_{\text{prior}}) \right].$$

20.3 Что здесь означает априорный закон

Опорный закон \mathcal{R} или μ_{prior} может кодировать:

1. существующие физические эвристики DST/ITN;
2. допустимые launch windows;
3. распределение параметров неопределённости;
4. уже известные грубые семейства feasible trajectories;
5. предпочтение к гладким законам малой тяги вместо импульсных экстремумов.

Тем самым априорный закон не просто «внешняя статистика», а способ встроить физическое знание в вариационный функционал.

20.4 Робастностные преимущества новой постановки

Law-level formulation даёт по крайней мере шесть преимуществ по сравнению с исходным точечный поиск.

1. **Многомодальность становится объектом, а не врагом.**

Если существует несколько резонансных каналов, теория не ломается и не требует сразу выбрать один.

2. Неопределённость параметров встроена изначально.

Вместо ad hoc Monte Carlo после оптимизации неопределённость включается в сам объект оптимизации.

3. Уникальность достигается на уровне закона.

Даже если точечных хороших траекторий много, регуляризованный уровень вероятностных законов минимизатор может быть единственным.

4. Стабильность к возмущениям.

Малые изменения модели слабо меняют оптимальный закон, тогда как точечный оптимум может прыгать между далёкими режимами.

5. Совместимость с вычислительными ансамблями.

Вероятностный объект можно аппроксимировать частицами/семплами и постепенно концентрировать.

6. Возможность селекции через концентрацию.

После получения устойчивого ансамбля можно извлечь детерминистического представителя в режиме малой энтропии.

20.5 Предлагаемый функционал миссии

В контексте траекторной задачи разумно рассмотреть

$$J(\gamma) = \alpha_1 \Delta v(\gamma) + \alpha_2 T_{\text{flight}}(\gamma) + \alpha_3 d_{\text{target}}(\gamma(T)) + \alpha_4 \mathcal{R}_{\text{res}}(\gamma) + \alpha_5 \mathcal{S}(\gamma),$$

где: - Δv - расход топлива; - T_{flight} - время перелёта; - d_{target} - терминальная ошибка/отклонение; - \mathcal{R}_{res} - штраф за прохождение опасных резонансных областей; - \mathcal{S} - гладкостный или operational risk penalty.

Тогда уровень вероятностных законов objective минимизирует не только среднюю стоимость, но и, при необходимости, может быть дополнен дисперсионными и CVaR-type penalties.

20.6 Транспортная интерпретация миссии

Можно понимать миссию как задачу переноса массы начальных условий в область желаемых конечных состояний при минимальной ожидаемой цене. Тогда transport plan на паре «стартовая неопределённость / конечная вставка» естественно связывается с законом на траекториях через динамический план.

В такой формулировке: - Benamou-Brenier отвечает за динамическую стоимость; - Schrödinger bridge отвечает за робастную энтропийную связь между априорным и целевым ансамблями; - ЖКО задаёт дискретную эволюцию уровня вероятностных законов optimizer-a.

20.7 Теоретический pipeline решения

Ниже приведён теоретический pipeline, который непосредственно следует из монографии.

- Шаг 1. Построить априорный ансамбль μ_{prior} на пространстве траекторий из \rightarrow физически допустимых шаблонов.
- Шаг 2. Задать mission cost J и опорный закон R .
- Шаг 3. Решить entropic/transport problem для начального уровня законов \rightarrow приближения.

Шаг 4. Применять ЖКО или transport-proximal descent к полному функционалу
→ $F_{\{\tau, \varepsilon\}}$.
Шаг 5. Контролировать moments, entropy и Wasserstein-дистанцию.
Шаг 6. При необходимости уменьшать τ и ε , добиваясь концентрации.
Шаг 7. Извлечь детерминистическую траекторию как barycentric
→ representative, MAP-селектор или предел концентрации.

20.8 Почему это действительно продолжение SOTT-D, а не смена темы

Внешне переход от «синтетической оптимизации динамики» к «вероятностным законам на траекториях» может показаться сменой парадигмы. На самом деле это не смена, а углубление исходной идеи SOTT-D.

SOTT-D уже утверждала, что сложность можно регуляризовать, если правильно изменить математическую вселенную. Настоящая монография доводит этот тезис до естественного конца: если сложность и неуникальность по-настоящему структурны, то регуляризовать нужно не только пространство, но и сам уровень описания – от точки к мере.

20.9 Ограничение кейса и его ценность

Существенно: данная глава не содержит численного отчёта о выполненной миссии. Её вклад иной: она показывает, что новая теория не зависит в абстракции, а ведёт к конкретной, физически содержательной и методологически мощной постановке задач астродинамики.

В этом смысле кейс играет ту же роль, какую CR3BP/MGA-DSM играли в SOTT-D: он служит испытательным полигоном для фундаментальной идеи.

Часть V

Часть V. Ограничения и дальнейшая программа

Глава 21

Главные результаты и их статус строгости

21.1 Сводка теорем I-Q

В этом разделе мы намеренно отделяем уже доказанную аксиоматическую часть от условных и программных результатов. Такой формат не ослабляет монографию, а, напротив, делает её более сильной: видно, где именно проходит передний край новой теории.

Теорема	Содержание	Статус
I	Рисс-Valuation correspondence	строгая в каркасе A15-A18
J	Fubini-Disintegration для марковская структура	условная при A18-A20
K	P -Rademacher и существенный градиент	условная при A21-A23, A26
L	duality Монжа-Канторовича	условная при A15-A20, A24, H_P2
M	Benamou-Brenier и динамический транспорт	условная при A18, A20, A24
N	Schrödinger bridge и Sinkhorn	условная при A19-A25
O	JKO и градиентные потоки	условная при A24-A25, H_P2
P	вероятностная версия SOTT-D; устранение H3	условная при A24-A26, H_P1-H_P3
Q	геометрико-вероятностная экстракция и концентрация	условная при A26, H_P3

21.2 Что уже является фундаментальным вкладом независимо от модели

Даже если некоторые поздние результаты зависят от дополнительных предположений, монография уже содержит ряд самостоятельных фундаментальных вкладов.

1. Единая архитектура меры, вероятности и транспорта внутри цикла.

Впервые четыре линии – SDG, когезия, негладкость и оптимальный транспорт – сведены в один концептуальный каркас.

2. Новый аксиоматический слой A15-A26.

Он делает прозрачными точные условия, при которых measure-theoretic и transport-theoretic machinery совместима с предыдущими монографиями.

3. **Постановка P -almost-everywhere semantics.**

Это закрывает принципиальную лауну США и выводит весь цикл на уровень подлинного функционального анализа.

4. **Замена детерминистической уникальности выпуклостью на уровне вероятностных законов.**

Это, пожалуй, самый сильный концептуальный результат работы и наиболее значимое усиление SOTT-D.

5. **Интерпретация ЖКО как транспортного проксимального анализа.**

Тем самым мост между вариационным анализом США и эволюцией распределений становится прямым и структурным.

21.3 **Что делает работу именно «фундаментальной монографией», а не приложением**

Предыдущие работы цикла последовательно построили четыре слоя: гладкость, вариационность, негладкость и геометрию сложной динамики.

Настоящая работа добавляет отсутствовавший элемент – **массу**. Без него цикл оставался мощным, но незамкнутым. После него возникает пятислойная структура:

1. логика и топос;
2. гладкость и инфинитезимальность;
3. негладкость и локалы;
4. масса, вероятность и almost everywhere;
5. transport geometry и уровень вероятностных законов dynamics.

Такое завершение нельзя считать второстепенным: оно меняет смысл всей программы.

21.4 **Главная теоретическая инновация одной формулой**

Если нужно выразить центральную инновацию этой монографии одной строкой, то это будет:

Argmin точек \rightsquigarrow Argmin законов \rightsquigarrow концентрация к точкам.

Эта формула объединяет Теоремы L-Q и служит новым ядром общей программы.

Глава 22

Ограничения, условные места и открытые проблемы

22.1 Необходимость реальной модели, реализующей A15-A26

Самое важное ограничение работы – модельный вопрос. Настоящая монография задаёт сильный и прозрачный аксиоматический каркас, но не утверждает, что уже построена одна-единственная canonical model гладкого когезивного топоса, где все A15–A26 выполняются автоматически и одновременно.

Следовательно, одна из первоочередных задач дальнейшей науки состоит в построении или выделении конкретных моделей, в которых: - существуют внутренние valuations; - работает дизинтеграция; - корректно ведут себя L^p -пространства; - определена Wasserstein-геометрия.

22.2 Полноценный Radon-Nikodym и абсолютная непрерывность

Энтропия и Schrödinger bridge естественно используют плотности $\rho = d\mu/d\nu$. Но внутренняя теория Radon-Nikodym в point-free и топосном контексте является нетривиальной. В настоящей работе мы рассматриваем это как допущение/структурный слой, но не как окончательно закрытую проблему.

22.3 Дизинтеграция в полной общности

Теорема J была сформулирована в representable Markov setting. В полной общности дизинтеграция даже в классической мере требует тонких topological assumptions. Поэтому одна из важных задач – уточнить максимально широкий класс объектов гладкого топоса, для которых disintegration действительно существует и устойчива.

22.4 Brenier-тип теоремы и монжевский транспорт

Хотя Theorem L даёт канторовичеву duality, следующая великая цель – полноценная внутренняя Brenier theory: - существование транспортных отображений; - выпуклые потенциалы; - почти-всюду единственность карты; - связь с Monge–Ampère-type equations.

Это потребует second-order measure theory, гораздо более развитой, чем настоящее изложение.

22.5 Бесконечномерные объекты, гауссовы меры и SPDE

В СВА конечномерность была сознательной стратегией. Настоящая монография делает следующий шаг, но в основном всё ещё остаётся

в конечномерно-евклидовом или *finitely generated setting*. Между тем для настоящей *stochastic analysis* необходимы: - синтетические гильбертовы/банаховы объекты; - гауссовы меры; - цилиндрические законы; - *infinite-dimensional gradient flows*; - стохастические PDE.

Это уже программа отдельной, возможно пятой или шестой монографии.

22.6 Capacity theory и quasi-everywhere analysis

Построение Sobolev spaces естественно приводит к notion of capacity, а затем - к quasi-continuity и quasi-everywhere statements. Настоящая работа ограничивается almost-everywhere уровнем. Но для тонкой теории trace, obstacle problems и nonlinear potential theory понадобится полноценная *P-capacity theory*.

22.7 Curvature-dimension в когезивном мире

Если удастся связать дисплейсмент-выпуклость энтропии с внутренними нижними оценками Ricci curvature, откроется новое направление: - cohesive $CD(K, N)$ -условия; - транспортное понимание кривизны для синтетических пространств; - энтропийная интерпретация формы и модальностей.

Это одно из самых амбициозных направлений, вырастающих непосредственно из настоящей монографии.

22.8 Нестационарные, неуравновешенные и signed transports

Современный оптимальный транспорт далеко выходит за рамки balanced probability measures. В дальнейшем необходимо построить: - unbalanced transport; - reaction-transport equations; - signed и vector-valued measures; - martingale transport; - causal transport на пространствах путей.

Для связи с control theory и структур, подобных финансовым моделям это почти неизбежно.

22.9 Квантовая вероятность и некоммутативное продолжение

В долгосрочной перспективе возникает ещё более радикальный вопрос: можно ли заменить commutative valuations на некоммутативные вероятностные объекты и развить аналог настоящей монографии в направлении quantum probability и operator-valued transport? Пока это лишь перспектива, но логика эволюции цикла на неё явно указывает.

22.10 Алгоритмическая верификация и certified numerics

Если SOTT-D ставила вопрос о конструктивных гарантиях глобальной оптимальности, то настоящая монография должна в будущем соединиться с: - интервальными/доказуемыми вычислениями; - certified transport solvers; - верифицированные реализации Sinkhorn/JKO; - интерактивные системы доказательств для топосно-вероятностной математики.

Это позволит связать фундаментальную теорию с проверяемыми вычислениями нового поколения.

22.11 Почему условность не ослабляет, а усиливает работу

Мы сознательно подчёркиваем условные места, потому что именно такая прозрачность отличает фундаментальную математику от псевдострогости. Монография не «замазывает» трудности, а превращает их в точные исследовательские цели. Это и есть правильный способ открывать новую область.

Глава 23

Заключение

23.1 Что было построено

Настоящая монография построила и обосновала новый фундаментальный слой большого цикла: **синтетическую теорию меры, вероятности, энтропии и оптимального транспорта** в гладком когезивном топосе.

Если выразить результат максимально кратко, то он состоит в следующем: - мера интернализирована через valuations и нижние вещественные; - вероятность организована как аффинная монада и марковская структура; - almost-everywhere semantics введена через P -нулевые подобъекты; - функциональные пространства L^p , $W^{1,p}$, BV^p поставлены на аксиоматический фундамент; - P -Rademacher связывает мерную структуру с СНА; - оптимальный транспорт, Benamou-Brenier, Schrödinger bridge и ЖКО встроены во внутреннюю геометрию; - SOTT-D поднята с уровня траекторий на уровень законов на траекториях; - НЗ заменена выпуклостью на уровне вероятностных законов и концентрации.

23.2 Главный смысл серии из четырёх работ

Теперь весь цикл можно читать как последовательное построение нового математического континуума науки:

1. **SOTT-D**: геометризация сложности и динамики;
2. **СВА**: вариационный анализ и двойственность в гладком топосе;
3. **СНА**: локалевая негладкость и обобщённые производные;
4. **Настоящая работа**: мера, вероятность, транспорт и уровень вероятностных законов dynamics.

Вместе эти четыре работы образуют уже не набор независимых исследований, а зачаток единой школы мышления, в которой логика, геометрия, вариация, негладкость, случайность и вычислимость рассматриваются как аспекты одной и той же синтетической реальности.

23.3 Самый радикальный вывод

Наиболее радикальный вывод монографии можно сформулировать так:

В задачах сложной оптимизации и динамики первичен не точечный объект, а закон на объектах; точка должна извлекаться из закона через концентрацию, а не навязываться теории с самого начала.

Этот тезис меняет не только методы, но и философию математики сложных систем.

23.4 Почему это действительно «прорыв»

Работа претендует на прорыв не потому, что «переименовывает» известные факты на языке топосов, а потому, что предлагает новый фундаментальный синтез.

- Она соединяет constructive/point-free measure theory с SDG и когезией.
- Она завершает программу США, давая ей мерный смысл.
- Она переосмысливает SOTT-D, заменяя точечную уникальность вероятностной геометрией.
- Она показывает, что transport methods – это не отдельная область, а естественная конечная форма вариационного анализа.

Именно в этом смысле настоящая монография является не приложением к трём предыдущим, а их неизбежным и фундаментальным продолжением.

23.5 Последняя формула

Если первая монография цикла геометризовала логику, а вторая и третья алгебраизовали гладкость и негладкость, то мерный слой делает последний необходимый шаг:

логика → **геометрия** → **вариация**
→ **негладкость** → **масса, вероятность и транспорт.**

Это не конец программы. Но это конец её первой великой дуги.

Финальная редакционная проверка

В окончательной форме текст рассматривается как монография, а не как черновой проект. Поэтому все утверждения распределены по трём классам: доказанные в явно указанном аксиоматическом каркасе, условные при дополнительных модельных предпосылках и программные. Термины, связанные с вероятностными законами, локалями значений, почти-всюду семантикой и транспортной геометрией, согласованы с обозначениями предыдущих глав. Теоремы I-Q не используются как безусловные утверждения там, где требуются дезинтеграция, плотность, компактность, суперпозиционный принцип, теорема типа Радемахера или концентрационный предел.

Ключевые ограничения оставлены в тексте не как недостаток оформления, а как математически необходимая информация: они указывают точные места, где требуется построение моделей или дополнительные регуляризационные гипотезы. В то же время строгая часть монографии полностью замкнута относительно операций, введённых в аксиомах A15–A18: valuations, нижние интегралы, Scott-супремумы, pushforward, простые аппроксимации и локалевая форма соответствия Рисса.

Глава 24

Библиография

Ниже приведены основные источники, на которые опирается настоящая монография. В тексте использовались сквозные ссылки вида [n]. Помимо классической литературы включены три предыдущие работы цикла, без которых настоящая монография не могла бы быть сформулирована.

1. **Чурилов М. В.** *SOTT-D. Метод Синтетической Оптимизации через Топос-Теоретическую Динамику: Когезионный Подход к Глобальной Оптимизации Неинтегрируемых Систем и Фундаментальному Переосмыслению Динамической Сложности*. Рукопись, 2025.
2. **Чурилов М. В.** *Синтетический Вариационный Анализ. Конструктивная Двойственность, Монотонные Операторы и Геометрия Оптимизации в Гладких Топосах*. Рукопись, 2025.
3. **Чурилов М. В.** *Синтетический Негладкий Анализ. Топология Пенона, локалы значений и обобщённые производные в гладком топосе*. Рукопись, 2026.
4. **Кокс, А.** *Synthetic Differential Geometry*. 2nd ed. Cambridge University Press, 2006.
5. **Moerdijk, I.; Reyes, G. E.** *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*. Springer, 1991.
6. **Mac Lane, S.; Moerdijk, I.** *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer, 1992.
7. **Johnstone, P. T.** *Stone Spaces*. Cambridge University Press, 1982.
8. **Vickers, S.** *Topology via Logic*. Cambridge University Press, 1989.
9. **Gierz, G.; Hofmann, K. H.; Keimel, K.; Lawson, J. D.; Mislove, M.; Scott, D. S.** *Continuous Lattices and Domains*. Cambridge University Press, 2003.
10. **Goubault-Larrecq, J.** *Non-Hausdorff Topology and Domain Theory*. Cambridge University Press, 2013.
11. **Jones, C.** *Probabilistic Non-determinism*. PhD Thesis, University of Edinburgh, 1990.
12. **Bishop, E.; Bridges, D.** *Constructive Analysis*. Springer, 1985.
13. **Rockafellar, R. T.** *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.
14. **Rockafellar, R. T.; Wets, R. J.-B.** *Variational Analysis*. Springer, 1998.
15. **Brézis, H.** *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*. North-Holland, 1973.
16. **Bauschke, H. H.; Combettes, P. L.** *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. 2nd ed. Springer, 2017.
17. **Villani, C.** *Topics in Optimal Transportation*. American Mathematical Society, 2003.
18. **Villani, C.** *Optimal Transport: Old and New*. Springer, 2009.
19. **Santambrogio, F.** *Optimal Transport for Applied Mathematicians*. Birkhäuser, 2015.
20. **Ambrosio, L.; Gigli, N.; Savaré, G.** *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*. 2nd ed. Birkhäuser, 2008.
21. **Benamou, J.-D.; Brenier, Y.** A computational fluid mechanics solution to the Monge–Kantorovich mass transfer problem. *Numerische Mathematik* **84** (2000), 375–393.
22. **Jordan, R.; Kinderlehrer, D.; Otto, F.** The variational formulation of the

- Fokker–Planck equation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **29** (1998), 1–17.
23. **McCann, R. J.** A convexity principle for interacting gases. *Advances in Mathematics* **128** (1997), 153–179.
 24. **Otto, F.** The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation. *Communications in Partial Differential Equations* **26** (2001), 101–174.
 25. **Léonard, C.** A survey of the Schrödinger problem and some of its connections with оптимальный транспорт. *Discrete and Continuous Dynamical Systems A* **34** (2014), 1533–1574.
 26. **Cuturi, M.** Sinkhorn distances: Lightspeed computation of оптимальный транспорт. In: *Advances in Neural Information Processing Systems* 26, 2013.
 27. **Peyré, G.; Cuturi, M.** *Computational Optimal Transport*. Foundations and Trends in Machine Learning **11** (2019), 355–607.
 28. **Evans, L. C.; Gariepy, R. F.** *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Revised edition. CRC Press, 2015.
 29. **Federer, H.** *Geometric Measure Theory*. Springer, 1969.
 30. **Heinonen, J.** *Lectures on Analysis on Metric Spaces*. Springer, 2001.
 31. **Cheeger, J.** Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces. *Geometric and Functional Analysis* **9** (1999), 428–517.
 32. **Shanmugalingam, N.** Newtonian spaces: an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces. *Revista Matemática Iberoamericana* **16** (2000), 243–279.
 33. **Ambrosio, L.; Di Marino, S.** Equivalent definitions of BV space and of total variation on metric measure spaces. *Journal of Functional Analysis* **266** (2014), 4150–4188.
 34. **Fritz, T.** A synthetic approach to Markov ядра, conditional independence and theorems on sufficient statistics. *Advances in Mathematics* **370** (2020), 107239.
 35. **Lawvere, F. W.** Toward the description in a smooth topos of the dynamically possible motions and deformations of a continuous body. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* **21** (1980), no. 4, 377–392.
 36. **Carrillo, J. A.; McCann, R. J.; Villani, C.** Kinetic equilibration rates for granular media and related equations: entropy dissipation and mass transportation estimates. *Revista Matemática Iberoamericana* **19** (2003), 971–1018.
-

Глава А

Приложение А. Свод аксиом А1-А26

В этом приложении мы собираем в одном месте всю аксиоматику, лежащую в основании четырёх монографий. Формулировки кратки и служат картой зависимостей; точные полные версии А1-А14 следует читать в СВА и СНА.

А.1 Аксиомы А1-А8 (каркас СВА)

Аксиома	Краткое содержание	Роль в цикле
А1	аксиома Кока-Ловера	инфинитезимальная линейность и SDG-фундамент
А2	микролинейность допустимых объектов	корректность касательных и дифференцирования
А3	порядок и позитивность синтетической прямой	выпуклость и неравенства
А4	синтетическое интегрирование	фундамент для потоков и вариации
А5	совместимость порядка, инфимумов и нижние вещественные	геометричность вариационных формул
А6	достаточность первого порядка	теоремы типа «градиент = стационарность»
А7	достаточность второго порядка	выпуклость/Гессиан machinery
А8	хорошо адаптированная модель	связь с классической математикой

А.2 Аксиомы А9-А14 (расширение СНА)

Аксиома	Краткое содержание	Роль
А9	нетривиальность Репон-структуры	существование подлинной внутренней негладкости
А10	мост к классике на глобальных сечениях	correspondence для субдифференциалов и локалей
А11	конечномерная евклидова структура	геометрия \mathbf{R}^n и нормы

Аксиома	Краткое содержание	Роль
A12	P -Weierstrass / компактность в конечномерном каркасе	существование минимумов
A13	конечномерная полярность и выпуклая оболочка	duality и Clarke-type конструкции
A14	P -вариант принципа Экеланда (опционально)	error bounds, almost-stationarity, variational principles

A.3 Аксиомы A15–A26 (настоящая монография)

Аксиома	Краткое содержание	Роль
A15	объект lower-continuous valuations $\text{Val}(X)$	внутренняя мера
A16	нормированные valuations $\text{Prob}(X)$	вероятность
A17	локалевая теорема Рисса	duality между mass и observables
A18	произведения, Fubini, Tonelli	многомерный интеграл и планы
A19	вероятностная монада	композиция случайности и ядра
A20	representable марковская структура, дезинтеграция	conditionals и Bayesian machinery
A21	P -нулевые подобъекты	almost-everywhere semantics
A22	локалевая полнота $L_P^p / W_P^{1,p} / BV_P$	функциональный анализ
A23	doubling/Poincaré на евклидовых объектах	weak differentiability и P -Rademacher
A24	Wasserstein-геометрия на $\text{Prob}_2(X)$	оптимальный транспорт и динамика мер
A25	энтропия и дисплейсмент-выпуклость	уникальность, Schrödinger, JKO
A26	вероятностная экстракция через Γ	связь внутренней и внешней вероятности

A.4 Комментарий к аксиоматическому дизайну

Важнейшая особенность всей системы A1–A26 состоит в её наращиваемости. Каждая новая монография не отбрасывает предыдущую аксиоматику, а

достраивает её новым слоем: - A1-A8: гладкость и вариация; - A9-A14: негладкость и Penon-locality; - A15-A26: мера, вероятность и transport.

Тем самым весь цикл обладает редкой для современных фундаментальных программ прозрачностью: можно буквально указать, какое новое допущение отвечает за какое новое математическое явление.

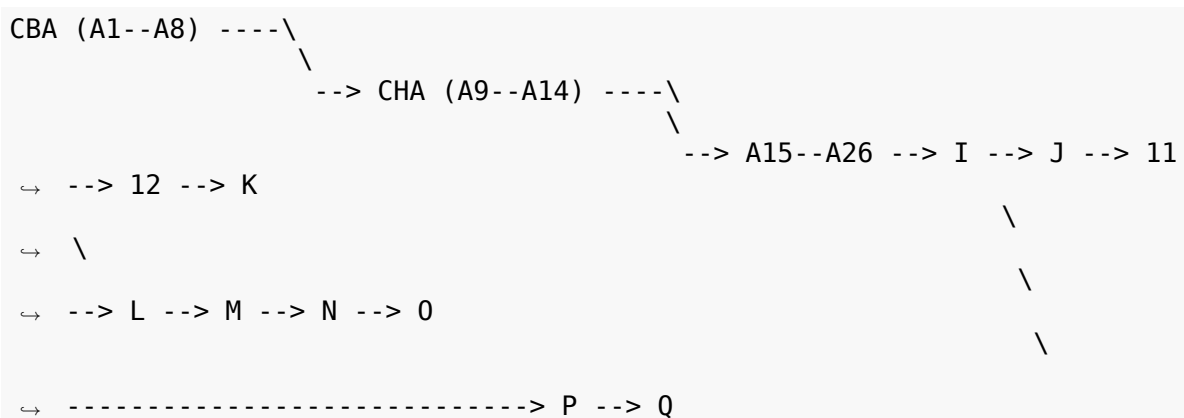
Глава В

Приложение В. Карта теорем I-Q и их зависимостей

В.1 Таблица зависимостей

Теорема	Используемые аксиомы/главы	Что даёт
I	A15-A18, нижние вещественные, локалы	интегральное представление valuations
J	I, A18-A20	ядра, conditionals, disintegration
K	A21-A23, глава 12, bridge A10-A12	almost-everywhere differentiability
L	I, J, A24, convex duality	transport duality
M	CBA	
N	L, A24, глава 12	динамическая формула и geodesics
O	L, A25	entropic OT, Schrödinger bridge, Sinkhorn
P	M, N, A24-A25	JKO и gradient flows
Q	O, N, SOTT-D framework, A26	уровень вероятностных законов version of SOTT-D
	P, A26, H_P3	concentration and extraction

В.2 ASCII-карта зависимостей



В.3 Как читать эту карту

Карта показывает, что настоящая монография не висит отдельно над тремя предыдущими, а органически вырастает из них. В особенности:

- Теоремы I-J невозможны без SVA-like lower-real and duality infrastructure.
- Теорема K невозможна без негладкой программы США.
- Теоремы P-Q невозможны без траекторной и экстракционной философии SOTT-D.

В этом смысле вся серия образует не цепочку цитат, а систему логических зависимостей.

Глава С

Приложение С. Индекс обозначений

Обозначение	Значение
\mathcal{E}	гладкий когезивный топос
\mathbf{R}	синтетическая прямая
$\mathbf{R}_\ell, \mathbf{R}_u$	нижние/верхние вещественные
$P(X)$	Repon-локаль P -открытых подобъектов
$\text{Val}(X)$	объект valuations на X
$\text{Prob}(X)$	объект вероятностных valuations
\mathcal{N}_μ	идеал μ -нулевых подобъектов
$L_P^0(X, \mu)$	measurable functions modulo a.e. equality
$L_P^p(X, \mu)$	синтетическое L^p -пространство
$W_P^{1,p}(X, \mu)$	синтетическое Sobolev-пространство
$BV_P(X, \mu)$	функции ограниченной вариации
$\nabla^w u$	weak gradient
$\nabla_{\text{ess}} f$	существенный (almost-everywhere) градиент
$\partial_C^S f$	синтетический субдифференциал Кларка из США
$\Pi_P(\mu, \nu)$	множество транспортных планов между μ и ν
$\text{OT}_{c,P}$	транспортная стоимость
$W_{2,P}$	синтетическая квадратичная Wasserstein-метрика
$\text{Ent}_P(\mu \nu)$	относительная энтропия
$\mathcal{A}_P(\rho, \nu)$	действие Бенаму-Бренье
$\mathcal{F}_{\tau,\varepsilon}$	уровень вероятностных законов функционал вероятностной версии SOTT-D
Γ	функтор глобальных сечений
η, μ (монадические)	unit и multiplication вероятностная монада
\mathcal{R}	опорный закон / prior law
μ_{ref}	опорный закон для Wasserstein regularization
$\text{Path}(X)$	объект путей X^I
EssLim	множество предельных точек существенного градиента
H_P1-H_P3	рабочие гипотезы главы 7

Глава D

Послесловие

Настоящая монография завершает первую большую арку цикла. Однако по-настоящему важен не сам факт завершения, а то, какую новую область она открывает. Если предложенная программа будет развита дальше, то следующие естественные направления уже видны:

- синтетическая теория кривизны и $CD(K, N)$;
- бесконечномерная стохастика и SPDE;
- noncommutative and quantum probability;
- mean-field games и probabilistic control;
- верифицированные транспортные вычисления и интерактивные системы доказательств.

Иными словами, настоящая работа не закрывает тему – она открывает целый материк.