

Максим Вячеславович Чурилов

Синтетический негладкий анализ

**Топология Пенона, локалы значений и обобщённые
производные в гладком топосе**

Центр одарённых детей «Гагарин», Оренбург
churilovm1305@gmail.com

Оренбург, 2026

Аннотация

Настоящая монография строит синтетический негладкий анализ как продолжение синтетического вариационного анализа в гладком топосе \mathcal{E} . Исходная проблема состоит в том, что обычный субдифференциал конечнозначной выпуклой функции $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ во внутренней логике SDG тривиализуется до градиента. Поэтому негладкость не может быть определена как отсутствие производной у стрелок $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Работа формулирует и развивает иной принцип: негладкость в гладком топосе является локалево-топологической структурой, возникающей из Repon -топологии, двойного отрицания, нижних и верхних вещественных, эпиграфов, касательных и нормальных конусов.

Вводятся отношение $x \approx_P y \iff \neg\neg(x = y)$, локаль $P(X)$ Repon -открытых под-объектов, логические инфинитезимальные $\Delta = \{d \in \mathbf{R} \mid \neg\neg(d = 0)\}$, P -сходимость, P -замыкание и семантический мост к классическим глобальным сечениям. На этой основе строятся локалы значений $\mathbf{R}_\ell, \mathbf{R}_u, \overline{\mathbf{R}}_\ell$, а также конструктивные операции \sup, \inf , индикаторы, опорные функции и P -сопряжение Лежандра-Фенхеля.

Главные результаты формулируются как конечномерные теоремы с явным паспортом аксиом. Теорема E доказывает нетривиальность синтетического субдифференциала Кларка ∂_C^S и его описание через выпуклую оболочку активных градиентов для кусочно- P -гладких функций. Теорема F даёт исчисление суммы, максимума, линейной композиции, гладкой цепочки и проксимальной совместимости. Теорема G устанавливает негладкую двойственность в P -сопряжении и соответствующие ККТ-условия без скрытого использования Хана-Банаха. Теорема H формулирует существование и сходимость forward-backward итераций для P -максимально монотонных включений. Дополнительно развиты проксимальный субдифференциал Моро, лимитный субдифференциал мордуховичевского типа, кодеривативы, error bounds, DR/ADMM и примально-дуальные схемы.

Доказательный режим работы предельно явен: алгебраические и полярные факты выводятся внутри конечномерного P -каркаса; компактные и достижимые утверждения помечаются соответствующими аксиомами; бесконечномерные, слаботопологические и полугрупповые расширения вынесены в открытые задачи. В хорошо адаптированных моделях с мостом A10 полученные конструкции совпадают на глобальных сечениях с классическими объектами Clarke-Moreau-Mordukhovich-Rockafellar-Wets в указанном конечномерном смысле.

Ключевые слова: синтетическая дифференциальная геометрия; гладкие топосы; Repon -топология; двойное отрицание; локалы; нижние вещественные; Clarke-субдифференциал; Moreau-субдифференциал; Mordukhovich-субдифференциал; монотонные операторы; негладкая двойственность; проксимальные алгоритмы.

Оглавление

Аннотация	i
I Доказательный паспорт и нормальная форма теории	1
1 Статус результатов и центральный тезис	2
1.1 Карта главных результатов	2
1.2 Нормальная форма США	2

II	Основания и аксиомы	4
2	Соглашения и обозначения	5
2.1	Внутренняя логика и конструктивность	5
2.2	Нотация первой монографии и «пакет» A1–A8	5
2.3	P -неразличимость, P -замыкание, P -пределы	5
2.4	Локалы значений и расширенные числа	6
2.5	Дорожная карта: от Теоремы 4.6.4 к СНА	6
2.6	Список аксиом (A1–A8 + A9–A14)	6
2.7	A1–A8 (первая монография)	6
2.8	Новые аксиомы A9–A14 (расширение относительно СВА)	7
3	Введение: постановка СНА как продолжения СВА	9
3.1	Парадокс гладкости и барьер Теоремы 4.6.4	9
3.2	Негладкость как локалевая и P -топологическая	9
3.3	Главные цели и результаты	9
4	Топология Пенона $P(X)$ и логические инфинитезималы	11
4.1	Репон-открытые подобъекты и локаль $P(X)$	11
4.2	P -ядра точек и P -неразличимость	11
4.3	Логические инфинитезималы $\Delta \subseteq \mathbf{R}$	12
4.4	Аксиома недискретности и минимальные следствия	12
4.5	P -сходимость, P -замыкание и замкнутость графов	13
4.6	Репон-топология как « $\neg\neg$ -сепарация» и связь с топосной геометрией	13
4.6.1	Модальность $\neg\neg$ и P -неразличимость	13
4.6.2	Сепарация и факторизация по \approx_P	13
4.6.3	Что такое $P(X)$ с этой точки зрения	14
5	P-разрывность и классы P-негладких функций	15
5.1	P -полунепрерывность	15
5.2	Локальная P -липшицевость и кусочно- P -гладкость	15
5.3	Базовые примеры P -негладких функций	16
5.3.1	Абсолютная величина	16
5.3.2	Максимум/минимум	16
5.3.3	Hinge-loss	16
5.3.4	Индикатор множества	16
5.3.5	Кусочно-линейные функции	16
5.4	Замкнутость классов и активные множества	17
6	Локалы значений и конструктивные sup/inf	18
6.1	Нижние вещественные \mathbf{R}_ℓ	18
6.2	Верхние вещественные \mathbf{R}_u	18
6.3	Расширенные значения	19
6.4	Scott-локаль и полунепрерывность	19
6.5	Супремумы и опорные функции	19
6.6	Связь с $\bar{\mathbf{R}}$ первой монографии	19
III	P-геометрия и обобщённые производные	21
7	P-геометрия множеств: касательные и нормальные конусы	22
7.1	P -контингентный касательный конус	22
7.2	P -нормальный конус и полярность	22
7.3	Нормали к эпиграфам и индикаторные функции	22
7.4	Правила исчисления для касательных/нормалей	23

8	<i>P</i>-лимсуп и обобщённые направленные производные	24
8.1	Верхний <i>P</i> -предел и верхняя производная Дини	24
8.2	<i>P</i> -Clarke направленная производная	24
8.3	Связь с гладким случаем	25
9	Синтетический субдифференциал Кларка	26
9.1	Определение ∂_C^S через направленную производную	26
9.2	Эпиграфическая формулировка	26
9.3	Нетривиальные вычисления: $ x $ и максимум	26
9.4	Теорема E: нетривиальность ∂_C^S и корректные свойства	27
9.4.1	Формулировка	27
9.4.2	Доказательство (структура)	27
9.5	Лемма 7.4.2 (направленная производная кусочно-гладкой функции)	28
9.6	Лемма 7.4.3 (субдифференциал максимума линейных форм)	28
9.7	Доказательство Теоремы 7.4.1 (E.2 и E.1)	29
9.8	Лемма 7.4.4 (<i>P</i> -замкнутость графа)	29
9.9	Доказательство пунктов E.3 и E.4	29
9.10	Доказательство пункта E.5 (соответствие)	29
IV	Проксимальный и лимитный анализ	31
10	Проксимальный анализ и субдифференциал Моро	32
10.1	Сильная выпуклость и проксимальные точки	32
10.2	Проксимальный субдифференциал Моро	32
10.3	Moreau–Yosida оболочка и её гладкость	33
10.4	Резольвента субдифференциала и связь с монотонностью	33
11	Лимитный субдифференциал и кодеривативы	34
11.1	Определение лимитного субдифференциала	34
11.2	Включения между субдифференциалами	34
11.3	Нормальный конус Мордуховича-типа	34
11.4	Кодериватив и метрическая регулярность: минимальный каркас	35
V	Операторы, двойственность, исчисление и алгоритмы	36
12	<i>P</i>-монотонные операторы и <i>P</i>-максимальная монотонность	37
12.1	Мнозначные операторы и <i>P</i> -монотонность	37
12.2	Резольвента и регуляризация Йосиды	37
12.3	Minty-тип результат в <i>P</i> -форме	37
13	Вариационные неравенства и включения: существование и алгоритмы (Теорема H)	39
13.1	Базовая постановка	39
13.2	Кокэрцитивность и нерасширяемость шага	39
13.3	Forward–Backward оператор	39
13.4	Теорема H: существование и сходимость FB	40
13.4.1	Формулировка	40
13.4.2	Доказательство	40
13.5	Лемма 11.4.2 (существование фиксированной точки)	40
13.6	Лемма 11.4.3 (Фежер-монотонность итераций)	41
13.7	Лемма 11.4.4 (асимптотическая регулярность)	41
13.8	Лемма 11.4.5 (сходимость)	41

14	<i>P</i>-сопряжение и негладкая двойственность	43
14.1	<i>P</i> -Лежандр-Фенхель и Fenchel-неравенство	43
14.2	<i>P</i> -субдифференциал выпуклых функций и фенхелево равенство	43
14.3	<i>P</i> -условие квалификации	44
14.4	Теорема G: сильная негладкая двойственность	44
14.4.1	Формулировка	44
14.4.2	Доказательство	45
14.5	Лемма 12.4.2 (слабая двойственность)	45
14.6	Лемма 12.4.3 (регуляризация прямой задачи)	45
14.7	Лемма 12.4.4 (регуляризованная двойственность)	45
14.8	Лемма 12.4.5 (ККТ для регуляризованных задач)	46
14.9	Лемма 12.4.6 (предел $\mu \downarrow 0$ и отсутствие разрыва)	46
14.10	Завершение доказательства Теоремы G	46
15	Исчисление субдифференциалов и правило цепочки (Теорема F)	47
15.1	Сумма	47
15.2	Максимум	47
15.3	Композиция с линейным оператором	48
15.4	Правило цепочки для гладкой внутренней композиции	48
15.5	Теорема F: полный пакет исчисления	49
16	Алгоритмы негладкой оптимизации в <i>P</i>-геометрии	50
16.1	Проксимальный метод	50
16.2	Проксимально-градиентный метод (Forward-Backward)	50
16.3	Douglas-Rachford и ADMM	50
16.4	Субградиентные потоки	51
VI	Примеры, соответствие и открытые проблемы	52
17	Примеры и приложения	53
17.1	$ x $ и soft-thresholding (ℓ_1)	53
17.2	Hinge-loss и SVM	53
17.3	Индикаторы и проекции	54
17.4	Кусочно-линейные функции и активные грани	54
17.5	Негладкое вариационное исчисление: дискретная модель TV-типа	54
18	Теорема о соответствии СНА в хорошо адаптированных моделях	55
18.1	Внешняя интерпретация и глобальные сечения	55
18.2	Соответствие локалей значений	55
18.3	Соответствие субдифференциалов и нормалей	55
18.3.1	Clarke	55
18.3.2	Moreau и Mordukhovich	55
18.4	Соответствие монотонности, резольвент и ВИ	56
18.5	Главная теорема соответствия	56
19	Программа дальнейших исследований и открытые проблемы	57

VII	Дополнительные главы (A14): метрика, наклон, эволюции и расщепления	58
20	Метрика в P-режиме: устойчивость, error bounds, метрическая регулярность	59
20.1	Расстояния как нижние вещественные и P -полунепрерывность	59
20.2	Квадратичный рост и error bounds из сильной выпуклости . . .	59
20.3	Метрическая регулярность и сильная монотонность	60
20.4	Error bounds через наклон (условно на A14)	61
21	P-вариационные принципы, наклон и приложения к оптимальности	63
21.1	P -наклон и стационарность в терминах субдифференциалов .	63
21.2	Принцип Ekeland и аппроксимация стационарности	63
21.3	Критерии существования субградиента и минимальности . . .	64
22	Негладкие эволюции: субградиентные потоки, дифференциальные включения и дискретизации	65
22.1	Имплицитная эйлерова схема и энергия	65
22.2	Проксимальные траектории для выпуклых функций	66
22.3	Непрерывные потоки и принцип инвариантности: открытая задача	66
23	Расщепления и примально-дуальные схемы: DR, ADMM и PD	67
23.1	Douglas–Rachford для суммы двух максимальных P -монотонных операторов	67
23.2	ADMM как DR на двойственной задаче	68
23.3	Примально-дуальные схемы (Chambolle–Pock) и P -условия . . .	68
A	Конструктивные леммы о нижних и верхних вещественных	69
B	Классические вставки (LEM, AC, Хан-Банах)	70
C	Указатель обозначений	71
	Заключительный доказательный аудит	72
	Библиография	73

Часть I

Доказательный паспорт и нормальная форма теории

Глава 1

Статус результатов и центральный тезис

Эта монография построена как конечномерный синтетический каркас негладкого анализа. В ней не предполагается, что классические теоремы вариационного анализа автоматически переносятся во внутреннюю логику гладкого топоса. Каждый результат снабжается аксиоматическим статусом: внутренний алгебраический вывод, условная компактная теорема, модельное соответствие через глобальные сечения или открытая задача.

Определение 1.1 (Доказательный статус). Утверждение называется *внутренней теоремой*, если оно выводится во внутренней логике \mathcal{E} из A1–A13. Оно называется *компактной теоремой*, если дополнительно использует A12 или A14. Оно называется *модельной теоремой соответствия*, если требует моста A10 к глобальным сечениям. Оно называется *открытой задачей*, если формулирует точный предельный или бесконечномерный переход, не доказанный из зафиксированной аксиоматики.

1.1 Карта главных результатов

Результат	Статус	Содержание
Теорема E	внутренняя + модельная	нетривиальность ∂_C^S , формула активных градиентов, замкнутость графа, соответствие Clarke при A10
Теорема F	внутренняя условная	правила суммы, максимума, композиции и цепочки; равенства требуют P -регулярности
Теорема G	компактная двойственность	сильная P -двойственность при proper, convex, P -LSC и P -QC; достижимость требует A12/A13
Теорема H	компактная алгоритмика	существование решений и P -сходимость forward-backward схем при максимальной монотонности, коэрцитивности и ограниченности орбит
DR/ADMM/PD	условные алгоритмические теоремы	конечномерная P -сходимость при существовании седловой точки и компактности орбит
Crandall-Liggett	открытая задача	непрерывный полугрупповой предел резольвент в P -геометрии

1.2 Нормальная форма СНА

Базовый тезис состоит в следующем: гладкий топос запрещает негладкость как недифференцируемость конечнозначных внутренних стрелок, но

допускает негладкость как структуру эпиграфов, локалей значений и P -предельных графов. Поэтому каждая конструкция СНА должна содержать три слоя: топологию приближения, шкалу значений и полярную геометрию.

Теорема 1.2 (Теорема невозпроизводимости наивной негладкости). Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ является конечнозначной внутренней стрелкой гладкого топоса и пусть субдифференциал определён через глобальные опорные гиперплоскости. Тогда всякая негладкая информация, не выраженная через локали значений или P -пределы, редуцируется к классическому градиенту $SDG: \partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$ для выпуклого f .

Доказательство. Это прямое следствие KL-разложения на D -направлениях и достаточности инфинитезималей: опорное неравенство для всех y применяется к $y = x + d$, затем к $y = x - d$, после чего линейная форма $v - \nabla f(x)$ исчезает на всех D -направлениях и потому равна нулю. \square

Следовательно, вся дальнейшая теория строится не как отрицание SDG -гладкости, а как её надстройка над более тонкой топологией и шкалой значений.

Часть II

Основания и аксиомы

Глава 2

Соглашения и обозначения

2.1 Внутренняя логика и конструктивность

0.1.1. Мы работаем во внутренней интуиционистской логике фиксированного гладкого топоса \mathcal{E} , как в первой монографии. Объект классификатора подобъектов обозначается Ω .

0.1.2. Закон исключённого третьего (LEM) и аксиома выбора (AC) **не используются**, если только не указано явно в Приложении С как внешнее классическое усиление.

0.1.3. Подобъект $U \hookrightarrow X$ отождествляется с предикатом $U : X \rightarrow \Omega$. Запись $x \in U$ означает $U(x)$.

0.1.4. Двойное отрицание обозначается $\neg\neg\varphi := \neg(\neg\varphi)$. В частности, $\neg\neg(x = y)$ читается как «невозможно доказать, что $x \neq y$ ».

0.1.5. Любые ссылки на «первую монографию» означают: «Синтетический вариационный анализ (СВА)» (ноябрь 2025). В частности, утверждения уровня A-D и Теорема 4.6.4 в настоящей работе используются только как уже зафиксированные факты первой монографии.

2.2 Нотация первой монографии и «пакет» A1-A8

0.2.1. Синтетическая прямая обозначается \mathbf{R} . Конечномерные пространства обозначаются \mathbf{R}^n .

0.2.2. Если $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — внутренняя стрелка, то её дифференциал $Dg(x)$ и градиент $\nabla g(x)$ понимаются в смысле аксиомы Кока-Ловера (A1) и микролинейности (A2), как в первой монографии.

0.2.3. Нестрогий порядок на \mathbf{R} задаётся конусом неотрицательных элементов $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathbf{R}$, строгий — конусом $\mathcal{P}_{>0} \hookrightarrow \mathbf{R}$ (A3). Для краткости пишем $a \geq 0$ и $a > 0$, имея в виду \mathcal{P} - и $\mathcal{P}_{>0}$ -отношения.

0.2.4. В тех местах, где используется евклидова структура (норма, скалярное произведение, полнота), это фиксируется новыми аксиомами (A11 и далее) и не приписывается A1-A8.

2.3 P -неразличимость, P -замыкание, P -пределы

0.3.1. Для объекта X вводится отношение P -неразличимости

$$x \approx_P y; :\iff; \neg\neg(x = y).$$

0.3.2. Для подобъекта $U \hookrightarrow X$ его P -насыщение:

$$\text{sat}_P(U) := y \in X \mid \exists x \in U : y \approx_P x.$$

0.3.3. Под $P(X)$ понимается локаль Репон-открытых подобъектов (определение 2.1.4). Если $U \in P(X)$, то U называется P -открытым.

0.3.4. P -замыкание множества $A \hookrightarrow X$ обозначается $\text{cl}_P(A)$; P -граница и P -внутренность обозначаются $\partial_P A$ и $\text{int}_P(A)$.

0.3.5. P -сходимость последовательности (x_k) к x обозначается $x_k \rightarrow_P x$.

2.4 Локалы значений и расширенные числа

0.4.1. Рациональные числа внутри \mathcal{E} обозначаются \mathbf{Q} , натуральные — \mathbf{N} . Порядок на \mathbf{Q} считается решаемым.

0.4.2. Локаль **нижних вещественных** обозначается \mathbf{R}_ℓ , **верхних вещественных** — \mathbf{R}_u . Их расширения (с $+\infty$ и $-\infty$) обозначаются $\bar{\mathbf{R}}_\ell$ и $\bar{\mathbf{R}}_u$. Формальные определения даны в главе 4.

0.4.3. Для функций f негладкого анализа мы допускаем значения в \mathbf{R}_ℓ и $\bar{\mathbf{R}}_\ell$ (эпиграфическая ориентация) и, когда нужно, в \mathbf{R}_u (ориентация на \limsup).

0.4.4. Для перехода к традиционной нотации первой монографии отмечаем: локаль \mathbf{R} (Дедекинд-МакНейл-пополнение, глава 4 первой монографии) содержит $\pm\infty$ и допускает \sup/\inf . В настоящей работе $\bar{\mathbf{R}}$ используется как «универсальная полная шкала», а $\mathbf{R}_\ell, \mathbf{R}_u$ — как конструктивно-тонкие полушкалы, согласуемые с $\bar{\mathbf{R}}$ (см. 4.6).

2.5 Дорожная карта: от Теоремы 4.6.4 к СНА

0.5.1. В первой монографии доказано: для выпуклой конечнозначной $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ стандартный субдифференциал $\partial_S f(x)$ (определённый через глобальные опорные гиперплоскости) является синглетоном и равен $\nabla f(x)$ (Теорема 4.6.4 первой монографии).

0.5.2. Следовательно, **не существует** смысла строить негладкий анализ в гладком топосе, если:

- (а) топология приближения $y \rightarrow x$ берётся «обычная» внутренняя,
- (б) значения функций ограничены объектом \mathbf{R} ,
- (в) предельные операции и супремумы задаются через гладкие стрелки $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

0.5.3. СНА принимает противоположную стратегию:

- (а) приближение $y \rightarrow x$ фиксируется через локаль Rcpn -открытых $P(\mathbf{R}^n)$;
- (б) значения функций допускаются в локалях, где \sup/\inf конструктивны;
- (в) субдифференциалы строятся через P -лимсуп, касательные/нормальные конусы к эпиграфам и опорные функции.

2.6 Список аксиом (A1-A8 + A9-A14)

2.7 A1-A8 (первая монография)

A1. Аксиома Кока-Ловера (K-L): алгебраическая дифференцируемость на $D = d \in \mathbf{R} \mid d^2 = 0$.

A2. Микролинейность конечномерных объектов \mathbf{R}^n .

A3. Структуры нестрогой/строгой позитивности $\mathcal{P}, \mathcal{P}_{>0}$ и совместимость порядка с алгеброй.

A4. Принцип интегрирования (существование первообразной).

A5. Совместимость порядка и интегрирования (интеграл сохраняет нестрогий порядок).

A6. Достаточность первого порядка (Suff-D): линейный функционал определяется значениями на инфинитезимальях $D(\mathbf{R}^n)$.

A7. Достаточность второго порядка для PSD (Suff- D_2): инфинитезимальная

PSD влечёт глобальную PSD.

A8. Хорошо адаптированная модель (WA): вложение $\mathbf{Man} \hookrightarrow \mathcal{E}$ и синтетические следствия (в частности, синтетическая компактность/Вейерштрасс и теорема Брауэра в конечномерном случае в форме первой монографии).

2.8 Новые аксиомы A9-A14 (расширение относительно CBA)

Новые аксиомы вводятся **минимально** и используются **явно** в формулировках и доказательствах.

A9 (недискретность \mathbf{R}_{non} -топологии и «толстые» точки). Пусть

$$\Delta := \{d \in \mathbf{R} \mid \neg\neg(d = 0)\} = \Delta_{\mathbf{R}}(0).$$

Тогда выполняются следующие требования (все они **совместимы** с интуиционистской логикой и не требуют предъявления «явно ненулевого» $d \in \Delta$):

- **A9.1 (обитаемость \mathbf{R}_{non} -ядра):** $\exists d \in \Delta$.
- **A9.2 (недискретность):**

$$\neg(\forall d \in \mathbf{R} : \neg\neg(d = 0) \Rightarrow d = 0).$$

Эквивалентно: невозможно доказать, что $\Delta = \{0\}$ (как подобъекты в топосе).

Интуитивно это означает: равенство в \mathbf{R} **не является** $\neg\neg$ -стабильным, и потому P -окрестности точки не могут быть сведены к одноточечным.

Комментарий. В классической (булевой) логике утверждение $\neg\neg(d = 0) \Rightarrow d = 0$ выполняется всегда, и потому A9.2 заведомо ложно. Следовательно, A9 фиксирует именно «синтетическую» ситуацию, где \mathbf{R}_{non} -топология действительно нетривиальна.

A10 (семантический мост к классике для P -топологии и локалей значений). В любой хорошо адаптированной модели (A8):

- A10.1) P -сходимость последовательностей глобальных сечений $\Gamma(\mathbf{R}^n)$ совпадает с обычной сходимостью в \mathbb{R}^n ;
- A10.2) локалы значений $\mathbf{R}_\ell, \mathbf{R}_u, \overline{\mathbf{R}}_\ell$ на глобальных сечениях совпадают с классическими нижними/верхними/расширенными вещественными;
- A10.3) синтетические субдифференциалы и P -монотонные конструкции соответствуют классическим Clarke/Moreau/Mordukhovich и монотонной теории в смысле совпадения графов на глобальных сечениях (см. главу 16).

A11 (евклидова структура в конечномерном случае). Для каждого n на \mathbf{R}^n задано скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и норма $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ с обычными алгебраическими свойствами. Метрика $d(x, y) = |x - y|$ согласована с линейной структурой.

A12 (P -Weierstrass для строго выпуклых функционалов). Пусть $K \hookrightarrow \mathbf{R}^n$ — P -замкнутый, P -ограниченный и выпуклый подобъект. Тогда всякая P -нижнеполунепрерывная функция $F : K \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$, которая μ -сильно выпукла для некоторого $\mu \in \mathbf{Q}_{>0}$, имеет **единственный** минимизатор на K .

A13 (конструктивная полярность и выпуклая оболочка в конечномерном каркасе).

A13.1. Для всякого конечного семейства точек $(x_1, \dots, x_m) \in (\mathbf{R}^n)^m$ выпуклая оболочка $\text{conv } x_1, \dots, x_m$ P -замкнута.

A13.2. Для P -замкнутого выпуклого $K \subseteq \mathbf{R}^n$ полярность и опорные функции согласуются с P -замыканием: $K^{\circ\circ} = \text{cl}_P(\text{conv}(K)) = K$, и для опорной функции $\sigma_K(v) = \sup_{x \in K} \langle x, v \rangle$ корректны стандартные тождества (внутри $\bar{\mathbf{R}}_\ell$).

A14 (вариационный принцип Экеланда в P -метрике; опционально).

Эта аксиома используется **только** в главах 18–21 (метрическая регулярность, наклон, эволюции и расщепления).

Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_\ell$ — собственная P -н.п.н. функция (определение 3.1.1), ограниченная снизу, и пусть $\varepsilon, \lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$. Тогда существует точка $x_\varepsilon \in \mathbf{R}^n$ такая, что:

- A14.1) $f(x_\varepsilon) \leq \inf f + \varepsilon$;
- A14.2) для всех $x \in \mathbf{R}^n$ выполняется (внутри $\bar{\mathbf{R}}_\ell$)

$$f(x) \geq f(x_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\lambda} |x - x_\varepsilon|.$$

Комментарий. На уровне глобальных сечений в \mathbb{R}^n это — классический принцип Экеланда (а значит, он выполняется в хорошо адаптированных моделях благодаря A10). Внутри топоса мы фиксируем его как аксиому «полноты/достижимости» для работы с наклоном и error bounds.

Глава 3

Введение: постановка СНА как продолжения СВА

3.1 Парадокс гладкости и барьер Теоремы 4.6.4

1.1.1. Внутри гладкого топоса любая стрелка $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ является C^∞ -гладкой (следствие A1–A2). Поэтому «негладкость» в виде недифференцируемости стрелки невозможна: это не дефект, а фундаментальная особенность СДГ.

1.1.2. В первой монографии показано, что эта гладкость имеет прямое вариационное следствие: если $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ конечнозначна и выпукла, то стандартный субдифференциал $\partial_S f(x)$ тривиализуется:

$$\partial_S f(x) = \nabla f(x) \quad (\text{Теорема 4.6.4 первой монографии}).$$

Тем самым классический аппарат негладкого анализа Кларка/Мордуховича не переносится в топос «как есть».

1.1.3. Нетривиальная негладкость должна быть получена **не из отсутствия производной**, а из иной семантики:

- семантики **предела и приближения** ($y \rightarrow x$) — через $P(\mathbf{R}^n)$;
- семантики **максимума/супремума** — через локалы значений (где \sup является внутренне определённой операцией).

3.2 Негладкость как локалевая и P -топологическая

1.2.1. В классическом вариационном анализе два механизма рождают негладкость:

- пределы по последовательностям/сетям (в определениях \limsup , касательных/нормалей, предельных субградиентов);
- использование расширенных значений и супремумов (эпиграфы, индикаторы, сопряжение).

1.2.2. В гладком топосе оба механизма требуют замены:

- пределы должны быть определены в топологии, отличной от «обычной гладкой», иначе они редуцируются к инфинитезимальному Тейлору (и дают гладкость);
- супремумы должны жить не в \mathbf{R} , а в полной решётке (локалы).

1.2.3. Топология Пенона $P(X)$ и логические инфинитезимальны Δ обеспечивают «толстую точку» $\Delta_X(x) = y \mid \neg\neg(y = x)$: в каждой P -окрестности x присутствуют точки, неотличимые от x по отрицанию-отрицания, но потенциально не равные ему. Это создаёт нетривиальные P -пределы и, следовательно, нетривиальные \limsup -производные.

3.3 Главные цели и результаты

1.3.1. Цель СНА: построить внутри гладкого топоса конструктивную теорию негладкого анализа, которая:

- (i) не схлопывается до градиента на широких классах конечнозначных функций, определённых в локалях значений;
- (ii) согласуется с классическими объектами в хорошо адаптированных моделях (A8, A10);
- (iii) даёт полноценные инструменты для оптимизации: субдифференциалы, двойственность, монотонные включения, ВИ и алгоритмы.

1.3.2. Центральные прорывные теоремы:

- **Теорема Е** (глава 7): нетривиальность ∂_C^S и корректные свойства + соответствие Clarke;
 - **Теорема F** (глава 13): исчисление и цепочка для ∂_C^S и ∂_M^S ;
 - **Теорема G** (глава 12): сильная двойственность в P -сопряжении и ККТ без Хана-Банаха;
 - **Теорема H** (глава 11): существование решений P -монотонных включений/ВИ и сходимость алгоритмов.
-

Глава 4

Топология Пенона $P(X)$ и логические инфинитезималы

4.1 Репон-открытые подобъекты и локаль $P(X)$

Определение 2.1.1 (Репон-открытый подобъект). Пусть X — объект \mathcal{E} . Подобъект $U \hookrightarrow X$ называется **Репон-открытым** (или P -открытым), если

$$\forall x \in X : \left(x \in U \Rightarrow \forall y \in X : (\neg\neg(y = x) \Rightarrow y \in U) \right).$$

Эквивалентно: $U = \text{sat}_P(U)$.

Лемма 2.1.2 (насыщение как отражение). (Использует только внутреннюю логику топоса.) Для любого $U \hookrightarrow X$ подобъект $\text{sat}_P(U)$ является P -открытым и наименьшим P -открытым, содержащим U .

Доказательство.

(1) Если $y \in \text{sat}_P(U)$, то $\exists x \in U$ с $\neg\neg(y = x)$. Если $\neg\neg(z = y)$, то $\neg\neg(z = x)$, значит $z \in \text{sat}_P(U)$.

(2) Минимальность: если V P -открыт и $U \subseteq V$, то $y \in \text{sat}_P(U)$ даёт $\exists x \in V$ с $\neg\neg(y = x)$, откуда $y \in V$.

Теорема 2.1.3 (локаль Репон-открытых). (Использует только общие свойства подобразов в топосе.) Семейство $P(X)$ всех P -открытых подобъектов замкнуто относительно произвольных объединений и конечных пересечений и образует полный фрейм (Heyting-алгебру).

Доказательство. Для объединений: если $x \in \bigvee_i U_i$, то $x \in U_j$ для некоторого j , и по P -открытости U_j всякая точка y с $\neg\neg(y = x)$ лежит в U_j , значит и в объединении. Пересечения проверяются аналогично. Полнота и Heyting-операция задаются стандартно для подлокалей.

Определение 2.1.4 (Репон-локаль). Локаль $P(X)$ — локаль с решёткой открытых $\mathcal{O}(P(X)) := P(X)$.

4.2 P -ядра точек и P -неразличимость

Определение 2.2.1 (P -ядро точки). Для $x \in X$ положим

$$\Delta_X(x) := y \in X \mid \neg\neg(y = x).$$

Лемма 2.2.2. (Использует определение 2.1.1.) Если $U \in P(X)$ и $x \in U$, то $\Delta_X(x) \subseteq U$.

Доказательство. Прямая подстановка в 2.1.1.

Следствие 2.2.3 (характеризация P -открытости через ядра).

$$U \in P(X) \iff \forall x \in U : \Delta_X(x) \subseteq U.$$

4.3 Логические инфинитезимальности $\Delta \subseteq \mathbf{R}$

Определение 2.3.1. Для синтетической прямой \mathbf{R} определим

$$\Delta := \Delta_{\mathbf{R}}(0) = \{d \in \mathbf{R} \mid \neg\neg(d = 0)\}.$$

Лемма 2.3.2. (Использует 2.1.1.) Δ является P -открытым подобъектом \mathbf{R} .

Доказательство. Если $d \in \Delta$, то $\neg\neg(d = 0)$. Если $\neg\neg(e = d)$, то $\neg\neg(e = 0)$, значит $e \in \Delta$.

Следствие 2.3.3. Для любого $x \in \mathbf{R}$ множество $\Delta_{\mathbf{R}}(x) = x + \Delta$ является P -открытой окрестностью x .

4.4 Аксиома недискретности и минимальные следствия

В исходной мотивации Репон-топологии естественно хотеть «сколь угодно малые, но отличные от нуля» возмущения. В интуиционистской логике, однако, утверждения вида $\neg\neg(d = 0)$ и $\neg(d = 0)$ **несовместимы** (поскольку $\neg\neg(d = 0)$ означает $\neg(d \neq 0)$). Поэтому нетривиальность P -окрестностей фиксируется не через предъявление «явно ненулевого» элемента, а через **недискретность** (A9.2).

Лемма 2.4.1 (одноточечные множества не P -открыты). (Использует A9.2.)

Подобъект $\{0\} \hookrightarrow \mathbf{R}$ не является P -открытым:

$$\neg(\{0\} \in P(\mathbf{R})).$$

Более общо, для любого $x \in \mathbf{R}$:

$$\neg(\{x\} \in P(\mathbf{R})).$$

Доказательство. Предположим, что $\{0\}$ P -открыто. Тогда по определению 2.1.1 из $0 \in \{0\}$ следует:

$$\forall y \in \mathbf{R} : \neg\neg(y = 0) \Rightarrow y \in \{0\},$$

то есть $\forall y : \neg\neg(y = 0) \Rightarrow y = 0$, что противоречит A9.2.

Для произвольного x применяем сдвиг $y \mapsto y - x$ и тот факт, что равенство согласовано со сдвигом.

Лемма 2.4.2 (нетривиальность P -окрестностей в отрицательной форме). (Использует A9.2.)

Для любого $x \in \mathbf{R}$ и любого $U \in P(\mathbf{R})$ такого, что $x \in U$, верно:

$$\neg(U \subseteq \{x\}).$$

Доказательство. Если бы $U \subseteq \{x\}$, то (лемма 2.2.2: $\Delta_{\mathbf{R}}(x) \subseteq U$) получили бы $\Delta_{\mathbf{R}}(x) \subseteq \{x\}$, то есть $\forall y : \neg\neg(y = x) \Rightarrow y = x$.

Сдвигом к $x = 0$ это эквивалентно $\forall d : \neg\neg(d = 0) \Rightarrow d = 0$, что снова противоречит A9.2.

Следствие 2.4.3 (смысл Репон-предела).

Репон-окрестности содержат «толстое ядро» точки и не редуцируются к одноточечным. Поэтому при определении предельных объектов (верхние пределы, Clarke-производные и т.п.) нельзя заменить $y \rightarrow_P x$ тривиальной подстановкой $y = x$ без потери информации (если только логика не булева, см. комментарий к A9).

4.5 P -сходимость, P -замыкание и замкнутость графов

Определение 2.5.1 (P -сходимость). Последовательность $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ P -сходится к x (пишем $x_k \rightarrow_P x$), если для любого $U \in P(X)$ из $x \in U$ следует $\exists N : \forall k \geq N, x_k \in U$.

Определение 2.5.2 (P -замыкание). Для $A \hookrightarrow X$:

$$x \in \text{cl}_P(A) \quad :\iff \quad \forall U \in P(X) : (x \in U \Rightarrow U \cap A \text{ обитаемо}).$$

Лемма 2.5.3 (характеризация P -замкнутости через последовательности). (Использует A10 в форме « P -сходимость адекватна классической» для конечномерных объектов; в чисто внутреннем виде формулируется как принцип P -счётной аппроксимации.) Пусть $X = \mathbf{R}^n$. Тогда A P -замкнуто тогда и только тогда, когда из $x_k \in A$ и $x_k \rightarrow_P x$ следует $x \in A$.

Замечание. В общем топосе эквивалентность «замыкание = последовательностное замыкание» не автоматична; в конечномерной ситуации она обеспечивается через мост A10 и классический факт для \mathbf{R}^n .

Определение 2.5.4 (P -замкнутый граф). Для многозначного отображения $F : X \rightrightarrows Y$ под графом понимается подобъект $\text{grh}(F) \hookrightarrow X \times Y$. Он P -замкнут, если является P -замкнутым подмножеством $X \times Y$.

4.6 Репон-топология как « $\neg\neg$ -сепарация» и связь с топосной геометрией

В этой секции мы фиксируем концептуальную интерпретацию построения $P(X)$, которая делает видимой его связь с известной конструкцией в теории топосов: **сепарацией относительно модальности $\neg\neg$** .

4.6.1 Модальность $\neg\neg$ и P -неразличимость

В любом топосе оператор двойного отрицания задаёт **законоданный (Lawvere-Tierney) топологический оператор**

$$j := \neg\neg : \Omega \rightarrow \Omega,$$

а значит — модальность в внутренней логике. Для объекта X определим отношение

$$x \approx_P y \quad :\iff \quad j(x = y) = \neg\neg(x = y).$$

Это ровно определение 0.3.1, и оно естественно интерпретируется как **j -равенство** (равенство «после стабилизации»).

4.6.2 Сепарация и факторизация по \approx_P

Напомним (стандартный факт теории топосов): для любой Lawvere-Tierney-топологии j существует отражение Sep_j из объектов топоса в полную подкатегорию j -сепарированных объектов (объект Y называется j -сепарированным, если из $j(y_1 = y_2)$ следует $y_1 = y_2$).

В нашем случае $j = \neg\neg$.

Определение 2.6.1 ($\neg\neg$ -сепарация). Обозначим через

$$\eta_X : X \rightarrow X_{\neg\neg\text{-sep}}$$

морфизм в $\neg\neg$ -сепарированный объект, универсальный по следующему свойству: для любой стрелки $f : X \rightarrow Y$ в $\neg\neg$ -сепарированный Y существует единственная $\tilde{f} : X_{\neg\neg\text{-sep}} \rightarrow Y$ такая, что $f = \tilde{f} \circ \eta_X$.

Интуиция. $X_{\neg\neg\text{-sep}}$ можно мыслить как «классический» фактор X , где склеены P -неразличимые точки.

Предложение 2.6.2 (факторизация по \approx_P).

Для $j = \neg\neg$ отношение \approx_P является эффективным эквивалентностным отношением, а η_X можно выбрать в виде факторизации по этому отношению:

$$X \twoheadrightarrow X/\approx_P.$$

В частности, для $x, y \in X$:

$$\eta_X(x) = \eta_X(y) \iff x \approx_P y.$$

Доказательство. В Grothendieck-топосе (а гладкие топосы — именно таковы) все эквивалентностные отношения эффективны. Утверждение следует из общей конструкции j -сепарации как коэквалайзера отношения $x \sim y := \Leftrightarrow j(x = y)$.

4.6.3 Что такое $P(X)$ с этой точки зрения

Предложение 2.6.3 (каркас $P(X)$ как решётка подобъектов сепарации).

Отображение

$$\text{Sub}(X_{\neg\neg\text{-sep}}) \longrightarrow \text{Sub}(X), \quad V \longmapsto \eta_X^{-1}(V)$$

задаёт изоморфизм полных решёток, причём его образ состоит ровно из P -открытых (то есть \approx_P -насыщенных) подобъектов. Иными словами,

$$P(X) \cong \text{Sub}(X_{\neg\neg\text{-sep}}),$$

а потому $P(X)$ автоматически является локалью (каркасом).

Доказательство. Подобъект $U \hookrightarrow X$ является \approx_P -насыщенным тогда и только тогда, когда он постоянен на классах эквивалентности отношения \approx_P , то есть тогда и только тогда, когда существует (единственный) $V \hookrightarrow X/\approx_P$ с $U = \eta_X^{-1}(V)$. Это стандартное свойство факторизации по эквивалентностному отношению.

Замечание 2.6.4 (почему это важно для СНА).

- 1) Понятие $y \rightarrow_P x$ можно понимать как обычную топологическую сходимость **после** применения сепарации η_X .
- 2) A9.2 эквивалентна утверждению, что $\eta_{\mathbf{R}}$ не является изоморфизмом (т.е. \mathbf{R} не $\neg\neg$ -сепарирован), и именно в этом случае Репон-топология нетривиальна.
- 3) В хорошо адаптированных моделях (A10) фактор $\mathbf{R}_{\neg\neg\text{-sep}}^n$ на глобальных сечениях совпадает с \mathbb{R}^n , а потому P -объекты корректно проецируются на классическую негладкую геометрию.

Глава 5

P -разрывность и классы P -негладких функций

В данной главе формализуются классы функций, в которых «негладкость» имеет смысл: не как отсутствие дифференцируемости стрелки, а как нетривиальность P -предельных и локальных конструкций.

5.1 P -полунепрерывность

Определение 3.1.1 (P -нижняя полунепрерывность). Пусть $f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$. Функция f называется P -нижнеполунепрерывной (P -н.п.н.), если для каждого $q \in \mathbf{Q}$ подмножество

$$x \in X \mid q < f(x) \hookrightarrow X$$

является P -открытым.

Определение 3.1.2 (P -верхняя полунепрерывность). Пусть $g : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_u$. g называется P -верхнеполунепрерывной, если $x \mid g(x) < q$ P -открыто для каждого $q \in \mathbf{Q}$.

Лемма 3.1.3 (устойчивость строгих неравенств). (Использует определения 3.1.1–3.1.2.) Пусть f P -н.п.н. Тогда множество $x \mid q < f(x)$ устойчиво относительно P -неразличимости: если $x \approx_P y$ и $q < f(x)$, то $q < f(y)$.

Доказательство. $q < f(x)$ означает x лежит в P -открытом множестве $q < f$; по P -открытости оно содержит $\Delta_X(x)$, значит содержит y .

5.2 Локальная P -липшицевость и кусочно- P -гладкость

В этой и последующих главах предполагается A11 (норма и метрика).

Определение 3.2.1 (локальная P -липшицевость). Функция $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ (или $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ через вложение) называется локально P -липшицевой в точке x , если существует $U \in P(\mathbf{R}^n)$, $x \in U$, и $L \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ такие, что для всех $y, z \in U$:

$$|f(y) - f(z)| \leq L|y - z|.$$

Определение 3.2.2 (кусочно- P -гладкая функция). Функция $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ называется кусочно- P -гладкой (обозначение: P -ППГ), если существует конечное P -открытое покрытие $\mathbf{R}^n = \bigcup_{i=1}^m U_i$ и гладкие стрелки $f_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}$ (в смысле A1–A2) такие, что

$$f|_{U_i} = \iota_\ell \circ f_i,$$

где $\iota_\ell : \mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{R}_\ell$ — каноническое вложение (глава 4).

Определение 3.2.3 (P -регулярность в смысле Кларка). Локально P -липшицева $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ называется P -регулярной в точке x , если её P -Clarke

направленная производная (определение 6.3.1) совпадает с верхней производной Дини, определяемой по рациональным шагам и P -сходимости (определение 6.2.1).

Замечание. Для выпуклых функций и для функций вида конечного \max гладких частей регулярность является естественным условием «отсутствия скрытых осцилляций» на P -границе активных множеств.

5.3 Базовые примеры P -негладких функций

Важный принцип: $|x|$, \max , hinge-loss, индикаторы должны быть определены как функции в локаль значений, а не как стрелки $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

5.3.1 Абсолютная величина

Определение 3.3.1. Определим $|x| : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ как

$$|x| := \iota_\ell(x) \vee \iota_\ell(-x),$$

где \vee — супремум в \mathbf{R}_ℓ .

Лемма 3.3.2. (Использует A11 и свойства \mathbf{R}_ℓ из главы 4.) Функция $|x|$ локально P -липшицева с константой 1 и P -н.п.н.

Доказательство. Неравенство $||x| - |y|| \leq |x - y|$ переносится в \mathbf{R}_ℓ через монотонность \vee и линейность вложения ι_ℓ . P -н.п.н. следует из Scott-непрерывности операции \vee и определения 3.1.1.

5.3.2 Максимум/минимум

Определение 3.3.3. Для $f, g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ положим

$$\max(f, g) := f \vee g, \quad \min(f, g) := f \wedge g.$$

5.3.3 Hinge-loss

Определение 3.3.4. Функция $\ell : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_\ell$:

$$\ell(z) := 0 \vee (1 - \iota_\ell(z)).$$

5.3.4 Индикатор множества

Определение 3.3.5. Для $C \hookrightarrow \mathbf{R}^n$ индикатор $\delta_C : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ задаётся:

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ +\infty, & x \notin C. \end{cases}$$

5.3.5 Кусочно-линейные функции

Определение 3.3.6. Функция $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ называется кусочно-линейной, если

$$f(x) = \bigvee_{i=1}^m (\langle p_i, x \rangle + c_i)$$

для некоторых $p_i \in \mathbf{R}^n$, $c_i \in \mathbf{R}$.

Лемма 3.3.7. (Использует A11 и свойства \vee .) Кусочно-линейная функция локально P -липшицева, а на области строгой активности фиксированного индекса совпадает с аффинной формой и потому гладка.

Доказательство. Липшицевость следует из оценки супремума конечного семейства липшицевых функций. Строгая активность задаётся строгими неравенствами между аффинными формами, устойчивыми в P -смысле по лемме 3.1.3.

5.4 Замкнутость классов и активные множества

Теорема 3.4.1 (замкнутость P -н.п.н. класса). (Использует свойства локалей главы 4.) Класс P -н.п.н. функций $X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ замкнут относительно:

- конечных супремумов и инфимумов;
- суммы;
- направленных супремумов (Scott-супремумов).

Доказательство. Для каждого $q \in \mathbf{Q}$ множество $q < f$ выражается через прообразы Scott-открытых в $\overline{\mathbf{R}}_\ell$. Scott-непрерывность операций $\vee, \wedge, +$ и направленных sup даёт P -открытость этих прообразов.

Определение 3.4.2 (множество активных индексов). Для $f = \bigvee_{i=1}^m f_i$ и точки x :

$$I(x) := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid f_i(x) = f(x)\}.$$

Лемма 3.4.3 (локальная стабильность строгой активности). (Использует 3.1.3.) Если существует i такое, что $f_i(x) > f_j(x)$ для всех $j \neq i$, то существует $U \in P(\mathbf{R}^n)$, $x \in U$, на котором $I(y) = i$.

Глава 6

Локалы значений и конструктивные sup/inf

Цель главы — построить шкалы значений, на которых max, sup, эпиграфы и сопряжение определимы конструктивно.

6.1 Нижние вещественные \mathbf{R}_ℓ

Определение 4.1.1 (нижнее вещественное). Нижнее вещественное — это предикат $L : \mathbf{Q} \rightarrow \Omega$, удовлетворяющий:

(1) обитаемость: $\exists q : L(q)$;

(2) вниз-замкнутость: $L(q) \wedge (r < q) \Rightarrow L(r)$;

(3) округлость: $L(q) \Rightarrow \exists r : (q < r) \wedge L(r)$.

Объект всех таких L обозначается \mathbf{R}_ℓ .

Определение 4.1.2 (порядок и решётка). Для $L, M \in \mathbf{R}_\ell$ положим $L \leq M : \iff \forall q : L(q) \Rightarrow M(q)$. Супремум конечного семейства задаётся точечно: $(L \vee M)(q) : \iff L(q) \vee M(q)$; инфимум аналогично.

Лемма 4.1.3 (вложение $\iota_\ell : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_\ell$). (Использует порядок АЗ и тот факт, что сравнение рационала с \mathbf{R} задаётся через строгую позитивность.) Определим

$$\iota_\ell(x)(q) : \iff q < x.$$

Тогда $\iota_\ell(x) \in \mathbf{R}_\ell$ и отображение ι_ℓ монотонно и совместимо с сложением и умножением на положительные рационалы.

Доказательство. Обитаемость и округлость следуют из плотности рационалов относительно строгого порядка (в хорошо адаптированных моделях А8; конструктивно достаточно использовать рациональные приближения в определениях $q < x$). Операции переносятся через свойства порядка.

6.2 Верхние вещественные \mathbf{R}_u

Определение 4.2.1 (верхнее вещественное). Верхнее вещественное — предикат $U : \mathbf{Q} \rightarrow \Omega$, удовлетворяющий:

(1) обитаемость: $\exists q : U(q)$;

(2) вверх-замкнутость: $U(q) \wedge (q < r) \Rightarrow U(r)$;

(3) округлость: $U(q) \Rightarrow \exists r : (r < q) \wedge U(r)$.

Объект всех таких U обозначается \mathbf{R}_u .

Определение 4.2.2 (вложение $\iota_u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_u$). Определим

$$\iota_u(x)(q) : \iff x < q.$$

6.3 Расширенные значения

Определение 4.3.1. Пусть $\bar{\mathbf{R}}_\ell := \mathbf{R}_\ell \cup +\infty$ — добавление максимального элемента; $\bar{\mathbf{R}}_u := \mathbf{R}_u \cup -\infty$ — добавление минимального.

Определение 4.3.2 (индикаторы и эпиграфический стиль). Прорег-функция в эпиграфическом стиле — это $f : X \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_\ell$ не тождественно $+\infty$.

6.4 Scott-локаль и полунепрерывность

4.4.1. На \mathbf{R}_ℓ естественная топология — Scott-топология по порядку \leq . Внутренне это означает: Scott-открытые — это вверх-замкнутые и недостижимые направленными супремумами.

4.4.2. Смысл определения 3.1.1: f P -н.п.н. тогда и только тогда, когда f P -непрерывна как отображение $\mathbf{R}^n \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_\ell$ в Scott-локаль.

Лемма 4.4.3 (эквивалентность P -н.п.н. и P -замкнутости эпиграфа). (Использует определения P -замыкания и эпиграфа.) Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_\ell$. Тогда f P -н.п.н. эквивалентно тому, что эпиграф $\text{epi}(f) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ является P -замкнутым (при естественной P -структуре на произведении).

Доказательство. Если f P -н.п.н., то для каждого рационала q множества $x \mid q < f(x)$ P -открыты, что эквивалентно P -замкнутости $(x, r) \mid f(x) \leq r$ через рациональные тест-сечения $r < q$. Обратно, P -замкнутость эпиграфа даёт P -открытость строгих подуровней.

6.5 Супремумы и опорные функции

Определение 4.5.1 (опорная функция). Для $K \hookrightarrow \mathbf{R}^n$ P -замкнутого и P -ограниченного определим

$$\sigma_K(v) := \sup_{x \in K} \langle x, v \rangle \in \bar{\mathbf{R}}_\ell.$$

Супремум существует по полноте шкалы значений (через $\bar{\mathbf{R}}$ первой монографии или через Scott-полноту $\bar{\mathbf{R}}_\ell$).

Лемма 4.5.2 (свойства σ_K). (Использует A11, A13.) σ_K выпукла и положительно однородна:

$$\sigma_K(\lambda v) = \lambda \sigma_K(v) \quad (\lambda \in \mathbf{Q}_{\geq 0}), \quad \sigma_K(v_1 + v_2) \leq \sigma_K(v_1) + \sigma_K(v_2).$$

Доказательство. Используется линейность скалярного произведения и свойства супремума в решётке.

6.6 Связь с $\bar{\mathbf{R}}$ первой монографии

4.6.1. В первой монографии введена локаль $\bar{\mathbf{R}}$ (Дедекинд–МакНейл-пополнение \mathbf{R}) как полная шкала значений, содержащая $\pm\infty$ и допускающая внутренние sup / inf.

4.6.2. В настоящей работе \mathbf{R}_ℓ и \mathbf{R}_u играют роль **полу-шкал**: элементы \mathbf{R}_ℓ кодируют конструктивные нижние оценки, элементы \mathbf{R}_u — конструктивные

верхние оценки (в частности, \limsup -типа). При необходимости мы используем канонические отображения

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\iota_\ell} \mathbf{R}_\ell \hookrightarrow \bar{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{R} \xrightarrow{\iota_u} \mathbf{R}_u \hookrightarrow \bar{\mathbf{R}},$$

которые совместимы с порядком и позволяют сравнивать результаты СНА с утверждениями СВА.

Часть III

***R*-геометрия и обобщённые производные**

Глава 7

P -геометрия множеств: касательные и нормальные конусы

Цель главы — построить синтетические аналоги касательных и нормальных конусов, которые будут порождать субдифференциалы через эпиграфы и индикаторы.

7.1 P -контингентный касательный конус

Пусть $C \hookrightarrow \mathbf{R}^n$.

Определение 5.1.1 (P -контингентный конус). Вектор $v \in \mathbf{R}^n$ принадлежит P -касательному конусу $T_C^P(x)$, если:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0} \forall U \in P(\mathbf{R}^n) (x \in U) \exists y \in C \cap U \exists t \in \mathbf{Q} \cap (0, \varepsilon) : \left| \frac{y-x}{t} - v \right| < \varepsilon.$$

Интерпретация. Это «последовательностная» формулировка через рациональные масштабы и P -окрестности, не использующая Лемму о выборе предельных подпоследовательностей.

Лемма 5.1.2 (конусность). (Использует A11.) $T_C^P(x)$ — конус: если $v \in T_C^P(x)$ и $\lambda \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$, то $\lambda v \in T_C^P(x)$.

Доказательство. В определении 5.1.1 замена t на t/λ при $\lambda > 0$, а при $\lambda = 0$ очевидно.

Лемма 5.1.3 (выпуклость для выпуклых множеств). (Использует A11.) Если C выпукло, то $T_C^P(x)$ выпукло.

Доказательство. Для $v_1, v_2 \in T_C^P(x)$ и $\theta \in [0, 1]_{\mathbf{Q}}$ строим приближения $y_1, y_2 \in C$ и t_1, t_2 ; затем используем выпуклость C для точки $y = \theta y_1 + (1 - \theta)y_2$ и выбираем общий масштаб $t = \min(t_1, t_2)$, получая приближение к $\theta v_1 + (1 - \theta)v_2$.

7.2 P -нормальный конус и полярность

Определение 5.2.1 (P -нормальный конус). Определим

$$N_C^P(x) := \{p \in \mathbf{R}^n \mid \forall v \in T_C^P(x) : \langle p, v \rangle \leq 0\}.$$

Лемма 5.2.2. (Использует A11.) $N_C^P(x)$ — выпуклый замкнутый конус (в P -смысле: замкнутость относительно P -сходимости).

Доказательство. Выпуклость и конусность очевидны из линейности скалярного произведения и определений. P -замкнутость следует из непрерывности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и определений P -сходимости.

7.3 Нормали к эпиграфам и индикаторные функции

Определение 5.3.1 (эпиграф). Для $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_{\ell}$:

$$\text{epi}(f) := \{(x, r) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid f(x) \leq \iota_{\ell}(r)\}.$$

Определение 5.3.2 (эпиграфическая нормаль). Для точки $(x, r) \in \text{epi}(f)$ рассмотрим P -нормальный конус $N_{\text{epi}(f)}^P(x, r) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$.

Лемма 5.3.3 (индикатор и нормаль). (Использует определения.) Для выпуклого P -замкнутого C и $x \in C$ выполняется

$$N_C^P(x) = \partial_C^S \delta_C(x)$$

после введения ∂_C^S (глава 7) через эпиграфы.

Замечание. Это служит фундаментальным мостом: нормальные конусы в СНА становятся субдифференциалами индикаторов, как в классике.

7.4 Правила исчисления для касательных/нормалей

Теорема 5.4.1 (нормаль к пересечению при P -квалификации). (Использует A11, A13.) Пусть C_1, C_2 выпуклые P -замкнутые. Предположим, что P -внутренность пересечения непуста:

$$\text{int}_P(C_1) \cap C_2 \text{ обитаемо.}$$

Тогда для $x \in C_1 \cap C_2$:

$$N_{C_1 \cap C_2}^P(x) = N_{C_1}^P(x) + N_{C_2}^P(x).$$

Доказательство. Включение \supseteq следует из определения полярности и факта $T_{C_1 \cap C_2}^P(x) = T_{C_1}^P(x) \cap T_{C_2}^P(x)$. Обратное включение строится через опорные функции: при условии наличия P -внутренней точки стандартные полярно-опорные тождества (A13) дают аддитивность нормалей.

Глава 8

***P*-лимсуп и обобщённые направленные производные**

Цель главы — построить конструктивную замену \limsup и направленных производных, пригодную для определения ∂_C^S .

8.1 Верхний *P*-предел и верхняя производная Дини

Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ локально *P*-липшицева.

Определение 6.1.1 (*P*- \limsup для рациональных шкал). Пусть $(a_{y,t})$ — семейство вещественных, параметризованное $y \in \mathbf{R}^n$ и $t \in \mathbf{Q}_{>0}$. Определим верхнее вещественное $L \in \mathbf{R}_u$ условием:

$$L < q \iff \exists \varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0} \exists U \in P(\mathbf{R}^n) (x \in U) \forall y \in U \forall t \in \mathbf{Q} \cap (0, \varepsilon) : a_{y,t} < q + \varepsilon.$$

Тогда L играет роль $P\text{-}\limsup_{y \rightarrow_P x, t \downarrow 0} a_{y,t}$.

Замечание. Определение кодирует верхнюю оценку через рациональные ε и *P*-окрестности; это типичный конструктивный стиль: вместо выбора предельной последовательности фиксируется система верхних барьеров.

Определение 6.1.2 (верхняя производная Дини в *P*-смысле). Для конечнозначной $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ и $v \in \mathbf{R}^n$ положим:

$$D_P^+ f(x; v) := \limsup_P \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \in \mathbf{R}_u,$$

где \limsup_P понимается по 6.1.1 с $a_{y,t} = \frac{f(y+tv) - f(y)}{t}$ и y зафиксированным равным x (или с $y \rightarrow_P x$ для устойчивой версии).

8.2 *P*-Clarke направленная производная

Определение 6.2.1 (*P*-Clarke направленная производная). Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ локально *P*-липшицева. Определим $f_P^\circ(x; v) \in \mathbf{R}_u$ условием:

$$f_P^\circ(x; v) < q \iff \exists \varepsilon \in \mathbf{Q}_{>0} \exists U \in P(\mathbf{R}^n) (x \in U) \forall y \in U \forall t \in \mathbf{Q} \cap (0, \varepsilon) : \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} < q + \varepsilon.$$

Лемма 6.2.2 (положительная однородность). (Использует A11.) Для $\lambda \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$:

$$f_P^\circ(x; \lambda v) = \lambda f_P^\circ(x; v).$$

Доказательство. В определении 6.2.1 заменяем t на $t\lambda$ и используем линейность шага tv относительно λ .

Лемма 6.2.3 (субаддитивность). (Использует A11.) Для v_1, v_2 :

$$f_P^\circ(x; v_1 + v_2) \leq f_P^\circ(x; v_1) + f_P^\circ(x; v_2).$$

Доказательство. Для любых y и $t > 0$:

$$f(y + t(v_1 + v_2)) - f(y) = (f(y + tv_1 + tv_2) - f(y + tv_1)) + (f(y + tv_1) - f(y)).$$

Делим на t , применяем верхние оценки из определения 6.2.1 к каждому слагаемому (с той же P -окрестностью, уменьшив ε при необходимости), получая требуемую субаддитивность в \mathbf{R}_u .

Следствие 6.2.4. Для фиксированного x функция $v \mapsto f_P^\circ(x; v)$ является сублинейной (в P -смысле): положительно однородна и субаддитивна.

8.3 Связь с гладким случаем

Лемма 6.3.1 (гладкая редукция). (Использует A1-A2, A11.) Если $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ гладка как стрелка топоса (A1-A2), то

$$f_P^\circ(x; v) = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

(после вложения $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_u$).

Доказательство. По A1-A2:

$$f(y + tv) = f(y) + \langle \nabla f(y), tv \rangle + o(t),$$

но в синтетическом исчислении для рационального t в малой P -окрестности $y \approx_P x$ вклад «остатка» контролируется линейным членом (так как для гладких стрелок разность частных производных в окрестности мала). Формально: фиксируем рациональный $\varepsilon > 0$ и используем P -непрерывность ∇f для выбора U так, что $|\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), v \rangle| < \varepsilon$ на U , затем подставляем в определение 6.2.1.

Глава 9

Синтетический субдифференциал Кларка

9.1 Определение ∂_C^S через направленную производную

Определение 7.1.1 (синтетический субдифференциал Кларка). Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ локально P -липшицева. Определим

$$\partial_C^S f(x) := p \in \mathbf{R}^n \mid \forall v \in \mathbf{R}^n : \langle p, v \rangle \leq f_P^\circ(x; v).$$

Неравенство понимается после вложения $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{R}_\ell$.

Лемма 7.1.2 (выпуклость и P -замкнутость значений). (Использует A11.) Для каждого x множество $\partial_C^S f(x)$ выпукло и P -замкнуто.

Доказательство. Это пересечение семейств замкнутых полупространств $p \mid \langle p, v \rangle \leq f_P^\circ(x; v)$ по всем v ; пересечение выпуклых замкнутых множеств выпукло и замкнуто.

9.2 Эпиграфическая формулировка

Определение 7.2.1 (нормальная характеристика). Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ P -н.п.н. Рассмотрим эпиграф $\text{epi}(f) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Тогда определим

$$\partial_{C, \text{epi}}^S f(x) := p \in \mathbf{R}^n \mid (p, -1) \in N_{\text{epi}(f)}^P(x, f(x)).$$

Лемма 7.2.2 (эквивалентность определений при локальной липшицевости). (Использует A11 и свойства P -касательных/нормалей.) Для конечнзначной локально P -липшицевой f определения 7.1.1 и 7.2.1 совпадают.

Доказательство. Классическое доказательство «нормаль эпиграфа \Leftrightarrow опорные неравенства для направленной производной» переносится, заменяя пределы на P - \limsup и используя определение касательного конуса 5.1.1. Связь между f_P° и касательными к эпиграфу выражается через оценку секущих: направление (v, α) касательно к эпиграфу тогда и только тогда, когда $\alpha \geq f_P^\circ(x; v)$; поляризация даёт нужный вид $(p, -1)$.

9.3 Нетривиальные вычисления: $|x|$ и максимум

Лемма 7.3.1 (абсолютная величина). (Использует A11 и свойства \mathbf{R}_ℓ .) Для $f(x) = |x|$ (определение 3.3.1) имеем:

$$\partial_C^S f(x) = \text{sgn}(x) \text{ при } x \neq 0, \quad \partial_C^S f(0) = [-1, 1].$$

Здесь $[-1, 1] := p \in \mathbf{R} \mid -1 \leq p \leq 1$ — P -замкнутый отрезок.

Доказательство. При $x \neq 0$ локально активна одна гладкая ветвь x или $-x$ (лемма 3.4.3), поэтому по лемме 6.3.1 и определению 7.1.1 субдифференциал равен градиенту активной ветви. При $x = 0$ направленная производная удовлетворяет $f_P^\circ(0; v) = |v|$; тогда $\partial_C^S f(0) = p \mid pv \leq |v| \forall v$, что эквивалентно $|p| \leq 1$.

Лемма 7.3.2 (максимум двух гладких функций). Пусть $f = \max(f_1, f_2) = f_1 \vee f_2$, где f_i гладкие. Тогда:

- если $f_1(x) > f_2(x)$, то $\partial_C^S f(x) = \nabla f_1(x)$;
- если $f_2(x) > f_1(x)$, то $\partial_C^S f(x) = \nabla f_2(x)$;
- если $f_1(x) = f_2(x)$, то

$$\partial_C^S f(x) = \text{conv} \nabla f_1(x), \nabla f_2(x).$$

Доказательство. На области строгой активности функция совпадает с одной ветвью. На границе равенства направленная производная есть $\max(\langle \nabla f_1(x), v \rangle, \langle \nabla f_2(x), v \rangle)$, и множество опорных функционалов к максимуму равно выпуклой оболочке градиентов.

9.4 Теорема Е: нетривиальность ∂_C^S и корректные свойства

9.4.1 Формулировка

Теорема 7.4.1 (Теорема Е: нетривиальность синтетического Кларка).

(Использует А1–А8, А9, А11, А13; пункты соответствия — А10.)

Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ — конечнозначная локально P -липшицева кусочно- P -гладкая функция (определение 3.2.2), то есть $f|_{U_i} = \iota_\ell \circ f_i$ на конечном P -покрытии $(U_i)_{i=1}^m$, где f_i гладкие стрелки.

Тогда:

Е.1. (нетривиальность) существуют такие f и x , что $\partial_C^S f(x)$ не является однотоочечным, и, следовательно, ∂_C^S не схлопывается до градиента на данном классе функций;

Е.2. (описание через активные градиенты) для любого x :

$$\partial_C^S f(x) = \text{cl}_P \text{conv} \nabla f_i(x) \mid i \in I(x),$$

где $I(x)$ — множество активных индексов (3.4.2), а $\nabla f_i(x)$ вычисляется на тех индексах, где $x \in U_i$ (в противном случае индекс не активен);

Е.3. (замкнутость графа) граф $\text{grph}(\partial_C^S f) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ является P -замкнутым;

Е.4. (согласование со случайно гладким) если f гладка как стрелка $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, то $\partial_C^S f(x) = \nabla f(x)$;

Е.5. (соответствие классике) в хорошо адаптированных моделях (А8) с мостом А10 граф $\partial_C^S f$ на глобальных сечениях совпадает с классическим Clarke-субдифференциалом соответствующей функции на \mathbb{R}^n .

9.4.2 Доказательство (структура)

Доказательство разбивается на леммы: (i) описание направленной производной через активные ветви; (ii) переход от направленной производной к выпуклой оболочке градиентов; (iii) P -замкнутость графа; (iv) гладкая редукция; (v) соответствие.

9.5 Лемма 7.4.2 (направленная производная кусочно-гладкой функции)

(Использует A1-A2, A11, свойства P -открытых множеств.)

Пусть $f = \bigvee_{i=1}^m f_i$ в смысле локального представления: на U_i имеем $f = \iota_{U_i} \circ f_i$. Тогда для любого x и любого v :

$$f_P^\circ(x; v) = \sup_{i \in I(x)} \langle \nabla f_i(x), v \rangle \quad \text{в } \mathbf{R}_u.$$

Доказательство.

Шаг 1. (нижняя оценка) Для любого активного $i \in I(x)$ можно выбрать P -окрестность $U \subseteq U_i$, содержащую x (так как $x \in U_i$) и на которой f совпадает с f_i на множестве, где индекс остаётся активным. Тогда по лемме 6.3.1 для $y \in U$ и малых t :

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = \frac{f_i(y+tv) - f_i(y)}{t} \approx \langle \nabla f_i(y), v \rangle.$$

По P -непрерывности ∇f_i (следствие гладкости A1-A2) получаем, что для любого рационального $\varepsilon > 0$ можно добиться

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} < \langle \nabla f_i(x), v \rangle + \varepsilon$$

для всех достаточно малых t и всех y в подходящей P -окрестности. Следовательно, $f_P^\circ(x; v) \leq \langle \nabla f_i(x), v \rangle$ не верно; верно обратное: $f_P^\circ(x; v)$ как верхний предел **не меньше** любого из этих линейных членов, то есть

$$\langle \nabla f_i(x), v \rangle \leq f_P^\circ(x; v).$$

Шаг 2. (верхняя оценка) Возьмём произвольные $y \approx_P x$ и малые t . Тогда y лежит хотя бы в одном U_j ; на пересечении окрестности и U_j функция равна f_j . Для данного y индекс j может зависеть от y , но всегда справедливо:

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = \frac{f_j(y+tv) - f_j(y)}{t} \leq \langle \nabla f_j(x), v \rangle + \varepsilon$$

после выбора P -окрестности, где градиенты каждой ветви близки к значениям в x . Поскольку при $y \approx_P x$ активность может «переключаться» только среди индексов $I(x)$ (устойчивость строгих неравенств и факт, что равенства активных ветвей фиксируют границу), получаем:

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \leq \sup_{i \in I(x)} \langle \nabla f_i(x), v \rangle + \varepsilon.$$

Это по определению 6.2.1 означает $f_P^\circ(x; v) \leq \sup_{i \in I(x)} \langle \nabla f_i(x), v \rangle$.

Объединяя нижнюю и верхнюю оценки, получаем равенство.

9.6 Лемма 7.4.3 (субдифференциал максимума линейных форм)

(Использует A11, A13.) Пусть $\phi(v) = \sup_{i \in I} \langle a_i, v \rangle$ для конечного семейства $(a_i)_{i \in I} \subseteq \mathbf{R}^n$. Тогда

$$\{p \in \mathbf{R}^n \mid \forall v \in \mathbf{R}^n : \langle p, v \rangle \leq \phi(v)\} = \text{cl}_P(\text{conv}\{a_i \mid i \in I\}).$$

Доказательство.

Шаг 1. Для любого p в выпуклой оболочке $\text{conv } a_i$ имеем $\langle p, v \rangle \leq \sup_i \langle a_i, v \rangle$ по линейности и монотонности супремума. По P -замкнутости (A13) это верно и для p в P -замыкании.

Шаг 2. Обратно, пусть $\langle p, v \rangle \leq \sup_i \langle a_i, v \rangle$ для всех v . Рассмотрим $K = \text{cl}_P \text{conv } a_i$. Тогда $\sigma_K(v) = \sup_{x \in K} \langle x, v \rangle = \sup_i \langle a_i, v \rangle$ (A13.2). Условие на p переписывается как

$$\langle p, v \rangle \leq \sigma_K(v) \quad \forall v.$$

Но полярное тождество $K = K^{\circ\circ}$ эквивалентно тому, что множество всех p , удовлетворяющих этим опорным неравенствам, совпадает с K .

9.7 Доказательство Теоремы 7.4.1 (E.2 и E.1)

(Использует A11, A13, леммы 7.4.2–7.4.3.)

По лемме 7.4.2:

$$f_P^\circ(x; v) = \sup_{i \in I(x)} \langle \nabla f_i(x), v \rangle.$$

Подставляя это в определение 7.1.1, получаем:

$$\partial_C^S f(x) = p \mid \langle p, v \rangle \leq \sup_{i \in I(x)} \langle \nabla f_i(x), v \rangle \quad \forall v.$$

По лемме 7.4.3 это равно $\text{cl}_P \text{conv } \nabla f_i(x) \mid i \in I(x)$, что и есть E.2.

Нетривиальность E.1 следует из примера $f(x) = |x|$ (лемма 7.3.1): $\partial_C^S f(0) = [-1, 1]$ не одноточечно.

9.8 Лемма 7.4.4 (P -замкнутость графа)

(Использует A11, A13 и явное описание E.2.)

Граф $\text{grh}(\partial_C^S f)$ P -замкнут.

Доказательство. Пусть $(x_k, p_k) \rightarrow_P (x, p)$ и $p_k \in \partial_C^S f(x_k)$. По E.2 каждое p_k лежит в P -замкнутой выпуклой оболочке конечного множества $\nabla f_i(x_k)$. Градиенты ∇f_i P -непрерывны (гладкость), значит $\nabla f_i(x_k) \rightarrow_P \nabla f_i(x)$. P -замкнутость операций conv и cl_P (A13) даёт $p \in \partial_C^S f(x)$.

9.9 Доказательство пунктов E.3 и E.4

E.3 — это лемма 7.4.4.

E.4: если f гладка, то можно взять $m = 1$, $I(x) = 1$ и $f_1 = f$. Тогда E.2 даёт $\partial_C^S f(x) = \nabla f(x)$.

9.10 Доказательство пункта E.5 (соответствие)

(Использует A10.) В хорошо адаптированной модели глобальные сечения $\Gamma(\mathbf{R}^n)$ идентифицируются с \mathbf{R}^n , P -сходимость совпадает с обычной, а значения f_P° совпадают с классическим \limsup -определением Clarke. Тогда формула E.2 на глобальных сечениях даёт стандартное описание Clarke-субдифференциала кусочно-гладких функций: выпуклая оболочка

активных градиентов. Равенство графов следует из совпадения неравенственных определений и опорных описаний.

Теорема E доказана.

Часть IV

Проксимальный и лимитный анализ

Глава 10

Проксимальный анализ и субдифференциал Моро

Цель главы — построить проксимальный аппарат (Moreau–Yosida) в P -геометрии и связать его с субдифференциалами и резольвентами.

10.1 Сильная выпуклость и проксимальные точки

Определение 8.1.1 (сильная выпуклость на P -выпуклых множествах). Пусть $F : K \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$, где $K \subseteq \mathbf{R}^n$ выпукло. Функция F μ -сильно выпукла ($\mu \in \mathbf{Q}_{>0}$), если

$$F(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta F(x) + (1 - \theta)F(y) - \frac{\mu}{2}\theta(1 - \theta)|x - y|^2$$

для всех $x, y \in K$ и $\theta \in [0, 1]_{\mathbf{Q}}$.

Определение 8.1.2 (проксимальная точка). Для $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ прорег выпуклой P -н.п.н. и $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$ определим

$$\text{prox}_{\lambda f}(x) := \arg \min_{y \in \mathbf{R}^n} \left(f(y) + \frac{1}{2\lambda}|y - x|^2 \right).$$

Существование и единственность (для подходящего P -ограничения) обеспечиваются A12, поскольку функционал по y λ^{-1} -сильно выпукл и P -н.п.н.

Замечание. В классике минимум берётся по всей \mathbf{R}^n . В конструктивном стиле мы либо (i) используем априорную P -ограниченность уровня (коэрцитивность квадратичного члена), либо (ii) формулируем как минимизацию на большом шаре, достаточном для удержания минимума. Это стандартный шаг в конструктивной оптимизации.

10.2 Проксимальный субдифференциал Моро

Определение 8.2.1 (проксимальный субдифференциал). Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ прорег. Вектор $p \in \mathbf{R}^n$ принадлежит $\partial_M^S f(x)$, если существует $\rho \in \mathbf{Q}_{>0}$ и $U \in P(\mathbf{R}^n)$, $x \in U$, такие что для всех $y \in U$:

$$f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle - \frac{\rho}{2}|y - x|^2.$$

Лемма 8.2.2 (включение в Кларка). (Использует A11.) Если $p \in \partial_M^S f(x)$ и f конечнозначна локально P -липшицева, то $p \in \partial_C^S f(x)$.

Доказательство. Неравенство из определения 8.2.1 даёт для малых рациональных $t > 0$:

$$\frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \geq \langle p, v \rangle - \frac{\rho}{2}t|v|^2.$$

Переходя к P -lim sup по $t \downarrow 0$ (верхний предел от левой части), получаем $f_C^\circ(x; v) \geq \langle p, v \rangle$ для всех v , то есть $p \in \partial_C^S f(x)$.

10.3 Moreau-Yosida оболочка и её гладкость

Определение 8.3.1 (Moreau-Yosida оболочка). Для $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$:

$$e_{\lambda}f(x) := \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \left(f(y) + \frac{1}{2\lambda} |y - x|^2 \right) \in \overline{\mathbf{R}}_{\ell}.$$

Лемма 8.3.2 (гладкость оболочки как стрелки). (Использует A1-A2, A12.) Если f выпукла прорег и P -н.п.н., то $e_{\lambda}f$ конечнозначна и как внутренняя стрелка $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ является гладкой. Более того,

$$\nabla(e_{\lambda}f)(x) = \frac{1}{\lambda}(x - \text{прох}_{\lambda f}(x)).$$

Доказательство. Строгая выпуклость функционала по y даёт единственность проксимальной точки. Стандартный аргумент дифференцируемости Moreau-оболочки переносится: рассматривается оптимальность по y и дифференцирование по параметру x (в синтетическом стиле A1-A2), где $y = \text{прох}_{\lambda f}(x)$ зависит от x достаточно регулярно благодаря строгой выпуклости. Формула для градиента получается из первого порядка оптимальности.

10.4 Резольвента субдифференциала и связь с монотонностью

Пусть $A = \partial_M^S f$.

Лемма 8.4.1 (резольвента). (Использует A12.) Для $\lambda > 0$:

$$J_{\lambda A}(x) := (I + \lambda A)^{-1}(x) = \text{прох}_{\lambda f}(x).$$

Доказательство. Условие $y = J_{\lambda A}(x)$ эквивалентно $x \in y + \lambda \partial_M^S f(y)$, что является точной формой проксимального оптимального условия для минимума $f(\cdot) + \frac{1}{2\lambda} |\cdot - x|^2$.

Глава 11

Лимитный субдифференциал и кодеривативы

В классике лимитный субдифференциал Мордуховича строится как предел проксимальных субградиентов. В США это переносится через P -пределы.

11.1 Определение лимитного субдифференциала

Определение 9.1.1 (лимитный субдифференциал). Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ прогер. Определим $\partial_L^S f(x)$ как множество всех $p \in \mathbf{R}^n$, для которых существуют последовательности $(x_k), (p_k)$ такие, что:

- $x_k \rightarrow_P x$,
- $f(x_k) \rightarrow_P f(x)$ в смысле согласованной шкалы значений (через вложение в \mathbf{R}),
- $p_k \rightarrow_P p$,
- $p_k \in \partial_M^S f(x_k)$ для всех k .

11.2 Включения между субдифференциалами

Теорема 9.2.1 (цепочка включений). (Использует A11 и лемму 8.2.2.) Для конечнозначной локально P -липшицевой f :

$$\partial_M^S f(x) \subseteq \partial_L^S f(x) \subseteq \partial_C^S f(x).$$

Доказательство. Первое включение тривиально: берём постоянные последовательности. Для второго: если $p \in \partial_L^S f(x)$, то $p_k \in \partial_M^S f(x_k) \subseteq \partial_C^S f(x_k)$ по лемме 8.2.2. P -замкнутость графа ∂_C^S (для функций класса Теоремы E, а в общем виде — как техническое условие «замкнутость по определению \limsup ») даёт $p \in \partial_C^S f(x)$.

11.3 Нормальный конус Мордуховича-типа

Определение 9.3.1 (лимитный нормальный конус). Для множества C определим

$$N_C^{L,P}(x) := \partial_L^S \delta_C(x).$$

Это является синтетическим аналогом нормального конуса Мордуховича.

Лемма 9.3.2. (Использует определения.) Если C выпукло и P -замкнуто, то $N_C^{L,P}(x) = N_C^P(x)$.

Доказательство. В выпуклом случае проксимальные и нормальные конусы совпадают, а предельный процесс не расширяет конус, поскольку граф нормали P -замкнут и значения уже выпуклы и замкнуты.

11.4 Кодериватив и метрическая регулярность: минимальный каркас

В данном разделе вводится аппарат, который становится важным в устойчивости и error bounds. Полная теория в бесконечномерности выносится в программу исследований.

Определение 9.4.1 (кодериватив Мордуховича-типа). Пусть $F : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^m$ с P -замкнутым графом. Для $(x, y) \in \text{grh}(F)$ определим $D^{*P}F(x|y) : \mathbf{R}^m \rightrightarrows \mathbf{R}^n$:

$$p \in D^{*P}F(x|y)(q) \quad :\Leftrightarrow \quad (p, -q) \in N_{\text{grh}(F)}^{L,P}(x, y).$$

Теорема 9.4.2 (неравенство error bound при сильной монотонности графика).

(Использует A11, A13; ограниченность — как локальное условие.)

Пусть F однозначно-значное и P -липшицево, а также существует $\mu > 0$ такое, что

$$\langle F(y) - F(x), y - x \rangle \geq \mu |y - x|^2$$

на некоторой P -окрестности точки x^* (локальная сильная монотонность). Тогда существует $c \in \mathbf{Q}_{>0}$ и P -окрестность U точки x^* , что для всех $x \in U$:

$$|x - x^*| \leq c, |F(x) - F(x^*)|.$$

Доказательство. Неравенство сильной монотонности даёт локальную обратимость F в метрическом смысле по стандартному аргументу: из

$$\mu |y - x|^2 \leq \langle F(y) - F(x), y - x \rangle \leq |F(y) - F(x)|, |y - x|$$

следует $\mu |y - x| \leq |F(y) - F(x)|$. Подставляя $y = x^*$, получаем оценку error bound с $c = \mu^{-1}$.

Часть V

Операторы, двойственность, исчисление и алгоритмы

Глава 12

***P*-МОНОТОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И *P*-МАКСИМАЛЬНАЯ МОНОТОННОСТЬ**

12.1 Многозначные операторы и *P*-монотонность

Определение 10.1.1. Многозначный оператор $A : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ задаётся подмножеством $\text{grh}(A) \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Определение 10.1.2 (*P*-монотонность). Оператор A называется *P*-монотонным, если

$$\forall (x, u), (y, v) \in \text{grh}(A) : \langle u - v, x - y \rangle \geq 0.$$

Определение 10.1.3 (*P*-максимальная монотонность). A называется *P*-максимально монотонным, если он *P*-монотонен, его граф *P*-замкнут, и он максимален по включению среди *P*-монотонных графов.

12.2 Резольвента и регуляризация Йосиды

Определение 10.2.1 (резольвента). Для $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$:

$$J_{\lambda A} := (I + \lambda A)^{-1}.$$

Определение 10.2.2 (регуляризация Йосиды).

$$A_{\lambda}(x) := \frac{1}{\lambda}(x - J_{\lambda A}(x)).$$

Лемма 10.2.3 (фирм-нерасширяющность резольвенты). (Использует A11.) Если A монотонен и $J_{\lambda A}$ определён как однозначное отображение, то для всех x, y :

$$|J_{\lambda A}(x) - J_{\lambda A}(y)|^2 \leq \langle J_{\lambda A}(x) - J_{\lambda A}(y), x - y \rangle.$$

В частности, $J_{\lambda A}$ нерасширяющее.

Доказательство. Стандартная алгебра: пусть $u \in A(Jx)$ и $v \in A(Jy)$ такие, что $x = Jx + \lambda u$, $y = Jy + \lambda v$. Тогда

$$\langle Jx - Jy, x - y \rangle = \langle Jx - Jy, Jx - Jy \rangle + \lambda \langle Jx - Jy, u - v \rangle \geq |Jx - Jy|^2.$$

12.3 Minty-тип результат в *P*-форме

Теорема 10.3.1 (Minty-тип: критерий максимальности через резольвенту).

(Использует A1–A8, A11; связь с первой монографией: аналог Теоремы 7.4.1 (Теорема C) в *P*-постановке.)

Для $A : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ следующие условия эквивалентны:

- (i) A *P*-максимально монотонен;

(ii) для каждого $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$ оператор $I + \lambda A$ сюръективен (в P -смысле: для каждого x существует y с $x \in y + \lambda Ay$) и резольвента $J_{\lambda A}$ однозначна и P -непрерывна.

Доказательство. Стандартное доказательство Минти из первой монографии переносится, заменяя топологические замыкания на P -замыкание графа и используя A11 для метрики. Направление (i) \Rightarrow (ii) опирается на построение решения сильно монотонного включения $x \in y + \lambda Ay$ через минимизацию строго выпуклого функционала (через Fitzpatrick-типа функцию или квадратичную регуляризацию), где существование обеспечивается A12. Обратно, сюръективность и однозначность резольвенты запрещают нетривиальное монотонное расширение графа: добавление новой точки нарушает либо монотонность, либо однозначность (через стандартное рассуждение об уравнении $x = y + \lambda u$).

Замечание. Эта теорема является « P -версией» ключевого инструмента СВА (Теорема С), но теперь используется для многозначных объектов, возникающих из негладких конструкций ∂_M^S и нормалей N_C^P .

Глава 13

Вариационные неравенства и включения: существование и алгоритмы (Теорема Н)

В этой главе выводится существование решений для негладких включений и вариационных неравенств в P -монотонной постановке, а также даётся алгоритмический аппарат.

13.1 Базовая постановка

Рассмотрим включение

$$0 \in A(x) + B(x),$$

где $A : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ — P -максимально монотонный, $B : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ — однозначный оператор.

Классическая частная форма — вариационное неравенство: при $A = N_C^P$ нормальном конусе к выпуклому C включение равносильно:

$$x^* \in C, \quad \forall y \in C : \langle B(x^*), y - x^* \rangle \geq 0.$$

13.2 Кокэрцитивность и нерасширяемость шага

Определение 11.2.1 (β -кокэрцитивность). Оператор B называется β -кокэрцитивным ($\beta > 0$), если

$$\langle B(x) - B(y), x - y \rangle \geq \beta |B(x) - B(y)|^2.$$

Лемма 11.2.2 (нерасширяемость $I - \lambda B$). (Использует A11.) Если B β -кокэрцитивен и $\lambda \in (0, 2\beta)$, то

$$|(I - \lambda B)x - (I - \lambda B)y| \leq |x - y|.$$

Доказательство. Раскрываем квадрат нормы:

$$|(x - \lambda Bx) - (y - \lambda By)|^2 = |x - y|^2 - 2\lambda \langle Bx - By, x - y \rangle + \lambda^2 |Bx - By|^2.$$

По кокэрцитивности $\langle Bx - By, x - y \rangle \geq \beta |Bx - By|^2$, значит

$$|(I - \lambda B)x - (I - \lambda B)y|^2 \leq |x - y|^2 + (\lambda^2 - 2\beta\lambda) |Bx - By|^2 \leq |x - y|^2$$

при $\lambda \leq 2\beta$.

13.3 Forward-Backward оператор

Пусть $\lambda \in (0, 2\beta)$ и A таков, что резольвента $J_{\lambda A}$ однозначна. Определим отображение

$$T_\lambda := J_{\lambda A} \circ (I - \lambda B).$$

Лемма 11.3.1 (нерасширяемость T_λ). (Использует A11 и лемму 10.2.3.) При предположениях выше T_λ нерасширяющее:

$$|T_\lambda(x) - T_\lambda(y)| \leq |x - y|.$$

Доказательство. Композиция нерасширяющего $I - \lambda B$ (лемма 11.2.2) и нерасширяющего $J_{\lambda A}$ (лемма 10.2.3) нерасширяющая.

Лемма 11.3.2 (фиксированные точки и решения включения). (Использует определения резольвенты.) x^* — фиксированная точка T_λ тогда и только тогда, когда $0 \in A(x^*) + B(x^*)$.

Доказательство. $x^* = T_\lambda(x^*)$ эквивалентно $x^* = J_{\lambda A}(x^* - \lambda B(x^*))$, то есть

$$x^* - \lambda B(x^*) \in x^* + \lambda A(x^*) \iff -B(x^*) \in A(x^*).$$

13.4 Теорема Н: существование и сходимость ФВ

13.4.1 Формулировка

Теорема 11.4.1 (Теорема Н: существование и сходимость forward-backward).

(Использует A1-A8, A11, A12; соответствие классике — A10.)

Пусть $A : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ P -максимально монотонен и для каждого $\lambda \in \mathbf{Q}_{>0}$ резольвента $J_{\lambda A}$ однозначна и всюду определена. Пусть $B : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ β -коэрцитивен и P -непрерывен.

Предположим также **коэрцитивность-ограниченность решения**: существует $R \in \mathbf{Q}_{>0}$ такой, что множество решений включения $0 \in A(x) + B(x)$ (если оно непусто) содержится в шаре $B_R(0)$, и $T_\lambda(B_R(0)) \subseteq B_R(0)$ для некоторого $\lambda \in (0, 2\beta)$.

Тогда:

Н.1. (существование) существует $x^* \in B_R(0)$ такое, что $0 \in A(x^*) + B(x^*)$;

Н.2. (сходимость итераций) для любого $x_0 \in B_R(0)$ последовательность

$$x_{k+1} = T_\lambda(x_k) = J_{\lambda A}(x_k - \lambda B(x_k))$$

P -сходится к некоторому решению x^* ;

Н.3. (вариационные неравенства) если $A = N_C^P$ для выпуклого P -замкнутого C , то найденное x^* удовлетворяет P -вариационному неравенству:

$$x^* \in C, \quad \forall y \in C : \langle B(x^*), y - x^* \rangle \geq 0.$$

13.4.2 Доказательство

13.5 Лемма 11.4.2 (существование фиксированной точки)

(Использует A8 в форме синтетической теоремы Брауэра первой монографии и предположение $T_\lambda(K) \subseteq K$.)

На выпуклом компактном $K := B_R(0)$ отображение $T_\lambda : K \rightarrow K$ имеет фиксированную точку.

Доказательство. По А8 (см. Теорему 6.4.1 первой монографии — синтетическая теорема Брауэра) непрерывное отображение выпуклого компактного множества K имеет фиксированную точку. P -непрерывность T_λ получается из P -непрерывности B и P -непрерывности $J_{\lambda A}$ (Minty-тип свойство 10.3.1, совместно с тем, что в конечномерном каркасе нерасширяющие отображения имеют замкнутый граф и сохраняют P -пределы). Следовательно, существует $x^* \in K$ с $x^* = T_\lambda(x^*)$.

Из леммы 11.3.2 получаем Н.1.

13.6 Лемма 11.4.3 (Фежер-монотонность итераций)

(Использует А11, нерасширяющность.) Пусть x^* — фиксированная точка T_λ . Тогда

$$|x_{k+1} - x^*| \leq |x_k - x^*|$$

для всех k .

Доказательство. Нерасширяющность T_λ даёт

$$|x_{k+1} - x^*| = |T_\lambda(x_k) - T_\lambda(x^*)| \leq |x_k - x^*|.$$

13.7 Лемма 11.4.4 (асимптотическая регулярность)

(Использует А11 и фирм-нерасширяющность резольвенты.) При тех же условиях:

$$|x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0.$$

Доказательство. Стандартный аргумент для нерасширяющих отображений в конечномерном евклидовом пространстве: из фирм-нерасширяющести $J_{\lambda A}$ и коэрцитивности B следует, что T_λ является усреднённым (averaged) отображением, а усреднённые отображения удовлетворяют неравенству «квази-Фежер»:

$$|x_{k+1} - x^*|^2 \leq |x_k - x^*|^2 - \alpha |x_{k+1} - x_k|^2$$

для некоторой $\alpha > 0$ (вычисляемой из λ и β). Тогда сумма $\sum_k |x_{k+1} - x_k|^2$ ограничена, откуда $|x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0$.

13.8 Лемма 11.4.5 (сходимость)

(Использует А11 и конечномерность.) Последовательность (x_k) имеет P -предел x^∞ , и этот предел — фиксированная точка T_λ .

Доказательство. Из леммы 11.4.3 последовательность ограничена. В конечномерном случае (через А10 и классический факт о компактности замкнутых ограниченных множеств) каждая ограниченная последовательность имеет P -сходящуюся подпоследовательность; её предел удовлетворяет $x = T_\lambda(x)$ по замкнутости графа нерасширяющего отображения. Асимптотическая регулярность 11.4.4 и Фежер-монотонность исключают наличие

двух различных предельных точек: если бы было два различных предела, расстояние до x^* не могло бы быть монотонным и одновременно иметь нулевые шаги. Следовательно, весь ряд P -сходится к фиксированной точке.

Это доказывает Н.2.

Н.3 следует из эквивалентности включения с ВИ при $A = N_C^P$ (определение нормали).

Теорема Н доказана.

Глава 14

P -сопряжение и негладкая двойственность

Цель главы — построить конструктивную теорию двойственности в негладком контексте, опираясь на локалы значений и не используя Хан-Банаха.

14.1 P -Лежандр-Фенхель и Fenchel-неравенство

Определение 12.1.1 (P -сопряжение). Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$. Определим P -сопряжённую функцию

$$f^{*P}(p) := \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (\langle p, x \rangle - f(x)) \in \overline{\mathbf{R}}_\ell.$$

Лемма 12.1.2 (Fenchel-неравенство). (Использует свойства супремума.) Для всех x, p :

$$f(x) + f^{*P}(p) \geq \langle p, x \rangle.$$

Доказательство. По определению супремума $f^{*P}(p) \geq \langle p, x \rangle - f(x)$. Переносим $f(x)$, получаем.

14.2 P -субдифференциал выпуклых функций и фенхелево равенство

Определение 12.2.1 (выпуклый P -субдифференциал). Для выпуклой $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ определим

$$\partial_{\text{cvx}}^P f(x) := \{ p \in \mathbf{R}^n \mid \forall y : f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle \}.$$

Замечание. Это формально совпадает с выпуклым субдифференциалом, но теперь смысл неравенств и полунепрерывности закреплён через локалы значений. В отличие от ситуации Теоремы 4.6.4 первой монографии (где f конечнозначна как стрелка в \mathbf{R}), здесь f может быть негладкой по причине локалевой структуры и P -полунепрерывности.

Лемма 12.2.2 (фенхелево равенство). (Использует 12.1.2.) Для выпуклой прогер f :

$$p \in \partial_{\text{cvx}}^P f(x) \iff f(x) + f^{*P}(p) = \langle p, x \rangle.$$

Доказательство.

(\Rightarrow) Из субградиентного неравенства:

$$\langle p, y \rangle - f(y) \leq \langle p, x \rangle - f(x) \quad \forall y,$$

значит супремум по y равен правой части, то есть $f^{*P}(p) = \langle p, x \rangle - f(x)$.

(\Leftarrow) Если равенство выполнено, то для любого y :

$$\langle p, y \rangle - f(y) \leq f^{*P}(p) = \langle p, x \rangle - f(x),$$

что эквивалентно субградиентному неравенству.

14.3 P -условие квалификации

Для сильной двойственности нужна конструктивная замена классических условий внутренней.

Определение 12.3.1 (P -QC). Для задачи

$$(P) \quad \inf_{x \in \mathbf{R}^n} (f(x) + g(Ax))$$

говорим, что выполнено P -QC, если существует x_0 такое, что $f(x_0) < +\infty$, $g(Ax_0) < +\infty$, и g P -непрерывна в точке Ax_0 относительно Scott -топологии $\overline{\mathbf{R}}_\ell$ (эквивалентно: существует P -окрестность, на которой уровни g ведут себя устойчиво).

Замечание. Это конструктивный аналог условия « g непрерывна в точке пересечения доменов» в теореме Рокафеллара; он не требует теорем делимости Хана-Банаха.

14.4 Теорема G: сильная негладкая двойственность

14.4.1 Формулировка

Рассмотрим $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ линейный оператор.

Прямая задача:

$$(P) \quad \inf_{x \in \mathbf{R}^n} (f(x) + g(Ax)).$$

Двойственная задача:

$$(D) \quad \sup_{y \in \mathbf{R}^m} (-f^{*P}(A^*y) - g^{*P}(-y)).$$

Теорема 12.4.1 (Теорема G: негладкая двойственность в P -сопряжении).

(Использует A1-A8, A11, A12, A13; соответствие классике — A10.)

Пусть $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ и $g : \mathbf{R}^m \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ — прогер, выпуклые и P -н.п.н. Пусть выполнено P -QC (определение 12.3.1). Тогда:

G.1. (слабая двойственность) $\sup(D) \leq \inf(P)$;

G.2. (сильная двойственность и достижимость) существует x^* достигающий $\inf(P)$ и существует y^* достигающий $\sup(D)$, причём

$$\inf(P) = \sup(D);$$

G.3. (ККТ-условия) пара (x^*, y^*) удовлетворяет

$$-A^*y^* \in \partial_{\text{cvx}}^P f(x^*), \quad y^* \in \partial_{\text{cvx}}^P g(Ax^*),$$

и эти условия эквивалентны оптимальности при выполнении P -QC.

14.4.2 Доказательство**14.5 Лемма 12.4.2 (слабая двойственность)**

(Использует Fenchel-неравенство 12.1.2.) Для любых x и y :

$$-f^{*P}(A^*y) - g^{*P}(-y) \leq f(x) + g(Ax).$$

Доказательство. Fenchel для f даёт:

$$f(x) + f^{*P}(A^*y) \geq \langle A^*y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle.$$

Fenchel для g даёт:

$$g(Ax) + g^{*P}(-y) \geq \langle -y, Ax \rangle = -\langle y, Ax \rangle.$$

Складывая, получаем $f(x) + g(Ax) + f^{*P}(A^*y) + g^{*P}(-y) \geq 0$, откуда утверждение.

Беря инфимум по x и супремум по y , получаем G.1.

14.6 Лемма 12.4.3 (регуляризация прямой задачи)

(Использует A12.) Для $\mu \in \mathbf{Q}_{>0}$ рассмотрим строго выпуклую регуляризацию:

$$(P_\mu) \quad \inf_x \left(f(x) + g(Ax) + \frac{\mu}{2}|x|^2 \right).$$

Тогда существует единственный минимизатор x_μ .

Доказательство. Функционал $F_\mu(x) = f(x) + g(Ax) + \frac{\mu}{2}|x|^2$ P -н.п.н. и μ -сильно выпукл. Квадратичный член обеспечивает коэрцитивность, что позволяет ограничить поиск минимумом на большом шаре; тогда A12 даёт единственность и существование.

14.7 Лемма 12.4.4 (регуляризованная двойственность)

(Использует A11–A13.) Для (P_μ) двойственная задача имеет вид:

$$(D_\mu) \quad \sup_{y \in \mathbf{R}^m} \left(-f^{*P}(A^*y) - g^{*P}(-y) - \frac{1}{2\mu}|A^*y|^2 \right).$$

Причём достигается оптимум на некотором y_μ .

Доказательство. Квадратичный член $\frac{1}{2\mu}|p|^2$ имеет явное сопряжение $\frac{1}{2\mu}|p|^2$. Применяя правила сопряжения (стандартные для выпуклых функций в полной решётке значений) к сумме, получаем указанную форму. Достижимость следует из строгой вогнутости двойственного функционала по y (квадратичный штраф) и A12, применённой к отрицанию (или эквивалентно — к минимизации выпуклой функции $y \mapsto f^{*P}(A^*y) + g^{*P}(-y) + \frac{1}{2\mu}|A^*y|^2$).

14.8 Лемма 12.4.5 (ККТ для регуляризованных задач)

(Использует лемму 12.2.2.) Пара (x_μ, y_μ) удовлетворяет:

$$-A^*y_\mu = \mu x_\mu + p_\mu, \quad p_\mu \in \partial_{\text{cvx}}^P f(x_\mu), \quad y_\mu \in \partial_{\text{cvx}}^P g(Ax_\mu).$$

Доказательство. Оптимальность x_μ для P_μ означает $0 \in \partial(f + g \circ A + \frac{\mu}{2}|\cdot|^2)(x_\mu)$; применяя стандартные правила субдифференцирования выпуклых функций (в конечномерном каркасе они доказываются через эпиграфы и нормали) получаем включение

$$0 \in \partial f(x_\mu) + A^* \partial g(Ax_\mu) + \mu x_\mu.$$

Выбирая $y_\mu \in \partial g(Ax_\mu)$ и обозначив $p_\mu \in \partial f(x_\mu)$, получаем формулу.

14.9 Лемма 12.4.6 (предел $\mu \downarrow 0$ и отсутствие разрыва)

(Использует P -QC и A11.) Множества x_μ и y_μ P -ограничены, и существует P -предел $x_\mu \rightarrow_P x^*$, $y_\mu \rightarrow_P y^*$ при $\mu \rightarrow 0$ по рациональной последовательности $\mu_k \downarrow 0$.

Доказательство. P -QC обеспечивает локальную устойчивость домена g около некоторого Ax_0 и, следовательно, априорные оценки на значения двойственных переменных через опорные функции эпиграфов. Квадратичная регуляризация делает x_μ единственным и даёт оценку $|x_\mu| \leq C$ из сравнения $F_\mu(x_\mu) \leq F_\mu(x_0)$. Аналогично, из оптимальности y_μ в D_μ и квадратичного штрафа $\frac{1}{2\mu}|A^*y|^2$ получается P -ограниченность A^*y_μ , а при условии, что A имеет замкнутый образ (в конечномерности), — P -ограниченность y_μ . Переход к P -пределу осуществляется через A10 (компактность ограниченных семейств в \mathbb{R}^n) и перенос в P -терминах.

14.10 Завершение доказательства Теоремы G

Из слабой двойственности (лемма 12.4.2) имеем $\sup(D) \leq \inf(P)$. Для регуляризованных задач $\inf(P_\mu) = \sup(D_\mu)$ (следует из ККТ и строгой выпуклости/вогнутости). При $\mu \downarrow 0$ значения $\inf(P_\mu)$ монотонно стремятся к $\inf(P)$ (квадратичный член исчезает), а $\sup(D_\mu)$ монотонно стремится к $\sup(D)$ (штраф исчезает). P -QC гарантирует отсутствие разрыва (замыкание эпиграфа perturbation-функции), что обеспечивает равенство пределов и тем самым $\inf(P) = \sup(D)$.

Достижимость: предел x^* из леммы 12.4.6 является минимизатором P по P -н.п.н. и замкнутости уровней; аналогично, предел y^* — максимизатор D по P -замкнутости графов субдифференциалов и устойчивости Fenchel-равенств.

ККТ-условия G.3 получаются как предел регуляризованных ККТ (лемма 12.4.5) при $\mu \rightarrow 0$ с использованием P -замкнутости графов $\partial_{\text{cvx}}^P f$ и $\partial_{\text{cvx}}^P g$ (в конечномерном каркасе это выводится из эпиграфической замкнутости).

Теорема G доказана.

Глава 15

Исчисление субдифференциалов и правило цепочки (Теорема F)

В данной главе выводится полный пакет правил исчисления для ∂_C^S и ∂_M^S в P -постановке.

15.1 Сумма

Теорема 13.1.1 (сумма: включение).

(Использует A11.) Пусть f, g локально P -липшицевы. Тогда:

$$\partial_C^S(f + g)(x) \subseteq \partial_C^S f(x) + \partial_C^S g(x).$$

Доказательство.

Шаг 1. По определению 6.2.1 и субаддитивности \limsup :

$$(f + g)_P^\circ(x; v) \leq f_P^\circ(x; v) + g_P^\circ(x; v).$$

Шаг 2. Если $p \in \partial_C^S(f + g)(x)$, то $\langle p, v \rangle \leq (f + g)_P^\circ(x; v)$ для всех v , значит

$$\langle p, v \rangle \leq f_P^\circ(x; v) + g_P^\circ(x; v).$$

Шаг 3. Рассмотрим множества $K_f = \partial_C^S f(x)$ и $K_g = \partial_C^S g(x)$. Их опорные функции равны соответствующим направленным производным:

$$\sigma_{K_f}(v) = \sup_{a \in K_f} \langle a, v \rangle \leq f_P^\circ(x; v), \quad \sigma_{K_g}(v) \leq g_P^\circ(x; v).$$

Тогда $\sigma_{K_f + K_g}(v) = \sigma_{K_f}(v) + \sigma_{K_g}(v) \leq f_P^\circ + g_P^\circ$.

Шаг 4. Из $\langle p, v \rangle \leq \sigma_{K_f + K_g}(v)$ для всех v и полярного тождества (A13) следует $p \in K_f + K_g$.

Замечание 13.1.2 (равенство при P -регулярности). Если, например, f P -регулярна в x (определение 3.2.3), то $\partial_C^S(f + g)(x) = \partial_C^S f(x) + \partial_C^S g(x)$: это следует из равенства направленных производных $(f + g)_P^\circ = f_P^\circ + g_P^\circ$ при регулярности.

15.2 Максимум

Теорема 13.2.1 (максимум: включение).

(Использует A11, A13.) Пусть $h = \bigvee_{i=1}^m f_i$, где f_i локально P -липшицевы. Тогда:

$$\partial_C^S h(x) \subseteq \text{cl}_P \text{conv} \left(\bigcup_{i \in I(x)} \partial_C^S f_i(x) \right).$$

Доказательство.

Шаг 1. Направленная производная максимума удовлетворяет:

$$h_P^\circ(x; v) = \sup_{i \in I(x)} f_{i,P}^\circ(x; v),$$

что доказывается прямой оценкой по определению 6.2.1: секущие к максимуму не превосходят максимума секущих, а активность ограничивает индексы.

Шаг 2. Если $p \in \partial_C^S h(x)$, то $\langle p, v \rangle \leq \sup_{i \in I(x)} f_{i,P}^\circ(x; v)$. Но $f_{i,P}^\circ$ доминирует опорную функцию $\sigma_{\partial_C^S f_i(x)}$. Тогда

$$\langle p, v \rangle \leq \sup_{i \in I(x)} \sigma_{\partial_C^S f_i(x)}(v) = \sigma_{\text{cl}_P \text{conv}(\cup_{i \in I(x)} \partial_C^S f_i(x))}(v).$$

Шаг 3. Полярность (A13) даёт принадлежность p указанной оболочке.

15.3 Композиция с линейным оператором

Теорема 13.3.1 (линейная композиция).

(Использует A11.) Пусть $A : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ линейно и $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ локально P -липшицева. Тогда:

$$\partial_C^S(f \circ A)(x) \subseteq A^* \partial_C^S f(Ax).$$

Доказательство. Для любого $v \in \mathbf{R}^k$:

$$(f \circ A)_P^\circ(x; v) = f_P^\circ(Ax; Av).$$

Если $p \in \partial_C^S(f \circ A)(x)$, то $\langle p, v \rangle \leq f_P^\circ(Ax; Av)$. Но для любого $q \in \partial_C^S f(Ax)$ имеем $\langle A^*q, v \rangle = \langle q, Av \rangle \leq f_P^\circ(Ax; Av)$. Следовательно, p лежит в полярном образе множества $A^* \partial_C^S f(Ax)$. В конечномерности это даёт требуемое включение.

15.4 Правило цепочки для гладкой внутренней композиции

Пусть $g : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ — гладкая стрелка (A1-A2), $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ локально P -липшицева.

Теорема 13.4.1 (цепочка: включение).

(Использует A1-A2, A11.) Тогда

$$\partial_C^S(f \circ g)(x) \subseteq Dg(x)^* \partial_C^S f(g(x)).$$

Доказательство.

Шаг 1. По гладкости g имеем линейную аппроксимацию:

$$g(y) = g(x) + Dg(x)(y - x) + r(y),$$

где остаток $r(y)$ мал порядка $|y - x|^2$ и контролируется в P -окрестностях (синтетический Тейлор).

Шаг 2. Для секущих разностей:

$$\frac{f(g(y + tv)) - f(g(y))}{t} \approx \frac{f(g(x) + Dg(x)(tv) + \text{мал.}) - f(g(x))}{t}.$$

При переходе к P -lim sup вклад остатка поглощается ε в определении 6.2.1 (так как f локально липшицева, а остаток $O(t^2)$). Отсюда

$$(f \circ g)_P^\circ(x; v) \leq f_P^\circ(g(x); Dg(x)v).$$

Шаг 3. Если $p \in \partial_C^S(f \circ g)(x)$, то $\langle p, v \rangle \leq (f \circ g)_P^\circ(x; v) \leq f_P^\circ(g(x); Dg(x)v)$.

Шаг 4. Пусть $q \in \partial_C^S f(g(x))$. Тогда $\langle q, Dg(x)v \rangle \leq f_P^\circ(g(x); Dg(x)v)$, то есть

$\langle Dg(x)^*q, v \rangle \leq f_P^\circ(\cdot)$. Следовательно, множество $Dg(x)^*\partial_C^S f(g(x))$ состоит из допустимых опорных функционалов для $(f \circ g)_P^\circ$, и по полярности получаем включение.

15.5 Теорема F: полный пакет исчисления

Теорема 13.5.1 (Теорема F: исчисление и цепочка).

(Использует A1-A8, A11, A13; равенства требуют P -регулярности; проксимальные части используют A12.)

Пусть f, g, f_i локально P -липшицевы, $h = \bigvee_{i=1}^m f_i$, A линейно, g гладко. Тогда:

F.1. (сумма) $\partial_C^S(f+g)(x) \subseteq \partial_C^S f(x) + \partial_C^S g(x)$; равенство при P -регулярности одного из слагаемых;

F.2. (максимум) $\partial_C^S h(x) \subseteq \text{cl}_P \text{conv} \bigcup_{i \in I(x)} \partial_C^S f_i(x)$; равенство при P -регулярности f_i ;

F.3. (линейная композиция) $\partial_C^S(f \circ A)(x) \subseteq A^* \partial_C^S f(Ax)$; равенство при P -регулярности f ;

F.4. (цепочка) $\partial_C^S(f \circ g)(x) \subseteq Dg(x)^* \partial_C^S f(g(x))$; равенство при P -регулярности f ;

F.5. (проксимальная совместимость) для выпуклых proper P -н.п.н. функций ∂_M^S согласован с Moreau-Yosida оболочкой и резольвентой: $J_{\lambda \partial_M^S f} = \text{prox}_{\lambda f}$ и $\nabla(e_\lambda f)(x) = \lambda^{-1}(x - \text{prox}_{\lambda f}(x))$.

Доказательство.

F.1 — теорема 13.1.1 и замечание 13.1.2.

F.2 — теорема 13.2.1 и аналогичное замечание о регулярности.

F.3 — теорема 13.3.1.

F.4 — теорема 13.4.1.

F.5 — леммы 8.3.2 и 8.4.1.

Теорема F доказана.

Глава 16

Алгоритмы негладкой оптимизации в P -геометрии

В этой главе формализуются алгоритмы и их сходимость в P -смысле. Главная идея: доказательства сходимости строятся так, чтобы использовать только конструктивные неравенства, монотонность и P -замкнутость графов.

16.1 Проксимальный метод

Рассмотрим минимизацию выпуклой proper P -н.п.н. функции $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_\ell$.
Алгоритм 14.1.1 (Proximal Point). Для $\lambda_k \in \mathbf{Q}_{>0}$:

$$x_{k+1} = \text{прох}_{\lambda_k f}(x_k).$$

Теорема 14.1.2 (сходимость ПРА в конечномерном случае).
(Использует A11, A12.) Если множество минимумов $S = \arg \min f$ непусто и выбор λ_k удовлетворяет $\inf_k \lambda_k > 0$, то (x_k) P -сходится к элементу S .

Доказательство. Проксимальное неравенство даёт Фежер-монотонность относительно S :

$$|x_{k+1} - x^*|^2 \leq |x_k - x^*|^2 - |x_{k+1} - x_k|^2 \quad (\forall x^* \in S).$$

Отсюда $\sum_k |x_{k+1} - x_k|^2 < \infty$ и $|x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0$. В конечномерности это даёт P -сходимость к точке минимума по замкнутости S и асимптотической регулярности.

16.2 Проксимально-градиентный метод (Forward-Backward)

Это частный случай Теоремы Н, когда $A = \partial_M^S f$, $B = \nabla g$.

Алгоритм 14.2.1 (PG/FB). Для выпуклых f и гладкой выпуклой g :

$$x_{k+1} = \text{прох}_{\lambda f}(x_k - \lambda \nabla g(x_k)).$$

Сходимость следует из Теоремы 11.4.1 при коэрцитивности ∇g (эквивалентно липшицевости градиента).

16.3 Douglas-Rachford и ADMM

Пусть требуется решить

$$0 \in A(x) + B(x),$$

где A, B P -максимально монотонны (например, субдифференциалы двух выпуклых функций).

Алгоритм 14.3.1 (Douglas-Rachford).

$$u_{k+1} = J_{\lambda B}(z_k), \quad v_{k+1} = J_{\lambda A}(2u_{k+1} - z_k), \quad z_{k+1} = z_k + v_{k+1} - u_{k+1}.$$

Теорема 14.3.2 (сходимость DR в конечномерном каркасе).

(Использует A11, A12 и P -Minty-тип свойства резольвент.) Если множество решений непусто, то (u_k) P -сходится к решению включения.

Доказательство. Классическое доказательство DR основано на фирм-нерасширяющести резольвент и Фежер-монотонности относительно множества фиксированных точек оператора отражений. Все оценки — алгебраические и конструктивны. P -замкнутость графов резольвент и конечномерность дают существование предела и принадлежность множеству решений.

Замечание 14.3.3 (ADMM). ADMM получается как применение DR к двойственной задаче для разложения $f(x) + g(z)$ при ограничении $Ax = z$. В P -смысле корректность обеспечивается Теоремой G (двойственность) и резольвентами $\partial_M^S f$ и $\partial_M^S g$.

16.4 Субградиентные потоки

Для P -липшицевой f можно рассматривать дифференциальное включение:

$$\dot{x}(t) \in -\partial_C^S f(x(t)).$$

Внутренне (A1–A2) потоки трактуются как кривые $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$ с выбором скорости в многозначном правиле. Строгая конструктивная теория решений включений — часть программы исследований (глава 17), однако дискретные схемы (субградиентный спуск) полностью охватываются главой 11–14.

Часть VI

Примеры, соответствие и открытые проблемы

Глава 17

Примеры и приложения

В данной главе приводятся детальные вычисления ∂_C^S , ∂_M^S и примеры двойственности/алгоритмов.

17.1 $|x|$ и soft-thresholding (ℓ_1)

Рассмотрим $f(x) = \lambda|x|$ на \mathbf{R} .

По лемме 7.3.1:

$$\partial_C^S f(0) = \lambda[-1, 1], \quad \partial_C^S f(x) = \lambda \operatorname{sgn}(x) \quad (x \neq 0).$$

Проксимальная точка:

$$\operatorname{prox}_{\tau f}(x) = \arg \min_y \left(\lambda|y| + \frac{1}{2\tau}(y-x)^2 \right) = \operatorname{soft}(x, \tau\lambda),$$

где soft-thresholding:

$$\operatorname{soft}(x, \alpha) = \begin{cases} x - \alpha, & x > \alpha \\ 0, & |x| \leq \alpha \\ x + \alpha, & x < -\alpha. \end{cases}$$

Это следует из разбиения на случаи активной ветви $|y| = \pm y$ и проверки оптимальности (через субградиент).

17.2 Hinge-loss и SVM

Hinge-loss $\ell(z) = \max(0, 1 - z)$.

Субдифференциал:

$$\partial_C^S \ell(z) = \begin{cases} \{0\}, & z > 1 \\ [-1, 0], & z = 1 \\ \{-1\}, & z < 1. \end{cases}$$

Для задачи SVM (первичная форма):

$$\min_{w,b} \frac{1}{2}|w|^2 + C \sum_{i=1}^N \max(0, 1 - y_i(\langle w, x_i \rangle + b)).$$

Это сумма гладкого квадратичного члена и конечного максимума аффинных функций; ∂_C^S вычисляется через Теорему F (сумма + цепочка + максимум).

ККТ-условия выводятся через Теорему G, применённую к разложению $f(w) = \frac{1}{2}|w|^2$ и g как сумму hinge-loss по линейным функционалам.

17.3 Индикаторы и проекции

Для выпуклого P -замкнутого C :

$$\partial_M^S \delta_C(x) = N_C^P(x), \quad \text{prox}_{\lambda \delta_C}(x) = \Pi_C(x)$$

(проекция на C). Это следует из определения проксимальной точки: минимизация $\delta_C(y) + \frac{1}{2\lambda}|y - x|^2$ эквивалентна минимизации квадрата расстояния на C .

17.4 Кусочно-линейные функции и активные грани

Для

$$f(x) = \max_{i=1, \dots, m} (\langle p_i, x \rangle + c_i)$$

имеем:

$$\partial_C^S f(x) = \text{conv } p_i \mid i \in I(x).$$

Это прямое следствие Теоремы Е (Е.2). Активные грани играют роль «локального многоугольника субградиентов», что обеспечивает устойчивую комбинаторику изломов.

17.5 Негладкое вариационное исчисление: дискретная модель TV-типа

Рассмотрим дискретный функционал на $u \in \mathbf{R}^N$:

$$F(u) = \sum_{k=1}^{N-1} |u_{k+1} - u_k| + \frac{\alpha}{2} |u - f|^2.$$

Первый член — сумма абсолютных величин (кусочно-линейный), второй — гладкий. Тогда включение оптимальности:

$$0 \in \partial_C^S \left(\sum |Du| \right) + \alpha(u - f)$$

решается методом forward-backward (глава 11, 14). Сходимость следует из коэрцитивности линейного оператора αI и P -максимальной монотонности субдифференциала суммы абсолютных значений.

Глава 18

Теорема о соответствии СНА в хорошо адаптированных моделях

Цель главы — строго сформулировать и доказать, что синтетические конструкции СНА воспроизводят классические объекты негладкого анализа на глобальных сечениях.

18.1 Внешняя интерпретация и глобальные сечения

16.1.1. Пусть Γ — функтор глобальных сечений $\Gamma(X) = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(1, X)$, где 1 — терминальный объект.

16.1.2. В хорошо адаптированной модели (A8) объект \mathbf{R} имеет глобальные сечения, идентифицируемые с классическими \mathbb{R} ; аналогично $\Gamma(\mathbf{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$.

16.1.3. Для P -локали $P(\mathbf{R}^n)$ определим на $\Gamma(\mathbf{R}^n)$ внешнюю топологию:

$$U \subseteq \Gamma(\mathbf{R}^n) \text{ открыто} \quad :\iff \quad \exists U \in P(\mathbf{R}^n) : U = x \in \Gamma(\mathbf{R}^n) \mid x \in U.$$

A10.1 утверждает, что это совпадает с обычной евклидовой топологией.

18.2 Соответствие локалей значений

A10.2 утверждает: глобальные сечения \mathbf{R}_ℓ и \mathbf{R}_u совпадают с классическими нижними/верхними вещественными, а $\bar{\mathbf{R}}_\ell$ — с расширенными вещественными. Это означает, что определения P -н.п.н., эпиграфа, опорных функций и сопряжения переводятся в стандартные определения (Rockafellar-Wets).

18.3 Соответствие субдифференциалов и нормалей

18.3.1 Clarke

По Теореме E для кусочно-гладких функций ∂_C^S описывается через активные градиенты. В классике Clarke-субдифференциал для кусочно-гладких функций имеет то же описание. Следовательно, графы совпадают на глобальных сечениях.

Для более общих локально липшицевых функций соответствие определяется через совпадение формулы для направленной производной (определение 6.2.1) с классическим $\lim \sup$ -определением.

18.3.2 Moreau и Mordukhovich

Проксимальный субдифференциал ∂_M^S определён через проксимальное квадратичное поддерживание, что совпадает с классическим определением. Лимитный ∂_L^S строится как предел проксимальных субградиентов, также совпадая с Мордухович-тип определением.

18.4 Соответствие монотонности, резольвент и ВИ

16.4.1. По A10.3 и Теореме 10.3.1 резольвенты и регуляризация Йосиды совпадают с классическими на глобальных сечениях.

16.4.2. Теорема Н даёт существование и сходимость FB-схемы. В классическом конечномерном случае это стандартный результат для максимальных монотонных и коэрцитивных операторов. Совпадение следует из совпадения резольвент и коэрцитивности на глобальных сечениях.

18.5 Главная теорема соответствия

Теорема 16.5.1 (Теорема о соответствии СНА).

(Использует A8 и A10, а также доказанные в главах 7–14 свойства конструкций.)

В хорошо адаптированной модели \mathcal{E} :

- (1) $P(\mathbf{R}^n)$ индуцирует на $\Gamma(\mathbf{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$ обычную топологию; P -сходимость соответствует обычной сходимости.
- (2) Локалы значений $\mathbf{R}_\ell, \mathbf{R}_u, \overline{\mathbf{R}}_\ell$ на глобальных сечениях соответствуют классическим нижним/верхним/расширенным вещественным; P -полунепрерывность соответствует обычной полунепрерывности.
- (3) Для локально липшицевых функций и для выпуклых пропер функций синтетические субдифференциалы $\partial_C^S, \partial_M^S, \partial_L^S$ соответствуют классическим Clarke/Moreau/Mordukhovich по совпадению графов на глобальных сечениях.
- (4) Для P -монотонных операторов, резольвент и включений решения, существующие по Теореме Н, соответствуют классическим решениям монотонных включений и вариационных неравенств; алгоритмы (PPA, FB, DR, ADMM) совпадают с классическими схемами.

Доказательство. Пункты (1)–(2) — содержание A10. Пункты (3)–(4) следуют из того, что определения СНА построены исключительно из:

- логических кванторов по рационалам,
- P -окрестностей,
- операций супремума/инфимума в локалях значений,
- алгебраических операций в \mathbf{R}^n ,

которые под Γ переводятся в соответствующие классические операции. Совпадение графов получается из совпадения определяющих неравенств и устойчивости предельных процедур при переходе к глобальным сечениям (A10.1–A10.3).

Глава 19

Программа дальнейших исследований и открытые проблемы

19.1. ***P -Rademacher и «почти всюду».*** Для общего класса локально липшицевых функций теорема Rademacher о почти-всюду дифференцируемости в классике является ключом к построению Clarke-субдифференциала как выпуклой оболочки предельных градиентов. В США естественный вопрос: какая внутренняя мера/локаль «почти-всюду» согласуется с $P(\mathbf{R}^n)$ так, чтобы получить P -Rademacher-тип утверждение без LEM?

19.2. ***Метрическая регулярность и error bounds в полном объёме.*** В главе 9 дан минимальный каркас. Полная синтетическая теория метрической регулярности (Aubin property, coderivative criterion, tilt stability) требует разработки P -аналога «предельных нормалей» к графам в более общей категории и чёткой семантики последовательностных принципов.

19.3. ***Бесконечномерные пространства и включения эволюционного типа.*** Первая монография сознательно работала в конечномерном каркасе R^n (без Хана-Банаха). Для США естественно: (i) построить синтетические гильбертовы/банаховы объекты с локалевой полнотой; (ii) развить P -монотонные потоки и полугруппы для эволюционных включений (градиентные потоки в смысле субдифференциала).

19.4. ***Минимальность аксиом A9-A13.***

- A9 отвечает за нетривиальность Repop-инфинитезималов.
- A12 — технический инструмент существования (строгая выпуклость).
- A13 — конечномерная полярность и выпуклая оболочка.

Вопрос: какие части Теорем E-H сохраняются при ослаблении A12/A13 и замене их более базовыми принципами?

19.5. ***Ускорение и негладкая гамильтонова геометрия.*** В классике ускоренные методы (Нестерова) и инерциальные включения завязаны на тонкие оценки энергии. В США возникает возможность формулировать эти оценки внутри P -топологии, где «изломы» отражаются как локалевая многозначность, что может дать новый взгляд на ускорение как геометрию многозначных полей.

Часть VII

Дополнительные главы (A14): метрика, наклон, эволюции и расщепления

Глава 20

Метрика в P -режиме: устойчивость, error bounds, метрическая регулярность

В главах 6–11 построены субдифференциалы и монотонные включения, а также алгоритмы, чьи гарантии естественно формулируются через метрические величины: расстояния до множеств, оценки наклона и регулярность графов. В гладком топосе эти величины не обязаны быть числами типа \mathbf{R} ; корректным носителем выступают локалы значений (\mathbf{R}_ℓ и $\overline{\mathbf{R}}_\ell$). Мы фиксируем конструктивные определения и выводим базовые результаты, достаточные для приложений к оптимизации.

20.1 Расстояния как нижние вещественные и P -полунепрерывность

Пусть $V = \mathbf{R}^n$ с нормой $|\cdot|$ (A11). Для P -замкнутого $C \hookrightarrow V$ определим расстояние до C как нижнее вещественное:

$$\text{dist}(x, C); :=; \text{Inf}_{y \in C} |x - y| \in \mathbf{R}_\ell.$$

Здесь Inf понимается в локалы \mathbf{R}_ℓ (глава 4), и потому не требует LEM/AC.

Лемма 20.1.1 (Локальность расстояния). (Использует A11 и свойства \mathbf{R}_ℓ из главы 4.) Для любых $x \in V$ и $r \in \mathcal{P}_{>0}$:

$$\text{dist}(x, C) < r \iff \exists y \in C : |x - y| <_P r.$$

Доказательство. По определению нижнего инфимума в \mathbf{R}_ℓ имеем: $\text{dist}(x, C) < r$ эквивалентно существованию $y \in C$ с $|x - y| < r$ (в строгом порядке, решаемом на рациональных аппроксимациях).

Лемма 20.1.2 (P -полунепрерывность расстояния). (Использует A11, A12.) Отображение $x \mapsto \text{dist}(x, C)$ является P -полунепрерывным снизу как функция $V \rightarrow \mathbf{R}_\ell$, а множество субуровня $x \mid \text{dist}(x, C) \leq q$ является P -замкнутым для любого $q \in \mathbf{Q}$.

Доказательство. Множество $x \mid \text{dist}(x, C) > q$ есть объединение P -шаров $B_\varepsilon(x)$, на которых расстояние отделено от q (свойство 20.1.1 и базис A11); следовательно, это множество P -открыто, а значит расстояние P -LSC. Замкнутость субуровней эквивалентна P -LSC.

20.2 Квадратичный рост и error bounds из сильной выпуклости

Пусть $f : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ — proper P -LSC. Сильная выпуклость в смысле первой монографии формулируется для конечнозначных функций $g : V \rightarrow \mathbf{R}$; для f со значениями в локалы мы используем стандартную конструкцию «квадратичного миноранта» на домене.

Определение 20.2.1 (Квадратичный рост на множестве минимизаторов). Пусть $S := \text{argmin } f$ непусто. Говорят, что f имеет квадратичный

рост с модулем $\mu \in \mathcal{P}_{>0}$ относительно S , если

$$f(x) \geq \operatorname{Inf}_S f + \frac{\mu}{2} \operatorname{dist}(x, S)^2$$

как неравенство в $\overline{\mathbf{R}}_\ell$.

Теорема 20.2.2 (Сильная выпуклость \Rightarrow квадратичный рост). (Использует A1–A8, A11, A12.) Пусть $f : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ выпукла, P -LSC и в точном смысле «сильно выпукла» с модулем $\mu \in \mathcal{P}_{>0}$, т.е. существует выпуклая $g : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ такая, что

$$f(x) = g(x) + \frac{\mu}{2} |x|^2.$$

Тогда $S = \operatorname{argmin} f$ непусто и f имеет квадратичный рост с тем же модулем μ .

Доказательство. По A12 функция f достигает минимума на любом P -компактном субуровне; используя коэрцитивность квадратичного слагаемого, получаем существование минимума на V (стандартная редукция к шарам $B_R(0)$ и предельный переход в \mathbf{R}_ℓ). Пусть $x^* \in S$. Тогда для любого x и $\lambda \in [0, 1]_{\mathbf{R}}$ по сильной выпуклости имеем

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x^*) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x^*) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) |x - x^*|^2.$$

Полагая $\lambda = \frac{1}{2}$ и переставляя, получаем

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{\mu}{2} |x - x^*|^2.$$

Переходя к инфимуму по $x^* \in S$ и используя определение $\operatorname{dist}(x, S)$ (как нижнего инфимума), заключаем искомого неравенство квадратичного роста.

Следствие 20.2.3 (Error bound из квадратичного роста). (Использует A11.) Пусть f имеет квадратичный рост с модулем μ . Тогда

$$\operatorname{dist}(x, S) \leq \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{f(x) - \operatorname{Inf}_S f}$$

в смысле неравенства в \mathbf{R}_ℓ (после естественного вложения в $\overline{\mathbf{R}}_\ell$).

Доказательство. Немедленно из определения квадратичного роста.

Замечание 20.2.4. В типичных приложениях f имеет вид $f(x) = \phi(x) + \delta_K(x)$, где ϕ конечнозначна, выпукла, а K выпукло и P -замкнуто. Тогда квадратичный рост описывает устойчивость решения относительно возмущений и даёт априорные оценки для проксимальных и проекционных методов (глава 11).

20.3 Метрическая регулярность и сильная монотонность

Пусть $A : V \rightrightarrows V^*$ — P -монотонный оператор (глава 8). В классическом анализе сильная монотонность обеспечивает метрическую регулярность графа и устойчивость решения включения $0 \in A(x)$. В синтетическом контексте корректная формулировка проходит через резольвенты.

Определение 20.3.1 (Сильная монотонность). Оператор A называется μ -сильно монотонным ($\mu \in \mathcal{P}_{>0}$), если

$$\forall (x, p), (y, q) \in \text{graph}(A) : \langle p - q, x - y \rangle \geq_P \mu |x - y|^2.$$

Теорема 20.3.2 (Сильная монотонность \Rightarrow сжимаемость резольвенты). (Использует A11 и леммы главы 8.) Пусть A максимален P -монотонен и μ -сильно монотонен. Тогда для любого $\lambda \in \mathcal{P}_{>0}$ резольвента $J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1} : V \rightarrow V$ существует (по теоремам Минти-типа главы 8) и является сжимающим отображением:

$$|J_\lambda^A(x) - J_\lambda^A(y)| \leq \frac{1}{1 + \lambda\mu} |x - y|.$$

Доказательство. Пусть $u = J_\lambda^A(x)$ и $v = J_\lambda^A(y)$. Тогда существуют $p \in A(u)$ и $q \in A(v)$ такие, что $x = u + \lambda p$ и $y = v + \lambda q$, то есть $x - y = (u - v) + \lambda(p - q)$. Скалярно умножая на $u - v$ и используя сильную монотонность, получаем

$$\langle x - y, u - v \rangle = |u - v|^2 + \lambda \langle p - q, u - v \rangle \geq |u - v|^2 + \lambda\mu |u - v|^2 = (1 + \lambda\mu) |u - v|^2.$$

По неравенству Коши-Буняковского имеем $\langle x - y, u - v \rangle \leq |x - y| |u - v|$. Отсюда $(1 + \lambda\mu) |u - v| \leq |x - y|$, что и даёт оценку.

Следствие 20.3.3 (Уникальность и липшицевость решения включения). (Использует A11.) Если $0 \in A(x)$ разрешимо, то решение единственно и удовлетворяет устойчивости относительно аддитивных возмущений: если $r \in V^*$ и $0 \in A(x_r) + r$, то

$$|x_r - x_0| \leq \frac{1}{\mu} |r|.$$

Доказательство. Уникальность следует из сильной монотонности при $p = q = 0$. Оценка следует из подстановки $(x, p) = (x_r, -r)$ и $(y, q) = (x_0, 0)$ в определение сильной монотонности и применения Коши-Буняковского.

20.4 Error bounds через наклон (условно на A14)

В неконвексных задачах естественным объектом является наклон (slope), связанный с Clarke-субдифференциалом. В синтетическом контексте корректная конструкция использует P -лимсупы.

Определение 20.4.1 (Сильный P -наклон). Пусть $f : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ P -LSC и конечна в x . Определим

$$|\nabla_P f|(x); :=; \text{Sup}_{y \rightarrow_P x, y \neq x} \frac{(f(x) - f(y))_+}{|x - y|} \in \mathbf{R}_u,$$

где $(a)_+ = \max(a, 0)$ вычисляется в решётке значений (глава 4).

Теорема 20.4.2 (Slope error bound; условно). (Использует A11, A20.) Пусть $S := \{x \mid f(x) \leq 0\}$ непусто и f P -LSC. Предположим, что существует $m \in \mathcal{P}_{>0}$ и $\rho \in \mathcal{P}_{>0}$ такие, что

$$f(x) \in (0, \rho] \implies |\nabla_P f|(x) \geq m.$$

Тогда в P -окрестности множества S выполнено локальное error bound-неравенство:

$$\text{dist}(x, S) \leq \frac{1}{m} f(x)_+.$$

Доказательство. Стандартная схема выводится из принципа Ekeland (A14). Пусть x с $0 < f(x) \leq \rho$. Применим A14 к функции $f_+(y) := f(y)_+$ с параметрами $\varepsilon = f(x)$ и $\lambda = \frac{1}{m}f(x)$. Получаем x_ε с $f_+(x_\varepsilon) \leq f(x)$ и строгим локальным минимальным свойством для $f_+(y) + \frac{\varepsilon}{\lambda}|y - x_\varepsilon|$. Из этого следует $|\nabla_P f_+|(x_\varepsilon) \leq \varepsilon/\lambda = m$. С другой стороны, по предположению наклон в точках с положительным значением не меньше m , следовательно $f(x_\varepsilon) = 0$ и $x_\varepsilon \in S$. Из Ekeland-неравенства получаем $0 = f(x_\varepsilon) \leq f(x) - m|x - x_\varepsilon|$, т.е. $|x - x_\varepsilon| \leq f(x)/m$ и потому $\text{dist}(x, S) \leq f(x)/m$.

Замечание 20.4.3. В классическом конечномерном анализе при локальной Lipschitz-регулярности выполняется связь $|\nabla f|(x) = \text{dist}(0, \partial^{\text{Cl}} f(x))$. Теорема о соответствии (глава 12) переводит её в синтетическую форму как утверждение о $|\nabla_P f|$ и P -Clarke субдифференциале при предпосылках A10.

Глава 21

***P*-вариационные принципы, наклон и приложения к оптимальности**

Данная глава развивает инструменты «второго уровня»: как из чисто топологической *P*-полунепрерывности и полноты метрики получать аппроксимации стационарности, критерии существования субградиентов и устойчивость. Основная предпосылка — A14; при её отсутствии результаты можно рассматривать как условные или как программу для дальнейшего вывода A14 из более первичных свойств $P(\mathbf{R}^n)$.

21.1 *P*-наклон и стационарность в терминах субдифференциалов

Пусть $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ локально *P*-Липшицева. Напомним (глава 6), что *P*-Clarke направленная производная определена как

$$f_P^\circ(x; v) := \limsup_{y \rightarrow Px, t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} \in \mathbf{R}_u,$$

а субдифференциал

$$\partial_C^S f(x) := \{p \in V^* \mid \forall v : \langle p, v \rangle \leq f_P^\circ(x; v)\}.$$

Определение 21.1.1 (*P*-Кларковская стационарность). Точка x называется *P*-стационарной для f , если $0 \in \partial_C^S f(x)$.

В классическом анализе (в \mathbf{R}^n) $0 \in \partial^{Cl} f(x)$ эквивалентно неотрицательности направленной производной во всех направлениях и эквивалентно нулевому наклону. В синтетическом виде это реализуется через A10.

Лемма 21.1.2 (Наклон и субдифференциал; условно на A10). (Использует A10, A11.) Для внутренней реализации классической локально Lipschitz функции f :

$$|\nabla_P f|(x) = \sup_{p \in \partial_C^S f(x)} |p|.$$

Доказательство. Это переформулировка классического факта $|\nabla f| = \text{dist}(0, \partial^{Cl} f)$ в терминах графов и внешней интерпретации: обе стороны определяются из одинаковых предельных конструкций и супремумов; A10 обеспечивает совпадение.

21.2 Принцип Ekeland и аппроксимация стационарности

Теорема 21.2.1 (Ekeland \Rightarrow почти-минимизатор). (Использует A11, A14.) Пусть $f : V \rightarrow \mathbf{R}_\ell$ *P*-LSC, ограничена снизу и принимает конечное значение. Для любого $\varepsilon \in \mathcal{P}_{>0}$ существует $x_\varepsilon \in V$ такой, что

1. $f(x_\varepsilon) \leq \text{Inf}_V f + \varepsilon$,
2. функция $y \mapsto f(y) + \frac{\varepsilon}{\lambda}|y - x_\varepsilon|$ достигает строгого минимума в x_ε (для некоторого $\lambda \in \mathcal{P}_{>0}$).

Доказательство. Это непосредственная переформулировка A14: пункт (2) — запись условия строгого неравенства A14 для всех $y \neq x_\varepsilon$.

Теорема 21.2.2 (Почти-стационарность; локально Lipschitz случай). (Использует A11, A14 и определения главы 6.) Пусть $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ локально P -Липшицева и P -непрерывна. Тогда для любого $\varepsilon \in \mathcal{P}_{>0}$ существует x_ε такое, что

$$f(x_\varepsilon) \leq \operatorname{Inf}_V f + \varepsilon \quad \text{и} \quad 0 \in \partial_C^S f(x_\varepsilon) + \varepsilon B_1,$$

где $B_1 = \{p \in V^* \mid |p| \leq 1\}$.

Доказательство. По теореме 21.2.1 применим A14 к f с параметрами ε и $\lambda = 1$. Получим точку x_ε с локальным минимальным свойством для $f(y) + \varepsilon|y - x_\varepsilon|$. Рассмотрим функцию $g(y) := f(y) + \varepsilon|y - x_\varepsilon|$. Она локально P -Липшицева (глава 3) и достигает минимума в x_ε , значит $0 \in \partial_C^S g(x_\varepsilon)$ по лемме оптимальности Кларка (глава 6). По правилу суммы (теорема F) имеем

$$0 \in \partial_C^S f(x_\varepsilon) + \varepsilon \partial_C^S |\cdot - x_\varepsilon|(x_\varepsilon).$$

Но $\partial_C^S |\cdot - x_\varepsilon|(x_\varepsilon) = B_1$ (пример 6.6.1/11.1.1), откуда следует утверждение.

21.3 Критерии существования субградиента и минимальности

Как следствие, получаем общий конструктивный способ находить «почти-субградиенты» и переходить к точным субградиентам при наличии компактности.

Следствие 21.3.1 (Существование стационарной точки на P -компактных множествах). (Использует A11, A12, A14.) Пусть $K \subset V$ P -компактно и $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ P -непрерывна и локально P -Липшицева. Тогда существует $x^* \in K$ с

$$0 \in \partial_C^S (f + \delta_K)(x^*),$$

где δ_K — индикатор K (глава 11), и, следовательно, выполнено Clarke-условие оптимальности для задачи $\min_{x \in K} f(x)$.

Доказательство. По A12 минимум достигается: найдётся $x^* \in K$ с $f(x^*) = \operatorname{Inf}_K f$. Применим теорему 21.2.2 к $f + \delta_K$ на V ; получаем семейство точек x_ε с почти-стационарностью. Используя P -компактность и замкнутость графа ∂_C^S (глава 6), переходим к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и получаем точную стационарность в x^* .

Глава 22

Негладкие эволюции: субградиентные потоки, дифференциальные включения и дискретизации

Динамические задачи в негладкой оптимизации естественно формулируются как дифференциальные включения

$$\dot{x}(t) \in -A(x(t)),$$

где A — (максимальный) монотонный оператор или субдифференциал. В гладком топосе дифференциальное исчисление существует (A1), однако многозначность требует аккуратной топологии и предельного аппарата. Мы развиваем минимальный синтетический каркас для эволюций, основанный на дискретизации через резольвенты и проксимальные операторы.

22.1 ИмPLICITная эйлера схема и энергия

Пусть $A : V \rightrightarrows V^*$ максимален P -монотонен (глава 8). Для шага $h \in \mathcal{P}_{>0}$ определим имплицитное обновление

$$x^{k+1} := J_h^A(x^k),$$

где $J_h^A = (I + hA)^{-1}$ — резольвента.

Лемма 22.1.1 (Фейерово уменьшение для J_h^A). (Использует A11 и теорему 8.4.2 о фирменной неэкспансивности резольвенты.) Пусть z — нуль оператора, $0 \in A(z)$. Тогда

$$|x^{k+1} - z| \leq |x^k - z|,$$

и более того выполнена «энергетическая» оценка:

$$|x^{k+1} - z|^2 \leq |x^k - z|^2 - |x^{k+1} - x^k|^2.$$

Доказательство. Из $x^{k+1} = J_h^A(x^k)$ и $z = J_h^A(z)$ и фирменной неэкспансивности получаем первое неравенство. Второе — стандартная тождественная переработка неравенства монотонности для пар $(x^{k+1}, (x^k - x^{k+1})/h)$ и $(z, 0)$, аналогично доказательству теоремы 7.5.1 первой монографии для PPA.

Следствие 22.1.2 (Суммируемость при наличии нулей). (Использует A11.) Если множество нулей $Z := A^{-1}(0)$ непусто, то последовательность (x^k) фейерова относительно Z , а сумма шагов конечна:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x^{k+1} - x^k|^2 < \infty.$$

Доказательство. Суммируем неравенство леммы 22.1.1 по k ; телескопическая сумма даёт ограниченность и сходимость ряда.

22.2 Проксимальные траектории для выпуклых функций

Пусть $f : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_\ell$ выпукла и P -LSC. Рассмотрим $A = \partial_M^S f$ (глава 7), который является максимальным P -монотонным (глава 7.4). Тогда J_h^A совпадает с проксимальным оператором $\text{прох}_{h,f}$.

Теорема 22.2.1 (Дискретная субградиентная динамика). (Использует A11, A12 и результаты главы 7.) Пусть $S = \text{argmin } f$ непусто. Тогда для любой последовательности шагов $(h_k) \subset \mathcal{P}_{>0}$, удовлетворяющей $\sum h_k = +\infty$ и $\sum h_k^2 < \infty$, итерации

$$x^{k+1} = \text{прох}_{h_k f}(x^k)$$

имеют следующие свойства:

1. (x^k) фейерова относительно S ;
2. $f(x^k)$ монотонно убывает (в порядке \leq_P) и сходится к $\text{Inf } f$;
3. каждый P -предельный пункт последовательности принадлежит S .

Доказательство. (1)–(3) следуют из лемм 22.1.1–22.1.2 и стандартной идентификации резольвенты с проксимальным оператором. Для (2) используем определение проксимальной точки как минимизатора функции $y \mapsto f(y) + \frac{1}{2h_k}|y - x^k|^2$ (глава 7) и сравниваем значения в $y = x^k$ и $y = x^{k+1}$, получая

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{1}{2h_k}|x^{k+1} - x^k|^2.$$

Суммирование даёт сходимость $f(x^k)$ к $\text{Inf } f$. Замкнутость S в P -топологии (как субуровня P -LSC функции) даёт (3).

22.3 Непрерывные потоки и принцип инвариантности: открытая задача

Классический результат (Brézis, Crandall–Liggett) утверждает существование и сходимость траекторий $\dot{x} \in -\partial f(x)$ для выпуклых f в гильбертовом пространстве. В синтетическом контексте корректное построение непрерывных траекторий требует дополнительной интернализации компактности и слабой топологии; это выходит за рамки минимальной аксиоматики A1–A14. Тем не менее, уже дискретная динамика 22.2.1 позволяет формулировать синтетический аналог принципа ЛаСалля на уровне предельных множеств дискретной динамики.

Проблема 22.3.1 (Синтетический Crandall-Liggett в P -геометрии). Построить внутренний полугрупповой поток S_t для $A = \partial_M^S f$ как предел произведений резольвент $\lim_{n \rightarrow \infty} (J_{t/n}^A)^n$ и доказать, что $t \mapsto f(S_t x)$ убывает, а ω -предельные множества состоят из стационарных точек, используя синтетический принцип инвариантности ЛаСалля (первая монография, Теорема 9.2.4).

Глава 23

Расщепления и примально-дуальные схемы: DR, ADMM и PD

Глава 11 изложила базовые алгоритмы (проксимальный шаг, forward-backward) как методы решения монотонных включений и задач вида $f + g \circ A$. Современная оптимизация использует более богатый класс расщеплений, в частности Douglas-Rachford (DR), ADMM и примально-дуальные методы (PD). Мы формулируем их в синтетической P -геометрии и доказываем базовые гарантии сходимости при стандартных предположениях максимальной монотонности и (ко)коэрцитивности.

23.1 Douglas-Rachford для суммы двух максимальных P -монотонных операторов

Пусть $A, B : V \rightrightarrows V^*$ максимальны P -монотонны. Для $\lambda \in \mathcal{P}_{>0}$ определим отражения

$$R_A := 2J_\lambda^A - I, \quad R_B := 2J_\lambda^B - I,$$

и оператор DR:

$$T_{DR} := \frac{1}{2}(I + R_A \circ R_B).$$

Лемма 23.1.1 (Неэкспансивность T_{DR}). (Использует A11 и фирменную неэкспансивность резольвент из главы 8.) Оператор T_{DR} является неэкспансивным: $|T_{DR}x - T_{DR}y| \leq |x - y|$.

Доказательство. Резольвенты J_λ^A, J_λ^B фирменно неэкспансивны, отражения R_A, R_B неэкспансивны, а усреднение $\frac{1}{2}(I + S)$ неэкспансивно для неэкспансивного S . Все оценки переносятся в P -форме благодаря A11.

Теорема 23.1.2 (Сходимость DR в конечномерном случае). (Использует A11, A12.) Пусть множество решений включения $0 \in (A + B)(x)$ непусто. Тогда для любой начальной точки x^0 итерации

$$x^{k+1} = T_{DR}(x^k)$$

имеют P -предельные точки, и всякая P -предельная точка \bar{x} удовлетворяет $J_\lambda^B(\bar{x}) \in \text{zer}(A + B)$.

Доказательство. В конечномерном случае и при P -компактности ограниченных орбит (A12) стандартная схема с использованием фейеровой монотонности относительно множества неподвижных точек $\text{Fix}(T_{DR})$ и демизамкнутости графа (глава 8) переносится на P -сходимость. Связь $\text{Fix}(T_{DR})$ с решениями включения — классическая идентичность Минти-типа, выводимая во внутренней логике из определений резольвент.

23.2 ADMM как DR на двойственной задаче

Рассмотрим задачу

$$\min_{\substack{x \in V \\ z \in W}} f(x) + g(z) \quad \text{при условии } Ax - z = 0,$$

где $A : V \rightarrow W$ — линейный морфизм. В главе 9 построено P -сопряжение и двойственная задача. ADMM соответствует DR-методу для суммы двух максимальных монотонных операторов на пространстве Лагранжевых множителей.

Определение 23.2.1 (ADMM-итерации). Для шага $\rho \in \mathcal{P}_{>0}$ и начальных (z^0, u^0) определим

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\rho f}(x^k - \rho A^* u^k), \quad z^{k+1} = \text{prox}_{\rho g}(Ax^{k+1} + u^k), \quad u^{k+1} = u^k + Ax^{k+1} - z^{k+1}.$$

Теорема 23.2.2 (Сходимость ADMM; выпуклый случай). (Использует A11, A12 и сильную двойственность главы 9.) Пусть f, g прогер выпуклы P -LSC и выполнены P -условия квалификации (глава 9) так, что существует седловая точка Лагранжиана. Тогда последовательность (x^k, z^k) P -сходится к примальному решению, а (u^k) — к двойственному.

Доказательство. Стандартная идентификация ADMM с DR-итерациями для операторов $\partial f \circ A^*$ и ∂g^{*P} использует только свойства проксимальных отображений и резольвент, доказанные в главах 7–9, и существование седловой точки из теоремы G. Затем применима теорема 23.1.2.

23.3 Примально-дуальные схемы (Chambolle-Rock) и P -условия

Для задач вида $\min_x f(x) + g(Ax)$ удобно использовать примально-дуальную схему:

$$y^{k+1} = \text{prox}_{\sigma g^{*P}}(y^k + \sigma A \bar{x}^k), \quad x^{k+1} = \text{prox}_{\tau f}(x^k - \tau A^* y^{k+1}), \quad \bar{x}^{k+1} = x^{k+1} + \theta(x^{k+1} - x^k).$$

Параметры τ, σ, θ удовлетворяют стандартным условиям $\tau\sigma|A|^2 < 1$.

Теорема 23.3.1 (Сходимость примально-дуальной схемы; конструктивная форма). (Использует A11, A12.) Пусть f, g прогер выпуклы P -LSC, а $\tau, \sigma \in \mathcal{P}_{>0}$ удовлетворяют $\tau\sigma|A|^2 < 1$. Тогда при существовании седловой точки Лагранжиана последовательности (x^k, y^k) ограничены и имеют P -предельные точки, являющиеся решениями соответствующих оптимизационных и двойственных задач.

Доказательство. Доказательство опирается на фейеровы оценки относительно множества седловых точек, которые выводятся из выпуклости и треугольных оценок для проксимальных отображений (глава 7) и из неравенства Коши–Буняковского (A11). Ограниченность и P -компактность орбит обеспечиваются A12.

Глава А

Конструктивные леммы о нижних и верхних вещественных

А.1. \mathbf{R}_ℓ и \mathbf{R}_u являются локалями: множества их базовых открытых задаются конечными системами рациональных ограничений.

А.2. Операции \vee, \wedge на \mathbf{R}_ℓ Scott-непрерывны, а на \mathbf{R}_u дуально Scott-непрерывны.

А.3. Для направленных семейств (L_i) в \mathbf{R}_ℓ их Scott-супремум задаётся точно:

$$\left(\sup_i L_i \right) (q) \iff \exists i : L_i(q).$$

Для \mathbf{R}_u дуально: $(\inf_i U_i)(q) \iff \exists i : U_i(q)$.

А.4. Вложение ι_ℓ переводит \max на \vee , а ι_u переводит \min на \wedge .

Глава В

Классические вставки (LEM, AC, Хан-Банах)

В.1. В булевом топосе $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$. Тогда $\Delta = 0$, а ядра $\Delta_X(x)$ вырождаются в x . Репон-смысл приближений исчезает: «логическая толщина» точки теряется.

В.2. В классической математике многие ключевые шаги негладкого анализа используют Хан-Банах и отделимость. В СНА эти шаги заменяются: (i) конечномерной полярностью (A13), (ii) регуляризацией и строгой выпуклостью (A12), (iii) P -локальным определением пределов.

Глава С

Указатель обозначений

- \mathcal{E} — гладкий топос.
 \mathbf{R} — синтетическая прямая.
 \mathbf{R}^n — конечномерное пространство.
 $\mathcal{P}, \mathcal{P}_{>0}$ — нестрогая/строгая позитивность (A3).
 $P(X)$ — Репон-локаль P -открытых подобъектов.
 $x \approx_P y$ — P -неразличимость: $\neg\neg(x = y)$.
 $\Delta_X(x)$ — P -ядро точки.
 $\Delta = d \in \mathbf{R} \mid \neg\neg(d = 0)$ — логические инфинитезималы.
 $\text{sat}_P(U)$ — P -насыщение.
 $\text{cl}_P(A)$ — P -замыкание.
 $\mathbf{R}_\ell, \mathbf{R}_u$ — нижние/верхние вещественные (локали).
 $\overline{\mathbf{R}}_\ell$ — расширенные нижние вещественные ($+\infty$).
 $f_P^\circ(x; v)$ — P -Clarke направленная производная.
 $\partial_C^S f(x)$ — синтетический Clarke-субдифференциал.
 $\partial_M^S f(x)$ — проксимальный/Moreau-субдифференциал.
 $\partial_L^S f(x)$ — лимитный (Mordukhovich-тип) субдифференциал.
 $T_C^P(x)$ — P -касательный конус.
 $N_C^P(x)$ — P -нормальный конус.
 A — многозначный оператор, $\text{grh}(A)$ — граф.
 $J_{\lambda A}$ — резольвента.
 A_λ — регуляризация Йосиды.
 f^{*P} — P -сопряжение Лежандра-Фенхеля.
 σ_K — опорная функция множества K .
-

Заключительный доказательный аудит

В окончательной форме теория синтетического негладкого анализа разделяет доказанные, условные и открытые результаты. Доказанным во внутреннем конечномерном каркасе считается всё, что сводится к алгебре локалей значений, P -замыканию, конечномерной полярности и монотонным неравенствам. Условными являются результаты, где требуется один из дополнительных компактных принципов: P -Weierstrass, вариационный принцип Экеланда, достижимость проксимальной точки, компактность ограниченных орбит или семантический мост A10. Открытыми оставлены только те переходы, которые требуют бесконечномерной слабой топологии, внутреннего полугруппового предела Crandall-Liggett или полной интернализации Mordukhovich calculus без конечномерной полярности.

Ключевое исправление по сравнению с наивным переносом классического негладкого анализа состоит в следующем. Негладкость не объявляется отсутствием производной у стрелок $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, поскольку такое отсутствие противоречит SDG-гладкости. Она строится как локалево-топологическое явление: через Penon-окрестности, $\neg\neg$ -сепарацию, нижние и верхние вещественные, эпиграфы, нормальные конусы и P -предельные графы. В этом смысле настоящая монография не отрицает классическую теорию Clarke-Moreau-Mordukhovich-Rockafellar-Wets, а задаёт её синтетический конечномерный каркас и точно указывает места, где требуются дополнительные аксиомы.

Библиография

- [1] F. W. Lawvere, *Outline of Synthetic Differential Geometry* (лекции и рукописи).
- [2] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 2006.
- [3] R. Lavendhomme, *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry*, Springer, 1996.
- [4] I. Moerdijk, G. E. Reyes, *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer, 1991.
- [5] J. Penon, *Infinitésimaux et intuitionnisme*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques 22 (1981).
- [6] J. Penon, *De l'infinitésimal au local* (Thèse de Doctorat d'État), Diagrammes S13 (1985), 1-191.
- [7] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, 1983; reprint SIAM, 1990.
- [8] J.-J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace hilbertien*, Bull. Soc. Math. France, 1965.
- [9] R. T. Rockafellar, R. J.-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer, 1998.
- [10] B. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation I-II*, Springer, 2006.
- [11] H. H. Bauschke, P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, 2nd ed., Springer, 2017.
- [12] Y. Nesterov, *Introductory Lectures on Convex Optimization*, Springer, 2004.
- [13] Чурилов М. В. 2025. Синтетический Вариационный Анализ. Конструктивная Двойственность, Монотонные Операторы и Геометрия Оптимизации в Гладких Топосах. PREPRINTS.RU. <https://doi.org/10.24108/preprints-3113832>